Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 5, 139—145 (1966)

Entscheidbare Behauptungen, konsistente Schätzer- und Testfolgen

HANS SCHMERKOTTE

Eingegangen am 18. April 1964/19. Juli 1965

Einleitung

Die folgenden Ausführungen sollen auf Zusammenhänge hinweisen, die zwischen dem von H. RICHTER [5] eingeführten Entscheidbarkeitsbegriff und der Konsistenz von Schätzer- und Testfolgen bestehen.

Es sei jeder natürlichen Zahl n ein σ-Körper $\mathscr{B}_n$ über einem Merkmalsraum X_n und damit auch ein Produkt-σ-Körper $\mathscr{B}_1 \times \ldots \times \mathscr{B}_n$ zugeordnet. Ist auf jedem $\mathscr{B}_1 \times \ldots \times \mathscr{B}_n$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_n erklärt und sind diese μ_n verträglich, so wird die Folge $\mathfrak{m} := \{\mu_n : n = 1, 2, \ldots\}$ eine *einfache statistische Hypothese* über der *Versuchskette* $K := \{(X_n, \mathscr{B}_n) : n = 1, 2, \ldots\}$ genannt. Die *Hypothesenmenge* $\mathfrak{M}(K)$ über K ist die Menge aller einfachen statistischen Hypothesen über K. Ist E Element aus $\mathscr{B}_1 \times \ldots \times \mathscr{B}_n$ (wir sagen dann auch, E ist *Testereignis zum Stichprobenumfang* n), so wird zu E eine auf $\mathfrak{M}$ erklärte Funktion, die *Likelihoodfunktion*, durch $l(\mathfrak{m}; E) := \mu_n(E; \mathfrak{m})$ definiert. Mit $\mathscr{N}$ bezeichnen wir den kleinsten σ-Körper über $\mathfrak{M}$, bezüglich dessen alle Likelihoodfunktionen meßbar sind. Wir nehmen nun an, daß es in $\mathfrak{M}$ eine *wahre Hypothese* $\hat{\mathfrak{m}}$ gibt, die uns zwar unbekannt ist, über deren Lage in $\mathfrak{M}$ aber eine *Glaubwürdigkeitsbewertung* φ [5] ein Vorwissen zum Ausdruck bringt. φ ist ein in $\mathfrak{M}$ erklärtes normales Maß mit dem Definitionsbereich $\mathscr{N}$. Eine Behauptung, $B_{\mathfrak{N}} :=$ „$\hat{\mathfrak{m}}$ liegt in $\mathfrak{N} \in \mathscr{N}$", heißt *bezüglich* φ *entscheidbar* [5, S. 334], wenn gilt:

(A) *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es ein Testereignis E_n, mit dem die folgenden Ungleichungen erfüllt sind.*

$$\int_{\mathfrak{N}} l(\mathfrak{m}; E_n)\, d\varphi \geqq n \int_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}} l(\mathfrak{m}; E_n)\, d\varphi,$$

$$\int_{\mathfrak{N}} l(\mathfrak{m}; E_n^c)\, d\varphi \leqq \frac{1}{n} \int_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}} l(\mathfrak{m}; E_n^c)\, d\varphi.$$

E_n^c ist dabei das Komplement von E_n. $\{E_n\}$ nennen wir dann eine *entscheidende Testereignisfolge zu* $\mathfrak{N}$. Mit $\mathscr{E}$ bezeichnen wir das System der Mengen $\mathfrak{N} \in \mathscr{N}$, für die $B_{\mathfrak{N}}$ bezüglich φ entscheidbar ist. Von der Entscheidbarkeitsdefinition ausgehend, beweisen wir für endliche φ:

1. $\mathscr{E}$ ist ein σ-Körper.

2. Ist φ-fast allen $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ ein Parameter $q(\mathfrak{m}) \in R^k$ zugeordnet, so sind Behauptungen der Art: „$q(\hat{\mathfrak{m}})$ liegt in einer vorgegebenen Borelmenge des R^k" genau dann entscheidbar, wenn es für q eine konsistente Schätzerfolge gibt.

3. $B_{\mathfrak{N}}$ ist genau dann entscheidbar, wenn es zu jeder reellen Zahl α, $0 < \alpha < 1$, für die Hypothese $\mathfrak{N}$ eine konsistente Testfolge mit asymptotischer Sicherheitsschranke α gibt.

