Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 5, 89—117 (1966)

Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen I: Dualitätstheorie

ULRICH DIETER

Eingegangen am 20. Februar 1965

Einleitung

In den letzten zwanzig Jahren ist eine große Zahl von Arbeiten und Monographien über lineare und nicht-lineare Programmierungsaufgaben, d.h. über Optimierungsaufgaben in endlich-dimensionalen Vektorräumen erschienen. Nur selten hat man dagegen versucht, die dabei erzielten Ergebnisse auf Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen zu übertragen; die wesentlichsten Untersuchungen in dieser Richtung stammen von HURWICZ, BRATTON, DUFFIN und KRETSCHMER.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir nun Optimierungsaufgaben in reellen lokalkonvexen topologischen Vektorräumen. Dabei verstehen wir unter einer Optimierungsaufgabe in einem topologischen Vektorraum das folgende:

Gegeben sei ein topologischer Vektorraum X, eine Teilmenge C von X und ein Funktional f. Die Aufgabe lautet:

$$\text{Bestimme } \operatorname{Inf}\{f(x) \mid x \in C\}.$$

Ähnlich wie im Fall der Optimierungsaufgaben in endlich-dimensionalen Vektorräumen beschränken wir uns auf konvexe Optimierungsaufgaben, d.h. wir verlangen, daß C eine konvexe Menge und f ein konvexes Funktional ist.

Es ist bekannt, daß HURWICZ seiner großen Arbeit einen allgemeineren Begriff einer Optimierungsaufgabe zugrundelegt. Anstatt konvexe Funktionale f zu betrachten, untersucht er Aufgaben, bei denen der Operator f den topologischen Vektorraum X in einen geordneten topologischen Vektorraum Y — bei uns den reellen Zahlkörper R — abbildet; f muß dann ein sogenannter konvexer Operator sein. Eine kurze Beschreibung seiner Fragestellung findet man in § 1 unserer Arbeit. Wir beschränken uns aus folgenden Gründen auf den hier angegebenen einfacheren Begriff einer Optimierungsaufgabe:

Die Dualitätsaussagen der Programmierungsaufgaben lassen sich auf die hier untersuchte Aufgabe, nicht aber auf die Hurwiczsche Aufgabe übertragen, so daß dieser Aufgabenbegriff für Teil I der vorliegenden Arbeit unbrauchbar ist. Nun wird in Teil II der Sattelpunktsatz von KUHN und TUCKER behandelt. Unter recht starken Voraussetzungen läßt sich — wie HURWICZ gezeigt hat — der Sattelpunktsatz zwar noch für die HURWICZsche Aufgabe beweisen. Die Dualitätstheorie von Teil I zeigt aber, daß der Sattelpunktsatz für die hier untersuchte Aufgabe auch noch unter schwächeren Voraussetzungen gilt. Da schließlich in den Anwendungen kaum Aufgaben auftreten dürften, die allgemeiner als unsere Aufgabenstellung sind, liegt es nahe, sich auf die hier angegebene Aufgabenstellung zu beschränken. Die Theorie gewinnt dadurch an Einfachheit und Geschlossenheit.

Die Arbeit baut sich folgendermaßen auf:

Im ersten einleitenden Paragraphen definieren wir den Begriff der Optimierungsaufgabe und stellen die nötigen Hilfsmittel für die weiteren Untersuchungen bereit.

In den beiden folgenden Paragraphen, dem Hauptteil der Arbeit, untersuchen wir Dualitätsaussagen bei Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen. Nun hat sich bei Programmierungsaufgaben, d.h. bei Optimierungsaufgaben in endlich-dimensionalen Vektorräumen, das FENCHELsche Konzept der konjugierten Funktionen als allgemeinster und natürlichster Zugang zur Dualitätstheorie erwiesen. Wie ich in einer früheren Arbeit nachgewiesen habe, folgen alle bisher bekannten Dualitätsaussagen bei Programmierungsaufgaben aus den Sätzen der FENCHELschen Theorie. Wir verallgemeinern daher die FENCHELsche Theorie auf lokalkonvexe topologische Vektorräume; dabei zeigt sich erst die volle Allgemeinheit und Schönheit des FENCHELschen Ansatzes.

In § 2 definieren wir zunächst das konjugierte Funktional eines konvexen Funktionals und beweisen hierüber einige Hilfssätze.

In § 3 wird dann zu einer Optimierungsaufgabe ihre duale Optimierungsaufgabe erklärt: Während die primäre Aufgabe die Maximierung eines konkaven Funktionals im Raume X fordert, verlangt die duale Aufgabe die Minimierung eines konvexen Funktionals im Raume X^*, dem Raum der stetigen linearen Funktionale von X. Die Dualitätsaussagen verknüpfen beide Aufgaben. Während der Beweis der schwachen Dualitätsaussagen relativ einfach ist, verlangt der Beweis der starken Dualitätsaussagen die Herleitung des unangenehmen Hilfssatzes 10; sein Analogon für endlich-dimensionale Vektorräume wurde von FENCHEL und KARLIN nicht richtig angegeben. Obgleich die zusätzlichen Voraussetzungen der starken Dualitätsaussagen recht lästig sind, zeigen sie doch, daß derartige Aussagen noch für Aufgaben gelten können, deren Variationsbereich keinen inneren Punkt besitzt. Solche Variationsbereiche treten häufig auf, z.B. enthält schon im L_2 — dem Hilbert-Raum der quadratisch-Lebesgue-integrablen Funktionen — der Kegel der positiven Funktionen keinen inneren Punkt.

Die praktische Bedeutung der Dualitätstheorie liegt im folgenden: Hat man zulässige Lösungen für die primäre und die duale Aufgabe und nimmt die Zielfunktion für diese Lösungen den gleichen Wert an, so hat man bereits optimale Lösungen gefunden.

Für lineare Optimierungsaufgaben, die wir im vierten Paragraphen behandeln, läßt sich die Theorie stärker konkretisieren. Es wird gezeigt, daß die zu der primären Aufgabe

$$\text{Bestimme } \operatorname{Sup}\{x_0^*(x) \,|\, x \geqq 0,\ Tx \leqq z_0\}$$

duale Aufgabe die gleiche Gestalt hat:

$$\text{Bestimme } \operatorname{Inf}\{z^*(z_0) \,|\, z^* \geqq 0,\quad T^* z^* \geqq x_0^*\}.$$

Hierbei sind x und z_0 Elemente geordneter lokalkonvexer topologischer Vektorräume X und Z; x_0^* und z^* sind Elemente ihrer adjungierten Räume X^* und Z^*[1]. T ist ein stetiger linearer Operator von X in Z, T^* sein adjungierter Operator. Die Spezialisierung der allgemeinen Dualitätsaussagen aus § 3 auf diese linearen Optimierungsaufgaben bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr. In der bisherigen Literatur sind nur derartige lineare Optimierungsaufgaben behandelt worden; Teilaussagen unserer Dualitätsaussagen waren bekannt.

Konkrete nicht-lineare Programmierungsaufgaben auf Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen zu übertragen, ist nicht so ohne weiteres möglich. Z. B. braucht man für das Analogon einer Programmierungsaufgabe mit quadratischer Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen ein geeignetes Skalarprodukt des topologischen Vektorraumes. Selbst wenn es existiert, was nicht notwendig ist, ist es im allgemeinen nicht möglich, die duale Aufgabe zu berechnen. Eine gewisse nicht notwendig lineare Optimierungsaufgabe, die von EISENBERG für endlichdimensionale Vektorräume angegeben worden ist, läßt sich jedoch auf topologische Vektorräume verallgemeinern. Ihre duale Aufgabe wird im § 5 bestimmt. Es folgt ein Beispiel einer nicht-linearen Aufgabe im L_2.

