Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 19, 123–166 (1971)

Bayeslösungen bei mehrstufigen Tests

VOLKER MAMMITZSCH

Inhalt

1. Problemstellung und Hauptergebnisse

Unter einem sequentiellen oder mehrstufigen Test versteht man im Gegensatz zum klassischen oder einstufigen Test ein Entscheidungsverfahren, bei dem zunächst eine Beobachtung (erste Stufe) gemacht und anschließend entschieden wird, ob eine endgültige Entscheidung (Terminalentscheidung) zu treffen oder eine weitere Beobachtung (zweite Stufe) durchzuführen ist. Im letzteren Fall ist dann wiederum entweder eine Terminalentscheidung zu fällen oder erneut zu beobachten, usw. Systematisch wurden sequentielle Tests erstmalig von Wald [17] untersucht. Eine Zusammenfassung neuerer Ergebnisse findet sich in der Monographie von Wetherill [19], die neben einem umfangreichen Literaturverzeichnis zahlreiche praktische Anwendungen mehrstufiger Verfahren enthält. Mit Rücksicht darauf wollen wir uns bei den Literaturangaben auf diejenigen Arbeiten beschränken, deren Ergebnisse explizit benutzt werden.

Wir legen unseren Betrachtungen ein Modell zugrunde, welches von Richter stammt (s. [13]).

(1.1) **Definition.** Gegeben sei eine Grundmenge Ω mit Elementen ω, ein σ-Körper $\mathfrak{F}$ über Ω, sowie die Wahrscheinlichkeitsmaße (Hypothesen) $P_1, \ldots, P_n$ auf $\mathfrak{F}$. Weiter sei gegeben die aufsteigende Folge von σ-Körpern $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{F}_t \subset \cdots \subset \mathfrak{F}_k$ über Ω mit $1 \leqq k \leqq \infty$, sowie die Mengen $\emptyset \neq S(\omega, t) \subset R^n$ (Schadensbereiche) für jedes $\omega \in \Omega$ und $1 \leqq t \leqq k$. Bei $k = \infty$ wird auch $\vec{\infty} \in S(\omega; \infty)$ zugelassen[1].

Dann wird ein k-stufiger Test $\mathscr{T}$ definiert durch

(1) eine disjunkte Zerlegung $\Omega = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$ mit $F_t \in \mathfrak{F}_t$ für alle $1 \leqq t \leqq k$;

(2) eine Abbildung $s\colon \Omega \to R^n \cup \{\vec{\infty}\}$ (Schadensfunktion) derart, daß die Einschränkung $s(\omega; t) = s(\omega)|F_t$ von s auf F_t $\mathfrak{F}_t$-meßbar ist und für $\omega \in F_t$ gilt: $s(\omega; t) \in S(\omega; t)$ bei $1 \leqq t \leqq k$; außerdem ist $P_\nu(s(\omega) = \vec{\infty}) = 0$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Die Menge aller k-stufigen Tests heiße ${}^k\mathfrak{T}$.

[1] $\vec{\infty}$ bezeichne den Vektor mit sämtlichen Komponenten gleich ∞.

Gelegentlich werden wir sagen: $[\mathfrak{F}_t, S(\omega; t), P_1, \ldots, P_n (1 \leqq t \leqq k)]$ ist ein „*Testproblem*".

Wesentlich für die Beurteilung der Güte eines Testes sind die „mittleren Schäden" oder Risiken. Hierzu führen wir als Verknüpfung zwischen x und $y \in R^n$ mit den Komponenten x_ν bzw. y_ν ein

(1.2) **Definition.** $z := x \circ y \in R^n$ mit Komponenten

$$z_\nu := x_\nu y_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Ist A eine $(m \times n)$-Matrix, so schreiben wir anstelle von $A(x \circ y)$ kurz $A x \circ y$.

Außerdem fassen wir die P_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ in Definition (1.1) zu einem vektoriellen Maß $\vec{P}$ zusammen und setzen

(1.3) **Definition.** (1) Zu $\mathscr{T} \in {}^k\mathfrak{T}$ heißt

$$r(\mathscr{T}) := \int_\Omega s(\omega) \circ d\vec{P}$$

der Risikovektor von $\mathscr{T}$, sofern das Integral (eigentlich oder uneigentlich) existiert.

(2) ${}^kR := \{r(\mathscr{T}) : \mathscr{T} \in {}^k\mathfrak{T}\}$ heißt der Risikobereich (aller k-stufigen Tests); $1 \leqq k \leqq \infty$.

Im folgenden wollen wir die Vektoren des R^n als Spaltenmatrizen auffassen. A' bedeute die Transponierte der Matrix A. Weiter bedeute $A < B$ bzw. $A \leqq B$, daß die entsprechenden Beziehungen für die Matrizen A und B komponentenweise gelten. o bezeichne den Nullvektor, 0 die Nullmatrix.

(1.4) **Definition.** Sei $p \geqq o$ aus R^n mit Komponenten p_ν und $\sum_{\nu=1}^n p_\nu = 1$. Dann nennt man $p' r(\mathscr{T})$ das Bayesrisiko von $\mathscr{T}$ zur Vorbewertung (a-priori-Verteilung) p; $\mathscr{T}_0$ heißt Bayeslösung zu p, wenn gilt

$$p' r(\mathscr{T}_0) \leqq p' r(\mathscr{T}) \qquad \text{für alle } \mathscr{T} \in {}^k\mathfrak{T}.$$

Wir wollen nun Aussagen über die Gestalt von ${}^kR$ machen. Insbesondere sind wir daran interessiert, unter welchen Voraussetzungen es zu einer gegebenen Vorbewertung Bayeslösungen gibt und wie sich diese gegebenenfalls konstruieren lassen.

Mehrere Ergebnisse in dieser Richtung liegen bereits vor. Für den Fall, daß sämtliche Hypothesen P_ν bezüglich $\mathfrak{F}_1$ atomlos sind, hat Richter [13] unter Benutzung eines Satzes von Ljapunov [9] die Konvexität von ${}^kR$ bewiesen $(1 \leqq k \leqq \infty)$. ${}^kR$ kann dabei auch leer sein. Ist zusätzlich $k < \infty$, sind ferner sämtliche Schadensbereiche beschränkt und eckenabgeschlossen (vgl. Definition (3.1)) und genügen die Stützfunktionen $g(p; S(\omega; t))$ (s. Definition (2.1)) bei festgehaltenem $p \in R^n$ und $t \leqq k$ gewissen Meßbarkeits- und Integrabilitätsbedingungen, so läßt sich auch die Kompaktheit von ${}^kR$ nachweisen ([13, 7]) und ein Verfahren zur Konstruktion der Extremalpunkte von ${}^kR$ aufstellen. (Der einstufige Fall wurde für nicht von $\omega \in \Omega$ abhängige Schadensbereiche bereits von Blackwell [2] behandelt.) Verzichtet man auf die Atomlosigkeit der Hypothesen, so kann man immer noch zeigen, daß ${}^kR$ alle Extremalpunkte seiner abgeschlossenen konvexen Hülle enthält, und diese Punkte selbst konstruktiv gewinnen ([10], für den einstufigen Fall s. auch [3]). Sind die Schadensbereiche auch noch abgeschlossen, so überträgt sich diese Eigenschaft auf den Risikobereich [11]. In jedem der genannten Fälle hat man also Bayeslösungen, bei Randomisierung sogar multisubjektiv optimale Lösungen (vgl. [12]), und es sind Verfahren zu ihrer Bestimmung bekannt.

Hauptzweck dieser Arbeit ist es, die entsprechenden Sätze für unendlichstufige Tests zu beweisen. Für Alternativtests bei unabhängigen Beobachtungen und fixen Kosten pro Beobachtung ist dies durch Richter [14] geschehen. Weiter sind Ergebnisse vorhanden für den Fall, daß die Beobachtungen gewisse Markov-Eigenschaften besitzen [1]. Außerdem sind zu nennen die Arbeiten von Snell [16], Siegmund [15] und Krieger [8], die sich mit der Existenz von Bayeslösungen im Fall beliebiger Abhängigkeiten der Beobachtungen befassen, ohne jedoch auf Konstruktionsmöglichkeiten einzugehen.

Im allgemeinen Fall abhängiger Beobachtungen und beliebiger Schadensbereiche lassen sich die Aussagen des endlichstufigen Falles nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen zu den Meßbarkeits- und Integrabilitätsbedingungen bezüglich der Schadensbereiche auf den unendlichstufigen übertragen; es braucht unter den bei $k<\infty$ hinreichenden Bedingungen nicht einmal Bayeslösungen zu geben.

Beispiel. Seien

$$S(\omega;t)=S(t)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in R^2\colon x_1^2+x_2^2\leqq 1-\frac{1}{t}\right\} \quad \text{für } t<\infty$$

und $S(\infty)=S(\omega;\infty)=\{o\}$ unabhängig von $\omega\in\Omega$ gewählt bei $\mathfrak{F}_t=\{\emptyset,\Omega\}$ für alle $t\leqq\infty$, dann findet man ${}^kR=S(k)$ für $k<\infty$ und

$${}^\infty R=\bigcup_{t<\infty}S(t)=\{x_1^2+x_2^2<1\},$$

was zwar beschränkt ist, aber für keine Vorbewertung p eine Bayeslösung zuläßt.

Diese Schwierigkeit läßt sich umgehen, wenn man annimmt, daß bei festem ω die Schadensbereiche mit wachsendem t in geeigneter Weise ins Unendliche streben. Dies ist auch praktisch sinnvoll; denn mit wachsender Stufenzahl wachsen auch die Kosten für die Beobachtungen (Stichprobenerhebungen) beliebig hoch an. Indessen bedeutet dies, daß ${}^\infty R$ Vektoren mit beliebig großen Komponenten enthält, die Beschränktheit sich also nicht wie in [11] von den Schadensbereichen auf den Risikobereich überträgt. Es liegt deshalb nahe, die Beschränktheitsforderung von vornherein auch für die Schadensbereiche aufzugeben. Für die Berechnung von Bayeslösungen kommen ohnehin nur solche Schadensfunktionen in Frage, deren Komponenten „klein" sind; „hinten" liegende Punkte der Schadensbereiche sind statistisch nicht interessant. Auf der anderen Seite nimmt bei unbeschränkten Schadensbereichen die zugehörige Stützfunktion für gewisse p den Wert $-\infty$ an. Wir müssen daher die üblichen Meßbarkeits- und Integrabilitätsforderungen modifizieren.

Zu diesem Zweck definieren wir in Paragraph 2 zunächst einen geeigneten „interessanten" Teil einer abgeschlossenen konvexen Menge, die „vordere Hülle", und betrachten zwei Klassen von Extremalpunkten, die „vorderen“ bzw. „streng vorderen“ Extremalpunkte, die eng damit zusammenhängen.

Mit deren Hilfe beweisen wir im dritten Abschnitt für endliches k: Enthalten die $S(\omega; t)$ für alle $\omega \in \Omega$, $1 \leqq t \leqq k$ sämtliche vorderen Extremalpunkte ihrer abgeschlossenen konvexen Hülle und genügt die Stützfunktion $h(p; \omega; t)$ der vorderen Hülle $H(\omega; t)$ der abgeschlossenen konvexen Hülle von $S(\omega; t)$ den üblichen Meßbarkeits- und Integrabilitätsbedingungen, so enthält auch ${}^kR$ sämtliche vorderen Extremalpunkte seiner abgeschlossenen konvexen Hülle. Weiter werden notwendige und hinreichende Bedingungen an die Zerlegung und Schadensfunktion eines Testes $\mathscr{T}_0$ aufgestellt dafür, daß $r(\mathscr{T}_0)$ gerade vorderer Extremalpunkt von ${}^kR$ ist, und ein Verfahren zur Bestimmung derartiger Tests, die bei passendem $p \geqq o$ insbesondere Bayeslösungen sind, angegeben.

Der vierte Paragraph bringt für den Fall $k = \infty$ die Formulierung und ausführliche Diskussion der angekündigten Bedingungen, die gewährleisten, daß die Schadensbereiche $S(\omega; t)$ bei wachsendem t ins Unendliche streben.

Schließlich zeigen wir im letzten Paragraphen für unendliches k: Gelten die oben genannten Voraussetzungen des Abschnittes 3 sowie die Zusatzbedingung

$$\lim_t \inf h(e_\nu; \omega; t) = +\infty$$

P_ν-fast überall mit

$$\int_\Omega \inf_t h(e_\nu; \omega; t)\, dP_\nu > -\infty \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei e_ν den ν-ten Basisvektor bedeute, so enthält ${}^kR$ alle streng vorderen Extremalpunkte seiner abgeschlossenen konvexen Hülle. Es werden wieder notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß ein Test $\mathscr{T}_0$ zu einem streng vorderen Extremalpunkt von ${}^kR$ gehört. Unter der weiteren Einschränkung, daß $H(\omega; t)$ nicht zu stark gegen Unendlich strebt, wird auch ein Verfahren zur Berechnung von Bayeslösungen angegeben.

2. Einige Hilfsmittel aus der Theorie der konvexen Mengen

In diesem Paragraphen sollen einige Sätze über konvexe Mengen hergeleitet werden, die für die späteren Überlegungen wichtig sind.

Es sei M eine beliebige Teilmenge des n-dimensionalen euklidischen Raumes R^n. Mit M^k bzw. M^a bezeichnen wir ihre konvexe bzw. (euklidisch) abgeschlossene Hülle. Es ist dann $M^{ka} := (M^k)^a$ die kleinste abgeschlossene und konvexe Menge, die M enthält.

Der Menge $M \neq \emptyset$ zugeordnet ist die Stützfunktion $g(p; M)$, d.h. eine Abbildung $g: R^n \to R^1 \cup \{-\infty\}$ gemäß

(2.1) **Definition.**

$$g(p; M) := \inf(p'x : x \in M) \qquad \text{für alle } p \in R^n \text{ bei } M \neq \emptyset,$$

$$g(p; \emptyset) := +\infty \qquad \text{für alle } p \in R^n.$$

Eine reelle Funktion f auf dem konvexen Definitionsbereich D nennen wir konkav, wenn sie für jedes reelle β mit $0 < \beta < 1$ und beliebige $x_1, x_2 \in D$ der Ungleichung

$$f(\beta x_1 + (1-\beta) x_2) \geqq \beta f(x_1) + (1-\beta) f(x_2)$$

genügt. Ist ferner D ein konvexer Kegel, so nennen wir f positiv homogen, wenn

$$f(\beta x) = \beta f(x) \qquad \text{für jedes } \beta \geqq 0$$

gilt. Schließlich bezeichnen wir f als halbstetig nach oben, wenn für jedes $x \in D$ gilt

$$\limsup_{y \to x} f(y) = f(x).$$

Damit können wir als wesentliche Eigenschaften der Stützfunktion festhalten

(2.2) **Satz.** *Die Stützfunktion $g(p; M)$ ist bei $M \neq \emptyset$ eine konkave, positiv homogene und nach oben halbstetige Funktion. Umgekehrt ist eine reelle Funktion f auf R^n mit den genannten Eigenschaften die Stützfunktion der Menge*

$$M := \{x \in R^n \colon p' x \geqq f(p) \text{ für alle } p \in R^n\}.$$

Zum *Beweis* vergleiche man etwa in [18] die Sätze (2.2), (2.6) und (2.7).

(2.3) **Satz.** *Seien N, M, M_i $(i \in I)$ Teilmengen von R^n, dann gilt:*

(1) *Aus $M \subset N$ folgt $g(p; M) \geqq g(p; N)$ für alle $p \in R^n$,*

(2) *$g(p; M) = g(p; M^a) = g(p; M^k)$ für alle $p \in R^n$,*

(3) *$g(p; M) = g(p; N)$ für alle $p \in R^n$ ist äquivalent mit $M^{ka} = N^{ka}$,*

(4) *$g(p; \bigcup_{i \in I} M_i) = \inf_{i \in I} g(p; M_i)$ für alle $p \in R^n$.*

Der *Beweis* findet sich in [18], Sätze (2.3) und (2.8).

Bemerkung. Es besteht mithin eine eineindeutige Beziehung zwischen den Stützfunktionen und den abgeschlossenen konvexen Mengen des R^n.

Gemäß (1.4) erfordert die Bestimmung einer Bayeslösung, zu einer gegebenen Teilmenge $K \neq \emptyset$ des R^n und gegebenem $p \in R^n$ ein x_0 aus K zu finden derart, daß gilt

$$p' x_0 = g(p; K). \tag{$*$}$$

Der Vektor p steht dabei für eine Wahrscheinlichkeitsbelegung der Hypothesen $P_1, \ldots, P_n$; es ist daher nur der Fall $p \geqq o$ zu betrachten. Daraus folgt, daß als Lösungen x_0 in der Gleichung $(*)$ nur solche x in Betracht kommen, die in einer noch zu präzisierenden Weise „vorn" liegen. x-Werte mit $p' x > g(p; K)$ bei $p \geqq o$ sind für statistische Aussagen erst in zweiter Linie interessant.

Wir wollen nun einen „vorderen" Teil von K definieren, zuvor aber noch einige Voraussetzungen bezüglich K machen, die in unserem Fall zweckmäßig sind. Damit die Gleichung $(*)$ eine Lösung hat, darf K nicht leer sein; also $g(p; K) < \infty$. Weiter darf für die in Frage kommenden p-Werte die rechte Seite von $(*)$ nicht gleich $-\infty$ werden. Da schließlich die Lösungen x_0 stets Randpunkte der konvexen Hülle K^k sind, wollen wir nur abgeschlossene und konvexe K betrachten.

(2.4) *Voraussetzung.* (1) K ist abgeschlossen und konvex,

(2) $g(p; K) < \infty$ für alle $p \in R^n$,

(3) $g(p; K) > -\infty$ für alle $p > o$.

Wir merken noch an, daß $g(p; K)$ als konkave und für $p > o$ endliche Funktion in jedem Punkt $p > o$ stetig ist.

Nunmehr setzen wir

(2.5) **Definition.** Sei $p > o$ und K gemäß (2.4), dann sagen wir

(1) $K(p) := \{x \in K: p' x = g(p; K)\}$ heißt „p-Randmenge von K“,

(2) $V(K) := \bigcup_{p > o} K(p)$ heißt „streng vorderer Rand von K“,

(3) $H(K) := V(K)^{ka}$ heißt „vordere (konvexe) Hülle von K“.

Wir wollen jetzt die Stützfunktionen der Mengen in (2.5) bestimmen, wobei dieselben wegen (2.3) für $V(K)$ und $H(K)$ identisch sind. Dazu benötigen wir zwei Hilfssätze aus [18], die hier ohne Beweis wiedergegeben seien (vgl. [18], Paragraph 2).

(2.6) **Hilfssatz.** *Es sei $K_i \subset R^n$ $(i \in I)$ eine Familie nicht-leerer abgeschlossener konvexer Mengen mit Stützfunktionen $g_i(p)$. Für jedes $p \in R^n$ definiert man die Funktion*

$$l(p) := \sup \left(\sum_{\mu=1}^{m} g_{i_\mu}(p_\mu) \colon i_\mu \in I,\ m \text{ natürliche Zahl},\ p_\mu \in R^n \text{ mit } \sum_\mu p_\mu = p \right).$$

Dann gilt

(1) *Gibt es ein $i_0 \in I$ und einen Punkt $p_0 \in R^n$ derart, daß $g_{i_0}(p_0) > -\infty$ und $g_{i_0}(p)$ im Punkt $p = p_0$ stetig ist, so folgt aus $l(p_0) < \infty$ die Beziehung*

$$D := \bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$

(2) *Sei $L := \{p \in R^n: l(p) > -\infty\}$, dann ist*

$$l(p) = g(p; D) \quad \text{für alle inneren Punkte von } L.$$

(2.7) **Hilfssatz.** *Ist $K_1 \neq \emptyset$ abgeschlossen und konvex und bei festem $p_0 \in R^n$ die Menge $K_2 := \{x \in R^n: p_0' x = g_1(p_0)\}$, so gilt für $l(p)$ gemäß (2.6)*

$$l(p) = \lim_{\nu \to \infty} \big(g_1(p + \nu p_0) - \nu g_1(p_0)\big).$$

Nunmehr berechnen wir der Reihe nach die Stützfunktionen von $K(p)$ bei $p > o$, $V(K)$ und $H(K)$.

(2.8) **Satz.** $K(p) \neq \emptyset$ *für alle* $p > o$.

Beweis. Sei $p_0 > o$ beliebig gewählt. $K(p_0)$ ist der Durchschnitt von K mit der Hyperebene

$$H := \{x \in R^n: p_0' x = g(p_0; K)\}.$$

K und H sind abgeschlossene konvexe Mengen.