1. Hilfssätze

Wir nennen eine Folge von Testereignissen $\{E_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *regulär*, wenn für jedes n E_n Testereignis zum Stichprobenumfang n ist.

Auf Grund ihrer Definition sind die Likelihoodfunktionen verträglich; d.h., sind i, j natürliche Zahlen und ist $i < j$, so gilt für jedes Ereignis $E \in \mathscr{B}_1 \times \ldots \times \mathscr{B}_i$ $l(\mathfrak{m}; E) = l(\mathfrak{m}; E \times X_{i+1} \times \ldots \times X_j)$. Aus der Verträglichkeit folgt unmittelbar

Hilfssatz 1. *Ist $\{E_n\}$ eine Testereignisfolge und gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} l(\mathfrak{m}; E_n) = f(\mathfrak{m}) \qquad \text{für} \qquad \mathfrak{m} \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}, \tag{1}$$

so läßt sich eine reguläre Testereignisfolge angeben, die ebenfalls Bedingung (1) *erfüllt.*

Es sollen hier nur endliche Maße φ betrachtet werden. Unter dieser Voraussetzung, die wir im folgenden nicht mehr besonders anführen, ist (A) äquivalent der Bedingung (B):

(B) *Es existiert eine Testereignisfolge $\{E_n\}$, so daß gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} l(\mathfrak{m}; E_n) = \chi_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}) \qquad \varphi\text{-f.ü.}.$$

Dabei ist $\chi_{\mathfrak{N}}$ die Indikatorfunktion von $\mathfrak{N}$.

Beweis. (B) impliziert (A), wie unmittelbar einzusehen ist. Umgekehrt folgt aus (A), daß die Folge $\{l(\mathfrak{m}; E_n)\}$ dem Maße φ nach gegen $\chi_{\mathfrak{N}}$ konvergiert. Damit existiert eine Teilfolge, die φ-f.ü. auf $\mathfrak{M}$ gegen $\chi_{\mathfrak{N}}$ konvergiert, also gilt (B).

Hilfssatz 2. *$\mathscr{E}$ ist ein Mengenkörper, und es gilt:*

a) *Ist $\{E_n\}$ entscheidende Testereignisfolge zu $\mathfrak{N}$, so ist die Folge der Komplemente $\{E_n^c\}$ entscheidende Testereignisfolge zu $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$.*

b) *Ist $\mathfrak{N}_j$ aus $\mathscr{E}$ auf Grund der regulären Testereignisfolge $\{E_{jn}\}$, $j = 1, \ldots, k$, so ist $\{\bigcup_j E_{jn}\}$ entscheidende Testereignisfolge zu $\bigcup_j \mathfrak{N}_j$.*

Beweis. 1. $\mathscr{E}$ ist nicht leer, denn $\{X_1 \times \ldots \times X_n\}$ ist eine entscheidende Testereignisfolge zu $\mathfrak{M}$. 2. $\mathscr{E}$ ist bezüglich Komplementbildung abgeschlossen. Konvergiert nämlich $\{l(\mathfrak{m}; E_n)\}$ φ-f.ü. gegen $\chi_{\mathfrak{N}}$, so konvergiert die Folge $\{l(\mathfrak{m}; E_n^c)\} = \{1 - l(\mathfrak{m}; E_n)\}$ φ-f.ü. gegen $\chi_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$. 3. $\mathscr{E}$ ist bezüglich Vereinigungsbildung abgeschlossen. Ist für $j = 1, 2$ $\mathfrak{N}_j \in \mathscr{E}$, so gibt es zu $\mathfrak{N}_j$ eine entscheidende Testereignisfolge $\{E_{jn}\}$, die auf Grund von Hilfssatz 1 regulär gewählt werden kann. Für $\{E_n\}$, definiert durch $E_n := E_{1n} \cup E_{2n}$, gilt dann: $l(\mathfrak{m}; E_n) \geqq l(\mathfrak{m}; E_{jn})$ $(j = 1, 2)$ und $l(\mathfrak{m}; E_n) \leqq l(\mathfrak{m}; E_{1n}) + l(\mathfrak{m}; E_{2n})$. Ist nun $\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$ und damit in wenigstens einer der beiden Mengen enthalten, z.B. $\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}_1$, so folgt aus der ersten Ungleichung

$$1 \geqq \limsup l(\mathfrak{m}; E_n) \geqq \liminf l(\mathfrak{m}; E_n) \geqq \lim l(\mathfrak{m}; E_{1n}).$$