Im Teil II der Arbeit sollen der allgemeine Sattelpunktsatz (das allgemeine Kuhn-Tucker-Theorem) und Anwendungen der Theorie behandelt werden.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Dr. H. SCHUBERT für das Interesse danken, das er meiner Arbeit zuteil werden ließ. Neben anderen Anregungen geht der Hilfssatz 8 auf ihn zurück, der sich als Schlüssel zu den weiteren Untersuchungen erwiesen hat.

Außerdem danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung, die mir die Abfassung dieser Arbeit ermöglichte.

§ 1 Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen

1. Reelle topologische Vektorräume

Bei den folgenden Definitionen beziehen wir uns auf die Bücher von KÖTHE und BOURBAKI. Man findet die gleichen Definitionen in den meisten der im Literaturverzeichnis angegebenen Lehrbücher über topologische Vektorräume und Funktionalanalysis.

Ein Vektorraum — oder auch linearer Raum — X über dem Körper R der reellen Zahlen heißt topologischer Vektorraum — topologischer linearer Raum —, wenn auf X eine separierte (Hausdorffsche) mit den linearen Operationen verträgliche Topologie $\mathfrak{T}$ erklärt ist. Im einzelnen bedeutet das, daß die Operationen $(x_1, x_2) \to x_1 + x_2$ von $X \times X \to X$ und $(\alpha, x) \to \alpha x$ von $R \times X \to X$ stetig sind. Wir betrachten in dieser Arbeit nur reelle topologische Vektorräume.

Es seien X und Z topologische Vektorräume, $\mathfrak{D} \subset X$ und $\mathfrak{R} \subset Z$ gewisse Teilmengen. Ist ein Operator T — d.h. eine Abbildung — von X in Z erklärt für alle $x \in \mathfrak{D}$ und ist $T(\mathfrak{D}) = \mathfrak{R}$, so nennt man $\mathfrak{D}$ den Definitionsbereich (domain) und $\mathfrak{R}$ den Wertebereich (range) von T. Gilt für den Operator

$$\begin{aligned} &T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2, x_1 + x_2 \in \mathfrak{D} \\ (1) \qquad &T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \text{für reelles } \alpha \text{ und } x, \alpha x \in \mathfrak{D}\,, \end{aligned}$$

so nennt man den Operator linear.

[1] Mit dem Index 0 werden feste Elemente bezeichnet.

Operatoren, die einen topologischen Vektorraum in den Körper der reellen Zahlen — in die reelle Gerade — abbilden, bezeichnet man als Funktionale.

2. Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen

Es sei X ein topologischer Vektorraum, C eine Teilmenge von X, $f(x)$ ein Funktional mit Definitionsbereich C. Als Minimierungsaufgabe bezeichnen wir die Aufgabe:

$$\text{(2)} \qquad \textit{Bestimme} \quad \operatorname{Inf}\{f(x) \mid x \in C \subset X\};$$

entsprechend als Maximierungsaufgabe:

$$\text{(2')} \qquad \textit{Bestimme} \quad \operatorname{Sup}\{f(x) \mid x \in C \subset X\}.$$

Anmerkung. HURWICZ betrachtet in [*13*] die folgende allgemeinere Optimierungsaufgabe: X und Y seien topologische Vektorräume, in $A \subset Y$ sei eine transitive, binäre Relation ϱ gegeben, geschrieben $a' \varrho a''$ für $a', a'' \in A$. Ein Element $a_0 \in A$ heißt ϱ-maximal in A, wenn aus $a \varrho a_0$ folgt $a_0 \varrho a$ für alle $a \in A$. $f(x)$ sei ein Operator von X in Y, C eine Teilmenge von X. In der Menge $Y_0 = \{y = f(x) \mid x \in C\}$ betrachtet man die ϱ-maximale Teilmenge

$$\hat{Y}_0 = \{y_0 \in Y_0 \mid y \varrho y_0 \text{ impliziert } y_0 \varrho y \text{ für alle } y \in Y_0\}.$$

Gesucht wird dann die Urbildmenge $\overset{-1}{f}(\hat{Y}_0)$, ihre Elemente nennt man ϱ-maximal. Setzt man $Y = R$, so besagt die HURWICZsche Aufgabe: Man bestimme diejenigen $x \in C$, für die die Aufgabe (2′) ihr Supremum annimmt. Für eine Diskussion dieser Fragestellung verweisen wir auf die Einleitung.

3. Konvexe und konkave Optimierungsaufgaben in lokalkonvexen topologischen Vektorräumen

Eine Teilmenge C eines topologischen Vektorraumes heißt konvex, wenn mit $x_1, x_2 \in C$ und $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ auch $\vartheta x_1 + (1 - \vartheta) x_2 \in C$ ist.

Gibt es in einem topologischen Vektorraum eine Umgebungsbasis der 0, die aus symmetrischen, konvexen Mengen besteht, so nennt man den Raum lokalkonvex. Wir werden uns in den folgenden Untersuchungen auf lokalkonvexe topologische Vektorräume beschränken, da in allgemeineren Räumen der duale Raum — der Raum der stetigen linearen Funktionale — nur aus der 0 bestehen kann (s. KÖTHE).

Ein Funktional $f(x)$ von X in den Körper der reellen Zahlen R nennt man konvex über einer konvexen Menge C, wenn für $x_1, x_2 \in C$, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ gilt

$$\text{(3)} \qquad f(\vartheta x_1 + (1 - \vartheta) x_2) \leqq \vartheta f(x_1) + (1 - \vartheta) f(x_2).$$

Das Funktional heißt konkav über C, wenn $-f(x)$ konvex ist über C.

Als konvexe Minimierungsaufgabe bezeichnen wir die Aufgabe:

$$\text{(4)} \qquad \textit{Bestimme} \quad \operatorname{Inf}\{f(x) \mid x \in C \subset X, f(x) \text{ konvex}, C \text{ konvex}\}.$$

Entsprechend definiert man konkave Maximierungsaufgaben. Alle Aussagen der Arbeit betreffen konvexe bzw. konkave Optimierungsaufgaben.

4. Beschreibung der konvexen Menge C

In der Theorie der linearen Optimierungsaufgaben in endlich-dimensionalen Vektorräumen, die wir entsprechend dem englischen Sprachgebrauch kurz als lineare Programmierungsaufgaben bezeichnen wollen, wird die jeweilige Menge C

durch Bedingungen der Art

$$(5)\qquad x_i \geqq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n; \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - b_k \geqq 0 \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, m$$

beschrieben. Wir müssen dies auf topologische Vektorräume übertragen.