Da die Funktion $g(p; K)$ an der Stelle $p = p_0$ endlich und stetig ist, hat man nach (2.6) und (2.7) lediglich

$$l(p_0) = \lim_{\nu \to \infty} \big(g(p_0 + \nu p_0) - \nu g(p_0)\big) < \infty$$

zu zeigen, was aufgrund der Homogenität der Stützfunktion klar ist.

(2.9) **Satz.** (1) $g(p_0; K(p_0)) = g(p_0; K)$ *für alle* $p_0 > o$,

(2) $g(p; K(p_0)) = \lim_{\nu\to\infty} (g(p+\nu p_0; K) - \nu g(p_0; K))$ *für alle* $p \in R^n$, $p_0 > o$ *beliebig.*

Beweis. (1) ist klar.

(2) Um den zweiten Teil von (2.6) anwenden zu können, zeigen wir, daß $l(p) = \lim_{\nu\to\infty} (g(p+\nu p_0; K) - \nu g(p_0; K)) > -\infty$ für alle $p \in R^n$ bei festem $p_0 > o$.

Zu fest gewähltem $p \in R^n$ und $p_0 > o$ existiert eine natürliche Zahl ν_0 derart, daß $p + \nu_0 p_0 > o$. Damit schätzen wir ab

$$\begin{aligned} l(p) &= \lim_{\nu\to\infty} (g(p+\nu p_0; K) - \nu g(p_0; K)) \\ &= \lim_{\nu\to\infty} (g((p+\nu_0 p_0) + (\nu-\nu_0) p_0; K) - (\nu-\nu_0) g(p_0; K)) - \nu_0 g(p_0; K) \\ &\geqq \limsup_{\nu\to\infty} (g(p+\nu_0 p_0; K) + (\nu-\nu_0) g(p_0; K) - (\nu-\nu_0) g(p_0; K)) - \nu_0 g(p_0; K) \\ &= g(p+\nu_0 p_0; K) - \nu_0 g(p_0; K) > -\infty, \end{aligned}$$

was (2) beweist.

Eine einfache Folgerung aus dem Beweis zu Satz (2.9) ist

(2.10) **Satz.** $K(p_0)$ *ist nicht leer, kompakt und konvex für alle* $p_0 > o$.

Beweis. Abgeschlossenheit und Konvexität sind klar; $K \neq \emptyset$ ist richtig zufolge (2.8). Die Beschränktheit von $K(p_0)$ folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die Stützfunktion $g(p; K(p_0))$ für alle $p \in R^n$ endlich ist.

(2.11) **Satz.** $H(K)$ *besitzt die Stützfunktion*

$$g(p; H(K)) = \inf_{p_0 > o} \left(\lim_{\nu\to\infty} (g(p+\nu p_0; K) - \nu g(p_0; K)) \right).$$

Beweis. Folge von (2.3) und (2.9).

(2.12) **Satz.** $g(p; H(K)) = g(p; K)$ *für* $p > o$.

Beweis. Folgt aus $K(p) \subset H(K) \subset K$ und Satz (2.9), Behauptung (1).

Da bei $p_0 > o$ und beliebigem $p \in R^n$ für hinreichend großes ν stets $p + \nu p_0 > o$, hängt die Stützfunktion von $H(K)$ gemäß Satz (2.11) nur von den Werten ab, die die Stützfunktion $g(p; K)$ für Werte $p > o$ annimmt. Umgekehrt wird $g(p; K)$ auf $\{p > o\}$ zufolge (2.12) durch die Werte von $g(p; H(K))$ festgelegt. Das erlaubt den

(2.13) **Satz.** *Genügen* K_1 *und* K_2 *der Voraussetzung* (2.4), *so ist*

(1) $H(K_1) = H(K_2)$ *genau dann, wenn* $g(p; K_1) = g(p; K_2)$ *für alle* $p > o$,

(2) $g(p; K_1) = g(p; K_2)$ *für alle* $p > o$ *genau dann, wenn* $g(p; K_1) = g(p; K_2)$ *für alle* $p \geqq o$.

Beweis. (1) folgt aus (2.11) und (2.12).

(2) Es genügt zu zeigen: Bei beliebigem festen $p_0 > o$ ist für $p \geqq o$, aber $p \not> o$

$$g(p; K_1) = \lim_{\alpha \uparrow 1} g(\alpha p + (1-\alpha) p_0; K_1).$$

In der Tat: Weil $g(p; K_1)$ auf R^n nach oben halbstetig ist, gilt

$$\limsup_{\alpha \uparrow 1} g(\alpha p + (1-\alpha) p_0; K_1) \leqq g(p; K_1).$$

Andererseits folgt aus der Endlichkeit von $g(p_0; K_1)$

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} (\alpha g(p; K_1) + (1-\alpha) g(p_0; K_1)) = g(p; K_1).$$

Das bedeutet insgesamt

$$\begin{aligned} g(p; K_1) &\leqq \liminf_{\alpha \nearrow 1} g(\alpha p + (1-\alpha) p_0; K_1) \\ &\leqq \limsup_{\alpha \nearrow 1} g(\alpha p + (1-\alpha) p_0; K_1) \leqq g(p; K_1), \end{aligned}$$

wie behauptet.

Um eine bessere Übersicht über alle konvexen abgeschlossenen Mengen mit gleicher vorderer (konvexer) Hülle zu bekommen, definieren wir

(2.14) **Definition.** Genügt K der Voraussetzung (2.4), dann heißt die Menge

$$M(K) := \{x \in R^n \colon \text{zu } x \text{ gibt es ein } y \in K \text{ mit } y \leqq x\}$$

„maximale (vordere konvexe) Hülle von K".

(2.15) **Satz.** (1) $H(K) \subset K \subset M(K)$,

(2) $M(K)$ *ist abgeschlossen und konvex,*

(3) $g(p; M(K)) = g(p; H(K))$ *für alle* $p \geqq o$,

(4) $g(p; M(K)) = -\infty$ *für alle* $p \ngeqq o$,

(5) $M(K)$ *erfüllt* (2.4).

Beweis. (1) ist klar.

(2) a) Abgeschlossenheit: Sei $x_\nu \in M(K)$ eine Folge, die für $\nu \to \infty$ gegen x_0 konvergiert. Zu x_ν wählen wir $y_\nu \in K$ mit $x_\nu \geqq y_\nu$. Es bezeichne e den Vektor mit sämtlichen Komponenten gleich 1. O.B.d.A. können wir $y_\nu \leqq x_\nu \leqq x_0 + e$ annehmen, die Folge y_ν ist also (komponentenweise) nach oben beschränkt. Umgekehrt ist aufgrund von $-\infty < g(e; K) \leqq e' y_\nu$ für alle ν die Folge y_ν auch nach unten beschränkt. Es gibt demnach eine konvergente Teilfolge der y_ν mit einem Grenzwert $y_0 \in K$, für welchen $y_0 \leqq x_0$, also $x_0 \in M(K)$ folgt.

b) Konvexität. Zu $x_1, x_2 \in M(K)$ gibt es $y_1, y_2 \in K$ mit $y_i \leqq x_i$. Für $0 < \alpha < 1$ gilt weiter

$$\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \geqq \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in K$$

und folglich $\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in M(K)$.

(3) Sei $p \leqq o$. Für $y \leqq x$ ist auch $p' y \leqq p' x$, und es ergibt sich aus (2.12) und (2.13)

$$\begin{aligned} g(p; H(K)) = g(p; K) &= \inf(p' y \colon y \in K) \\ &= \inf(p' x \colon x \in M(K)) = g(p; M(K)), \end{aligned}$$

wie behauptet.

(4) Ist eine Komponente von p negativ, so findet man ein x aus $M(K)$ derart, daß $p' x$ beliebig klein wird, indem man bei irgendeinem $y \in K$ die entsprechende Komponente hinreichend groß macht und die übrigen unverändert läßt. Damit erhält man

$$g(p; M(K)) = \inf(p' x \colon x \in M(K)) = -\infty.$$

(5) Ist nach dem Vorangegangenen trivial.

(2.16) **Satz.** *Bei* K, L *gemäß* (2.4) *gilt* $H(K)=H(L)$ *genau dann, wenn* $H(K)\subset L\subset M(K)$.

Beweis. Hat man $H(K)\subset L\subset M(K)$, so ist

$$g(p;H(K))\geqq g(p;L)\geqq g(p;M(K)) \qquad \text{für alle } p\in R^n.$$

Speziell bekommt man wegen (2.15), Teil 3 und Satz (2.12) für $p>o$

$$g(p;K)=g(p;H(K))=g(p;L)=g(p;M(K));$$

infolge des ersten Teiles von (2.13) also $H(K)=H(L)$.

Umgekehrt folgt aus $H(K)=H(L)$ vermöge (2.12) und (2.13)

$$g(p;K)=g(p;L)=g(p;H(K)) \qquad \text{für alle } p\geqq o.$$

Aus (2.15) ergibt sich damit

$$g(p;M(K))\leqq g(p;L) \qquad \text{für alle } p\in R^n.$$

Beachtet man noch $H(L)\subset L$, so folgt schließlich aus (2.15) und der Bemerkung nach (2.3)

$$H(K)=H(L)\subset L\subset M(K).$$

Bemerkung. Nach (2.16) ist $H(K)$ die kleinste und $M(K)$ die größte abgeschlossene konvexe Menge mit derselben vorderen Hülle wie K selbst.

(2.16*) **Korollar.** $H(H(K))=H(K)=H(M(K))$.

Analog zum Satz (2.12) findet man

(2.17) **Satz.** *Bei* L *und* K *gemäß* (2.4) *ist* $M(K)=M(L)$ *genau dann, wenn* $H(K)\subset L\subset M(K)$.

Beweis folgt unmittelbar durch sukzessive Anwendung der Sätze (2.15), (2.12) und (2.13).

Bemerkung. Nach (2.17) ist $H(K)$ die kleinste und $M(K)$ die größte abgeschlossene konvexe Menge mit derselben maximalen Hülle wie K selbst.

(2.17*) **Korollar.** $M(H(K))=M(K)=M(M(K))$.

Für die spätere Anwendung ist es erforderlich, $g(p;H(K))$ mit Hilfe abzählbarer Operationen aus $g(p;K)$ zu gewinnen. Sei zu diesem Zweck Σ die Menge aller $p>o$ mit rationalen Komponenten, dann gilt

(2.18) **Satz.** *Genügt* K *der Voraussetzung* (2.4), *so berechnet sich die Stützfunktion von* $H(K)$ *für alle* $p\in R^n$ *zu*

$$g(p;H(K))=\inf_{p_0\in\Sigma}\lim_{\nu\to\infty}\left(g(p+\nu p_0;K)-\nu g(p_0;K)\right).$$

Beweis. 1. Es bezeichne $f(p)$ die rechte Seite der Gleichung. Definiert man

$$F:=\Big(\bigcup_{p_0\in\Sigma}K(p_0)\Big)^{ka},$$

so gilt $g(p;F)=f(p)$ zufolge (2.3) und (2.9).

Weiter hat man wegen $F \subset H(K)$:

$$-\infty < g(p; K) = g(p; H(K)) \leqq f(p) \qquad \text{für alle } p > o,$$

sowie

$$g(p; H(K)) \leqq f(p) \qquad \text{für alle } p \in R^n.$$

2. Aus $K(p_0) \subset K$ folgt mit (2.9) für alle $p, p_0 \in \Sigma$

$$g(p; K(p_0)) \geqq g(p; K) = g(p; K(p)).$$

Das führt zu

$$g(p; H(K)) = g(p; K(p)) = \inf_{p_0 \in \Sigma} g(p; K(p_0)) = f(p) \qquad \text{für alle } p \in \Sigma.$$

Auf $p > o$ sind aber $f(p)$ und $g(p; H(K))$ endliche und damit als Stützfunktionen auch stetige Funktionen; also

$$g(p; H(K)) = f(p) \qquad \text{für alle } p > o,$$

was nach (2.13)

$$H(F) = H(H(K)) = H(K)$$

nach sich zieht. Wegen der trivialen Beziehung

$$H(F) \subset F \subset H(K)$$

ist somit

$$F = H(K),$$

und die entsprechenden Stützfunktionen stimmen überein.

Zur Berechnung der Extremalpunkte einer konvexen Menge K des R^n ist folgende Definition zweckmäßig

(2.19) **Definition.** (1) Es bezeichne „$\overset{E}{<}$“ die lexikographische Ordnung im R^n; $E\text{-min}(x_1, \ldots, x_m)$ bedeute das lexikographisch kleinste Element der Menge $\{x_1, \ldots, x_m\}$.

(2) Sei A eine $(m \times n)$-Matrix und $x, y \in R^n$, dann sei $x \overset{A}{<} y$ gleichbedeutend mit $A x \overset{E}{<} A y$.

Die Anordnungsrelation „$\overset{A}{<}$“ ist linear; hat A den Rang n, so gilt ferner: Aus $x \overset{A}{<} y$ und $y \overset{A}{<} x$ folgt $x = y$.

Für $K \subset R^n$ definieren wir

(2.20) **Definition.** $x_A \in K$ heißt A-Ecke von K, wenn $x_A \overset{A}{<} x$ für alle $x \in K$;

und bemerken dazu

(2.21) **Satz.** (1) *Bei A mit* $\operatorname{rg}(A) = n$ *ist die A-Ecke eindeutig bestimmt.*

(2) *Bei konvexem $K \subset R^n$ gilt:*

Ist x Extremalpunkt von K, so ist x A-Ecke von K für mindestens eine Matrix A mit $\operatorname{rg}(A) = n$. *Ist umgekehrt x die A-Ecke von K bei* $\operatorname{rg}(A) = n$, *so ist x auch ein Extremalpunkt von K.*

Unter den Extremalpunkten zeichnen wir zwei Klassen aus.

(2.22) **Definition.** (1) x heißt streng vorderer Extremalpunkt von $K \subset R^n$, wenn x A-Ecke von K ist mit $A > 0$ und $\mathrm{rg}(A) = n$.

(2) x heißt vorderer Extremalpunkt von $K \subset R^n$, wenn x A-Ecke von K ist mit $A \geqq 0$ und $\mathrm{rg}(A) = n$.

Eine Rechtfertigung dieser Terminologie wird durch den folgenden Satz gegeben.

(2.23) **Satz.** *Genügt K der Voraussetzung* (2.4), *so ist x genau dann streng vorderer Extremalpunkt von K, wenn x Extremalpunkt von K ist und im streng vorderen Rand $V(K)$ liegt.*

Beweis. Die Notwendigkeit ist offensichtlich. Sei also x Extremalpunkt, d.h. A-Ecke von K mit $\mathrm{rg}(A) = n$, sowie $x \in V(K)$, dann gilt für ein geeignetes $p_0 \in R^n$ mit $p_0 > o$: $p'_0 x \leqq p'_0 y$ für alle $y \in K$. Demnach ist $Bx \overset{E}{<} By$ für alle $y \in K$, wobei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} p'_0 \\ A \end{pmatrix}$$

den Rang n hat. Addiert man nun bei B ein genügend großes Vielfaches der ersten Zeile zu jeder folgenden, so erhält man eine Matrix $C > 0$ mit $\mathrm{rg}(C) = n$ und $Cx \overset{E}{<} Cy$ für alle $y \in K$, wie verlangt war.

Für beliebiges K braucht bei gegebener Matrix A nicht notwendig immer eine A-Ecke zu existieren. Man hat jedoch den

(2.24) **Satz.** *Ist $K \neq \emptyset$ kompakt und konvex, dann gibt es zu jeder Matrix A eine A-Ecke von K.*

Allgemeiner läßt sich konstatieren

(2.25) **Satz.** *Genügt K der Voraussetzung* (2.4) *und ist $A > 0$,* dann exsitiert eine *A-Ecke von K.*

Beweis. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} > 0,$$

dann ist die Randmenge $K(a_1) \neq \emptyset$, sowie kompakt und konvex gemäß (2.10). Somit existiert eine B-Ecke von $K(a_1)$, wobei B aus den Zeilen $a'_2, \ldots, a'_m$ bestehe (sofern überhaupt $m > 1$). Es gilt dabei

$$\begin{aligned} a'_1 x &\leqq a'_1 y && \text{für alle } y \in K, \\ Bx &\overset{E}{<} By && \text{für alle } y \in K \cap \{z : a'_1 x = a'_1 z\}, \end{aligned}$$

und x ist A-Ecke von K.

Im Gegensatz dazu braucht bei $A \geqq 0$ eine A-Ecke nicht zu existieren. Man betrachte etwa folgendes

Beispiel. Sei
$$K=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2\colon x\,y\geqq 1;\ x>0, y>0\right\}.$$
K erfüllt die Voraussetzung (2.4), doch gibt es zur Einheitsmatrix E keine E-Ecke.

Zwischen den vorderen Extremalpunkten einer Menge K und denen ihrer vorderen Hülle besteht ein einfacher Zusammenhang.

(2.26) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (2.4) *ist x genau dann vorderer Extremalpunkt von K, wenn x vorderer Extremalpunkt von $H(K)$ ist.*

Beweis. 1. Sei $x\in K$ die A-Ecke von K mit $A\geqq 0$ und $\operatorname{rg}(A)=n$. Wäre $x\notin H(K)$, so gäbe es wegen $K\subset M(K)=M(H(K))$ ein $y\in H(K)$ mit $y\leqq x$, aber $y\neq x$. Dazu hat man infolge $A\geqq 0$ die Beziehung $Ay\leqq Ax$, erst recht also $Ay\overset{E}{<}Ax$, während andererseits $Ax\overset{E}{<}Ay$ gilt, was $y=x$ nach sich zieht und einen Widerspruch ergibt. Somit ist $x\in H(K)$ und als Extremalpunkt von K auch ein solcher von $H(K)\subset K$.

2. Sei umgekehrt x die A-Ecke von $H(K)$, wobei $A\geqq 0$ und $\operatorname{rg}(A)=n$. Wäre nun x nicht A-Ecke von K, so existierte ein $y\in K$ mit $y\overset{A}{<}x$ und $y\neq x$. Wie unter 1. ließe sich zu y ein z aus $H(K)$ finden derart, daß $z\leqq y$, also auch $z\overset{A}{<}y$. Insgesamt liefert dies $z\overset{A}{<}y\overset{A}{<}x$ mit $z\neq x$, da sonst $y=x$ wäre. Es gilt also $z\overset{A}{<}x$ mit $z\neq x$ und $z\in H(K)$, was nicht sein kann, da x A-Ecke von $H(K)$ ist. Damit ist auch die Umkehrung bewiesen.

(2.26*) **Korollar.** *Bei $A\geqq 0$ mit $\operatorname{rg}(A)=n$ und K gemäß* (2.4) *gilt: x ist die A-Ecke von K, wenn und nur wenn x auch die A-Ecke von $H(K)$ ist.*

Nur um keine falschen Vorstellungen aufkommen zu lassen, beweisen wir den nächsten

(2.27) **Satz.** *K genüge* (2.4)*; dann gilt:*

(1) *Nicht jeder Extremalpunkt von K muß in $H(K)$ liegen.*

(2) *Jeder Extremalpunkt von $H(K)$ liegt zwar in K, muß aber nicht Extremalpunkt sein.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Angeben eines Beispiels, auf das mich in einem anderen Zusammenhang Herr W. Fenchel aufmerksam machte.

Wir wählen im R^3 die Punkte
$$a_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$
und den Kreisbogen
$$B=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\colon z=0;\ x^2+y^2=1;\ x\leqq 0, y\leqq 0\right\}.$$

Es sei $K=(B\cup\{a_1,a_2\})^k$, dann ist K kompakt und konvex und (2.4) ist erfüllt. Weiter sieht man $H(K)=(B\cup\{a_2\})^k$. Extremalpunkte von K sind a_1 und a_2, sowie alle Punkte auf B mit Ausnahme von $a_3=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$. Dagegen besteht die Menge der Extremalpunkte von $H(K)$ aus a_1 und sämtlichen Punkten von B einschließlich des Punktes a_3.

Im Spezialfall $K=M(K)$ läßt sich (2.26) noch verschärfen.

(2.28) **Satz.** *K erfülle (2.4). Ist dann x Extremalpunkt von $M(K)$, so ist x auch Extremalpunkt von $H(K)$ und K.*

Beweis. Wir zeigen, daß $M(K)$ überhaupt nur vordere Extremalpunkte besitzt; daraus folgt dann mittels Satz (2.26) und $H(K)=H(M(K))$ unmittelbar die Behauptung.