Gehört $\mathfrak{m}$ zum Komplement von $\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$, so impliziert die zweite Ungleichung

$$0 \leqq \liminf l(\mathfrak{m}; E_n) \leqq \limsup l(\mathfrak{m}; E_n) \leqq \lim l(\mathfrak{m}; E_{1n}) + \lim l(\mathfrak{m}; E_{2n}).$$

Gehört $\mathfrak{m}$ nicht zur Vereinigung der beiden Ausnahmemengen, so gilt im ersten Fall $\lim l(\mathfrak{m}; E_{n1}) = 1$ und im zweiten Fall $\lim l(\mathfrak{m}; E_{1n}) + \lim l(\mathfrak{m}; E_{2n}) = 0$. Durch Zusammenfassen erhalten wir $\lim l(\mathfrak{m}; E_n) = \chi_{\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2}$ φ-f.ü..

Später werden wir mit Hilfe von Testereignissen Schätzer konstruieren. Bei der angewandten Methode wird das folgende Korollar benötigt.

Korollar. *Bilden die Mengen* $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_k \in \mathscr{E}$ *eine disjunkte Aufteilung der Hypothesenmenge* $\mathfrak{M}$, *so gibt es für jedes* j, $j = 1, \ldots, k$, *eine entscheidende Testereignisfolge* $\{E_{jn}\}$ *zu* $\mathfrak{N}_j$, *so daß für jedes* n, $n = 1, 2, \ldots$, *die Testereignisse* $E_{1n}, \ldots, E_{kn}$ *eine disjunkte Aufteilung des Stichprobenraumes zum Stichprobenumfang* n *bilden.*

Beweis. Für jedes j, $j = 1, \ldots, k$, gilt $\mathfrak{N}_j = (\bigcup_{\varkappa \neq j} \mathfrak{N}_\varkappa)^c$. Zu $\mathfrak{N}_j$ gibt es eine reguläre entscheidende Testereignisfolge $\{E'_{jn}\}$. Mit Hilfe der $\{E'_{jn}\}$ definieren wir entscheidende Testereignisfolgen $\{E_{jn}\}$ mit den geforderten Eigenschaften durch:

$$E_{1n} := E'_{1n}$$

$$E_{jn} := \left(\bigcup_{\varkappa=1}^{j-1} E_{\varkappa n} \cup \bigcup_{\varkappa=j+1}^{k} E'_{\varkappa n} \right)^c \qquad j = 2, \ldots, k.$$

$\mathscr{E}$ ist nach Hilfssatz 2 ein Mengenkörper. Wir zeigen, daß $\mathscr{E}$ ein σ-Körper ist, und benutzen dabei den folgenden Hilfssatz über Doppelfolgen.

Hilfssatz 3[1]**.** *Es seien für* $n, j = 1, 2, \ldots, f_{jn}, g_j$ *reelle* $\mathscr{N}$*-meßbare Funktionen auf* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{G}_j \in \mathscr{N}$. *Ist*

$$\lim_{n \to \infty} f_{jn} = g_j \qquad \varphi\text{-}f.\ddot{u}. \text{ auf } \mathfrak{G}_j \text{ für } j = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$\lim_{j \to \infty} g_j = g \qquad \text{auf } \mathfrak{G} := \cup\, \mathfrak{G}_j \tag{3}$$

und bilden die $\mathfrak{G}_j$ *eine aufsteigende Mengenfolge, so gibt es eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen* $\{n_j\}$ *mit*

$$\lim_{j \to \infty} f_{jn_j} = g \qquad \varphi\text{-}f.\ddot{u}. \text{ auf } \mathfrak{G}. \tag{4}$$

Beweis. Wegen der Endlichkeit von φ folgt aus (2), daß für jedes j $\{f_{jn}\}$ φ-nahezu gleichmäßig auf $\mathfrak{G}_j$ gegen g_j konvergiert. Ist $\{\varepsilon_j\}$ eine Nullfolge positiver reeller Zahlen, so gibt es zu jedem j eine natürliche Zahl n_j und eine Ausnahmemenge $\mathfrak{A}_j \subseteq \mathfrak{G}_j$ mit $\varphi(\mathfrak{A}_j) < 2^{-j}$, so daß für alle $n \geqq n_j$ und für alle $\mathfrak{m} \in \mathfrak{G}_j - \mathfrak{A}_j$ gilt:

$$|f_{jn}(\mathfrak{m}) - g_j(\mathfrak{m})| < \varepsilon_j. \tag{5}$$

Die Zahlen n_j können so gewählt werden, daß die Folge $\{n_j\}$ monoton wächst. Es sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{G}$ die Menge, für die (4) mit dieser Folge $\{n_j\}$ nicht gilt. Wir definieren für $p = 1, 2 \ldots$

$$\mathfrak{A}^p := \{\mathfrak{m} \in \mathfrak{G} : |f_{jn_j}(\mathfrak{m}) - g(\mathfrak{m})| > \frac{1}{p} \text{ für unendlich viele } j\}.$$