Eine Teilmenge K eines topologischen Vektorraumes X bezeichnet man als Kegel (mit 0 als Scheitel), wenn aus

$$x \in K, \quad \alpha \geqq 0 \quad \text{folgt} \quad \alpha x \in K.$$

Der Kegel heißt konvex, wenn darüber hinaus aus

$$x_1, x_2 \in K \quad \text{folgt} \quad x_1 + x_2 \in K.$$

Ein konvexer Kegel $K \subset X$ ermöglicht uns die Einführung einer binären, reflexiven und transitiven Relation, kurz einer Ordnungsrelation, die wir durch $\geqq$ oder genauer $\geqq_K$ bezeichnen:

Sind x_1, $x_2 \in X$, so gilt $x_1 \geqq x_2$ (genauer $x_1 \geqq_K x_2$) genau dann, wenn $x_1 - x_2 \in K$ ist.

Ist ein konvexer Kegel ausgezeichnet, so nennt man den Vektorraum geordnet.

Die Nebenbedingungen (5) lassen sich nun folgendermaßen verallgemeinern:

1. In X ist ein konvexer Kegel K_x gegeben, der C enthält; es ist also $x \geqq_{K_x} 0$.

2. Es gibt einen geordneten topologischen Vektorraum Z, der Kegel der positiven Elemente von Z sei K_z, und eine Abbildung T von X in Z. Gefordert wird:

$$\textit{Es ist} \quad T(C) \geqq_{K_z} 0, \quad \textit{d.h.} \quad T(C) \subset K_z.$$

5. Der duale Raum X^*

Ist X ein topologischer Vektorraum, so bezeichnet man die Menge der stetigen linearen Funktionale von X als seinen dualen Raum X^*, seine Elemente als x^*. Dabei versieht man die reelle Gerade mit ihrer natürlichen Topologie und definiert $(x_1^* + x_2^*)(x) = x_1^*(x) + x_2^*(x)$, $(\alpha x^*)(x) = \alpha x^*(x)$ für alle $x \in X$ und reelles α. Das Nullelement ist die Abbildung 0^*, die jedes $x \in X$ auf 0 abbildet. X^* ist ein Vektorraum; für lokalkonvexe topologische Vektorräume X läßt sich X^* auf verschiedene Art zu einem topologischen Vektorraum machen:

Bei der schwachen (weak*) Topologie von X^* definiert man eine Umgebungsbasis der 0^* durch*

$$U(\varepsilon, B) = \{x^* \in X^* \,|\, |x^*(x)| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad x \in B,\ B\ \textit{endlich}\},$$

bei der ε alle positiven Zahlen und B alle endlichen Teilmengen von X durchläuft.

In den Lehrbüchern über topologische Vektorräume wird nun gezeigt:

Versieht man X^* mit seiner schwachen Topologie, so ist sein dualer Raum $X^{**} = X$. Die schwache* Topologie ist die gröbste Topologie, die dies leistet.*

Die feinste Topologie von X^*, für die noch $X^{**} = X$ ist, ist die sogenannte Mackey-Topologie.

Bei der starken Topologie von X^* — die man üblicherweise bei Banach-Räumen verwendet — definiert man eine Umgebungsbasis der 0^* durch

$$U(\varepsilon, B) = \{x^* \in X^* \,|\, |x^*(x)| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad x \in B,\ B\ \textit{beschränkt}\},$$

bei der wieder ε alle positiven Zahlen und B alle beschränkten Teilmengen von X durchläuft.

(Eine Menge B heißt beschränkt, wenn es zu jeder Nullumgebung U eine reelle Zahl α gibt mit $B \subset \alpha U$.)

Offensichtlich ist die starke Topologie feiner als die schwache* Topologie von X^*, da ihre Umgebungsbasis die Umgebungsbasis der schwachen* Topologie umfaßt.

Man findet noch folgende Bezeichnungen:

Versieht man X^* mit seiner starken Topologie und ist dann $X^{**} = X$, so nennt man X halbreflexiv.

Stimmt darüber hinaus die starke Topologie von X^{**} mit der Ausgangstopologie von X überein, so nennt man X reflexiv.

6. *Hyperebenen. Algebraisch-innere Punkte*

Eine Teilmenge H eines Vektorraumes X heißt linear, wenn sie gegenüber den linearen Operationen $(x_1, x_2) \to x_1 + x_2$ und $(\alpha, x) \to \alpha x$ (α reell, $x_1, x_2, x \in X$) abgeschlossen ist. Sie heißt maximal, wenn sie eine echte Teilmenge von X ist und es keine Teilmenge $H' \neq X$ gibt, die H echt umfaßt, d. h. wenn sie vom Defekt 1 ist. Maximale lineare Teilmengen $H \subset X$ und die dazu parallelen Mannigfaltigkeiten $x_0 + H$ nennt man Hyperebenen. (Z. B. KÖTHE, S. 59.)

Es gilt nun folgender Zusammenhang zwischen Hyperebenen und linearen Funktionalen (KÖTHE, S. 160):

Ist $u(x)$ ein nicht identisch verschwindendes lineares Funktional, so ist ihr Nullraum eine Hyperebene; umgekehrt gibt es zu jeder Hyperebene durch 0 ein lineares Funktional, dessen Nullraum die Hyperebene ist.

Das Funktional ist genau dann stetig, wenn die zugehörige Hyperebene topologisch abgeschlossen ist. Eine (abgeschlossene) Hyperebene wird durch eine Gleichung $u(x) = \alpha$ gegeben, $u(x)$ ist ein (stetiges) lineares Funktional.

Wir verwenden noch folgende Bezeichnungen:

Ein Punkt x einer Menge $C \subset X$ heißt algebraisch-innerer Punkt von C, wenn es auf jeder Geraden durch x eine Strecke gibt, die x als inneren Punkt enthält. Die Gesamtheit der algebraisch-inneren Punkte von C heißt der Kern (core) von C, er umfaßt die topologisch-inneren Punkte von C.

Die algebraische Hülle C^a von C besteht aus allen $x \in X$, zu denen es ein $x' \in C$ gibt, so daß die halboffene reelle Verbindungsstrecke $[x', x) \in C$ ist. Punkte von C^a, die nicht algebraisch-innere Punkte von C sind, heißen algebraische Randpunkte von C. C heißt algebraisch-abgeschlossen, wenn $C = C^a$ ist. Jeder algebraische Randpunkt ist auch topologischer Randpunkt von C.

7. *Trennungssätze*

Ist eine Hyperebene durch die Gleichung $u(x) = \alpha$ gegeben, so bestimmt sie die beiden algebraisch-offenen (bzw. algebraisch-abgeschlossenen) Halbräume, die durch $u(x) < \alpha$ (bzw. $u(x) \leqq \alpha$) und $u(x) > \alpha$ (bzw. $u(x) \geqq \alpha$) gegeben sind. Man sagt, zwei Teilmengen A und B eines topologischen Vektorraumes werden durch eine Hyperebene H getrennt, wenn sie in verschiedenen Halbräumen liegen, d. h., wenn es ein lineares Funktional $u(x)$ gibt mit

$$\sup_{x \in A} u(x) \leqq \alpha \leqq \inf_{x \in B} u(x).$$

Gilt hier an einer Stelle das $<$ Zeichen, so sagt man, H trenne A und B strikt.