Sei nun $x\overset{A}{<}y$ für alle $y\in M(K)$, und A mit den Zeilen $a_1',\ldots,a_m'$ habe den Rang n. Wegen (2.22) genügt es zu zeigen, daß wir sämtliche $a_\mu\geqq o$ wählen können $(\mu=1,\ldots,m)$.

Definitionsgemäß ist $a_1'x=g(a_1;M(K))$. Deshalb ist $a_1\geqq o$; denn andernfalls wäre $g(a_1;M(K))=-\infty$, was ausgeschlossen ist. Durch Addition geeigneter Vielfacher von a_1' zu den übrigen Zeilen von A läßt sich erreichen, daß bei diesen alle die Komponenten positiv werden, die auch bei a_1 positiv sind. Für die abgeänderte Matrix A^* gilt wieder $\operatorname{rg}(A^*)=n$ und

$$x\overset{A^*}{<}y \qquad \text{für alle } y\in M(K).$$

Nehmen wir nun an, a_2^* besitze eine negative Komponente. Die entsprechende Komponente in $a_1=a_1^*$ ist dann gleich Null. Da mit x auch alle $y\geqq x$ zu $M(K)$ gehören, können wir, indem wir die entsprechende Komponente unter Beibehaltung der restlichen Komponenten von x hinreichend groß wählen, ein $y\in M(K)$ finden derart, daß $a_1^{*\prime}x=a_1^{*\prime}y$ und $a_2^{*\prime}x>a_2^{*\prime}y$. Das widerspricht jedoch der Voraussetzung, was $a_2^*\geqq o$ erweist. Iteration dieses Verfahrens liefert schließlich eine Matrix mit nicht-negativen Komponenten und dem Rang n, wie verlangt war.

Die Umkehrung des Satzes (2.28) ist nicht richtig. Betrachtet man wieder das Beispiel in (2.27), so sieht man, daß alle Punkte $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ mit $x=-1$, $y=0$ und $z\geqq-1$ zu $M(K)$ gehören, also weder a_3 noch a_1 Extremalpunkte von $M(K)$ sein können.

Zum Abschluß dieses Paragraphen sei noch auf eine andere Methode, „vorn liegende“ Punkte zu definieren, eingegangen.

Zunächst definieren wir nach Richter [12], S. 276

(2.29) **Definition.** $V_0(K):=V(K)^a$ heißt vorderer Rand von K; K gemäß (2.4).

Weiter setzen wir, einem Vorschlag von Ferguson folgend [4] (man vergleiche auch [20]),

(2.30) **Definition.** $U(K):=\{x\in R^n\colon \{y\colon y\leqq x\}\cap K=\{x\}\}$ heißt unterer Rand von K; K gemäß (2.4).

Es ist natürlich $V_0(K)\subset K$ und $U(K)\subset K$. Die Beziehungen zwischen den Mengen $V(K)$, $V_0(K)$ und $U(K)$ sollen nun studiert werden. Im allgemeinen stimmen vorderer und unterer Rand einer Menge nicht notwendig überein. Das erkennt man etwa am Beispiel in (2.27). Hier ist a_3 Häufungspunkt der in B liegenden Punkte, die mit Ausnahme der Endpunkte sämtlich zu $V(K)$ gehören, und somit zwar ein Element von $V_0(K)$, jedoch nicht von $U(K)$. Der Vollständigkeit halber sei noch festgehalten, daß $V(K)$ weder gleich $V_0(K)$ noch gleich $U(K)$ zu sein braucht. Beides läßt sich wiederum anhand des Beispiels in (2.27) demonstrieren. Dagegen haben wir die Relationen

(2.31) **Satz.** *Gilt* (2.4), *so ist:*

(1) $V(K) \subset V_0(K)$,

(2) $V(K) \subset U(K)$.

Beweis. (1) ist trivial.

(2) Sei $x_0 \in V(K)$, dann gibt es ein $p_0 > o$ mit $p_0' x_0 \leqq p_0' x$ für alle $x \in K$. Ist nun $y \neq x$ und $y \leqq x$, so gilt $p_0' y < p_0' x$, also $y \notin K$.

Als wesentlichstes Ergebnis kann man die Gleichheit der abgeschlossenen konvexen Hüllen des vorderen und des unteren Randes beweisen. Damit haben wir eine zweite Definitionsmöglichkeit für die vordere Hülle in der Hand.

(2.32) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (2.4) *ist*

$$H(K) = V(K)^{ka} = V_0(K)^{ka} = U(K)^{ka}.$$

Beweis. 1. Die erste Gleichung ist die Definition von $H(K)$. Satz (2.31) liefert

$$V(K)^{ka} \subset V_0(K)^{ka} \quad \text{und} \quad V(K)^{ka} \subset U(K)^{ka}.$$

2. Wegen $V(K)^k \supset V(K)$ ist $V(K)^{ka} \supset V(K)^a = V_0(K)$. Weiter ist $V(K)^{ka}$ konvex und abgeschlossen, so daß $V(K)^{ka} \supset V_0(K)^{ka}$ und vermöge 1. die zweite Gleichung folgt.

3. Um die dritte Gleichung zu verifizieren, genügt offenbar der Nachweis von $U(K) \subset H(K)$. In Verfolg eines Widerspruchsbeweises nehmen wir an, es existiere ein $u \in U(K)$, welches nicht zu $H(K)$ gehört. Da aber $u \in K \subset M(K)$, gibt es wegen $M(K) = M(H(K))$ zu u ein $y \in H(K)$ mit $y \leqq u$, $y \neq u$. Das ist wegen $H(K) \subset K$ ein Widerspruch zu Definition (2.30) des unteren Randes.

Eine zusätzliche Definitionsmöglichkeit des unteren Randes, auf die wir später zurückgreifen werden, beinhaltet der folgende

(2.33) **Satz.** *Bei K gemäß* (2.4) *ist u genau dann ein Element von $U(K)$, wenn es eine Matrix A mit den Zeilen $a_\nu' \geqq o'$ $(\nu = 1, \dots, m)$ und $a_m' > o'$ gibt, so daß u eine A-Ecke von K ist.*

Beweis. Daß die angegebene Bedingung hinreichend ist, folgt daraus, daß für jedes $u_1 \leqq u$ mit $u_1 \neq u$ gilt:

$$a_\nu' u_1 \leqq a_\nu' u \quad (\nu = 1, \dots, m) \quad \text{und} \quad a_m' u_1 < a_m' u.$$

Wir nehmen nun an, es sei $u \in U(K)$ gegeben. Da es auf eine Parallelverschiebung von K nicht ankommt, setzen wir o.B.d.A. $u = o$. Die Mengen K und $\{x \leqq o, x \neq o\}$ sind konvex und disjunkt, es gibt daher ein $b_1 \neq o$ mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad b_1' x \leqq b_1' y \quad \text{für alle } x \leqq 0 \text{ und alle } y \in K.$$

b_1 enthält keine negativen Komponenten; denn sonst könnte man, indem man die entsprechenden Komponenten von x klein genug macht, ein $x \leqq o$ mit $b_1' x > 0 = b_1' o$ finden, was wegen $o \in K$ ein Widerspruch zu $(*)$ wäre.

Es sei jetzt L_1 die Menge aller $x \in R^n$ mit verschwindenden Komponenten an denjenigen Stellen, an denen die Komponenten von b_1 positiv sind. Dann steht b_1 senkrecht auf L_1, und es ist $\dim(L_1) < n$. Weiter setzen wir $K_1 := K \cap L_1$, was wieder die Voraussetzung (2.4) erfüllt. Außerdem gilt $K_1 \cap \{x \in L_1 : x \leqq o\} = \{o\}$. Die Menge $\{x \in L_1 : x \leqq o, x \neq o\}$ ist konvex, und folglich gibt es ein $b_2 \neq o$ aus L_1 mit $b_2' x \leqq 0 \leqq b_2' y$ für alle $x \in L_1 \cap \{x \leqq o\}$ und $y \in K_1$. Wie oben schließt man, daß $b_2 \geqq o$ ist.

Weiter definiert man L_2 als Menge aller $x \in L_1$, deren Komponenten an den Stellen verschwinden, an denen b_2 positiv ist, und setzt $K_2 := K \cap L_2$. Dabei ist $\dim(L_2) < n-1$. In derselben Weise wie oben stellt man die Existenz eines $b_3 \geqq o$ aus L_2 sicher mit $b_3' x \leqq b_3' y$ für alle $x \leqq o$ und $y \in K_2$, usw. Man erhält schließlich nach $m \leqq n$ Schritten $L_m = \{o\}$, das Verfahren bricht also nach endlich vielen Schritten ab.

Definiert man die Matrix B mit den Zeilen b_ν' $(\nu = 1, \ldots, m)$, so findet man

$$o = Bu \overset{E}{<} Bx \qquad \text{für alle } x \in K.$$

Setzt man noch

$$a_\nu' = \sum_{i=1}^{\nu} b_i' \qquad (\nu = 1, \ldots, m)$$

und faßt diese Zeilen zur Matrix A zusammen, so erhält man

$$a_\nu \geqq o, \qquad a_m > o$$

und

$$u \overset{A}{<} x \qquad \text{für alle } x \in K.$$

3. Endlichstufige Tests

Wir werden jetzt in Verfolg des eingangs aufgestellten Programms die in 1. erwähnten Sätze für beschränkte Schadensbereiche exakt formulieren und sie anschließend auf unbeschränkte Schäden erweitern. Dazu benötigen wir einige neue Begriffe und Bezeichnungen.

(3.1) **Definition.** Eine Menge $X \subset R^n$ heißt

(1) eckenabgeschlossen, wenn sie alle Extremalpunkte,

(2) vorn eckenabgeschlossen, wenn sie alle vorderen Extremalpunkte,

(3) streng vorn eckenabgeschlossen, wenn sie alle streng vorderen Extremalpunkte

ihrer abgeschlossenen konvexen Hülle enthält.

Weiter führen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $P = \frac{1}{n} \sum_\nu P_\nu$ ein, bezüglich dessen alle P_ν totalstetig sind. Wir dürfen daher schreiben:

(3.2) **Definition.** (1) $d\vec{P}(\omega) = f(\omega; t)\, dP(\omega)$ auf $\mathfrak{F}_t$ für alle $1 \leqq t \leqq k$ mit geeigneten $\mathfrak{F}_t$-meßbaren (vektorwertigen) Funktionen $f(\omega; t) \geqq o$,

(2) $r(\mathscr{T}) = \sum_{t \leqq k} \int_{F_t} s(\omega) \circ f(\omega; t)\, dP$ für $\mathscr{T} \in {}^k\mathfrak{T}$.

Der ν-te Einheitsvektor werde mit e_ν bezeichnet; d.h. e_ν habe die Komponenten $\delta_{\nu\mu}$ für $\nu, \mu = 1, \ldots, n$, wobei $\delta_{\nu\mu}$ das Kroneckersymbol ist.

Wir bemerken, daß eine Menge $X \subset R^n$ genau dann beschränkt ist, wenn die Stützfunktion $g(p; X)$ für alle $p = \pm e_\nu$ endliche Werte annimmt ($\nu = 1, \ldots, n$). Damit formulieren wir die

(3.3) *Voraussetzung.* Es gelten die Voraussetzungen von (1.1) mit $k < \infty$. $S(\omega; t)$ sei eckenabgeschlossen für alle $\omega \in \Omega$ und $t \leqq k$. Bei festem $t \leqq k$ sei die Stützfunktion

$$g(p; \omega; t) := g(p; S(\omega; t))$$

für jedes $p \in R^n$ $\mathfrak{F}_t$-meßbar und für $p = \pm e_\nu$ endlich und P_ν-integrierbar ($\nu = 1, \ldots, n$).

Die folgenden Sätze (3.4), (3.6) und (3.9) sind eine Zusammenfassung der Ergebnisse aus [13, 7] und [10].

(3.4) **Satz.** (1) *Sind alle P_ν atomlos auf $\mathfrak{F}_1$ ($\nu = 1, \ldots, n$), so ist ${}^kR$ konvex.*

(2) *Unter der Voraussetzung* (3.3) *ist ${}^kR$ beschränkt und eckenabgeschlossen, und zu jedem A gibt es eine A-Ecke von ${}^kR$.*

Die folgende Definition dient zur Beschreibung der A-Ecken des Risikobereiches.

(3.5) **Definition.** Zu gegebenem

$$A = \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_l' \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a_1, \ldots, a_l \in R^n$$

sei $A(\omega; t)$ die Matrix mit den Zeilen

$$(a_1 \circ f(\omega; t))', \ldots, (a_l \circ f(\omega; t))', e_1', \ldots, e_n'; \qquad t \leqq k \leqq \infty.$$

Bemerkung. $e_1', \ldots, e_n'$ wurden als Zeilen angefügt, damit $A(\omega; t)$ den Rang n besitzt.

Man hat den

(3.6) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (3.3) *gilt:*

(1) *Für jedes $t \leqq k$ ist bei beliebiger Matrix A die $A(\omega; t)$-Ecke $v(A; \omega; t)$ von $S(\omega; t)$ eine $\mathfrak{F}_t$-meßbare Funktion.*

(2) *Ist der Risikovektor des Testes $\mathscr{T}$ mit der Zerlegung $\Omega = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ und der Schadensfunktion $s(\omega)$ eine A-Ecke von ${}^kR$, so ist $A s(\omega) \circ f(\omega; t) = A v(A; \omega; t) \circ f(\omega; t)$ P-fast auf F_t für alle $t \leqq k$.*

Die noch ausstehende Bestimmung der Zerlegung von Ω eines zur A-Ecke des Risikobereichs gehörigen Tests erfolgt bei $k < \infty$ durch ein Rekursionsverfahren. Wir setzen

(3.7) **Definition.**

$$u(\omega; k) := A v(A; \omega; k) \circ f(\omega; k); \qquad k < \infty,$$

$$u(\omega; t) := E\text{-}\min\left(A v(A; \omega; t) \circ f(\omega; t), \mathscr{E}(u(\omega; t+1) | \mathfrak{F}_t)\right) \qquad \text{für } t < k.$$

Hierin bedeute $\mathscr{E}(\ldots|\mathfrak{F}_t)$ den bedingten Erwartungswert bezüglich des σ-Körpers $\mathfrak{F}_t$, genommen für die Wahrscheinlichkeit P. Dabei denken wir uns eine bestimmte Version ein- für allemal fest gewählt.

Weiter definieren wir die endlichen Mengenfolgen

(3.8) **Definition.**

(1) ${}_lG := \{\omega\colon Av(A;\omega;l)\circ f(\omega;l) \overset{E}{\underset{+}{<}} \mathscr{E}(u(\omega;l+1)|\mathfrak{F}_l)\}$ für $1 \leqq l < k$

$G_t := \bigcup\limits_{l \leqq t} {}_lG$ für $1 \leqq t < k$;

(2) ${}_lH := \{\omega\colon Av(A;\omega;l)\circ f(\omega;l) \overset{E}{<} \mathscr{E}(u(\omega;l+1)|\mathfrak{F}_l)\}$ für $1 \leqq l < k$

$H_t := \bigcup\limits_{l \leqq t} {}_lH$ für $1 \leqq t < k$.

Bemerkung. Offensichtlich ist $G_t \subset H_t$ für alle $t < k$.

Nunmehr können wir sagen

(3.9) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (3.3) *gilt:*

(1) *Ist der Risikovektor des Testes $\mathscr{T}$ mit der Zerlegung $\Omega = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ eine A-Ecke von ${}^kR$, so gilt für alle $t < k$ bis auf P-Nullmengen*

$$G_t \subset F_1 \cup \cdots \cup F_t \quad \textit{und} \quad F_t \subset {}_tH$$

mit G_t, ${}_tH$ aus Definition (3.8).

(2) *Umgekehrt liefert jeder Test mit einer Zerlegung gemäß* (1) *und einer Schadensfunktion $s(\omega)$ gemäß* (3.6), *Teil* (2) *eine A-Ecke von ${}^kR$.*

(3) *Speziell ist $\int\limits_{\Omega} u(\omega;1)\,dP$ mit $u(\omega;1)$ aus* (3.7) *die E-Ecke von $\{Ar\colon r \in {}^kR\}$.*

Bemerkung. Aus (1) folgt weiter $G_t \subset F_1 \cup \cdots \cup F_t \subset H_t$ für alle t.

Wir wollen auch unbeschränkte Schadensbereiche in unsere Betrachtung einbeziehen. Im Hinblick auf Satz (3.4) und darauf, daß Bayeslösungen für strikt positive Vorbewertungen im vorderen Rand der abgeschlossenen konvexen Hülle des Risikobereiches liegen, könnte man zunächst versuchen, in der Voraussetzung (3.3) anstelle der Eckenabgeschlossenheit der Schadensbereiche nur zu verlangen, daß diese vorn eckenabgeschlossen sind, und die Voraussetzung der Endlichkeit von $g(-e_\nu;\omega;t)$ überhaupt fallen zu lassen. Natürlich könnte man dann nur erwarten, daß der Risikobereich vorn eckenabgeschlossen ist. Indessen gehen diese Abschwächungen zu weit. Es kann sogar vorkommen, daß der Risikobereich überhaupt keine Bayeslösungen zuläßt; und dies sogar im einstufigen Fall.

Beispiel. Sei $k=1$ und $n=2$. (Wir unterdrücken den Index $t=1$.) Es sei $\Omega := \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathfrak{F}$ die Potenzmenge von Ω und $P_\nu(\omega_\mu) := \delta_{\nu\mu}$ ($\nu, \mu = 1, 2$). Weiter sei

$$S(\omega_1) := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} > 0\colon x_1 x_2 \geqq 1;\ x_1 \leqq 1 \right\},$$

$$S(\omega_2) := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} > 0\colon x_1 x_2 \geqq 1;\ x_2 \leqq 1 \right\}.$$

$S(\omega)$ ist abgeschlossen und konvex, also nach (3.1) trivialerweise vorn eckenabgeschlossen. Offensichtlich ist $g(p;\omega)$ für alle $p\in R^2$ meßbar; es kann allerdings unendlich werden. Jedoch ist $g(e_\nu;\omega)$ endlich und als Folge davon auch integrierbar bezüglich P_ν für $\nu=1,2$. Die abgeschwächten Voraussetzungen von (3.3) sind also erfüllt. Darüber hinaus haben wir sogar

$$g(-e_1;\omega)=\begin{cases}-1 & \text{für } \omega=\omega_1\\ -\infty & \text{für } \omega=\omega_2\end{cases},\qquad g(-e_2;\omega)=\begin{cases}-\infty & \text{für } \omega=\omega_1\\ -1 & \text{für } \omega=\omega_2\end{cases},$$

was zeigt, daß $g(-e_\nu;\omega)$ eigentlich P_ν-integrabel ist.

Für den zugehörigen Risikobereich ergibt sich elementar

$$R=\left\{\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}: 0<r_1, r_2\leqq 1\right\}.$$

R läßt jedoch keine Bayeslösungen zu.

Wir sehen also, daß man auf die Beschränktheitsbedingung in (3.3) nicht ganz verzichten darf. Wir können sie aber dahingehend abschwächen, daß sie nur für die (statistisch allein interessanten) vorn liegenden Punkte gelten soll:

(3.10) (1) $g(p;\omega;t)>-\infty$ *für* $p>o$.

(2) *Die vordere Hülle* $H(\omega;t):=H((S(\omega;t))^{ka})$ *ist beschränkt für alle* $\omega\in\Omega$ *und* $t\leqq k$.

Aus (2) folgt für die zugehörige Stützfunktion

$$h(p;\omega;t):=g(p;H(\omega;t))>-\infty \qquad \text{für } p=\pm e_\nu \quad (\nu=1,\ldots,n).$$

Mittels der Sätze (2.12) und (2.13) schließen wir, daß dann auch $g(p;\omega;t)>-\infty$ für alle e_ν $(\nu=1,\ldots,n)$, was wegen der Konkavität von g auf $\{p>o\}$ die Bedingung (1) nach sich zieht. Dem Satz (2.11) entnehmen wir

$$(*)\qquad h(p;\omega;t)=\inf_{q>o}\left(\lim_{j\to\infty}\left(g(p+jq;\omega;t)-j\,g(q;\omega;t)\right)\right)$$

für alle $\omega\in\Omega$, $t\leqq k$ und $p\in R^n$.