$\mathfrak{A}$ ist die Vereinigung der $\mathfrak{A}^p$. Ist $\mathfrak{m} \in \mathfrak{A}^p$, so gilt für unendlich viele j:

$$|f_{jn_j}(\mathfrak{m}) - g_j(\mathfrak{m})| + |g_j(\mathfrak{m}) - g(\mathfrak{m})| > \frac{1}{p}.$$

[1] Hilfssatz 3 ist eine leichte Verallgemeinerung eines Satzes über Doppelfolgen in [3].

Wegen (5) und (3) ist für jedes p $\mathfrak{A}^p$ Teilmenge von

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \mathfrak{A}_j \cup \bigcap_j (\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_j) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \mathfrak{A}_j .$$

Aus

$$\mathfrak{A} = \bigcup_p \mathfrak{A}^p \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \mathfrak{A}_j$$

und

$$\varphi\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \mathfrak{A}_j\right) = \lim_{k\to\infty} \varphi\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} \mathfrak{A}_j\right) \leqq \lim_{k\to\infty} 2^{1-k} = 0$$

folgt, daß (4) mit $\{n_j\}$ φ-f.ü. auf $\mathfrak{G}$ gilt.

Satz 1. *$\mathscr{E}$ ist ein σ-Körper.*

Beweis. Gezeigt werden muß noch, daß abzählbare Vereinigungsbildung nicht aus $\mathscr{E}$ herausführt. Es sei jeder natürlichen Zahl k eine Menge $\mathfrak{N}_k \in \mathscr{E}$ zugeordnet. Wir geben eine entscheidende Testereignisfolge zu $\mathfrak{N} := \bigcup_k \mathfrak{N}_k$ an:

Nach Hilfssatz 2 gibt es zu jeder Vereinigungsmenge $\mathfrak{L}_j := \bigcup_{k=1}^{j} \mathfrak{N}_k$ eine entscheidende Testereignisfolge $\{E_{jn}\}$. Es gilt also für $j = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} l(\mathfrak{m}; E_{jn}) = \chi_{\mathfrak{L}_j} \qquad \varphi\text{-f.ü. auf } \mathfrak{M}.$$

Die Folge $\{\chi_{\mathfrak{L}_j}\}$ konvergiert auf $\mathfrak{M}$ punktweise gegen $\chi_{\mathfrak{N}}$. Nach Hilfssatz 3 gibt es eine Folge $\{n_j\}$, mit der gilt:

$$\lim_{j\to\infty} l(\mathfrak{m}; E_{jn_j}) = \chi_{\mathfrak{N}} \qquad \varphi\text{-f.ü. auf } \mathfrak{M}.$$

2. Entscheidbare Behauptungen und konsistente Schätzerfolgen

Eine *Stichprobenfunktion zum Stichprobenumfang* n ist eine auf $X_1 \times \ldots \times X_n$ erklärte $\mathscr{B}_1 \times \ldots \times \mathscr{B}_n$-meßbare reellwertige Funktion.

Definition. *Es sei P eine φ-f.ü. auf $\mathfrak{M}$ definierte reellwertige Funktion. Eine Folge $\{U_n\}$ von Stichprobenfunktionen zum Stichprobenumfang n heißt konsistente Schätzerfolge für P, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und für φ-f.a. $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} l(\mathfrak{m}; \{x \in X_1 \times \ldots \times X_n : |U_n(x) - P(\mathfrak{m})| < \varepsilon\}) = 1 . \tag{6}$$

Satz 2. *Sind φ-f.ü. auf $\mathfrak{M}$ k reelle $\mathscr{N}$-meßbare Funktionen $Q_1, \ldots, Q_k$ erklärt, so ist $q := (Q_1, \ldots, Q_k)$ genau dann $\mathscr{E}$-meßbar, wenn zu jedem $\varkappa \in \{1, \ldots, k\}$ eine konsistente Schätzerfolge $\{U_{\varkappa n}\}$ für $Q_\varkappa$ existiert.*