Für die Trennung konvexer Mengen hat man die folgenden Ergebnisse erhalten, die zum großen Teil auf dem Satz von HAHN-BANACH beruhen (KÖTHE, S. 190/91, 245):

T_1: *Sind A und B konvexe Teilmengen eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes, die keine algebraisch-inneren (topologisch-inneren) Punkte gemeinsam haben und besitzt eine der beiden Mengen A oder B einen algebraisch-inneren (topologisch-inneren) Punkt, so gibt es eine A und B trennende (abgeschlossene) Hyperebene H, die keinen algebraisch-inneren (topologisch-inneren) Punkt der Mengen A, B enthält.*

T_2: *Sind A und B konvexe Teilmengen eines endlich-dimensionalen Vektorraumes, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben, so gibt es eine trennende Hyperebene.*

TS: *Es sei A eine konvexe abgeschlossene Teilmenge eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes X, B eine zu A disjunkte konvexe kompakte Teilmenge von X. Dann gibt es eine A und B strikt trennende abgeschlossene Hyperebene.*

8. Der duale Kegel

Um einen topologischen Vektorraum X zu ordnen, haben wir in 4. konvexe Kegel K betrachtet. Im Raum X^* definieren wir als dazu dualen Kegel

$$K^* = \{x^* \in X^* \mid x^*(x) \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in K\}.$$

Wir schreiben entsprechend 4.

$$x^* \geqq_{K^*} 0 \quad \textit{oder kürzer} \quad x^* \geqq 0 \quad \textit{für} \quad x^* \in K^*.$$

Es gilt nun der folgende

Hilfssatz 1: *Ist K ein konvexer Kegel eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes X, so gilt:* (i) *Ist K abgeschlossen und $x^*(x_0) \geqq 0$ für alle $x^* \in K^*$, so ist $x_0 \in K$.* (ii) *K^* ist schwach* abgeschlossen.* (iii) *Ist $X^{**} = X$ und K abgeschlossen, so ist $K^{**} = K$.*

Beweis von (i): Ist $x_0 \notin K$, so gibt es nach dem Trennungssatz TS — indem man $B = x_0$ setzt — eine strikt trennende Hyperebene $x_0^*(x) = \alpha$ mit

$$x_0^*(x_0) < \inf_{x \in K} x_0^*(x).$$

Wegen $0 \in K$ ist $\inf_{x \in K} x_0^*(x) \leqq 0$; da K ein Kegel ist und das Infimum beschränkt ist, ist es 0. Es gilt also: $x_0^*(x) \geqq 0$ für alle $x \in K$, d.h. $x_0^* \in K^*$ und $x_0^*(x_0) < 0$, was zu zeigen war.

Beweis von (ii): Versieht man X^* mit seiner schwachen* Topologie, so ist x vermöge $x^*(x)$ ein stetiges lineares Funktional; die schwache* Topologie ist die gröbste Topologie, die dies leistet. Für festes x ist daher die Menge der $x^* \in X^*$, für die $x^*(x) \geqq 0$ gilt, schwach* abgeschlossen. Bildet man den Durchschnitt dieser Mengen für alle $x \in K$, so ist diese Menge als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Dieser Durchschnitt ist aber gerade K^*.

Aus (i) und (ii) folgt (iii), da aus der Voraussetzung $X^{**} = X$ folgt:

$$K^{**} = \{x \in X \,|\, x^*(x) \geqq 0 \text{ für alle } x^* \in K^*\}.$$

§ 2 Konjugierte Funktionale

1. Konjugierte Funktionale von konvexen Funktionalen

Es sei C eine konvexe Teilmenge des lokalkonvexen topologischen Vektorraumes X, $f(x)$ ein auf C definiertes konvexes Funktional. Wir bilden im Raum $R \times X$ die Menge

$$[f, C] = \{(y, x) \in R \times X \,|\, x \in C, y \geqq f(x)\}. \tag{1}$$

Wie man leicht bestätigt, ist $[f, C]$ eine konvexe Menge. Ist diese konvexe Menge außerdem topologisch abgeschlossen, so läßt sie sich — wie aus dem Trennungssatz TS folgt — auch als Durchschnitt der sie enthaltenden abgeschlossenen Halbräume darstellen. Nun ist im Raum $R \times X$ jede abgeschlossene Hyperebene von der Form $x^*(x) + y^* y = \alpha$ mit $x^* \in X^*$, y^*, $\alpha \in R$. Wegen der speziellen Gestalt der konvexen Menge $[f, C]$ sind, wie wir später zeigen werden, die Hyperebenen mit $y^* = 0$ zur Beschreibung dieser Menge ohne Belang. Wir beschränken uns daher auf die Hyperebenen mit $y^* \neq 0$ und setzen $y^* = -1$. Aus Symmetriegründen ersetzen wir α durch y^*. Dann definieren wir als zu $[f, C]$ duale Menge $[f, C]^*$ die Menge aller dieser abgeschlossenen Hyperebenen $x^*(x) - y = y^*$ mit $x^*(x) - y \leqq y^*$ für alle $(y, x) \in [f, C]$, oder kürzer

$$[f, C]^* = \{(y^*, x^*) \in R \times X^* \,|\, x^*(x) - y \leqq y^* \quad \text{für alle} \quad (y, x) \in [f, C]\}. \tag{2}$$

Anschaulich gesprochen besteht $[f, C]^*$ aus allen Hyperebenen, die unterhalb von $[f, C]$ liegen. Gilt nun

$$x^*(x) - y \leqq y^* \quad \text{für alle} \quad (y, x) \in [f, C],$$

so muß natürlich erst recht

$$x^*(x) - f(x) \leqq y^* \quad \text{für alle} \quad x \in C$$

gelten. Also ist $y^* \geqq \sup\limits_{x \in C} (x^*(x) - f(x))$. Wir führen als Bezeichnungen ein

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in C} (x^*(x) - f(x)), \quad C^* = \{x^* \in X^* \,|\, f^*(x^*) < \infty\}. \tag{3}$$

In Anlehnung an FENCHEL, von dem diese Definition in endlich-dimensionalen Vektorräumen stammt, nennen wir $f^*(x^*)$ das zu $f(x)$ konjugierte Funktional. Wir zeigen als erstes den

Hilfssatz 2: *Ist C^* nicht leer, so ist $f^*(x^*)$ ein konvexes Funktional mit konvexem Definitionsbereich C^*.*

Beweis: Ist $f^*(x_1^*) < \infty$, $f^*(x_2^*) < \infty$, so gilt für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$

$$\begin{aligned} f^*(\vartheta x_1^* + (1 - \vartheta) x_2^*) &= \sup_{x \in C} (\vartheta x_1^*(x) + (1 - \vartheta) x_2^*(x) - f(x)) \\ &\leqq \vartheta \sup_{x \in C} (x_1^*(x) - f(x)) + (1 - \vartheta) \sup_{x \in C} (x_2^*(x) - f(x)) \\ &= \vartheta f^*(x_1^*) + (1 - \vartheta) f^*(x_2^*), \end{aligned}$$

d. h. C^* ist konvex und $f^*(x^*)$ ist ein konvexes Funktional.

Mit Hilfe des konjugierten Funktionals $f^*(x^*)$ bilden wir entsprechend (1) im Raum $R \times X^*$ die konvexe Menge

$$[f^*, C^*] = \{(y^*, x^*) \in R \times X^* \,|\, y^* \geqq f^*(x^*), \quad x^* \in C^*\}. \tag{4}$$

Die Definitionen von $[f^*, C^*]$ und der zu $[f, C]$ dualen Menge $[f, C]^*$ verknüpft der

Hilfssatz 3: *Es ist* $[f, C]^* = [f^*, C^*]$.