Damit verlangen wir endgültig

(3.11) *Voraussetzung.* Es gelten die Voraussetzungen von (1.1) mit $k<\infty$. Weiter sei $S(\omega;t)$ vorn eckenabgeschlossen für alle $\omega\in\Omega$ und $t\leqq k$. Bei festem $t\leqq k$ sei die Stützfunktion $g(p;\omega;t)$ für jedes $p>o$ $\mathfrak{F}_t$-meßbar und für $p=e_\nu$ endlich und P_ν-integrierbar; ferner sei die durch die rechte Seite von $(*)$ definierte Funktion $h(p;\omega;t)$ für $p=-e_\nu$ endlich und P_ν-integrabel $(\nu=1,\ldots,n)$.

Wir konstatieren zunächst

(3.12) **Hilfssatz.** *Unter der Voraussetzung* (3.11) *ist* $h(p;\omega;t)$ $\mathfrak{F}_t$*-meßbar für alle* $p\in R^n$ *und für* $p=\pm e_\nu$ P_ν*-integrabel* $(\nu=1,\ldots,n)$ *bei festem* $t\leqq k$.

Beweis. Nur die Meßbarkeit ist zu zeigen, die aber direkt aus (2.18) folgt.

Weiter führen wir der Bequemlichkeit halber zwei neue Begriffe ein.

(3.13) **Definition.** Eine Menge $X \subset R^n$ heißt

(1) vorn beschränkt, wenn ihre Stützfunktion $g(p; X)$ für $p > o$ endlich und die vordere Hülle $H(X^{ka})$ beschränkt ist;

(2) nach unten beschränkt, wenn für passendes $x_0 \in R^n$ die Beziehung $x_0 \leqq x$ für alle $x \in X$ gilt.

Bemerkung. 1. Die Bedingung (1) schließt (2) ein.

2. (3.11) können wir anschaulich wie folgt angeben:

Es gelte (1.1) mit $k < \infty$; $S(\omega; t)$ sei vorn eckenabgeschlossen und nach vorn beschränkt für alle $\omega \in \Omega$ und $t \leqq k$; $H(\omega; t)$ sei kompakt und konvex für alle $\omega \in \Omega$, $t \leqq k$, die zugehörige Stützfunktion $h(p; \omega; t)$ sei bei festem $t \leqq k$ meßbar bezüglich $\mathfrak{F}_t$ für alle $p \in R^n$ und P_ν-integrabel für $p = e_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$).

Wir werden jedoch die alte Formulierung von (3.11) beibehalten, da diese formal schwächer als die neue und folglich leichter zu verifizieren ist.

Analog zu (3.4) läßt sich nun sagen

(3.14) **Satz.** (1) *Sind alle P_ν atomlos auf $\mathfrak{F}_1$ ($\nu = 1, \dots, n$), so ist ${}^kR$ konvex.*

(2) *Unter der Voraussetzung* (3.11) *ist ${}^kR$ vorn beschränkt und vorn eckenabgeschlossen, und zu jedem $A \geqq 0$ gibt es eine A-Ecke von ${}^kR$.*

Zum Beweis brauchen wir die entsprechende Erweiterung von (3.6).

(3.15) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (3.11) *gilt bei beliebiger nicht-negativer Matrix A:*

(1) *Für jedes $t \leqq k$ ist die $A(\omega; t)$-Ecke $v(A; \omega; t)$ der Menge $S(\omega; t)$ eine $\mathfrak{F}_t$-meßbare Funktion.*

(2) *Ist der Risikovektor des Testes $\mathscr{T}$ mit der Zerlegung $\Omega = F_1 \cup \dots \cup F_k$ und der Schadensfunktion $s(\omega)$ eine A-Ecke von ${}^kR$, so ist $As(\omega) \circ f(\omega; t) = Av(A; \omega; t) \circ f(\omega; t)$ P-fast auf F_t für alle $t \leqq k$.*

Beweis von Satz (3.15). (a) Ersetzen wir in (1.1) die Mengen $S(\omega; t)$ durch die neuen Schadensbereiche $H(\omega; t)$, so erhalten wir ein neues Testproblem. Die sich darauf beziehenden Größen werden wir durch den unteren Index H kennzeichnen.

$H(\omega; t)$ ist beschränkt und abgeschlossen, insbesondere also eckenabgeschlossen; außerdem ist wegen Hilfssatz (3.12) die Stützfunktion $h(p; \omega; t)$ von $H(\omega; t)$ $\mathfrak{F}_t$-meßbar für alle $p \in R^n$. Mithin gelten die Sätze (3.4), (3.6) und (3.9).

(b) Aus der Beziehung $A(\omega; t) \geqq 0$ und dem Korollar (2.26*) folgt: Bei $A \geqq 0$ ist $v_H(A; \omega; t) = v(A; \omega; t) \in S(\omega; t)$ für alle $\omega \in \Omega$, $t \leqq k$.

(c) Mit (a) und (b) ergibt sich aus Satz (3.4) die Behauptung (1).

(d) Für einen beliebigen Test $\mathscr{T} \in {}^k\mathfrak{T}$ mit der Zerlegung $\Omega = F_1 \cup \dots \cup F_k$ und der Schadensfunktion $s(\omega)$ hat man definitionsgemäß:

$$(*) \qquad As(\omega) \circ f(\omega; t) \overset{E}{>} Av(A; \omega; t) \circ f(\omega; t) \qquad \text{bei } \omega \in F_t.$$

Definiert man dazu den Test $\mathscr{T}_A$ mit derselben Zerlegung wie $\mathscr{T}$ und der Schadensfunktion

$$s_A(\omega) := v(A; \omega; t) \qquad \text{auf } F_t \qquad (t = 1, \dots, k),$$

so liefert dies einen Test wegen Behauptung (1), und Integration von (*) führt zu

$$A\, r(\mathcal{T}) \overset{E}{>} A\, r(\mathcal{T}_A).$$

Somit kann $r(\mathcal{T})$ nur dann eine A-Ecke von ${}^kR$ sein, wenn in (*) P-fast überall für alle $t=1,\dots,k$ das Gleichheitszeichen steht. Damit ist die Behauptung (2) gezeigt.

Beweis von Satz (3.14). Behauptung (1) findet sich in [13].

Behauptung (2). (a) Wir beweisen zunächst:

Ist $A\geqq 0$ und $r_{H,A}$ eine A-Ecke von ${}^kR_H$, so ist $r_{H,A}\in{}^kR$ und auch A-Ecke von ${}^kR$.

In der Tat: Weil es nur auf Vektoren ankommt, die bezüglich $\overset{A}{<}$ äquivalent sind, läßt sich wegen (3.6) o.B.d.A. die zu $r_{H,A}=r(\mathcal{T}_{H,A})$ gehörige Schadensfunktion als $v_H(A;\omega;t)$ auf $F_{H,t}$ der zugehörigen Zerlegung wählen. Gemäß Absatz (b) des vorstehenden Beweises ist aber

$$v_H(A;\omega;t)\in S(\omega;t) \qquad \text{für alle } \omega\in\Omega \text{ und } t=1,\dots,k,$$

also $r_{H,A}\in{}^kR$.

Sei jetzt $\mathcal{T}\in{}^k\mathfrak{T}$ beliebig mit der Zerlegung $\Omega=F_1\cup\dots\cup F_k$ und der Schadensfunktion $s(\omega)$, dann definieren wir $\mathcal{T}_A$ genau wie in (d) des vorstehenden Beweises und erhalten wieder

$$A\, r(\mathcal{T}_A) \overset{E}{<} A\, r(\mathcal{T}).$$

Zugleich ist $\mathcal{T}_A$ ein Test aus ${}^k\mathfrak{T}_H$, so daß weiter gilt

$$A\, r_{H,A} \overset{E}{<} A\, r(\mathcal{T}_A) \overset{E}{<} A\, r(\mathcal{T}) \qquad \text{für alle } \mathcal{T}\in{}^k\mathfrak{T},$$

wie behauptet.

(b) Nehmen wir in (a) speziell $A'=p\in R^n$, so erhalten wir

$$g(p;{}^kR_H)=g(p;{}^kR)>-\infty \qquad \text{für alle } p>\mathrm{o}.$$

Daraus folgern wir mittels der Sätze (2.13) und (2.3)

$$H({}^kR^{ka})=H({}^kR_H^{ka})\subset{}^kR^{ka},$$

worin ${}^kR_H$ beschränkt ist. ${}^kR$ ist demnach vorn beschränkt.

(c) Weiter leiten wir aus (b) mit Hilfe des Korollars (2.26*) her:

Für $A\geqq 0$ mit $\mathrm{rg}(A)=n$ ist r_A die A-Ecke von ${}^kR_H^{ka}$ genau dann, wenn es die A-Ecke von ${}^kR^{ka}$ ist.

Die A-Ecke von ${}^kR_H^{ka}$ gehört jedoch wegen (3.4) zu ${}^kR_H$ und nach (a) auch zu ${}^kR$, was zeigt, daß ${}^kR$ vorn eckenabgeschlossen ist. Daraus ergibt sich schließlich zusammen mit der Beschränktheit von $H({}^kR^{ka})$ die Existenz einer A-Ecke von ${}^kR$ bei $A\geqq 0$.

Beachtet man, daß man sich aufgrund von (3.15) und Teil (b) des zugehörigen Beweises bei der Bestimmung der den A-Ecken von ${}^kR$ mit $A\geqq 0$ entsprechenden Zerlegungen auf die Betrachtung von ${}^kR_H$ beschränken kann, so erhält man unmittelbar das Analogon zu Satz (3.9).

(3.16) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (3.11) *gilt für eine Matrix* $A \geqq 0$:

(1) *Ist der Risikovektor des Testes* $\mathcal{T}$ *mit der Zerlegung* $\Omega = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ *eine A-Ecke von* ${}^kR$, *so gilt für alle* $t < k$ *bis auf P-Nullmengen*

$$G_t \subset F_1 \cup \cdots \cup F_t \subset H_t \quad \textit{und} \quad F_t \subset {}_tH$$

mit G_t, ${}_tH$ *und* H_t *aus Definition* (3.8).

(2) *Umgekehrt liefert jeder Test mit einer Zerlegung gemäß* (1) *und einer Schadensfunktion* $s(\omega)$ *gemäß* (3.15), *Teil* (2) *eine A-Ecke von* ${}^kR$.

(3) *Speziell ist* $\int_\Omega u(\omega; 1)\, dP$ *die E-Ecke von* $\{Ar \colon r \in {}^kR\}$.

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich erwähnt, daß ${}^kR_H$ keineswegs eine Teilmenge von ${}^kR$ sein muß. Das kann man sich leicht durch einfache Gegenbeispiele mit diskreten Schadensbereichen und diskreten Hypothesen klar machen. Dagegen ist ${}^kR_H$ stets Teilmenge der konvexen Hülle von ${}^kR$.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen können auf die Theorie der in [12] eingeführten multisubjektiv optimalen Tests angewendet werden, die eine Verbindung zwischen den Bayeslösungen und den Minimaxlösungen darstellen. Bei einer gegebenen Klasse Φ von Vorbewertungen heißt ein Test $\mathcal{T}_0 \in \mathfrak{T}$ *multisubjektiv optimal* bezüglich der Klasse $\mathfrak{T}$, wenn gilt

$$\sup\big(p' r(\mathcal{T}_0) \colon p \in \Phi\big) \leqq \sup\big(p' r(\mathcal{T}) \colon p \in \Phi\big) \qquad \text{für alle } \mathcal{T} \in \mathfrak{T}.$$

Allgemeiner nennen wir jetzt einen Vektor r_0, der der entsprechenden Beziehung für alle $r \in R \subset R^n$ genügt, auch multisubjektiv optimal, selbst wenn r_0 nicht Risikovektor eines Testes und das vorgegebene R kein Risikobereich ist. Es gilt nun der

(3.17) **Hilfssatz.** *Sei* $R \subset R^n$ *vorn eckenabgeschlossen und* $g(p; R)$ *endlich für* $p \geqq \mathrm{o}$, *dann existiert zu jeder Klasse* $\Phi \subset \{p \geqq \mathrm{o}\}$ *eine multisubjektiv optimale Lösung* r_0 *bezüglich* R^{ka} *und es ist*

$$r_0 = \sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu r_\nu \quad \textit{mit } r_\nu \in R,\ \alpha_\nu > 0 \quad \textit{und} \quad \sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu = 1 \qquad (l \leqq n).$$

Beweis. 1. Aus $g(e_\nu; R) > -\infty$ für alle $\nu = 1, \ldots, n$ folgt, daß R^{ka} nach unten beschränkt ist. Zufolge [12] existiert daher zu Φ eine multisubjektiv optimale Lösung $r \in R^{ka}$ bezüglich der abgeschlossenen und konvexen Menge R^{ka}.

2. Sei $D := \{x \in R^{ka} \colon x \leqq r\}$, dann hat man wegen $p' x \leqq p' r$ für alle $x \in D$ die Beziehung

$$\sup_{p \in \Phi} p' x \leqq \sup_{p \in \Phi} p' r \leqq \sup_{p \in \Phi} p' x,$$

d.h. jedes x aus D ist multisubjektiv optimal bezüglich R^{ka}.

Weiter ist D abgeschlossen und konvex mit $g(p; D) > -\infty$ für alle $p \geqq \mathrm{o}$, der vordere Rand $V(D)$ ist daher nicht leer, was zusammen mit (2.32) die Existenz eines Punktes r_0 aus dem unteren Rand $U(D) \subset D$ lehrt. Daraus folgt:

$$r_0 \text{ ist multisubjektiv optimal bezüglich } R^{ka},$$

wobei zusätzlich wegen

$$\{r_0\} = \{x \leqq r_0\} \cap D = \{x \leqq r_0\} \cap R^{ka} \cap \{x \leqq r\} = \{x \leqq r_0\} \cap R^{ka},$$

also $r_0 \in U(R^{ka})$ gilt.

3. Zufolge (2.33) ist r_0 eine A-Ecke von R^{ka} mit $A \geqq 0$, für das die letzte Zeile $a'_m > o'$ ist. Bei diesem A ist die Menge

$$X_A := \{x \in R^{ka}: x \overset{A}{<} y \text{ für alle } y \in R^{ka}\} \neq \emptyset,$$

abgeschlossen und konvex. Insbesondere liegt X_A in der a_m-Randmenge von $R^{ka} \cap X_A$. Nach Satz (2.10) ist X_A also kompakt; zudem ist seine Dimension kleiner als n. Wir dürfen daher schreiben (vgl. z.B. [6], S. 400–401)

$$r_0 = \sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu r_\nu \quad \text{mit } l \leqq n; \quad \alpha_\nu > 0, \quad \sum_\nu \alpha_\nu = 1$$

und r_ν Extremalpunkt von X_A für $\nu \leqq 1$.

4. Es bleibt der Nachweis, daß r_ν Extremalpunkt von R^{ka} ist. Dies trifft zu; denn hätte man $x, y \in R^{ka}$ mit $r_\nu = (x+y)/2$, so folgte aus $A r_\nu \overset{E}{<} A x$, $A r_\nu \overset{E}{<} A y$ die Gleichung $A r_\nu = A x = A y$, d.h. $x, y \in X_A$, und r_ν wäre entgegen 3. kein Extremalpunkt von X_A.

Aus diesem Hilfssatz in Verbindung mit dem ersten Teil von (3.14) ersehen wir direkt

(3.18) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (3.11) *gilt:*

(1) *Sind die Hypothesen P_ν atomlos auf $\mathfrak{F}_1$, so gibt es zu jeder Klasse Φ einen multisubjektiv optimalen Test $\mathcal{T}_0 \in {}^k\mathfrak{T}$.*

(2) *Im Fall beliebiger Hypothesen gibt es einen randomisierten Test $\mathcal{T}_0 = \alpha_1 \mathcal{T}_1 + \cdots + \alpha_l \mathcal{T}_l$ mit Gewichten $\alpha_\nu > 0$, $\sum_1^l \alpha_\nu = 1$ $(l \leqq n)$ und $\mathcal{T}_\nu \in {}^k\mathfrak{T}$, so daß $\mathcal{T}_0$ multisubjektiv optimal bezüglich Φ ist.*

Da Bayes- und Minimaxlösungen Spezialfälle multisubjektiv optimaler Tests sind, besagt dieser Satz insbesondere, daß es immer randomisierte Bayes- und Minimaxlösungen gibt. Darüber hinaus haben wir jedoch wegen der Sätze (3.14) und (3.16)

(3.19) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (3.11) *hat man zu jeder Vorbewertung $p \geqq o$ eine Bayeslösung $\mathcal{T}_p \in {}^k\mathfrak{T}$, deren Bayesrisiko sich aus*

$$p' r(\mathcal{T}_p) = \int_\Omega u(\omega; 1)\, dP$$

mit $u(\omega; 1)$ gemäß (3.7) *berechnet.*

Modifizieren wir die Beweisidee zu (3.17), so erhalten wir eine Verallgemeinerung des Korollars (2.17*), die wir gleich benutzen werden.

(3.20) **Hilfssatz.** *Sei $R \subset R^n$ vorn eckenabgeschlossen mit $g(p; R) > -\infty$ für alle $p > o$ und bezeichnet E_v die Menge der vorderen Extremalpunkte von R, so gilt*

$$M(R^{ka}) = \{x \in R^n: x \geqq r_0 \text{ für mindestens ein } r_0 \in (E_v)^k\}.$$

Beweis. 1. Aus $E_v \subset H(R^{ka})$ folgt sofort, daß die rechte Menge in der linken enthalten ist.

2. Sei $r \in M(R^{ka})$, dann ist die Menge $D := \{x \in R^{ka} : x \leqq r\}$ wegen

$$-\infty < g(e; R) \leqq e' x \leqq e' r \quad \text{bei} \quad e = \sum_v e_v \qquad \text{für alle } x \in D$$

kompakt und konvex. $U(D)$ ist somit nicht leer, und es gibt ein r_0 aus $U(D) \subset D$ mit $r_0 \leqq r$. Dieselbe Schlußweise wie im Beweis zu (3.17) liefert nun

$$r_0 = \sum_{v=1}^{l} \alpha_v r_v \quad \text{mit } \alpha_v > 0, \quad \sum_v \alpha_v = 1 \quad (1 \leqq v \leqq l \leqq n),$$

und r_v ist eine A-Ecke von R^{ka} mit $A \geqq 0$; wie behauptet.

Bemerkung. Wie wir durch das Beispiel in (2.27) festgestellt haben, ist E_v nicht immer die Menge aller Extremalpunkte von $H(R^{ka})$; (3.20) ist daher tatsächlich allgemeiner als (2.17*).

Nun untersuchen wir noch kurz das Testproblem, welches entsteht, wenn wir die Schadensbereiche $S(\omega; t)$ durch die maximalen Hüllen $M(\omega; t) := M(H(\omega; t))$ ersetzen. Offensichtlich genügen auch diese der Voraussetzung (3.11), sofern diese bereits für $S(\omega; t)$ galt. Für den zugehörigen Risikobereich ${}^kR_M$ können wir den Sätzen (3.15) und (3.16) entnehmen, daß ${}^kR_M$ vorn eckenabgeschlossen ist und die A-Ecken von ${}^kR_M$ für Matrizen mit dem Rang n und nichtnegativen Elementen mit den A-Ecken von ${}^kR_H$ übereinstimmen. Insbesondere ist

$$g(p; {}^kR_M) = g(p; {}^kR) = g(p; {}^kR_H) \qquad \text{für alle } p > \text{o}.$$

Außerdem sieht man sofort, daß mit $r \in {}^kR_M$ auch $r + x$ für jedes $x \geqq \text{o}$ zu ${}^kR_M$ gehört, da man ja x bei der Schadensfunktion addieren darf. Beachten wir noch (3.20), so finden wir

$$M({}^kR^{ka}) \subset {}^kR^k_M,$$

während die Umkehrung

$$M({}^kR^{ka}) \supset {}^kR^k_M$$

aus der Tatsache folgt, daß die entsprechenden Stützfunktionen für positive p übereinstimmen. Das ergibt den

(3.21) **Satz.** *Bei Voraussetzung* (3.11) *ist* $M({}^kR^{ka}) = {}^kR^k_M$.

Speziell ist wegen (3.14), Teil (1)

(3.22) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (3.11) *und atomlosen Hypothesen auf* $\mathfrak{F}_1$ *ist*

$$M({}^kR^a) = {}^kR_M.$$

Wir merken noch an, daß man aufgrund dieser beiden Sätze bei der Untersuchung von „vorderen" Eigenschaften des Risikobereiches (z. B. Abgeschlossenheit nach vorn, Bayeslösungen usw.) von Anfang an annehmen darf, daß die Schadensbereiche gleich der maximalen Hülle von $S(\omega; t)^{ka}$ sind.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir nochmals auf Satz (3.16) zurückkommen und ihn in eine für die späteren Betrachtungen bequemere Form bringen. Dazu benutzen wir den Begriff der Stopzeit.