Beweis. 1. Zunächst nehmen wir an, daß konsistente Schätzerfolgen $\{U_{\varkappa n}\}$ für die $Q_\varkappa$ gegeben sind. Es sei $i \in \{1, \ldots, k\}$ beliebig fest gewählt, $Q := Q_i$, $U_n := U_{in}$. Wir zeigen, daß das q-Urbild eines Halbraumes der Form

$$H(\eta) := \{(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in R^k : \xi_i \leqq \eta\},$$

η beliebig reell, zu $\mathscr{E}$ gehört, indem wir zu $q^{-1}(H(\eta))$ eine entscheidende Testereignisfolge konstruieren.

$\{\delta_j\}$ sei eine monoton gegen 0 strebende Folge positiver reeller Zahlen. Jedem $j = 1, 2, \ldots$ wird eine Testereignisfolge $\{E_{jn}\}$, definiert durch $E_{jn} := \{x : U_n(x) \leqq \leqq \eta + \delta_j\}$, zugeordnet. Für alle $\mathfrak{m} \in q^{-1}(H(\eta))$ ist $\{x : |U_n(x) - Q(\mathfrak{m})| < \delta_j\} \subseteq E_{jn}$. Die Konsistenz von $\{U_n\}$ impliziert:

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty} l(\mathfrak{m}; E_{jn}) = 1 \qquad \varphi\text{-f.ü. auf } q^{-1}(H(\eta)).$$

Für alle $\mathfrak{m} \in q^{-1}(H(\eta + \delta_j)^c)$ gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\mathfrak{m}) > 0$, so daß

$$\{x : |U_n(x) - Q(\mathfrak{m})| \geqq \varepsilon\} \supseteq E_{jn}.$$

Aus der Konsistenz von $\{U_n\}$ folgt:

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} l(\mathfrak{m}; E_{jn}) = 0 \qquad \varphi\text{-f.ü. auf } q^{-1}(H(\eta + \delta_j)^c).$$

Wegen (7) und (8) gilt für jedes j

$$\lim_{n\to\infty} l(\mathfrak{m}; E_{jn}) = \chi_{q^{-1}(H(\eta))} \qquad \varphi\text{-f.ü. auf } q^{-1}(H(\eta) \cup H(\eta + \delta_j)^c).$$

Nach Hilfssatz 3 gibt es eine Folge $\{n_j\}$, mit der gilt:

$$\lim_{j\to\infty} l(\mathfrak{m}; E_{jn_j}) = \chi_{q^{-1}(H(\eta))} \qquad \varphi\text{-f.ü. auf } q^{-1}(R^k) \text{ also auch } \varphi\text{-f.ü. auf } \mathfrak{M}, \text{ q.e.d.}$$

2. Nun setzen wir voraus, daß q $\mathscr{E}$-meßbar ist. Mit q sind auch die $Q_\varkappa$ $\mathscr{E}$-meßbare Funktionen. Es sei wieder $Q := Q_i$ bei beliebig fest gewähltem $i \in \{1, \ldots, k\}$. Für Q werden wir eine konsistente Schätzerfolge konstruieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß Q überall auf $\mathfrak{M}$ erklärt ist. Zunächst ordnen wir jeder natürlichen Zahl k eine endliche disjunkte Zerlegung des R^1 in Intervalle I_j^k $(j = 0, \ldots, 2k^2 + 1)$ zu, indem wir definieren:

$$I_0^k := (-\infty, -k], \quad I_{2k+1}^k := (k, \infty), \quad I_j^k := \left(-k + \frac{j-1}{k}, -k + \frac{j}{k}\right]$$