Beweis: 1. Ist $(y^*, x^*) \in [f, C]^*$, so gilt $x^*(x) - y \leqq y^*$ für alle $(y, x) \in [f, C]$, also erst recht $x^*(x) - f(x) \leqq y^*$ für alle $x \in C$. Also ist $\sup_{x \in C} (x^*(x) - f(x)) = f^*(x^*)$ endlich und $(y^*, x^*) \in [f^*, C^*]$.

2. Ist $(y^*, x^*) \in [f^*, C^*]$, so ist $y^* \geqq f^*(x^*) = \sup_{x \in C} (x^*(x) - f(x))$, mithin $y^* \geqq x^*(x) - f(x)$ für alle $x \in C$, also $y^* \geqq x^*(x) - y$ für alle $(y, x) \in [f, C]$, d. h. $(y^*, x^*) \in [f, C]^*$.

2. *Konjugierte Funktionale von konkaven Funktionalen*

Es sei $g(x)$ ein konkaves Funktional, definiert auf einer konvexen Menge D, d. h. $-g(x)$ ein konvexes Funktional auf der konvexen Menge D. Man überträgt dann die obigen Definitionen und erhält

$$[g, D] = \{(y, x) \in R \times X \,|\, x \in D, \quad y \leqq g(x)\};$$

dazu definiert man als duale Menge

$$[g, D]^* = \{(y^*, x^*) \in R \times X^* \,|\, x^*(x) - y \geqq y^* \quad \text{für alle} \quad (y, x) \in [g, D]\}.$$

Man zeigt dann wie eben: Es ist

$$[g, D]^* = [g^*, D^*] = \{(y^*, x^*) \in R \times X^* \,|\, x^* \in D^*, \quad y^* \leqq g^*(x^*)\}$$

mit

$$g^*(x^*) = \inf_{x \in D} (x^*(x) - g(x)), \quad D^* = \{x^* \in X^* \,|\, g^*(x^*) > -\infty\}.$$

3. *Mengentheoretische Eigenschaften von* $[f, C]$

Für konvexe Funktionale $f(x)$ und konvexe Mengen C leiten wir jetzt einige Hilfssätze her.

Hilfssatz 4: *Ist* $[f, C]$ *abgeschlossen, so ist* $[f, C]^*$ *nicht leer.*

Beweis: Wir wählen einen Punkt $(y_0, x_0) \in R \times X$ mit $x_0 \in C$, $y_0 < f(x_0)$. Da $(y_0, x_0) \notin [f, C]$ und $[f, C]$ konvex und abgeschlossen ist, gibt es auf Grund des Trennungssatzes TS aus § 1,7 eine strikt-trennende abgeschlossene Hyperebene $x^*(x) + y^* y = \alpha$ mit

$$\sup_{(y,x) \in [f, C]} (x^*(x) + y^* y) < \alpha = x^*(x_0) + y^* y_0.$$

Es kann nicht $y^* = 0$ sein, da $\sup_{x \in C} x^*(x) < x^*(x_0)$ einen Widerspruch ergibt. Wäre $y^* > 0$, so würde das Supremum beliebig groß, da y beliebig groß sein kann. Also ist $y^* < 0$; wir können $y^* = -1$ setzen und haben damit gezeigt, daß für dieses x^* das Funktional $f^*(x^*)$ endlich ist.

Die Voraussetzung des Hilfssatzes 4: „$[f, C]$ ist abgeschlossen" ist recht stark und man kann sich fragen, wann sie erfüllt ist. Zur Beantwortung dieser Frage brauchen wir den Begriff der Halbstetigkeit eines Funktionals. Man gibt folgende

Definition. $f(x)$ ist nach unten halbstetig an der Stelle $x_0 \in C$, wenn es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_{x_0}(\varepsilon)$ gibt, so daß für alle $x \in U_{x_0}(\varepsilon) \cap C$ gilt: $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$. Ist $f(x)$ nach unten halbstetig für alle $x \in C$, so nennen wir $f(x)$ nach unten halbstetig.

Entsprechend definiert man Halbstetigkeit nach oben; ist $f(x)$ nach oben und nach unten halbstetig, so ist es stetig. Hiermit gilt der

Hilfssatz 5: (i) *Ist C abgeschlossen und $f(x)$ nach unten halbstetig, so ist $[f, C]$ abgeschlossen.* (ii) *Ist umgekehrt $[f, C]$ abgeschlossen, so ist $f(x)$ nach unten halbstetig für alle $x \in C$.*

Beweis von (i). Wir müssen zeigen, daß die Komplementärmenge von $[f, C]$ offen ist. Ist $(y_0, x_0) \notin [f, C]$, so gibt es zwei Fälle:

a) $x_0 \notin C$. Dann gibt es wegen der Abgeschlossenheit von C eine Umgebung U_{x_0} mit $U_{x_0} \cap C = \emptyset$. Ist U_{y_0} eine Umgebung von y_0, so ist $U_{y_0} \times U_{x_0}$ eine Umgebung von (y_0, x_0), die zu $[f, C]$ punktfremd ist.

b) $x_0 \in C$. Dann ist $y_0 < f(x_0)$. Zu jedem ε mit $2\varepsilon < f(x_0) - y_0$ gibt es dann wegen der Halbstetigkeit von $f(x)$ eine Umgebung $U_{x_0}(\varepsilon)$ mit $f(x) > f(x_0) - \varepsilon > y_0 + \varepsilon$ für alle $x \in U_{x_0}(\varepsilon)$. Ist $U_{y_0}(\varepsilon) = \{y \mid |y - y_0| < \varepsilon\}$, so ist $U_{y_0}(\varepsilon) \times U_{x_0}(\varepsilon)$ eine Umgebung von (y_0, x_0), die punktfremd zu $[f, C]$ ist.

Beweis von (ii). Ist $[f, C]$ abgeschlossen, so gibt es zu $\left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2},\ x_0\right)$, $x_0 \in C$, eine abgeschlossene Hyperebene $x^*(x) - y = \alpha$ mit

$$\alpha = x^*(x_0) - f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} > x^*(x) - y \quad \text{für alle} \quad (y, x) \in [f, C] \tag{5}$$

(siehe Beweis zu Hilfssatz 4). Da die Hyperebene $y = x^*(x) - \alpha$ abgeschlossen ist, das Funktional $x^*(x)$ also stetig ist, gibt es zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ eine Umgebung U_{x_0} mit

$$x^*(x) - \alpha > x^*(x_0) - \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad x \in U_{x_0}. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt für $y = f(x)$, $x \in C$

$$f(x) > f(x_0) + x^*(x) - x^*(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} > f(x_0) - \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in U_{x_0},$$

d.h., $f(x)$ ist nach unten halbstetig.

Man kann sich natürlich fragen, wie weit die Menge $[f, C]^*$ die ursprüngliche Menge $[f, C]$ beschreibt. Eine gewisse Antwort darauf gibt der

Hilfssatz 6: *Ist die Menge $[f, C]$ abgeschlossen, so besteht $[f, C]$ genau aus allen $(y, x) \in R \times X$ mit*

$$x^*(x) - y \leqq y^* \quad \textit{für alle} \quad (y^*, x^*) \in [f, C]^* = [f^*, C^*].$$

Beweis. 1. Ist $(y, x) \in [f, C]$, so gilt nach Definition von $[f, C]^*$:

$$x^*(x) - y \leqq y^* \quad \text{für alle} \quad (y^*, x^*) \in [f, C]^*.$$

2. Ist andererseits $(y_0, x_0) \notin [f, C]$, so gibt es nach dem Trennungssatz TS aus § 1,7 eine strikt-trennende Hyperebene $x_0^*(x) + y_0^* y = \alpha_0$ mit

$$x_0^*(x) + y_0^* y \leqq \alpha_0 < x_0^*(x_0) + y_0^* y_0 \quad \text{für alle} \quad (y, x) \in [f, C]. \tag{7}$$

Ist nun $y_0^* \neq 0$, so können wir wieder $y_0^* = -1$ setzen, da $y_0^* > 0$ nicht möglich ist. Dann ist aber $(\alpha_0, x_0^*) \in [f, C]^*$ und damit der Hilfssatz bewiesen.