(3.23) **Definition.** Unter den Voraussetzungen von (1.1) heißt eine Abbildung

$$T\colon\ \Omega \to \{1, 2, \dots, k\}$$

eine Stopzeit (zum Testproblem (1.1)), wenn

$$\{\omega\colon T(\omega) \leqq t\} \in \mathfrak{F}_t \qquad \text{für alle } t \leqq k \leqq \infty.$$

Aus einer gegebenen Stopzeit T läßt sich eine Zerlegung gemäß (1.1) machen, indem man setzt

$$F_t := \{\omega\colon T(\omega) = t\} \qquad \text{für } t = 1, \dots, k;$$

umgekehrt liefert eine Zerlegung $\Omega = F_1 \cup \dots \cup F_k$ gemäß (1.1) eine Stopzeit vermöge der Festsetzung

$$T(\omega) := t \qquad \text{auf } F_t \text{ für } t = 1, \dots, k.$$

Beide Betrachtungsweisen sind demnach äquivalent.

Bei einer gegebenen Stopzeit T (Zerlegung) läßt sich nun der Begriff der Schadensfunktion auch so einführen:

$s(\omega)$ ist eine Abbildung $s\colon \Omega \to R^n \cup \{\bar{\infty}\}$ derart, daß $s(\omega)$ $\mathfrak{F}_t$-meßbar auf $\{T(\omega) = t\}$ ist für alle $t = 1, \dots, k$ und $s(\omega) \in S(\omega; T(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$.

Mit Hilfe von Definition (3.8) lassen sich spezielle Stopzeiten angeben gemäß

(3.24) **Definition.** (1) $T^* := t$ auf $G_t \overline{G_{t-1}}$ für $t \leqq k$ [2] mit $G_0 := \emptyset$, $G_k := \Omega$ heißt obere Stopzeit;

(2) $T_* := t$ auf $H_t \overline{H_{t-1}}$ für $t \leqq k$ mit $H_0 := \emptyset$, $H_k := \Omega$ heißt untere Stopzeit.

Dabei ist infolge $G_t \subset H_t$ bei $0 \leqq t < k$ bis auf P-Nullmengen:

$$T_* \leqq T^* \qquad P\text{-fast überall}.$$

Den Satz (3.16), Teile (1) und (2) können wir jetzt folgendermaßen aussprechen:

(3.25) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (3.11) *gilt für eine Matrix* $A \geqq 0$:

Ein Test $\mathcal{T}$ mit der Stopzeit T und der Schadensfunktion $s(\omega)$ entspricht genau dann einer A-Ecke des Risikobereiches, wenn P-fast überall gelten

(1) $T_* \leqq T \leqq T^*$ *und* $u(\omega; T) = A\,v(A; \omega; T) \circ f(\omega; T)$,

(2) $A\,s(\omega) \circ f(\omega; T(\omega)) = A\,v(A; \omega; T(\omega)) \circ f(\omega; T(\omega))$ *mit* $v(A; \omega; t)$ *gemäß* (3.15).

Der *Beweis* ist offenkundig.

Bemerkung. $T_* \leqq T$ braucht an sich nicht eigens verlangt zu werden; es folgt bereits aus der zweiten Bedingung unter (1).

4. Weitere Hilfssätze

Bei der Behandlung der unendlichstufigen Tests werden wir uns auf Ergebnisse von Krieger stützen [8]. Diese Resultate sollen hier ohne Beweis und lediglich in der Allgemeinheit referiert werden, in der sie für unsere weiteren Erörterungen von Interesse sind.

---

[2] Ein Querstrich bedeute das Komplement der Menge.

(4.1) **Satz.** *Es seien die Voraussetzungen von* (1.1) *mit* $k=\infty$ *erfüllt; ferner seien die Schadensbereiche* $S(\omega;t)$ *beschränkt und eckenabgeschlossen für alle* $\omega\in\Omega$, *sowie die zugehörigen Stützfunktionen* $g(p;\omega;t)$ $\mathfrak{F}_t$*-meßbar für jedes* $p\in R^n$ *und* P_ν*-integrierbar für* $p=\pm e_\nu$ $(\nu=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,\infty)$. *Außerdem sei*

$$\liminf_{t\leqq\infty} g(e_\nu;\omega;t)=+\infty \qquad P\text{-fast überall},$$

und die Integrale

$$\int_\Omega \inf_{t\leqq\infty} g(e_\nu;\omega;t)\,dP_\nu>-\infty$$

existieren für $\nu=1,\ldots,n$.

Dann ist der Risikobereich ${}^\infty R$ *streng vorn eckenabgeschlossen.*

Bemerkung. 1. Aus den Voraussetzungen folgt $S(\omega;\infty)=\{\tilde{\infty}\}$ P-fast überall.

2. Aus dem Satz (4.1) ergibt sich nicht die Existenz der A-Ecken von ${}^\infty R$ für alle $A>0$; und auch dann, wenn man die Existenz der A-Ecken annimmt, ist es wegen des nicht-konstruktiven Beweises unmöglich, diese anzugeben und insbesondere ein Konstruktionsverfahren für Bayeslösungen herzuleiten.

Im kommenden Paragraphen werden wir diesen Satz auf den Fall nicht beschränkter Schadensbereiche erweitern und dabei feststellen, daß es zu jeder positiven Matrix A auch eine A-Ecke des Risikobereiches gibt. Im Gegensatz zu (3.16) ist dies für nicht-negative Matrizen im Fall $k=\infty$ selbst bei beschränkten $S(\omega;t)$ nicht mehr allgemein richtig, wie das folgende Beispiel lehrt, wobei wir die übliche Abkürzung

$$x+Q:=\{x+q\colon q\in Q\} \qquad \text{für } Q\subset R^n, \quad x\in R^n$$

benutzen.

(4.2) *Beispiel.* Man nimmt $\Omega:=\{1,2,\ldots\}$, als $\mathfrak{F}_t$ den von den Mengen $\{1\},\{2\},\ldots,\{t+1,\ldots\}$ erzeugten σ-Körper $\mathfrak{G}_t$ für $t<\infty$ und als $\mathfrak{F}_\infty=\mathfrak{F}$ die Potenzmenge von Ω. Weiter wählt man $n=2$ und setzt:

$$P_1(\omega):=2^{-\omega},$$

$$P_2(\omega):=\frac{1}{\omega(\omega+1)},$$

was jeweils ein Wahrscheinlichkeitsmaß ergibt.

Ferner führen wir die Mengen $Q(\omega)\subset R^2$ ein gemäß

$$Q(\omega):=\{0,q(\omega)\}^k, \quad \text{wobei } q(\omega):=\begin{pmatrix}-\omega+1/\omega\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e:=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

gesetzt ist, und definieren mit deren Hilfe die Schadensbereiche

$$(*) \qquad S(\omega;t):=\begin{cases} te+Q(\omega) & \text{für } \omega<t\\ te+Q(t) & \text{für } \omega\geqq t\end{cases} \qquad (t=1,2,\ldots).$$

Die Voraussetzungen von (4.1) sind erfüllt; denn wir haben:

(a) $S(\omega;t)$ ist kompakt, also eckenabgeschlossen und beschränkt für alle t und ω.

(b) Hat $p \in R^2$ die Komponenten p_1 und p_2, so gilt

$$g(p;\omega;t)=\begin{Bmatrix} t(p_1+p_2)+p_1(-\omega+1/\omega) & \text{für } \omega<t \\ t(p_1+p_2)+p_1(-t+1/t) & \text{für } \omega\geqq t\end{Bmatrix}, \quad \text{falls } p_1>0,$$

$$g(p;\omega;t)=t(p_1+p_2) \quad \text{sonst.}$$

$g(p;\omega;t)$ ist also für jedes feste t und p meßbar bezüglich $\mathfrak{F}_t$ und beschränkt, somit auch P_ν-integrabel ($\nu=1,2$).

(c) Bei festem $\omega\in\Omega$ folgt

$$\liminf_{t\leqq\infty} g(e_1;\omega;t)=\lim_{t\to\infty}(t-\omega+1/\omega)=+\infty,$$

$$\liminf_{t\leqq\infty} g(e_2;\omega;t)=\lim_{t\to\infty} t=+\infty;$$

ferner hat man

$$\inf_{t\leqq\infty} g(e_1;\omega;t)=g(e_1;\omega;\omega)=1/\omega\leqq 1,$$

$$\inf_{t\leqq\infty} g(e_2;\omega;t)=\inf_{t\leqq\infty} 1=1,$$

was P_ν-integrabel ist ($\nu=1,2$).

Wir wollen nun zeigen, daß es zur Zeilenmatrix $A=e_1'$ keine A-Ecke gibt. Zu diesem Zweck nehmen wir an, $\mathscr{T}^0$ sei ein zur A-Ecke gehöriger Test mit der Schadensfunktion $s^0(\omega)$ und dem Risikovektor $r(\mathscr{T}^0)=r^0$.

1. Zunächst betrachten wir die Folge der l-stufigen Tests $\mathscr{T}^l$ ($l<\infty$), welche definiert ist durch die

$$\text{Zerlegungen: } \Omega=F_1\cup\cdots\cup F_l \quad \text{mit} \quad F_t:=\{t\} \quad \text{für } t<l<\infty$$

und die

$$\text{Schadensfunktionen: } s^l(\omega):=\begin{cases} we+q(\omega) & \text{für } \omega<l \\ le+q(l) & \text{für } \omega\geqq l,\end{cases}$$

die nach (*) zulässig sind.

Diese Festsetzung ist in Übereinstimmung mit (1.1) ein Test, dessen Risikovektor r^l als erste Komponente hat

$$r_1^l=\sum_{\omega<l}2^{-\omega}/\omega+\sum_{\omega\geqq l}2^{-\omega}/l=e_1' r^l.$$

Daraus ergibt sich wegen $e_1' r^0\leqq e_1' r^l$ für alle $l=1,2,\dots$ die Beziehung

$$e_1' r^0\leqq\sum_{\omega=1}^{\infty}2^{-\omega}/\omega=:\alpha^0<\infty.$$

2. Andererseits gilt für die erste Komponente $s_1(\omega)$ der Schadensfunktion irgendeines Testes

$$(**) \qquad s_1(\omega)\geqq 1/\omega,$$

woraus folgt

$$e_1' r^0\geqq\sum_{\omega\in\Omega}\frac{1}{\omega}P_1(\omega)=\alpha^0, \quad \text{d.h.} \quad e_1' r^0=\alpha^0.$$

Damit Gleichheit vorliegt, muß auch in (**) das Gleichheitszeichen für alle $\omega\in\Omega$ gelten. Das bedeutet aber für $\mathscr{T}^0$ die Zerlegung $F_t^0=\{t\}$ und die Schadensfunktion

$$s^0(\omega)=\omega e+q(\omega)\qquad \text{für alle } \omega\in\Omega,$$

so daß sich für die zweite Komponente $e_2' r^0$ des Risikovektors ergibt

$$e_2' r^0=\sum_{\omega\in\Omega} e_2'(\omega e+q(\omega))\, P_2=\sum_{\omega=1}^{\infty}\omega/(\omega+1)\,\omega=\infty,$$

was zeigt, daß es keinen Risikovektor geben kann, der A-Ecke von ${}^{\infty}R$ ist.

Um die späteren Überlegungen nicht unterbrechen zu müssen, sei an dieser Stelle die Diskussion der Voraussetzungen in (4.1) vorweggenommen. Bereits im ersten Paragraphen waren wir uns darüber klar geworden, daß die Schadensbereiche mit wachsender Stufenzahl in geeigneter Weise ins Unendliche wandern. Dies geschieht in (4.1) dadurch, daß man für die Stützfunktionen $g(p;\omega;t)$ u.a. fordert:

(4.3) *Voraussetzung.* $g(p;\omega;t):=g(p;S(\omega;t))$ genügen den Bedingungen

(1) $g(p;\omega;t)$ $\mathfrak{F}_t$-meßbar für $p>0$, $t=1,2,\ldots$;

(2) $g(e_\nu;\omega;t)>-\infty$ und P_ν-integrabel für $t=1,2,\ldots$; $\nu=1,\ldots,n$;

(3) $\int_\Omega \inf_t g(e_\nu;\omega;t)\,dP_\nu>-\infty$ für $\nu=1,\ldots,n$;

(4) $\liminf_{t\to\infty} g(e_\nu;\omega;t)=+\infty$ P_ν-fast überall für $\nu=1,\ldots,n$.

Für das Weitere ist eine andere Voraussetzung zweckmäßig, nämlich

(4.3′) *Voraussetzung.* $S(\omega;t)$ läßt sich schreiben in der Form $S(\omega;t)=c(t)+Q(\omega;t)$, wobei $c(t)\in R^n$ und $Q(\omega;t)\subset R^n$ mit $f(p;\omega;t):=g(p;Q(\omega;t))$.

$f(p;\omega;t)$ und $c(t)$ genügen den Bedingungen

(1′) $f(p;\omega;t)$ $\mathfrak{F}_t$-meßbar für $p>0$, $t=1,2,\ldots$;

(2′) $f(e_\nu;\omega;t)>-\infty$ und P_ν-integrabel für $t=1,2,\ldots$, $\nu=1,\ldots,n$;

(3′) $\int_\Omega \inf_t f(e_\nu;\omega;t)\,dP_\nu>-\infty$ für $\nu=1,\ldots,n$;

(4′) $0\leqq c(1)\leqq c(2)\leqq\cdots$ und $c(t)\to+\infty$ für $t\to\infty$.

Auf den ersten Blick erscheint (4.3) schwächer als (4.3′). Man hat aber den

(4.4) **Satz.** *Die Voraussetzungen* (4.3) *und* (4.3′) *sind äquivalent.*

Beweis. (a) Sei (4.3′) erfüllt und $p>0$.

Wegen $g(p;\omega;t)=p'c(t)+f(p;\omega;t)$ folgen (1) und (2) unmittelbar aus (1′) und (2′).

Ferner ergibt sich aus (3′) die Abschätzung

$$\inf_t f(e_\nu;\omega;t)>-\infty\qquad P_\nu\text{-fast überall}.$$

Vermöge $g(e_\nu;\omega;t)\geqq e_\nu' c(t)+\inf_t f(e_\nu;\omega;t)$ und (4′) erhält man daraus (4) und zusammen mit (3′) schließlich

$$\int_\Omega \inf_t g(e_\nu;\omega;t)\,dP_\nu\geqq\int_\Omega \inf_t f(e_\nu;\omega;t)\,dP_\nu>-\infty.$$

(b) Sei nun (4.3) erfüllt. Wir konstruieren zunächst aus den $g(e_\nu; \omega; t)$ eine geeignete Folge $c(t) \in R^n$ mit der Eigenschaft (4'). Dies geschieht komponentenweise; der Einfachheit halber werden wir für den Augenblick das Argument e_ν bzw. ν unterdrücken, sofern keine Verwechslung entstehen kann.

Setzt man $i(\omega; t) := \inf_{s \geqq t} g(\omega; s)$, so gilt:

$i(\omega; t)$ ist eine monoton nicht-fallende Folge von Funktionen mit

$$\lim_{t \to \infty} i(\omega; t) = +\infty \qquad P_\nu\text{-fast überall}$$

und

$$i(\omega; t) \leqq g(\omega; t) \qquad \text{für } t = 1, 2, \ldots.$$

Zu jeder natürlichen Zahl l definieren wir die Funktionen

$$m(\omega; t, l) := \min\big(i(\omega; t) - l, 0\big),$$

die folgende Eigenschaften haben:

(I) $m(\omega; t, l) \leqq m(\omega; t+1, l) \leqq 0$ für alle t, l; $\lim_{t \to \infty} m(\omega; t, l) = 0$ P_ν-fast überall.

(II) $m(\omega; t, l) \geqq \min\big(i(\omega; 1) - l, 0\big)$ ist P_ν-integrabel für jedes $t, l = 1, 2, \ldots$.

Aus (I) und (II) folgt nach dem Satz von Lebesgue

(III) $\int_\Omega m(\omega; t, l)\, dP_\nu$ konvergiert monoton von unten gegen 0 für jedes feste l.

Zu jeder natürlichen Zahl l gibt es daher ein t_l mit

$$0 \geqq \int_\Omega m(\omega; t, l)\, dP_\nu \geqq -2^{-l} \qquad \text{für } t \geqq t_l.$$

O.B.d.A. können wir annehmen $t_0 := 1 < t_1 < t_2 < \cdots$.

Mit Hilfe der so gefundenen Folge t_l $(l = 1, 2, \ldots)$ definieren wir

$$c(t) := l \qquad \text{für } t_l \leqq t < t_{l+1}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

und erhalten

$$0 \leqq c(1) \leqq c(2) \leqq \cdots \quad \text{mit} \quad c(t) \to \infty \quad \text{bei} \quad t \to \infty.$$

Wir denken uns nun dieses Verfahren für jede Komponente $\nu = 1, \ldots, n$ durchgeführt. Die so gefundenen $c_\nu(t)$ fassen wir zum Vektor $c(t)$ zusammen und setzen noch

$$Q(\omega; t) := -c(t) + S(\omega; t).$$

Die Richtigkeit von (1') und (2') verifiziert man wie unter (a), während (4') durch die Konstruktion von $c(t)$ erzwungen wurde.

Beim Nachweis von (3') lassen wir wieder die Argumente e_ν bzw. ν weg, soweit dies geht, und schätzen ab:

Für $t_l \leqq t < t_{l+1}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ gilt

$$f(\omega; t) = g(\omega; t) - c(t) \geqq i(\omega; t) - c(t) = i(\omega; t) - l \geqq m(\omega; t, l).$$

Weiter ist wegen $m(\omega; t, l) \leqq 0$:

$$\inf_{t \geqq t_1} f(\omega; t) = \inf_{l \geqq 1} \inf_{t_l \leqq t < t_{l+1}} f(\omega; t) \geqq \inf_{l \geqq 1} m(\omega; t_l, l) \geqq \sum_{l=1}^{\infty} m(\omega; t_l, l).$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt außerdem

$$\int_\Omega \inf_{t \geqq t_1} f(\omega; t)\, dP_\nu \geqq \int_\Omega \sum_{l=1}^{\infty} m(\omega; t_l, l)\, dP_\nu = \sum_{l=1}^{\infty} \int_\Omega m(\omega; t_l, l)\, dP_\nu$$
$$\geqq -\sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} = -1 > -\infty .$$

Schließlich ist auch noch

$$\inf_{t \geqq 1} f(\omega; t) = \min\big(\inf_{t \geqq t_1} f(\omega; t), f(\omega; 1), \ldots, f(\omega; t_1 - 1)\big),$$

was als Minimum endlich vieler integrierbarer Funktionen mit einem Integralwert größer als $-\infty$ selbst wieder integrierbar ist und ein Integral größer als $-\infty$ liefert.

Damit ist die Äquivalenz von (4.3) und (4.3′) völlig bewiesen.

Der Satz (4.4) läßt eine bemerkenswerte Interpretation der Voraussetzung (4.3) zu:

Man kann nämlich o. B. d. A. stets annehmen, daß sich die Schadensfunktion eines mehrstufigen Testes additiv zusammensetzt aus den Kosten $c(t)$, die unabhängig von der Beobachtung ω mit wachsender Stufenzahl gegen unendlich steigen, und dem Schaden $q(\omega; t)$, der durch die Terminalentscheidung in der t-ten Stufe bei der Beobachtung von ω entsteht und nach unten beschränkt ist. Letzteres bedeutet praktisch nur, daß die Möglichkeit, unbeschränkt hohe Gewinne zu erzielen, von vornherein ausgeschlossen wird ohne Rücksicht darauf, wie die Beobachtung ausfällt.

5. Unendlichstufige Tests

Wir beginnen damit, daß wir die Voraussetzungen genau formulieren, die wir in Zukunft stets, ohne sie gesondert aufzuführen, als gegeben annehmen, sofern nichts Gegenteiliges gesagt wird.

(5.1) *Voraussetzungen.* Vorgelegt seien die σ-Körper $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{F}_\infty \subset \mathfrak{F}$ über Ω und die Maße $P_1, \ldots, P_n$ auf $\mathfrak{F}$. Zu jedem $\omega \in \Omega$ und jedem $t = 1, 2, \ldots$ gebe es eine Menge $S(\omega; t) \subset R^n$, $S(\omega; \infty)$ sei für alle $\omega \in \Omega$ gleich $\{\vec{\infty}\}$. $H(\omega; t)$ sei die vordere Hülle von $S(\omega; t)^{ka}$ (soweit diese überhaupt definiert ist). Mit $g(p; \omega; t)$ bzw. $h(p; \omega; t)$ bezeichnen wir die Stützfunktion von $S(\omega; t)$ bzw. $H(\omega; t)$.