für $j = 1, \ldots, 2k^2$. Die Q-Urbilder der Intervalle, die zu einem festen k gehören, liegen in $\mathscr{E}$ und bilden eine disjunkte Aufteilung von $\mathfrak{M}$. Zu jedem Intervall I_j^k gibt es also eine zu $Q^{-1}(I_j^k)$ entscheidende Testereignisfolge $\{E_{jn}^k\}$. $\{E_{jn}^k\}$ kann nach Hilfssatz 1 regulär und nach dem Korollar zu Hilfssatz 2 so gewählt werden, daß die Ereignisse E_{jn}^k für $j = 0, \ldots, 2k^2 + 1$ eine disjunkte Aufteilung des Stichprobenraumes zum Stichprobenumfang n bilden. Die Folge $\{l(\mathfrak{m}; E_{jn}^k)\}$ konvergiert mit wachsendem n φ-f.ü. auf $Q^{-1}(I_j^k)$ gegen 1. Wegen der Endlichkeit von φ folgt aus der Konvergenz φ-f.ü. die Konvergenz φ-nahezu gleichmäßig. Es existiert also eine Ausnahmemenge $\mathfrak{A}_j^k$ mit $\varphi(\mathfrak{A}_j^k) < (2^k(2k^2 + 2))^{-1}$ und eine natürliche Zahl $p_j^{(k)}$, so daß für alle $n > p_j^{(k)}$ und $\mathfrak{m} \in (Q^{-1}(I_j^k) - \mathfrak{A}_j^k)$ gilt: $l(\mathfrak{m}; E_{jn}^k) > 1 - \frac{1}{k}$. Wir definieren noch $\mathfrak{A}^k := \cup\, \mathfrak{A}_j^k$ und bemerken, daß $\varphi(\mathfrak{A}^k) < 2^{-k}$ ist.

Es sei nun $\{\delta_k\}$ eine monoton zunehmende Folge reeller Zahlen mit $\delta_k \geqq \operatorname{Max}\{p_j^{(k)} : j = 0, \ldots, 2k^2 + 1\}$ und $\lim \delta_k = \infty$. Wir erklären für jeden Stichprobenumfang n auf dem Stichprobenraum $X_1 \times \ldots \times X_n$ die reelle Funktion

$$U_n(x) := -k + \frac{j}{k} \qquad \text{falls } x \in E_{jn}^k \text{ und } \delta_k \leqq n < \delta_{k+1}$$

und behaupten: $\{U_n\}$ ist eine konsistente Schätzerfolge für Q. Es sei $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ eine beliebige fest vorgegebene Hypothese, $\varepsilon > 0$. Für jedes k gibt es in der zu k gehörenden disjunkten Aufteilung des R^1 genau ein Intervall $I^k_{j(\mathfrak{m})}$, das $Q(\mathfrak{m})$ enthält. Ferner gibt es eine natürliche Zahl K, so daß für alle $k > K$ die ε-Umgebung $(Q(\mathfrak{m}) - \varepsilon, Q(\mathfrak{m}) + \varepsilon)$ das Intervall $I^k_{j(\mathfrak{m})}$ umfaßt. Für $k > K$ gilt dann:

$$l(\mathfrak{m}; \{x : U_n(x) \in I^k_{j(\mathfrak{m})}\}) \leqq l(\mathfrak{m}; \{x : Q(\mathfrak{m}) - \varepsilon < U_n(x) < Q(\mathfrak{m}) + \varepsilon\}).$$

Es war aber für $\delta_k \leqq n < \delta_{k+1}$

$$l(\mathfrak{m}; \{x : U_n(x) \in I^k_{j(\mathfrak{m})}\}) = l(\mathfrak{m}; E^k_{j(\mathfrak{m})n}) \geqq 1 - \frac{1}{k},$$

wenn $\mathfrak{m} \notin \mathfrak{A}^k$. Für alle $k > K$ und $\delta_k \leqq n < \delta_{k+1}$ folgt

$$1 - \frac{1}{k} \leqq l(\mathfrak{m}; \{x : |U_n(x) - Q(\mathfrak{m})| < \varepsilon\}),$$

falls $\mathfrak{m} \notin \mathfrak{A}^k$. Mit n strebt in der letzten Ungleichung k gegen ∞. Es gilt deshalb:

$$\lim_{n\to\infty} l(\mathfrak{m}; \{x : |U_n(x) - Q(\mathfrak{m})| < \varepsilon\}) = 1,$$

wenn $\mathfrak{m}$ nicht zur Ausnahmemenge $\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=r}^{\infty} \mathfrak{A}^k$ gehört. Die Ausnahmemenge ist eine φ-Nullmenge; damit ist $\{U_n\}$ eine konsistente Schätzerfolge für Q.