Daher ist nur noch zu zeigen:

Ist in (7) $y_0^* = 0$, *so gibt es auch eine abgeschlossene Hyperebene* $x^*(x) - y = y^*$, *die den Punkt* (y_0, x_0) *und die Menge* $[f, C]$ *strikt trennt.*

Beweis. Nach Annahme gibt es eine Hyperebene $x_0^*(x) = y_0^*$ (wir schreiben wieder y_0^* für α_0) mit

$$\begin{aligned} &x_0^*(x) - y_0^* \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad (y, x) \in [f, C],\\ &x_0^*(x_0) - y_0^* > 0. \end{aligned}$$

Weiterhin gibt es nach Hilfssatz 4 sicher eine Hyperebene mit

$$\begin{aligned} &x_1^*(x) - y - y_1^* \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad (y, x) \in [f, C],\\ &x_1^*(x_0) - y_0 - y_1^* \leqq 0 \end{aligned}$$

(stände hier > 0, so wären wir bereits fertig).

Wir betrachten nun die konvexe Kombination

$$\vartheta(x_1^*(x) - y - y_1^*) + (1 - \vartheta)(x_0^*(x) - y_0^*). \tag{8}$$

Für $(y, x) \in [f, C]$ und $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ ist (8) höchstens 0. Ist

$$\vartheta' = \frac{x_0^*(x_0) - y_0^*}{x_0^*(x_0) - y_0^* - (x_1^*(x_0) - y_0 - y_1^*)},$$

so ist $0 < \vartheta' \leqq 1$, da der Zähler positiv ist und der Nenner wenigstens so groß ist wie der Zähler; für $\vartheta = \vartheta'$ geht die Hyperebene (8) durch den Punkt (y_0, x_0). Ist nun $0 < \vartheta < \vartheta'$, so trennt die Hyperebene (8) den Punkt (y_0, x_0) und die konvexe Menge $[f, C]$ strikt, wie die folgende Ungleichung zeigt:

$$\begin{aligned} &\vartheta(x_1^*(x_0) - y_0 - y_1^*) + (1 - \vartheta)(x_0^*(x_0) - y_0^*)\\ &\qquad = (\vartheta - \vartheta')(x_1^*(x_0) - y_0 - y_1^*) + \vartheta'(x_1^*(x_0) - y_0 - y_1^*) +\\ &\qquad + (1 - \vartheta')(x_0^*(x_0) - y_0^*) + (\vartheta' - \vartheta)(x_0^*(x_0) - y_0^*) > 0, \end{aligned}$$

da der zweite und dritte Bestandteil wegen der Definition von ϑ' zusammen 0 ergeben, der erste positiv und der letzte echt größer als 0 ist.

4. *Topologische Eigenschaften von* $[f, C]$ *und* $[f, C]^*$

Wir haben in § 1,5 verschiedene Topologien für X^* definiert. Ist nun X^* so topologisiert, daß für seinen dualen Raum $X^{**} = X$ gilt, so ergibt der Hilfssatz 6 den

Hilfssatz 7: (i) *Ist* $X^{**} = X$, $[f, C]$ *abgeschlossen, so ist* $[f, C] = [f, C]^{**}$. (ii) *Ist* $X^{**} = X$, *so ist* $[f, C]^{**}$ *die abgeschlossene Hülle von* $[f, C]$.

Beweis von (i). Da $X^{**} = X$ ist, ist jedes stetige lineare Funktional von X^* von der Form $x^{**}(x^*) = x^*(x)$. Die Aussage des Hilfssatzes 6 läßt sich auch so schreiben: $[f, C]$ besteht genau aus allen $(y, x) = (y, x^{**}) \in R \times X$ mit $x^{**}(x^*) - - y^* \leqq y$ für alle $(y^*, x^*) \in [f^*, C^*]$. Das ist aber gerade die Definition (2) der zu $[f^*, C^*]$ dualen Menge $[f^*, C^*]^* = [f, C]^{**}$.

Beweis von (ii). Bezeichnet man die abgeschlossene Hülle von $[f, C]$ durch Überstreichen, so gilt offensichtlich

$$[f, C] \subset \overline{[f, C]} \subset [f, C]^{**}.$$

Wendet man hierauf die Operation der Bildung der dualen Menge zweimal an, so folgt wegen (i):

$$[f, C]^{**} \subset \overline{[f, C]}^{**} = \overline{[f, C]} \subset [f, C]^{****} = [f, C]^{**},$$

d.h. $\overline{[f, C]} = [f, C]^{**}$.

Über die Abgeschlossenheit der dualen Menge $[f, C]^*$ zeigen wir den

Hilfssatz 8: *$[f, C]^*$ ist abgeschlossen bezüglich jeder Topologie von X^*, die feiner als die schwache* Topologie ist.*

Beweis. Man betrachte zu festem $(y, x) \in [f, C]$ die Menge aller $(y^*, x^*) \in R \times X^*$ mit

$$x^*(x) - y^* - y \leqq 0. \tag{9}$$

Versieht man nun X^* mit seiner schwachen* Topologie, R mit seiner natürlichen Topologie, so hat man damit auch $R \times X^*$ mit seiner schwachen* Topologie versehen. Ist nun ein Raum X^* mit seiner schwachen* Topologie versehen, so ist jedes x vermöge $x^*(x)$ ein stetiges lineares Funktional von X^*. Die schwache* Topologie ist die gröbste Topologie, die dies leistet. Infolgedessen stellt die linke Seite von (9) ein stetiges lineares Funktional von $R \times X^*$ dar. Daraus folgt, daß die Menge aller (y^*, x^*), die (9) genügt, abgeschlossen ist. Bildet man nun den Durchschnitt all dieser abgeschlossenen Mengen über alle $(y, x) \in [f, C]$, so ist diese Menge als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Nach der Definition (2) von $[f, C]^*$ ist sie genau $[f, C]^*$.

Aus Hilfssatz 8 folgt wegen Hilfssatz 5 der

Hilfssatz 9: *$f^*(x^*)$ ist nach unten halbstetig bezüglich jeder Topologie, die feiner als die schwache* Topologie von X^* ist.*

Für die späteren Sätze ist es wichtig, ob $[f, C]$ innere Punkte besitzt. Hat nun $[f, C]$ innere Punkte, so braucht $[f, C]^*$ keinesfalls innere Punkte zu besitzen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sei $X = C(0, 1)$ die Menge der über $[0, 1]$ stetigen reellen Funktionen. X^* ist dann nach einem Satz von F. RIESZ isomorph der Menge der reellen normalisierten Funktionen von beschränkter Variation. ($x^*(t) \in X^*$ heißt normalisiert, wenn $x^*(0) = 0$ und $x^*(t + 0) = x^*(t)$ für $t \in (0, 1)$ ist.) Man topologisiert die Räume X und X^* durch die Normen

$$\|x(t)\| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|, \quad \|x^*(t)\| = \operatorname{Var} x^*(t) = \sup_n \sum_{i=1}^{n} |x^*(t_i) - x^*(t_{i-1})|.$$

Dabei ist $0 = t_0 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq t_{n-1} \leqq t_n = 1$ eine beliebige endliche Zerlegung von $[0, 1]$.