Es seien folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $S(\omega; t) \neq \emptyset$, vorn beschränkt und vorn eckenabgeschlossen für alle $\omega \in \Omega$ und $t = 1, 2, \ldots$.

(2) $g(p; \omega; t)$ sei für jedes $p > o$ $\mathfrak{F}_t$-meßbar $(t = 1, 2, \ldots)$.

(3) $h(p; \omega; t)$ sei für $p = \pm e_\nu$ P_ν-integrierbar $(\nu = 1, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots)$.

(4) $\liminf_{t \to \infty} h(e_\nu; \omega; t) = +\infty$ P_ν-fast überall und $\int_\Omega \inf_{t \leqq \infty} h(e_\nu; \omega; t)\, dP_\nu > -\infty$ für $\nu = 1, \ldots, n$.

Bemerkung. $h(p; \omega; t)$ wird eindeutig bestimmt durch die Kenntnis von $g(p; \omega; t)$ für alle $p > o$ (vgl. (2.11)); insbesondere ist $h(e_\nu; \omega; t) = g(e_\nu; \omega; t)$.

Wegen $s(\omega) \in R^n$ P-fast muß unter der Voraussetzung (5.1) für jede zu einem Test gehörige Zerlegung $P(F_\infty)=0$ bzw. für die entsprechende Stopzeit $T<\infty$ P-fast überall gelten (sog. „Abgeschlossenheit" des Testes). Umgekehrt gehört jede derartige Zerlegung bzw. Stopzeit zu einem Test, sofern sich eine meßbare und zumindest uneigentlich integrable Schadensfunktion $s(\omega)$ dazu finden läßt. Wir werden später sehen, daß das immer möglich ist.

Wir zeigen nun die zu (3.14) bis (3.16) analogen Behauptungen im unendlichstufigen Fall. Dabei werden die beiden ersten Sätze tunlich gemeinsam bewiesen.

(5.2) **Satz.** (1) *Sind alle P_ν atomlos auf $\mathfrak{F}_1$ $(\nu=1,\dots,n)$, so ist ${}^\infty R$ konvex.*

(2) *Unter der Voraussetzung* (5.1) *ist ${}^\infty R$ nach unten beschränkt und streng vorn eckenabgeschlossen, und zu jedem $A>0$ gibt es eine A-Ecke von ${}^\infty R$.*

(5.3) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (5.1) *gilt bei beliebiger Matrix $A>0$:*

(1) *Für jedes $t<\infty$ ist die $A(\omega;t)$-Ecke $v(A;\omega;t)$ der Menge $S(\omega;t)$ eine $\mathfrak{F}_t$-meßbare Funktion.*

(2) *Ist der Risikovektor des Testes $\mathscr{T}$ mit der Stopzeit T und der Schadensfunktion $s(\omega)$ eine A-Ecke von ${}^\infty R$, so ist*

$$A s(\omega)\circ f(\omega;T)=A v(A;\omega;T)\circ f(\omega;T) \qquad P\text{-fast überall.}$$

Der *Beweis* zu (5.3) läßt sich nahezu wörtlich von (3.15) übernehmen.

Beweis zu (5.2). Zu Behauptung (1) vgl. [13].

Behauptung (2). (a) Die Beschränktheit nach unten folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} e'_\nu r(\mathscr{T}) = \int_\Omega e'_\nu s(\omega)\,dP_\nu &\geqq \int_\Omega \inf_t g(e_\nu;\omega;t)\,dP_\nu \\ &= \int_\Omega \inf_t h(e_\nu;\omega;t)\,dP_\nu > -\infty, \end{aligned}$$

die für jede Schadensfunktion $s(\omega)$ und jedes $\nu=1,\dots,n$ richtig ist.

(b) Wir betrachten das Testproblem, bei welchem die $S(\omega;t)$ durch die $H(\omega;t)$ ersetzt werden. Sei ${}^\infty R_H$ der zugehörige Risikobereich. Wie beim Beweis von (3.14) schließt man mit Hilfe von (5.3) anstelle von (3.6), daß für $A>0$ mit $\operatorname{rg}(A)=n$ die A-Ecke von ${}^\infty R_H$ zu ${}^\infty R$ gehört und A-Ecke von ${}^\infty R$ ist. Da weiter infolge (4.1) ${}^\infty R_H$ streng vorn eckenabgeschlossen ist, besitzt ${}^\infty R$ dieselbe Eigenschaft.

(c) Aus (a) und (b) ergibt sich direkt die Existenz einer A-Ecke bei $A>0$.

Dem Teil (2a) dieses Beweises entnehmen wir folgendes

(5.2*) **Korollar.** *Zu jedem Test existiert der Risikovektor eigentlich oder uneigentlich, d.h. die Integrale über die Komponenten der Schadensfunktion existieren immer, können aber unter Umständen den Wert $+\infty$ annehmen.*

Das Analogon zu Satz (3.16) erfordert einige Vorbereitungen. Wir wollen von jetzt ab stets von einer festgehaltenen Matrix $A>0$ ausgehen und daher der Einfachheit wegen die Abhängigkeit von A bei den entsprechenden Größen nicht mehr zum Ausdruck bringen. Dasselbe werden wir meist mit ω tun. Wir schreiben also jetzt

$$v(t) := v(A;\omega;t),$$

$$f(t) := f(\omega;t).$$

Weiter müssen wir unterschiedliche Testprobleme simultan betrachten und die zugehörigen Größen entsprechend kennzeichnen. Dazu treffen wir folgende

Vereinbarung. Es bezeichne von jetzt ab k nicht mehr die Stufenzahl der Tests, sondern den höchsten Index der beim gerade behandelten Testproblem vorkommenden σ-Körper bzw. Schadensbereiche.

Bei den bisherigen Überlegungen fiel dieser Index mit der Stufenzahl zusammen. Eine Verwechslung scheint jedoch ausgeschlossen, da k in der Voraussetzung (5.1) überhaupt nicht mehr vorkommt.

In Übereinstimmung mit dieser Vereinbarung bezeichne ${}^{k}_{l}\mathfrak{T}$ die Menge aller $\big((k-l+1)$-stufigen$\big)$ Tests, die zu dem Problem

$$[\mathfrak{F}_l, \ldots, \mathfrak{F}_k; S(\omega; l), \ldots, S(\omega; k); P_1, \ldots, P_n]$$

gehören, bei denen also mindestens l Beobachtungen durchgeführt werden müssen, ehe überhaupt eine Terminalentscheidung gefällt werden darf $(l \leqq k \leqq \infty, l < \infty)$. ${}^{k}_{l}R$ sei der entsprechende Risikobereich. Speziell ist ${}^{k}\mathfrak{T} = {}^{k}_{1}\mathfrak{T}$ und ${}^{k}R = {}^{k}_{1}R$. Man erkennt unschwer die Beziehungen ${}^{k}_{l}\mathfrak{T} \supset {}^{i}_{j}\mathfrak{T}$ bzw. ${}^{k}_{l}R \supset {}^{i}_{j}R$ für alle $l \leqq j \leqq i \leqq k$. Die A-Ecke von ${}^{k}_{l}R$ bzw. eine im folgenden festgehaltene davon, sofern diese nicht eindeutig bestimmt ist, bezeichnen wir mit ${}^{k}_{l}r$. Es gilt $A\,{}^{k}_{l}r \overset{E}{<} A\,{}^{i}_{j}r$ bei $l \leqq j \leqq i \leqq k$. Infolge (3.14) und (5.2) gibt es zu jeder solchen A-Ecke (mindestens) einen Test ${}^{k}_{l}\mathscr{T}$ mit der Stopzeit ${}^{k}_{l}T$ und der Schadensfunktion ${}^{k}_{l}s$, derart, daß $A\,r({}^{k}_{l}\mathscr{T}) = A\,{}^{k}_{l}r$. Ein solches ${}^{k}_{l}\mathscr{T}$ denken wir uns fest gewählt.

Schließlich setzen wir noch

$${}^{k}_{l}u := \mathscr{E}\big(A\,{}^{k}_{l}s \circ f({}^{k}_{l}T) \,|\, \mathfrak{F}_l\big)$$

und behaupten

(5.4) **Hilfssatz.** *Folgende Beziehungen gelten P-fast überall:*

(1) *Für jedes* $\mathscr{T} \in {}^{k}_{l}\mathfrak{T}$ *mit* T, s *ist* ${}^{k}_{l}u \overset{E}{<} \mathscr{E}\big(A\,s \circ f(T) \,|\, \mathfrak{F}_l\big)$.

(2) ${}^{k}_{l}u$ *ist unabhängig von der Wahl des Testes* ${}^{k}_{l}\mathscr{T}$.

(3) ${}^{k}_{k}u = A\,v(k) \circ f(k)$, *falls* $k < \infty$.

(4) ${}^{k}_{l}u = E\text{-}\min\,[A\,v(l) \circ f(l), \mathscr{E}({}_{l+1}^{\;\;k}u \,|\, \mathfrak{F}_l)]$, *falls* $l < k \leqq \infty$.

(5) ${}^{k}_{l}u \overset{E}{<} {}^{i}_{l}u$ *für* $l \leqq i \leqq k \leqq \infty$.

Beim Beweis dieses Hilfssatzes werden wir uns einer „Methode der zusammengesetzten Tests“ bedienen, die auch später noch mehrfach benutzt wird. Diese Methode findet bereits in [13], S. 29 Anwendung. Wir wollen sie in einem eigenen Hilfssatz festhalten.

(5.5) **Hilfssatz.** *Seien* $\mathscr{T}_1 \in {}^{k}_{l}\mathfrak{T}$, $\mathscr{T}_2 \in {}^{i}_{j}\mathfrak{T}$ *mit* T_1, s_1 *bzw.* T_2, s_2, *wobei* $l \leqq j$ *sowie* $\{T_1 < j\} \subset X \in \mathfrak{F}_j$.

Dann liefert folgende Festsetzung einen neuen Test $\mathscr{T}$ *gemäß*

$$T := T_1 I_X + T_2 I_{\bar{X}}\,{}^{3},$$

$$s := s_1 I_X + s_2 I_{\bar{X}}.$$

Es ist $\mathscr{T} \in {}^{m}_{l}\mathfrak{T}$ *mit* $m = \max(i, k)$.

[3] I_X bedeutet die Indikatorfunktion der Menge X.

Beweis von (5.5). $\mathscr{T} \in {}^m_l\mathfrak{T}$ ist offensichtlich, sofern T und s überhaupt einen Test definieren.

1. T ist eine Stopzeit; denn

(a) für $t<l$ ist $\{T_1=t\}=\{T_2=t\}=\emptyset$,

(b) für $l \leqq t < j$ gilt wegen $\{T_2=t\}=\emptyset$

$$\{T=t\}=\{T_1=t\}\,X=\{T_1=t\}\in\mathfrak{F}_t,$$

(c) für $j \leqq t < \infty$ ist wegen $X \in \mathfrak{F}_t$

$$\{T=t\}=\{T_1=t\}\,X \cup \{T_2=t\}\,\bar{X}\in\mathfrak{F}_t,$$

(d) schließlich hat man noch $P(T=\infty)\leqq P(T_1=\infty)+P(T_2=\infty)=0$.

2. s stellt eine Schadensfunktion dar; denn es ist

(a) $s=s_1$ auf $\{T=t\}=\{T_1=t\}$, also $\mathfrak{F}_t$-meßbar, falls $t<j$ und

(b) $s=I_X s_1+I_{\bar{X}} s_2$ auf $\{T=t\}$, also $\mathfrak{F}_t$-meßbar mit Werten in $S(\omega;t)$, falls $t\geqq j$.

Beweis von (5.4). (1) Seien $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2 \in {}^k_l\mathfrak{T}$ mit Stopzeiten T_1, T_2 und Schadensfunktionen s_1, s_2, wobei $A\,r(\mathscr{T}_2)=A\,{}^k_lr$ gelte. Setzt man

$$X:=\left\{\mathscr{E}\left(A s_1\circ f(T_1)|\mathfrak{F}_l\right)\overset{E}{\underset{\neq}{<}}\mathscr{E}\left(A s_2\circ f(T_2)|\mathfrak{F}_l\right)\right\},$$

dann ist $X\in\mathfrak{F}_l$. Sei weiter $\mathscr{T}$ mit T, s der gemäß (5.5) aus $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_2$ zusammengesetzte Test, also $\mathscr{T}\in{}^k_l\mathfrak{T}$. Wäre nun $P(X)>0$, dann gilt für den Risikovektor $r(\mathscr{T})$:

$$\begin{aligned}
A\,{}^k_lr \overset{E}{<} A\,r(\mathscr{T}) &= \int_\Omega A s\circ f(T)\,dP=\int_X A s_1\circ f(T_1)\,dP+\int_{\bar{X}} A s_2\circ f(T_2)\,dP\\
&=\int_X \mathscr{E}\left(A s_1\circ f(T_1)|\mathfrak{F}_l\right)dP+\int_{\bar{X}}\mathscr{E}\left(A s_2\circ f(T_2)|\mathfrak{F}_l\right)dP\\
&\overset{E}{\underset{\neq}{<}}\int_X \mathscr{E}\left(A s_2\circ f(T_2)|\mathfrak{F}_l\right)dP+\int_{\bar{X}}\mathscr{E}\left(A s_2\circ f(T_2)|\mathfrak{F}_l\right)dP\\
&=\int_\Omega A s_2\circ f(T_2)\,dP=A\,r(\mathscr{T}_2)=A\,{}^k_lr,
\end{aligned}$$

was nicht sein kann, so daß $P(X)=0$ ist.

Insbesondere ist für $\mathscr{T}_2={}^k_l\mathscr{T}$ die Beziehung

$$P\left(\mathscr{E}\left(A s_1\circ f(T_1)|\mathfrak{F}_l\right)\overset{E}{\underset{\neq}{<}}{}^k_lu\right)=0$$

gültig.

(2) folgt aus (1), indem man auch $\mathscr{T}_1$ so wählt, daß $r(\mathscr{T}_1)$ A-Ecke von ${}^k_lR$ ist.

(3) ist der (einstufige) Spezialfall des Satzes (3.15), zweiter Teil.

(4) Sei $\mathscr{T}_0$ der einstufige Test mit $T_0\equiv l$ und der nach Satz (3.15) zulässigen Schadensfunktion $s_0\equiv v(l)$, dann folgt wegen ${}_{l+1}^{\;\;k}\mathscr{T}, \mathscr{T}_0\in{}^k_l\mathfrak{T}$ aus (1):

$${}^k_lu\overset{E}{<}\mathscr{E}\left(A\,v(l)\circ f(l)|\mathfrak{F}_l\right)=A\,v(l)\circ f(l)\qquad P\text{-fast}$$

und

$$ {}_l^k u \overset{E}{<} \mathscr{E}(A\,{}_{l+1}^{\;k}s \circ f({}_{l+1}^{\;k}T) \,|\, \mathfrak{F}_l) $$
$$ = \mathscr{E}(\mathscr{E}(A\,{}_{l+1}^{\;k}s \circ f({}_{l+1}^{\;k}T) \,|\, \mathfrak{F}_{l+1}) \,|\, \mathfrak{F}_l) = \mathscr{E}({}_{l+1}^{\;k}u \,|\, \mathfrak{F}_l) \qquad P\text{-fast}, $$

also

$$ {}_l^k u \overset{E}{<} E\text{-}\min\bigl(A\,v(l) \circ f(l),\ \mathscr{E}({}_{l+1}^{\;k}u \,|\, \mathfrak{F}_l)\bigr) \qquad P\text{-fast überall}. $$

Um auch die andere Richtung zu zeigen, wenden wir (5.5) an, wobei wir setzen:

$$ \mathscr{T}_1 := {}_l^k\mathscr{T}, $$
$$ \mathscr{T}_2 \in {}_l^k\mathfrak{T} \quad \text{mit} \quad T_2 :\equiv l+1 \ \text{ und } \ s_2 :\equiv v(l+1) $$

und

$$ X := \{{}_l^k T > l\} \in \mathfrak{F}_l. $$

Wir erhalten dadurch einen Test $\mathscr{T}$ aus ${}_l^k\mathfrak{T}$ mit T, s, wobei infolge $T > l$ sogar $\mathscr{T} \in {}_{l+1}^{\;k}\mathfrak{T}$. Weiter ist

$$ A\,s \circ f(T) = A\,{}_l^k s \circ f({}_l^k T) \qquad P\text{-fast auf } X \in \mathfrak{F}_l. $$

Damit ergibt sich wegen ${}_{l+1}^{\;k}u \overset{E}{<} \mathscr{E}(A\,s \circ f(T) \,|\, \mathfrak{F}_{l+1})$ P-fast überall:

$$ \mathscr{E}({}_{l+1}^{\;k}u \,|\, \mathfrak{F}_l) \overset{E}{<} \mathscr{E}(A\,s \circ f(T) \,|\, \mathfrak{F}_l) = {}_l^k u \qquad \text{auf } X\ P\text{-fast}, $$

während zufolge (5.3) gilt:

$$ A\,{}_l^k s \circ f(l) = A\,v(l) \circ f(l) = {}_l^k u \qquad \text{auf } \overline{X}\ P\text{-fast}, $$

womit (4) gezeigt ist.

(5) folgt zusammen mit (1) aus ${}_l^i\mathscr{T} \in {}_l^k\mathfrak{T}$ und $\mathscr{E}({}_l^k u \,|\, \mathfrak{F}_l) = {}_l^k u$ P-fast.

Für den Fall $k < \infty$ ergeben (3) und (4) ein Rekursionssystem zur Bestimmung der ${}_l^k u$, wie wir es schon in Definition (3.7) zur Festlegung der zu den A-Ecken des Risikobereiches gehörigen Stopzeiten betrachtet haben. Im Fall $k = \infty$ lassen sich die ${}_l^\infty u$ nicht so leicht beschaffen; sie sind aber wohldefinierte (wenn uns zunächst auch noch unbekannte) Funktionen. Analog dem Fall $k < \infty$ setzen wir nun allgemein ($k < \infty$ oder $k = \infty$)

(5.6) **Definition.**

(1) ${}_l^k G := \{A\,v(l) \circ f(l) \underset{+}{\overset{E}{<}} \mathscr{E}({}_{l+1}^{\;k}u \,|\, \mathfrak{F}_l)\}$ $(l < k \leqq \infty)$;
${}^k G_t := \bigcup_{l \leqq t} {}_l^k G$; ${}^k G_0 := \emptyset$; ${}^k G_k := \Omega$ $(t < k \leqq \infty)$;

(2) ${}_l^k H := \{A\,v(l) \circ f(l) \overset{E}{<} \mathscr{E}({}_{l+1}^{\;k}u \,|\, \mathfrak{F}_l)\}$ $(l < k \leqq \infty)$;
${}^k H_t := \bigcup_{l \leqq t} {}_l^k H$; ${}^k H_0 := \emptyset$; ${}^k H_k := \Omega$ $(t < k \leqq \infty)$.

Ohne Schwierigkeit erkennt man

(5.7)
$$ {}_l^k G,\ {}_l^k H \in \mathfrak{F}_l \quad \textit{mit} $$
$$ {}_l^k G \subset {}_l^k H; \quad {}_l^i G \supset {}_l^k G; \quad {}_l^i H \supset {}_l^k H \qquad P\textit{-fast für alle } l < i \leqq k \leqq \infty; $$

woraus man ebenso leicht folgende einfache Beziehungen herleitet:

$$(5.8)\qquad \begin{array}{l} {}^kG_t, {}^kH_t \in \mathfrak{F}_t \quad \textit{mit} \\ {}^kG_t \subset {}^kH_t; \quad {}^iG_t \supset {}^kG_t; \quad {}^iH_t \supset {}^kH_t \quad P\textit{-fast für alle } t \leqq i \leqq k \leqq \infty. \end{array}$$

Damit läßt sich analog zum Fall $k<\infty$ (vgl. (3.24)) eine obere bzw. untere Stopzeit ${}^kT^*$ bzw. ${}^kT_*$ definieren.

(5.9) **Definition.**

(1) ${}^kT^* := t$ auf ${}^kG_t \overline{{}^kG_{t-1}}$ für $1 \leqq t < k \leqq \infty$,
${}^kT^* := k$ sonst;

(2) ${}^kT_* := t$ auf ${}^kH_t \overline{{}^kH_{t-1}}$ für $1 \leqq t < k \leqq \infty$,
${}^kT_* := k$ sonst.