3. Entscheidbare Behauptungen und konsistente Testfolgen

Definition. *Es sei $\mathfrak{N} \in \mathcal{N}$, $0 < \alpha < 1$. Eine reguläre Testereignisfolge $\{E_n\}$, die für φ-f.a. $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ die Bedingung*

$$\begin{aligned} &\liminf l(\mathfrak{m}; E_n) \geqq 1 - \alpha \quad &&\textit{auf } \mathfrak{N} \\ &\limsup l(\mathfrak{m}; E_n) = 0 &&\textit{auf } \mathfrak{M} - \mathfrak{N} \end{aligned} \tag{9}$$

erfüllt, heißt eine konsistente Testfolge für die Hypothese $\mathfrak{N}$ mit asymptotischer Sicherheitsschranke α.

Satz 3[2]. *$\mathfrak{N}$ gehört genau dann zu $\mathcal{E}$, wenn es zu jeder reellen Zahl α, $0 < \alpha < 1$, eine konsistente Testfolge für die Hypothese $\mathfrak{N}$ mit asymptotischer Sicherheitsschranke α gibt.*

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{N} \in \mathcal{E}$, so ist jede reguläre entscheidende Testereignisfolge zu $\mathfrak{N}$ für jedes α, $0 < \alpha < 1$, eine konsistente Testfolge für $\mathfrak{N}$ mit asymptotischer Sicherheitsschranke α.

2. Nun nehmen wir an, daß es zu jeder Zahl j, $j = 2, 3, \ldots$, für $\mathfrak{N}$ eine konsistente Testfolge $\{E_{jn}\}$ mit asymptotischer Sicherheitsschranke j^{-1} gibt. Wir definieren

$$\mathfrak{L}(p; j) := \bigcup_{n>p} \left[\left\{ \mathfrak{m} \in \mathfrak{N} : l(\mathfrak{m}; E_{jn}) \leqq 1 - \frac{2}{j} \right\} \cup \left\{ \mathfrak{m} \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N} : l(\mathfrak{m}; E_{jn}) \geqq \frac{1}{j} \right\} \right].$$

Die $\mathfrak{L}(p; j)$ sind $\mathcal{N}$-meßbar und bilden eine in p absteigende Mengenfolge, deren Durchschnitt eine φ-Nullmenge ist. Zu jedem j läßt sich ein p_j angeben, so daß

[2] Satz 3 verdanke ich in dieser Form einem Hinweis von Herrn Prof. Dr. H. RICHTER.

das φ-Maß der Menge $\mathfrak{L}(p_j; j)$ kleiner als 2^{-j} ist. Die Folge $\{p_j\}$ kann dabei streng monoton wachsend gewählt werden. Wir definieren eine Testereignisfolge $\{E_n\}$ durch:

$$E_n := E_{jn} \quad \text{für} \quad p_j < n \leqq p_{j+1}.$$

$\{E_n\}$ ist entscheidende Testereignisfolge zu $\mathfrak{N}$; es gilt nämlich:

$$\lim l(\mathfrak{m}; E_n) = \chi_{\mathfrak{N}} \quad \text{für} \quad \mathfrak{m} \in \mathfrak{M} \text{ und } \mathfrak{m} \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \mathfrak{L}(p_j; j).$$

Die Ausnahmemenge ist eine φ-Nullmenge.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß jede einfache Hypothese $\mathfrak{m}$ durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ über dem σ-Körper $\prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$ gegeben ist, lassen sich Satz 1 und Satz 2 der vorliegenden Arbeit auf zwei Sätze von L. Breiman, L. LeCam und Lorraine Schwartz [*1*, Proposition 2, Theorem 2] zurückführen. Die Verbindung wird hergestellt durch einen Satz von Ch. Kraft [*4*, Theorem 3] und durch Überlegungen, die auf J. L. Doob [*2*] zurückgehen.

Literatur

[*1*] Breiman, L., L. LeCam, and L. Schwartz: Consistent estimates and zero-one sets. Ann. math. Statistics **35**, 157–161 (1964).

[*2*] Doob, J. L.: Applications of the theory of martingales. Colloques internat. Centre nat. Rech. sci. (Paris) **13**, 22–28 (1948).

[*3*] Haupt-Aumann-Pauc: Differential- und Integralrechnung, 3. Band. Berlin: W. de Gruyter 1955.

[*4*] Kraft, Ch.: Some conditions for consistency and uniform consistency of statistical procedures. Univ. California Publ. Statist. **2**, 125–141 (1955).

[*5*] Richter, H.: Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Teil V. Math. Ann. **128**, 305–339 (1954).

I. Psychologisches Institut
der Universität
5000 Köln