Es sei nun

$$f(x) = 0, \quad C = \{x(t) \geqq 0 \text{ für alle } t \in [0, 1]\}.$$

Da nun jedes stetige lineare Funktional von X als Stieltjes-Integral $\int_0^1 x(t)\,dx^*(t)$ dargestellt werden kann, müssen wir

$$f^*(x^*) = \sup_{x(t) \geqq 0} \int_0^1 x(t)\,dx^*(t)$$

bestimmen. Offensichtlich ist

$$f^*(x^*) = 0, \quad C^* = \{x^* \in X^* \mid x^*(t) \text{ nicht-zunehmend}\};$$

ist nämlich $x^*(t)$ in einem Teilstück von $[0, 1]$ zunehmend, so ist das Supremum nicht endlich.

C besitzt innere Punkte, z.B. die Funktionen $x(t) = \alpha > 0$. Ist nämlich $\varepsilon < \alpha$, so bilden die Funktionen $\tilde{x}(t) = x(t) + u(t)$ mit $|u(t)| < \varepsilon$ eine in C enthaltene Umgebung von $x(t)$. (Es ist $|\tilde{x}(t)| = |x(t) + u(t)| \geqq |x(t)| - |u(t)| > 0$ für alle $t \in [0, 1]$).

C^* besitzt keine inneren Punkte: Man braucht ein $x^*(t)$ nur an einer Stetigkeitsstelle etwas zu vergrößern. Die neue Funktion unterscheidet sich dann um beliebig wenig von der alten Funktion bezüglich der Norm $\|x^*(t)\| = \operatorname{Var} x^*(t)$; sie ist aber nicht mehr nicht-zunehmend.

§ 3 Dualitätsaussagen

1. Die schwachen Dualitätsaussagen

Es sei $f(x)$ ein konvexes Funktional, definiert auf einer konvexen Menge C, $g(x)$ ein konkaves Funktional, definiert auf einer konvexen Menge D. Es sei $[f, C]^* = [f^*, C^*]$, $[g, D]^* = [g^*, D^*]$; wir setzen voraus, daß diese Mengen nicht leer sind.

Wir stellen die folgenden Aufgaben:

Primäres Problem: Bestimme $\sup\limits_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x))$,

Duales Problem: Bestimme $\inf\limits_{x^* \in C^* \cap D^*} (f^*(x^*) - g^*(x^*))$.

Wir bezeichnen nun ein $x \in C \cap D$ bzw. $x^* \in C^* \cap D^*$ als eine zulässige Lösung der entsprechenden Aufgabe. Nimmt die Aufgabe für diese zulässige Lösung ihr Supremum oder Infimum an, so bezeichnet man die Lösung als optimal.

Die Dualitätsaussagen sind von zwei wesentlich verschiedenen Aussagetypen: Bei den Existenzsätzen schließt man aus der Existenz zulässiger Lösungen auf die Existenz einer optimalen Lösung eines Problems und die Gleichheit des Wertes von Supremum und Infimum der beiden Aufgaben. Beim Dualitätssatz schließt man aus der Endlichkeit des Supremums der primären Aufgabe auf die Existenz einer optimalen Lösung der dualen Aufgabe.

Genauer gilt der

Schwache Existenzsatz: *Sind $C \cap D$ und $C^* \cap D^*$ nicht leer und gibt es ein $x \in C \cap D$, das innerer Punkt von C oder D ist und ist das dazugehörige Funktional $f(x)$ bzw. $g(x)$ an dieser Stelle x stetig, so ist*

$$\sup_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x)) = \min_{x^* \in C^* \cap D^*} (f^*(x^*) - g^*(x^*)).$$

Außerdem gilt der

Schwache Dualitätssatz: *Gibt es ein $x \in C \cap D$, das innerer Punkt von C oder D ist und ist das dazugehörige Funktional $f(x)$ bzw. $g(x)$ an dieser Stelle x stetig, so gilt: Ist $\sup\limits_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x))$ endlich, so besitzt die duale Aufgabe eine optimale Lösung mit*

$$\sup_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x)) = \min_{x^* \in C^* \cap D^*} (f^*(x^*) - g^*(x^*)).$$

Bedauerlicherweise sagt dieser Satz nur etwas über das $\sup\limits_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x))$ aus. Das folgende Beispiel zeigt, daß schon im Falle, daß $X = R$ ist, das Supremum nicht angenommen zu werden braucht:

$$C = D = [1, \infty), \qquad f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = -\frac{1}{x}; \quad \text{dann ist}$$

$$C^* = (-\infty, 0], \qquad f^*(x^*) = \begin{cases} -2\sqrt{-x^*} & \text{für} \quad 0 \geqq x^* \geqq -1 \\ x^* - 1 & \text{für} \quad -1 \geqq x^* \end{cases}$$

$$D^* = [0, \infty), \qquad g^*(x^*) = \begin{cases} 2\sqrt{x^*} & \text{für} \quad 0 \leqq x^* \leqq 1 \\ x^* + 1 & \text{für} \quad 1 \leqq x^*. \end{cases}$$

$$\sup_{x \geqq 1}(g(x) - f(x)) = \sup_{x \geqq 1}\left(-\frac{2}{x}\right) = 0 \text{ wird für endliches } x \text{ nicht angenommen.}$$

$$\inf_{x^* = 0}(f^*(x^*) - g^*(x^*)) = \inf_{x^* = 0}(-2\sqrt{-x^*} - 2\sqrt{x^*}) = 0 \text{ wird für } x^* = 0 \text{ angenommen.}$$

Allerdings kann man für Räume X, für die $X = X^{**}$ gilt, durch zweimalige Anwendung des schwachen Existenzsatzes und unter Beachtung von Hilfssatz 7 (i) das folgende Korollar zeigen:

Korollar zum schwachen Existenzsatz: *Ist $X = X^{**}$ und $[f, C]$ und $[g, D]$ abgeschlossen, so gilt:*

Gibt es ein $x \in C \cap D$, das innerer Punkt von C oder D ist und ein $x^* \in C^* \cap D^*$, das innerer Punkt von C^* oder D^* ist und sind von den Funktionalen $f(x)$, $g(x)$, $f^*(x^*)$, $g^*(x^*)$ die zwei, deren Definitionsbereich einen inneren Punkt x bzw. x^* besitzt, an dieser Stelle stetig, so ist

$$\max_{x \in C \cap D}(g(x) - f(x)) = \min_{x^* \in C^* \cap D^*}(f^*(x^*) - g^*(x^*)).$$

2. Beweis der schwachen Dualitätsaussagen

Beweis des schwachen Existenzsatzes:

1. Ist $x^* \in C^* \cap D^*$, so gilt

$$f^*(x^*) \geqq x^*(x) - f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in C,$$

$$g^*(x^*) \leqq x^*(x) - g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in D, \text{ also}$$

$$f^*(x^*) - g^*(x^*) \geqq g(x) - f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in C \cap D, \text{ d.h.}$$

$$\inf_{x^* \in C^* \cap D^*}(f^*(x^*) - g^*(x^*)) \geqq \sup_{x \in C \cap D}(g(x) - f(x)).$$

Hieraus folgt, daß Infimum und Supremum endlich sind.