Als unmittelbare Folgerung von (5.8) halten wir fest:

$${}^kT_* \leqq {}^kT^* \qquad P\text{-fast überall.}$$

Bei $k<\infty$ sind ${}^kT_*$ und ${}^kT^*$ trivialerweise Stopzeiten, bei $k=\infty$ ist das erst noch nachzuweisen.

Im folgenden werden wir nur den Fall $k=\infty$ behandeln. Es ist daher ohne Gefahr der Verwechselung möglich, den oberen Index ∞ bei G und H zu unterdrücken. Wir beginnen mit einem

(5.10) **Hilfssatz.** *Es seien bei festem* $t<\infty$

$$\begin{array}{llll} T_t^* := {}^\infty T^* & \textit{auf } G_t; & T_{t*} := {}^\infty T_* & \textit{auf } H_t; \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{llll} T_t^* := {}_{t+1}^{\;\infty}T & \textit{auf } \overline{G_t}; & T_{t*} := {}_{t+1}^{\;\infty}T & \textit{auf } \overline{H_t}; \\ s_t^* := v({}^\infty T^*) & \textit{auf } G_t; & s_{t*} := v({}^\infty T_*) & \textit{auf } H_t; \\ s_t^* := {}_{t+1}^{\;\infty}s & \textit{auf } \overline{G_t}; & s_{t*} := {}_{t+1}^{\;\infty}s & \textit{auf } \overline{H_t}. \end{array}$$

Dann sind T_{t*}, T_t^* Stopzeiten, s_{t*}, s_t^* zugehörige Schadensfunktionen, und für die entsprechenden Tests $\mathcal{T}_{t*}$ bzw. $\mathcal{T}_t^*$ gilt

$$A r(\mathcal{T}_{t*}) = A r(\mathcal{T}_t^*) = A\, {}_1^\infty r.$$

Beweis. Offensichtlich definieren T_t^* und s_t^* einen Test $\mathcal{T}_t^*$. Der Rest wird durch vollständige Induktion in t gezeigt.

Nach (5.4), Behauptung (4) und (5.6) ist P-fast

$${}_1^\infty u = \begin{cases} A v(1) \circ f(1) & \text{auf } G_1 \\ \mathscr{E}({}_2^\infty u \mid \mathfrak{F}_1) & \text{auf } \overline{G_1}, \end{cases}$$

also wird im Fall $t=1$:

$$\begin{aligned} A\, {}_1^\infty r = \int_\Omega {}_1^\infty u\, dP &= \int_{G_1} A v(1) \circ f(1)\, dP + \int_{\overline{G_1}} \mathscr{E}({}_2^\infty u \mid \mathfrak{F}_1)\, dP \\ &= \int_{G_1} A v(1) \circ f(1)\, dP + \int_{\overline{G_1}} {}_2^\infty u\, dP \\ &= \int_{G_1} A v(1) \circ f(1)\, dP + \int_{\overline{G_1}} A\, {}_2^\infty s \circ f({}_2^\infty T)\, dP = A r(\mathcal{T}_1^*). \end{aligned}$$

Für $t-1$ werde die Behauptung als richtig unterstellt. Dann gilt wegen

$$ {}^{\infty}_{t}u = \begin{cases} Av(t)\circ f(t) & \text{auf } G_t\overline{G_{t-1}} \\ \mathscr{E}({}^{\infty}_{t+1}u\,|\,\mathfrak{F}_t) & \text{auf } \overline{G_t} \end{cases} $$

und der Induktionsvoraussetzung:

$$ \begin{aligned} A\,{}^{\infty}_{1}r = A\,r(\mathscr{T}^*_{t-1}) &= \int_{G_{t-1}} Av({}^{\infty}T^*)\circ f({}^{\infty}T^*)\,dP + \int_{\overline{G_{t-1}}} {}^{\infty}_{t}u\,dP \\ &= \int_{G_{t-1}} Av({}^{\infty}T^*)\circ f({}^{\infty}T^*)\,dP \\ &\quad + \int_{G_t\overline{G_{t-1}}} Av(t)\circ f(t)\,dP + \int_{\overline{G_t}} \mathscr{E}({}^{\infty}_{t+1}u\,|\,\mathfrak{F}_t)\,dP \\ &= \int_{G_t} Av({}^{\infty}T^*)\circ f({}^{\infty}T^*)\,dP + \int_{\overline{G_t}} {}^{\infty}_{t+1}u\,dP = A\,r(\mathscr{T}^*_t). \end{aligned} $$

Die Aussage für $\mathscr{T}_{t*}$ beweist man auf dieselbe Art, indem man lediglich G durch H und ${}^{\infty}T^*$ durch ${}^{\infty}T_*$ ersetzt.

(5.11) **Satz.** *${}^{\infty}T_*$ und ${}^{\infty}T^*$ gemäß (5.9) sind Stopzeiten mit ${}^{\infty}T_* \leqq {}^{\infty}T^*$ P-fast.*

Beweis. Die Meßbarkeitsbedingungen für Stopzeiten sind offensichtlich erfüllt. Wegen ${}^{\infty}T_* \leqq {}^{\infty}T^*$ P-fast ist nur zu zeigen

$$ P(G)=1 \qquad \text{bei } G := \bigcup_{t<\infty} G_t. $$

Zu diesem Zweck nehmen wir das Gegenteil an, also $P(\overline{G_t}) > \varepsilon_0$ für alle t bei geeignetem $\varepsilon_0 > 0$. Dem Hilfssatz (5.10) entnehmen wir

$$ A\,{}^{\infty}_{1}r = \int_{G_t} Av({}^{\infty}T^*)\circ f({}^{\infty}T^*)\,dP + \int_{\overline{G_t}} A\,{}^{\infty}_{t+1}s \circ f({}^{\infty}_{t+1}T)\,dP =: I_t + \bar{I}_t $$

für alle $t=1,2,\ldots$. Aufgrund von Bedingung (4) in (5.1) ist der Integrand in I_t komponentenweise durch eine integrierbare Funktion nach unten beschränkt. Ferner ist G_t monoton aufsteigend. Nach dem Lemma von Fatou gilt daher

$$ I_t \to I_0 > -\vec{\infty} \qquad \text{bei } t\to\infty $$

mit

$$ I_0 = \int_G Av({}^{\infty}T^*)\circ f({}^{\infty}T^*)\,dP. $$

Zur Abschätzung von $\bar{I}_t$ greifen wir auf Satz (4.4) und die Voraussetzung (4.3′) zurück. Danach hat man

$$ {}^{\infty}_{t+1}s \geqq c(t) + q, $$

wobei $\int_\Omega q\circ d\vec{P} > -\vec{\infty}$ und $o \leqq c(t)$ bei $t\to\infty$ monoton gegen $\vec{\infty}$ strebt. $c(t)$ läßt sich abschätzen durch

$$ c(t) \geqq \beta(t)\cdot e $$

mit $e=\sum_\nu e_\nu$ und $\beta(t) = \min_\nu e'_\nu c(t)$, wobei $\beta(t)$ eine skalare Funktion ist mit $0 \leqq \beta(t) \to \infty$ für $t\to\infty$.

Wegen $A>0$ folgt

$$\begin{aligned}\bar{I}_t &= \int_{\bar{G}_t} A\,{}_{t+1}^{\infty}s \circ f({}_{t+1}^{\infty}T)\,dP = A \int_{\bar{G}_t} {}_{t+1}^{\infty}s \circ d\vec{P}\\ &\geqq A \int_{\bar{G}_t} c(t) \circ d\vec{P} + A \int_{\bar{G}_t} q \circ d\vec{P} =: {}_1I_t + {}_2I_t.\end{aligned}$$

Wiederum aufgrund des Fatouschen Lemmas konvergiert ${}_2I_t$ gegen einen endlichen Wert ${}_2I_0 = A \int_{\bar{G}} q \circ d\vec{P}$ bei $t \to \infty$.

Für die μ-te Komponente des ersten Integrals gilt, wenn wir die μ-te Zeile von A mit a'_μ bezeichnen und durch $a_\mu > \alpha_\mu e$ mit passendem $\alpha_\mu > 0$ abschätzen $(\mu = 1, \dots, m)$:

$$a'_\mu \int_{\bar{G}_t} c(t) \circ d\vec{P} \geqq \alpha_\mu \beta(t)\, e' \int_{\bar{G}_t} e \circ d\vec{P} = \alpha_\mu \beta(t)\, n \int_{\bar{G}_t} dP > \alpha_\mu \beta(t)\, n \cdot \varepsilon_0 \to \infty \qquad \text{für } t \to \infty.$$

Damit haben wir aber wegen der Endlichkeit von $A\,{}_1^{\infty}r$ einen Widerspruch zu

$$A\,{}_1^{\infty}r \geqq I_t + {}_1I_t + {}_2I_t \qquad \text{für alle } t$$

hergeleitet und die Annahme $P(\bar{G}_t) > \varepsilon_0$ widerlegt, den Satz also vollständig bewiesen.

Mit Hilfe von $I_t + \bar{I}_t = A\,{}_1^{\infty}r$ und $I_t \to I_0 > -\vec{\infty}$ können wir schließen

$$\bar{I}_t \to \bar{I}_0 = A\,{}_1^{\infty}r - I_0 < +\vec{\infty} \qquad \text{für } t \to \infty.$$

Auf der anderen Seite entnehmen wir dem Beweisgang und $P(\bar{G}) = 0$:

$${}_2I_t \to \mathrm{o} = \int_{\bar{G}} A q \circ d\vec{P} \quad \text{und} \quad {}_1I_t \geqq \mathrm{o} \qquad \text{für alle } t,$$

so daß wir bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ nach unten abschätzen dürfen:

$$\bar{I}_t \geqq {}_1I_t + {}_2I_t \geqq -\varepsilon e \qquad \text{für alle } t \geqq t_0 \text{ bei hinreichend großem } t_0.$$

Das ergibt

$$\bar{I}_0 \geqq -\varepsilon e \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$

d.h. also

$$\bar{I}_0 \geqq \mathrm{o},$$

und wir erhalten den

(5.12) **Hilfssatz.** $A\,{}_1^{\infty}r \geqq \int_G A v({}^{\infty}T^*) \circ d\vec{P} = \int_\Omega A v({}^{\infty}T^*) \circ d\vec{P}$.

Wir werden nun zwei bestimmte zur A-Ecke von ${}^{\infty}R$ gehörige Tests angeben.

(5.13) **Satz.** *Setzt man* ${}^{\infty}s_* := v({}^{\infty}T_*)$ *bzw.* ${}^{\infty}s^* := v({}^{\infty}T^*)$, *so ergibt dies mit* ${}^{\infty}T_*$ *bzw.* ${}^{\infty}T^*$ *einen Test* ${}^{\infty}\mathcal{T}_*$ *bzw.* ${}^{\infty}\mathcal{T}^*$ *derart, daß* $r({}^{\infty}\mathcal{T}_*)$ *und* $r({}^{\infty}\mathcal{T}^*)$ *eigentlich existieren mit*

$$A\,r({}^{\infty}\mathcal{T}_*) = A\,r({}^{\infty}\mathcal{T}^*) = A\,r({}_1^{\infty}\mathcal{T}) = A\,{}_1^{\infty}r.$$

Beweis. 1. Vermöge (5.3) und (5.12) definieren ${}^{\infty}T_*$ und ${}^{\infty}s_*$ bzw. ${}^{\infty}T^*$ und ${}^{\infty}s^*$ tatsächlich einen Test.

2. Für ${}^{\infty}\mathscr{T}^*$ folgt mit Hilfssatz (5.12)

$$A\,r({}^{\infty}\mathscr{T}^*) = \int_{\Omega} A\,v({}^{\infty}T^*)\circ d\vec{P} \leqq A\,r({}^{\infty}_{1}\mathscr{T}).$$

Da jedoch ${}^{\infty}_{1}\mathscr{T}$ eine A-Ecke bestimmt, während ${}^{\infty}\mathscr{T}^*$ in ${}^{\infty}_{1}\mathfrak{T}$ liegt, hat man

$$A\,r({}^{\infty}\mathscr{T}^*) \overset{E}{\geqq} A\,r({}^{\infty}_{1}\mathscr{T}),$$

was zeigt

$$A\,r({}^{\infty}\mathscr{T}^*) = A\,r({}^{\infty}_{1}\mathscr{T}) = A\,{}^{\infty}_{1}r.$$

3. Ersetzt man in den Überlegungen ab (5.11) G durch H und $\dots^*$ durch $\dots_*$, so bleiben diese richtig, und man erhält

$$A\,r({}^{\infty}\mathscr{T}_*) = A\,r({}^{\infty}_{1}\mathscr{T}) = A\,{}^{\infty}_{1}r.$$

4. Wegen $A>0$ existieren mit $A\,{}^{\infty}_{1}r = A\,r({}^{\infty}\mathscr{T}^*) = A\,r({}^{\infty}\mathscr{T}_*)$ auch die Risikovektoren $r({}^{\infty}\mathscr{T}^*)$ und $r({}^{\infty}\mathscr{T}_*)$ selbst eigentlich, was den Beweis vervollständigt.

Wir wollen den Hilfssatz (5.10) noch etwas verallgemeinern. Anschließend sind wir dann in der Lage, den zu (3.16) analogen Satz zu beweisen.

(5.14) **Hilfssatz.** *Sei* $\mathscr{T}_0 \in {}^{\infty}_{t}\mathfrak{T}$ *mit* T_0, s_0 *A-optimal, dann gilt für alle Tests* $\mathscr{T}_1 \in {}^{\infty}_{t}\mathfrak{T}$ *mit* T_1, s_1 *und alle* $X \in \mathfrak{F}_t$

$$\int_X A\,s_0 \circ d\vec{P} \overset{E}{\leqq} \int_X A\,s_1 \circ d\vec{P}.$$

Der äußerst einfache Beweis kann übergangen werden.

(5.15) **Hilfssatz.** *Sei* $\mathscr{T}$ *mit* T, s *ein Test derart, daß* $r = r(\mathscr{T})$ *A-Ecke von* ${}^{\infty}_{1}R$, *dann gilt bei* $\{T<t\} \subset X \in \mathfrak{F}_t$

$$A\,r = \int_X A\,s\circ d\vec{P} + \int_{\bar{X}} {}^{\infty}_{t}u\,dP \qquad \textit{für alle } t = 1, 2, \dots.$$

Beweis. Wegen $\{T<t\} \subset X$ gilt $T \geqq t$ auf $\bar{X}$; zufolge (5.14) ist daher

$$\mathscr{E}(A\,s\circ f(T)\,|\,\mathfrak{F}_t) \overset{E}{\geqq} {}^{\infty}_{t}u \qquad \text{auf } \bar{X}.$$

Daraus folgt weiter

$$A\,r = \int_X A\,s\circ f(T)\,dP + \int_{\bar{X}} \mathscr{E}(A\,s\circ f(T)\,|\,\mathfrak{F}_t)\,dP \overset{E}{\geqq} \int_X A\,s\circ f(T)\,dP + \int_{\bar{X}} {}^{\infty}_{t}u\,dP =: A\,r_1.$$

Andererseits ist r_1 der Risikovektor des Testes $\mathscr{T}_1$ mit

$$T_1, s_1 = \begin{cases} T, s & \text{auf } X \\ {}^{\infty}_{t}T, {}^{\infty}_{t}s & \text{auf } \bar{X} \end{cases}.$$

Mithin hat man auch $A\,r_1 \overset{E}{\geqq} A\,r$, was $A\,r_1 = A\,r$ zeigt.

(5.15*) **Korollar.** *Unter den Voraussetzungen von* (5.15) *gilt*

$$\mathscr{E}(A\,s\circ f(T)\,|\,\mathfrak{F}_t) = {}^{\infty}_{t}u \qquad P\text{-}\textit{fast auf } \bar{X}.$$

(5.15**) **Korollar.** *Unter den Voraussetzungen von* (5.15) *gilt*

$$A r = \int_{\{T<t\}} A s \circ d\vec{P} + \int_{\{T \geqq t\}} {}_t^{\infty}u \, dP \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots .$$

(5.16) **Satz.** *Unter der Voraussetzung* (5.1) *gilt bei* $A > 0$:

(1) *Ist der Risikovektor des Testes* $\mathscr{T}$ *eine A-Ecke von* ${}^{\infty}R$, *so gilt für die zugehörige Stopzeit T:*

$${}^{\infty}T_* \leqq T \leqq {}^{\infty}T^* \quad \text{und} \quad {}_T^{\infty}u = A v(T) \circ f(T) \quad P\text{-fast überall.}$$

(2) *Umgekehrt liefert jede Stopzeit T mit*

$${}^{\infty}T_* \leqq T \leqq {}^{\infty}T^* \quad \text{und} \quad {}_T^{\infty}u = A v(T) \circ f(T) \quad P\text{-fast}$$

zusammen mit einer Schadensfunktion s derart, daß

$$A s \circ f(T) = A v(T) \circ f(T) \quad P\text{-fast ist,}$$

eine A-Ecke von ${}^{\infty}R$.

Beweis. (1) (a) Unter der Annahme $P(T < {}^{\infty}T_*) > 0$ gibt es ein $t < \infty$ derart, daß $\bar{X} := \{T = t;\ T_* > t\} = \{T = t\}\, \bar{H}_t$ positive Wahrscheinlichkeit besitzt. Ferner ist $\{T < t\} \subset X \in \mathfrak{F}_t$. Zufolge (5.3), Teil (2) und der wegen $\bar{X} \subset \bar{H}_t \subset {}_t^{\infty}\bar{H}$ gültigen Beziehung

$${}_t^{\infty}u = \mathscr{E}({}_{t+1}^{\infty}u \,|\, \mathfrak{F}_t) \underset{\neq}{\overset{E}{<}} A v(t) \circ f(t) \qquad P\text{-fast auf } \bar{X}$$

hat man zusammen mit (5.15)

$$\begin{aligned} A r(\mathscr{T}) &= \int_X A s \circ d\vec{P} + \int_{\bar{X}} A s \circ d\vec{P} = \int_X A s \circ d\vec{P} + \int_{\bar{X}} A v(t) \circ f(t)\, dP \\ &\underset{\neq}{\overset{E}{>}} \int_X A s \circ d\vec{P} + \int_{\bar{X}} {}_t^{\infty}u \, dP = A r(\mathscr{T}), \end{aligned}$$

was einen Widerspruch darstellt. Demnach ist P-fast überall ${}^{\infty}T_* \leqq T$.

(b) Im Falle $P(T > {}^{\infty}T^*) > 0$ läßt sich ein $t < \infty$ finden mit $P(\bar{Y}) > 0$ bei $\bar{Y} := \{T > t;\ T^* = t\} \in \mathfrak{F}_t$. Dabei ist $\{T < t\} \subset \{T < t+1\} \subset Y \in \mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+1}$. Ähnlich wie oben schätzt man der Reihe nach mittels (5.15) sowie der wegen $\bar{Y} \subset \{{}^{\infty}T^* = t\} \subset {}_t^{\infty}G$ geltenden Beziehung

$${}_t^{\infty}u = A v(t) \circ f(t) \underset{\neq}{\overset{E}{<}} \mathscr{E}({}_{t+1}^{\infty}u \,|\, \mathfrak{F}_t) \qquad P\text{-fast auf } \bar{Y}$$

und nochmaliger Anwendung von (5.15) ab

$$\begin{aligned} A r(\mathscr{T}) &= \int_Y A s \circ d\vec{P} + \int_{\bar{Y}} {}_{t+1}^{\infty}u \, dP = \int_Y A s \circ d\vec{P} + \int_{\bar{Y}} \mathscr{E}({}_{t+1}^{\infty}u \,|\, \mathfrak{F}_t)\, dP \\ &\underset{\neq}{\overset{E}{>}} \int_Y A s \circ d\vec{P} + \int_{\bar{Y}} {}_t^{\infty}u \, dP = A r(\mathscr{T}), \end{aligned}$$

was wiederum zu einem Widerspruch führt. Somit ist P-fast überall ${}^{\infty}T^* \geqq T$.

(2) Zu $\mathscr{T}$ aus (2) definieren wir eine Folge von Tests $\mathscr{T}_t$ vermöge

$$T_t, s_t := \begin{cases} T, s & \text{für } T \leqq t \\ {}^{\infty}T^*, {}^{\infty}s^* & \text{für } T > t \end{cases}$$

und beweisen durch vollständige Induktion nach t:

$$A\,r(\mathscr{T}_t) = A\,{}^{\infty}_{1}r.$$

Bei $t=1$ hat man

$$A\,v(1)\circ f(1) = {}^{\infty}_{1}u \qquad \text{auf } \{T=1\},$$

also mit (5.15*) und (5.15**)

$$\begin{aligned} A\,r(\mathscr{T}_1) &= \int_{\{T=1\}} A\,v(T)\circ d\vec{P} + \int_{\{T>1\}} A\,{}^{\infty}s^*\circ d\vec{P} \\ &= \int_{G_1} A\,v(1)\circ d\vec{P} + \int_{\bar{G}_1\{T=1\}} {}^{\infty}_{1}u\,dP + \int_{\{T>1\}} {}^{\infty}_{1}u\,dP = A\,r({}^{\infty}\mathscr{T}^*) \\ &= A\,{}^{\infty}_{1}r. \end{aligned}$$

Zur Durchführung des Induktionsschlusses beachten wir: Es ist

$${}^{\infty}_{t}u = A\,v(t)\circ f(t) \qquad P\text{-fast auf } \{T=t\}.$$

Daraus folgt mit Hilfe des Korollars (5.15*) und der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} A\,r(\mathscr{T}_t) &= \int_{\{T<t\}} A\,v(T)\circ d\vec{P} + \int_{\{T=t\}} A\,v(t)\circ d\vec{P} + \int_{\{T>t\}} A\,{}^{\infty}s^*\circ d\vec{P} \\ &= \int_{\{T<t\}} A\,v(T)\circ d\vec{P} + \int_{\{T=t\}} {}^{\infty}_{t}u\,dP + \int_{\{T>t\}} {}^{\infty}_{t}u\,dP \\ &= \int_{\{T\leqq t-1\}} A\,v(T)\circ d\vec{P} + \int_{\{T>t-1\}} A\,{}^{\infty}s^*\circ d\vec{P} = A\,r(\mathscr{T}_{t-1}) = A\,{}^{\infty}_{1}r, \end{aligned}$$

und die Behauptung ist verifiziert.

Daraus ziehen wir weiter die Folgerung

$$\int_{\{T=t\}} A\,v(t)\circ d\vec{P} = \int_{\{T=t\}} A\,{}^{\infty}s^*\circ d\vec{P} \qquad \text{für alle } t=1,2,\ldots,$$

und schließen endlich

$$\begin{aligned} A\,{}^{\infty}_{1}r = \int_{\Omega} A\,{}^{\infty}s^*\circ d\vec{P} &= \sum_{t=1}^{\infty} \int_{\{T=t\}} A\,{}^{\infty}s^*\circ d\vec{P} \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \int_{\{T=t\}} A\,v(t)\circ d\vec{P} = A\,r(\mathscr{T}); \end{aligned}$$

wodurch auch die zweite Hälfte des Satzes bewiesen ist.

Damit haben wir die Sätze (3.14) bis (3.16) auf den unendlichstufigen Fall übertragen. Es fehlt uns jedoch noch ein Verfahren, um die bislang unbekannten, für die Gewinnung von optimalen Tests aber notwendigen Funktionen ${}^{\infty}_{t}u$ zu konstruieren.

Kehren wir noch einmal zur Definition der unteren und oberen Stopzeiten zurück. Nach (5.8) und (5.9) ist P-fast bei $k<i\leqq\infty$:

$$\{{}^{k}T_{*}\leqq t\} = {}^{k}H_t \supset {}^{i}H_t = \{{}^{i}T_{*}\leqq t\},$$

also

$${}^kT_* \leqq {}^iT_* \qquad P\text{-fast überall};$$

analog

$${}^kT^* \leqq {}^iT^* \qquad P\text{-fast überall}.$$

Damit gilt P-fast überall

$$\lim_{k\to\infty} {}^kT_* =: T_* \leqq {}^\infty T_* \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} {}^kT^* =: T^* \leqq {}^\infty T^*.$$

Wegen

$$\{T_* \leqq t\} = \bigcap_k {}^kH_t \in \mathfrak{F}_t \quad \text{und} \quad \{T^* \leqq t\} = \bigcap_k {}^kG_t \in \mathfrak{F}_t$$

erfüllen diese Limiten die Meßbarkeitsbedingung für Stopzeiten. Außerdem sind sie durch ${}^\infty T^*$ nach oben beschränkt, weshalb sie nur mit Wahrscheinlichkeit 0 den Wert ∞ annehmen können und somit selbst Stopzeiten sind. Das legt die Vermutung nahe $T_* = {}^\infty T_*$ und $T^* = {}^\infty T^*$, die sich jedoch als falsch herausstellt. Auch die schwächere Vermutung ${}^\infty T_* \leqq T^* \leqq {}^\infty T^*$, die mittels (5.15*) und (5.16) zu Aussagen über die ${}^\infty_t u$ führen würde, erweist sich leider als falsch. Wir wollen uns anhand eines Beispiels davon überzeugen und nehmen dazu den einfachsten Fall $n=1$. (Das ist keine unzulässige Einschränkung; denn man kann daraus ein Beispiel für ein beliebiges n konstruieren, indem man alle P_ν gleich setzt und die Schadensbereiche als Produktmengen des eindimensionalen Falles wählt.)

(5.17) *Beispiel.* Seien Ω, $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{G}_{t-1}$ und $P_1 = P$ wie in (4.2); dazu $S(\omega; t) := \{s(\omega; t)\}$ einpunktig gemäß

$$s(\omega; 1) := 2,$$

$$s(\omega; t) := \begin{cases} t-\omega & \text{für } \omega < t \\ 2^t & \text{für } \omega \geqq t \end{cases} \qquad \text{bei } 1 < t < \infty,$$

$$s(\omega; \infty) := \infty.$$

Es ist $h(p; \omega; t) = g(p; \omega; t) = p \cdot s(\omega; t)$, und bis auf die Bedingungen (3) und (4) ist die Voraussetzung (5.1) trivialerweise erfüllt. Weiter ist

$$\int_\Omega \pm s(\omega; t)\, dP = \pm \sum_{\omega < t} (t-\omega)/2^\omega + 2$$

endlich, also auch (3) gegeben. Schließlich gilt

$$\liminf_{t\to\infty} s(\omega; t) = \lim_{t\to\infty} (t-\omega) = +\infty \qquad \text{für alle } \omega$$

und

$$\int_\Omega \inf_{t<\infty} s(\omega; t)\, dP = 1,$$

womit auch (4) nachgeprüft wurde.

Wir wählen $A=1$ und geben dafür die Rekursionsformeln zur Berechnung der ${}^k_t u$ gemäß (5.4) bei $1 < k < \infty$ an.

$$A\, v(k) \circ f(k) = s(\omega; k) = {}^k_k u,$$

$$\mathscr{E}({}^k_k u \mid \mathfrak{F}_{k-1}) = \begin{cases} k-\omega & \text{für } \omega < k-1 \\ 2^{k-1} + \frac{1}{2} & \text{für } \omega \geqq k-1. \end{cases}$$

Das ergibt sukzessiv für $k>2$

$$ {}_{k-1}^{k}u=\min\big(s(\omega;k-1),\mathscr{E}({}_{k}^{k}u\,|\,\mathfrak{F}_{k-1})\big)=s(\omega;k-1), $$

$$ {}_{t}^{k}u=\min\big(s(\omega;t),\mathscr{E}({}_{t+1}^{t+1}u\,|\,\mathfrak{F}_{t})\big)=s(\omega;t)\qquad(t>1) $$

und

$$ {}_{1}^{k}u=2<\mathscr{E}({}_{2}^{k}u\,|\,\mathfrak{F}_{1})=2+\tfrac{1}{2}. $$

Daraus folgert man

$$ {}^{k}G_1={}^{k}H_1=\Omega,\qquad {}^{k}T_*={}^{k}T^*=1\qquad \text{auf } \Omega \text{ für alle } k<\infty, $$

was zu

$$ T_*=T^*=1\qquad \text{auf } \Omega $$

führt.

Nun ist aber $s(\omega;t)=1$ bei $t=\omega+1$ und $\{\omega\}\in\mathfrak{F}_{\omega+1}$ für alle $\omega\in\Omega$. Man kann mithin einen Test $\mathscr{T}_0$ mit der Stopzeit $T_0(\omega)=\omega+1$ und der Schadensfunktion $s_0(\omega)=1$ auf $\{\omega\}\in\mathfrak{F}_{\omega+1}$ finden, was $Ar(\mathscr{T}_0)=1$ liefert und wegen $s(\omega;t)\geqq 1$ für alle t,ω sicher Ar minimiert. Zusätzlich sieht man, daß nur für diesen Test $Ar=1$ angenommen wird, für alle anderen aber $Ar>1$ gilt. Somit ist

$$ {}^{\infty}T_*(\omega)={}^{\infty}T^*(\omega)=\omega+1>T_*(\omega)=T^*(\omega)\qquad \text{auf ganz } \Omega. $$

Beachtet man noch $\mathfrak{F}_1=\{\emptyset,\Omega\}$ und weiter

$$ \int_\Omega s_0\circ dP=1=\int_\Omega {}_{1}^{\infty}u\,dP={}_{1}^{\infty}u, $$

so läßt sich konstatieren

$$ \lim_{k\to\infty}{}_{1}^{k}u=2>{}_{1}^{\infty}u=1. $$

Das lehrt uns, daß im allgemeinen auch die A-Ecke von ${}^{k}R$ bei $k\to\infty$ nicht gegen die A-Ecke von ${}^{\infty}R$ strebt.

Um für die Bayeslösungen, an denen man vor allem interessiert ist, ein Konstruktionsverfahren zu erhalten, welches sich auf die berechenbaren Größen ${}_{t}^{k}u$ bzw. ${}_{t}^{k}T$ stützt, muß man zusätzliche Bedingungen in die Voraussetzung (5.1) aufnehmen, die natürlich möglichst schwach sein sollen. Im Beispiel (5.17) kam die Ungleichung $\lim\limits_{k\to\infty}{}_{1}^{k}u>{}_{1}^{\infty}u$ dadurch zustande, daß die Funktionen $s(\omega;t)$ für bestimmte ω-Werte zu stark gegen Unendlich streben und nicht gleichmäßig in t integrabel sind. Wir haben also eine Bedingung anzugeben, die die möglichen Schadensfunktionen in geeigneter Weise beschränkt.

Zu diesem Zweck kehren wir zurück zu den Überlegungen in Paragraph 4 und setzen mit $c(t)$ und $Q(\omega;t)$ aus (4.3′):

$$ S(\omega;t)=c(t)+Q(\omega;t). $$

Dann ist die vordere Hülle $H(\omega;t)=c(t)+H\big(Q(\omega;t)^{ka}\big)$, und ihre Stützfunktion läßt sich schreiben

$$ h(p;\omega;t)=p'\,c(t)+q(p;\omega;t), $$

worin $q(p;\omega;t)$ die Stützfunktion der vorderen Hülle $H\big(Q(\omega;t)^{ka}\big)$ bezeichne. Wir verlangen nun eine gewisse Beschränkung der vorderen Hüllen von $Q(\omega;t)^{ka}$ „nach hinten“ (vgl. die Erörterungen vor (3.10)), nämlich

(5.18) *Zusatzvoraussetzung.*

$$\int_{\Omega} \inf_{t<\infty} q(-e_\nu;\omega;t)\,dP_\nu > -\infty \qquad \text{für } \nu=1,\dots,n.$$

Als Folgerung erhalten wir den

(5.19) **Hilfssatz.** *Unter den Voraussetzungen* (5.1) *und* (5.18) *gibt es eine Funktion* $q(\omega)>0$ *derart, daß das Integral* $\int_{\Omega} e'_\nu q(\omega)\,dP_\nu$ *eigentlich existiert und für alle* $x(\omega;t)$ *aus* $H\big(Q(\omega;t)^{ka}\big)$ *gilt*

$$|e'_\nu x(\omega;t)| \leqq e'_\nu q(\omega) \qquad (\nu=1,\dots,n).$$

Beweis. (a) Ersetzt man in (4.3′) die Funktion f durch q, so folgt aus (5.1), Teil (4), (4.4) und (4.3′), Teil (3′) bei $p=e_\nu$:

$$\int_{\Omega} \inf_{t} q(e_\nu;\omega;t)\,dP_\nu > -\infty.$$

(b) Bei $x(\omega;t)\in H\big(Q(\omega;t)^{ka}\big)$ gilt

$$0 \leqq |e'_\nu x(\omega;t)| \leqq \max\big(-q'_\nu(\omega), -q''_\nu(\omega)\big) =: e'_\nu q(\omega)$$

mit

$$q'_\nu := \inf_t q(e_\nu;\omega;t) \quad \text{und} \quad q''_\nu := \inf_t q(-e_\nu;\omega;t),$$

worin $e'_\nu q(\omega)$ eigentlich P_ν-integrabel ist.

Damit sind wir in der Lage, auch im unendlichstufigen Fall für jede gegebene Vorbewertung $p>0$ sämtliche Bayeslösungen aufzufinden.

(5.20) **Satz.** *Unter den Voraussetzungen* (5.1) *und* (5.18) *gilt:*

(1) *Ein Test* $\mathcal{T}$ *mit Stopzeit* T *und Schadensfunktion* s *ist genau dann Bayes-lösung bezüglich* $p>0$, *wenn* P*-fast*

$${}^{\infty}T_*(\omega) \leqq T(\omega) \leqq {}^{\infty}T^*(\omega) \quad \textit{und} \quad {}^{\infty}_{T}u = p'\,v(\omega;T)\circ f(\omega;T),$$

sowie

$$p'\,s(\omega)\circ f\big(\omega;T(\omega)\big) = p'\,v\big(\omega;T(\omega)\big)\circ f\big(\omega;T(\omega)\big).$$

Dabei bestimmen sich ${}^{\infty}T_*$ *und* ${}^{\infty}T^*$ *gemäß* (5.6) *und* (5.9) *mit Hilfe der Beziehung*

$${}^{\infty}_{t}u = \lim_{k\to\infty} {}^{k}_{t}u.$$

(2) *Das Bayesrisiko berechnet sich zu*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} {}^{k}_{1}u\,dP.$$

Bemerkung. Das Bayesrisiko im unendlichstufigen Fall ist also gemäß (3.19) der Grenzwert der Bayesrisiken der spätestens nach k Schritten abbrechenden Tests.

Beweis. (1) Nach Teil (5) des Hilfssatzes (5.4) ist

$${}^{\infty}_{t}u \leqq {}^{k+1}_{t}u \leqq {}^{k}_{t}u \qquad P\text{-fast überall für alle } k<\infty.$$

Es existiert daher

$$ {}_t u := \lim_{k\to\infty} {}_t^k u $$

P-fast mit ${}_t^\infty u \leqq {}_t u$. Ferner sind ${}_t u$ und ${}_t^k u$ für alle k und t $\mathfrak{F}_t$-meßbare Funktionen.

Bei festem t sei $X \in \mathfrak{F}_t$ beliebig. Setzt man noch

$$ F_j := \{{}_t^\infty T = j\}\, X \in \mathfrak{F}_j \qquad (j = t, t+1, \ldots), $$

sowie

$$ V_k := \bigcup_{k \leqq j} F_j \{{}_t^\infty T \geqq k\} \in \mathfrak{F}_k \qquad \text{für } k > t; $$

und ist $v(j) = c(j) + q(j)$ auf F_j mit $q(j) \in H(Q(\omega; j)^{ka})$, so hat man die Abschätzung $-q \leqq q(j) \leqq +q$, und es ist

$$ \begin{aligned} \int_X {}_t u\, dP \geqq \int_X {}_t^\infty u\, dP &= \sum_{t \leqq j} \int_{F_j} p'\, {}_t^\infty s \circ d\vec{P} \\ &= \sum_{t \leqq j < k} \int_{F_j} p' v(j) \circ d\vec{P} + \sum_{k \leqq j} \int_{F_j} p'\, {}_t^\infty s \circ d\vec{P} \\ &= \sum_{t \leqq j < k} \int_{F_j} p' v(j) \circ d\vec{P} + \sum_{k \leqq j} \int_{F_j} p' v(k) \circ d\vec{P} \\ &\quad + \sum_{k \leqq j} \int_{F_j} p' \big(c(j) - c(k) + q(j) - q(k)\big) \circ d\vec{P} \\ &\geqq \sum_{t \leqq j < k} \int_{F_j} p' v(j) \circ d\vec{P} + \int_{V_k} p' v(k) \circ d\vec{P} \\ &\quad + \sum_{k \leqq j} \int_{F_j} p' \big(c(j) - c(k)\big) \circ d\vec{P} - 2 \int_{V_k} p' q \circ d\vec{P} \\ &\geqq \sum_{t \leqq j < k} \int_{F_j} p' v(j) \circ d\vec{P} + \int_{V_k} p' v(k) \circ d\vec{P} - 2 \int_{V_k} p' q \circ d\vec{P}. \end{aligned} $$

Hieraus ergibt sich vermittels des Hilfssatzes (5.14)

$$ \begin{aligned} \int_X {}_t u\, dP \geqq \int_X {}_t^\infty u\, dP &\geqq \int_X {}_t^k u\, dP - 2 \int_{V_k} p' q \circ d\vec{P} \\ &\geqq \int_X {}_t u\, dP - 2 \int_{V_k} p' q \circ d\vec{P}. \end{aligned} $$

Wegen der Integrabilität von q und weil $V_k \subset \{{}_t^\infty T \geqq k\}$ mit $P({}_t^\infty T \geqq k) \to 0$ bei $k \to \infty$, läßt sich das letzte Integral beliebig klein machen. Daher gilt

$$ \int_X {}_t u\, dP = \int_X {}_t^\infty u\, dP \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{F}_t, $$

was letztlich

$$ {}_t u = {}_t^\infty u \qquad P\text{-fast überall} $$

ergibt.

(2) Nach dem Satz von Lebesgue über monotone, integralbeschränkte Konvergenz gilt

$$ p'\, {}_1^\infty r = p' \int_\Omega {}_1^\infty s \circ d\vec{P} = \int_\Omega {}_1^\infty u\, dP = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} {}_1^k u\, dP = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega {}_1^k u\, dP. $$

Literatur

1. Bhat, B. R.: Bayes solutions of sequential decision problems for Markov dependent observations. Ann. math. Statistics **35**, 1656–1662 (1964).
2. Blackwell, D.: The range of certain vector integrals. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 390–395 (1951).
3. Borges, R.: Ecken des Wertebereiches von Vektorintegralen. Math. Ann. **173**, 53–58 (1967).
4. Ferguson, T. S.: Mathematical statistics. A decision theoretic approach. New York-London: Academic Press 1967.
5. Haupt-Aumann-Pauc: Differential- und Integralrechnung I. Berlin: De Gruyter 1948.
6. Karlin, S.: Mathematical methods and theory in games, programming and economics I. London-Paris: Pergamon 1959.
7. Kellerer, H. G.: Bemerkung zu einem Satz von H. Richter. Arch. der Math. **15**, 204–207 (1964).
8. Krieger, W.: On the existence of optimal sampling rules. Unveröffentlichtes Manuskript.
9. Ljapunov, A.: Sur les fonctions-vecteurs complètement additives. Bull. Acad. Sci. USSR (Sér. Math.) **4**, 465–478 (1940).
10. Mammitzsch, V.: Zur Theorie der endlichstufigen Tests. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **7**, 182–189 (1967).
11. – Die Übertragung gewisser Eigenschaften der Schadensbereiche auf den Risikobereich bei endlichstufigen Tests. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **9**, 258–264 (1968).
12. Richter, H.: Subjektive Wahrscheinlichkeit und multi-subjektive Tests. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **1**, 271–277 (1963).
13. – Endlichstufige Tests mit abhängigen Beobachtungen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **2**, 22–32 (1963).
14. – Optimale Sequenzwiederholungstests. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **5**, 156–166 (1966).
15. Siegmund, D. O.: Some problems in the theory of optimal stopping rules. Ann. math. Statistics **38**, 1627–1640 (1967).
16. Snell, J. L.: Application of martingale system theorems. Trans. Amer. math. Soc. **73**, 293–312 (1952).
17. Wald, A.: Sequential analysis. New York-London-Sidney: Wiley 1947.
18. Wegmann, R.: Der Wertebereich von Integralvektoren. Dissertation München 1968.
19. Wetherill, G. B.: Sequential methods in statistics. London: Methuen, New York: Wiley 1966.
20. Arrow-Barankin-Blackwell: Admissible points of convex sets. Contributions to the theory of games II. Ann. Math. Studies **28**, 87–91 (1953).

Dr. V. Mammitzsch
Institut für Math. Statistik
BRD-7500 Karlsruhe 1
Englerstraße
Deutschland

(Eingegangen am 28. Januar 1970)