2. Wir setzen jetzt $\beta = \sup_{x \in C \cap D}(g(x) - f(x))$ und $f_1(x) = f(x) + \beta$. Dann ist das konjugierte Funktional von $f_1(x)$

$$f_1^*(x^*) = \sup_{x \in C}(x^*(x) - f(x) - \beta) = f^*(x^*) - \beta.$$

Die beiden konvexen Mengen $[f_1, C]$ und $[g, D]$ haben keine algebraisch-inneren Punkte gemeinsam. Da wir vorausgesetzt haben, daß eine der beiden Mengen C oder D einen inneren Punkt x besitzt und das zu dieser Menge gehörige Funktional an der Stelle x stetig ist, besitzt eine der beiden Mengen $[f_1, C]$ oder $[g, D]$ einen inneren Punkt. Daher gibt es eine trennende abgeschlossene Hyperebene $x^*(x) + y^* y = \alpha$, bei der $y^* \neq 0$ sein muß. Wäre nämlich $y^* = 0$, so projizieren wir

$R \times X$ auf X; dabei gehen $[f_1, C]$ und $[g, D]$ in C und D über und die Hyperebene $x^*(x) = \alpha$ trennt die beiden konvexen Mengen C und D. Dies ist aber nicht möglich, weil es ein $x \in C \cap D$ gibt, das algebraisch-innerer Punkt von C oder D ist.

Wir können also wieder y^* durch -1 ersetzen und haben die trennende Hyperebene $x_0^*(x) - y = \alpha_0$ erhalten, die Stützhyperebene der beiden Mengen $[f_1, C]$ und $[g, D]$ ist. Infolgedessen ist

$$\alpha_0 = f_1^*(x_0^*) = f^*(x_0^*) - \beta \quad \text{und auch} \quad \alpha_0 = g^*(x_0^*);$$

bei Beachtung der Definition von β erhalten wir also:

$$\beta = \sup_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x)) = f^*(x_0^*) - g^*(x_0^*) \geqq \inf_{x^* \in C^* \cap D^*} (f^*(x^*) - g^*(x^*)).$$

Aus den Teilen 1. und 2. folgt die Behauptung, da das Infimum an der Stelle x_0^* angenommen wird.

Beweis des schwachen Dualitätssatzes. β sei wieder wie eben definiert und $f_1(x) = f(x) + \beta$. Die beiden konvexen Mengen $[f_1, C]$ und $[g, D]$ haben dann keine algebraisch-inneren Punkte gemeinsam; eine der beiden Mengen besitzt einen topologisch-inneren Punkt. Sie lassen sich also durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen. Wie beim Beweis des schwachen Existenzsatzes erkennt man durch Projektion $R \times X \to X$, daß der y^*-Bestandteil dieser Hyperebene nicht 0 sein kann. Also gibt es eine abgeschlossene Hyperebene $x_0^*(x) - y = \alpha_0$, die die beiden Mengen $[f_1, C]$ und $[g, D]$ trennt und Stützhyperebene beider Mengen ist. $C^* \cap D^*$ ist mithin nicht leer und Anwendung des schwachen Existenzsatzes ergibt die Aussage des Dualitätssatzes.

Anmerkung. Um nachzuweisen, daß eine der beiden Mengen $[f, C]$ oder $[g, D]$ einen inneren Punkt besitzt, wenn C oder D einen inneren Punkt besitzt, haben wir die Stetigkeit des zugehörigen Funktionals an der Stelle x vorausgesetzt. Selbstverständlich würde es genügen, wenn das Funktional über einer Umgebung von x beschränkt wäre. Dies ist aber nach BOURBAKI [*3*] für konvexe Funktionale gleichwertig mit der Stetigkeit an der Stelle x. Die Beschränktheit ist also keine Abschwächung der Stetigkeit.

3. Ein Hilfssatz

Die schwachen Dualitätsaussagen enthalten die unangenehme Voraussetzung, daß eine der beiden Mengen C oder D innere Punkte besitzen muß. Um noch Dualitätsaussagen zu bekommen, die frei sind von dieser Voraussetzung, beweisen wir erst einmal den

Hilfssatz 10: *Für $i = 1, 2$ seien $f_i(x)$ konvexe Funktionale mit konvexen Definitionsbereichen C_i, $[f_i, C_i]$ abgeschlossen und $[f_i, C_i]^* = [f_i^*, C_i^*]$; weiterhin sei $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ mit Definitionsbereich $C = C_1 \cap C_2$ und $S = [f_1, C_1]^* + [f_2, C_2]^*$, d.h.*

$$S = \{(y_1^* + y_2^*, x_1^* + x_2^*) \in R \times X^* \mid (y_i^*, x_i^*) \in [f_i, C_i]^* \text{ für } i = 1, 2\}$$
$$= \left\{ (y^*, x^*) \in R \times X^* \,\middle|\, \begin{array}{l} x^* = x_1^* + x_2^* \textit{ für mindestens ein } x_1^* \in C_1^*, x_2^* \in C_2^* \\ y^* \geqq f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_2^*) \end{array} \right\}$$

und $\bar{S}$ die abgeschlossene Hülle von S bezüglich der schwachen Topologie von $R \times X^*$. Dann ist $[f, C]^* = \bar{S}$, d.h.*

$$[f_1 + f_2, C_1 \cap C_2]^* = \overline{[f_1, C_1]^* + [f_2, C_2]^*}.$$

Daraus folgt:

1. *Ist S schwach* abgeschlossen, so ist*

$$f^*(x^*) = \min\{f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_2^*) \mid x^* = x_1^* + x_2^*,\ x_1^* \in C_1^*,\ x_2^* \in C_2^*\}, \quad C^* = C_1^* + C_2^*.$$

2. *Ist die mit dem Funktional*

$$h^*(x^*) = \inf\{f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_2^*) \mid x^* = x_1^* + x_2^*,\ x_1^* \in C_1^*,\ x_2^* \in C_2^*\}$$

gebildete Menge $[h^*, C_1^* + C_2^*]$ schwach abgeschlossen, so ist*

$$f^*(x^*) = h^*(x^*) \quad \text{für} \quad x^* \in C^* = C_1^* + C_2^*.$$

Zum Beweis von Hilfssatz 10 versehen wir X^* mit seiner schwachen* Topologie; dann ist $X^{**} = X$ (BOURBAKI [*4*], KÖTHE). Topologisieren wir dann X^{**} genauso wie X, so ist auch $X^{***} = X^*$.

Der Beweis des Hilfssatzes besteht aus zwei Teilen und der Herleitung der beiden Folgerungen.

1. $\bar{S} \subseteq [f_1 + f_2, C_1 \cap C_2]^* = [f, C]^*$.

Für $i = 1, 2$ bedeutet $(y_i^*, x_i^*) \in [f_i, C_i]^*$:

$$y_i^* \geqq x_i^*(x) - f_i(x) \quad \text{für alle} \quad x \in C_i.$$

Durch Addition der beiden Ungleichungen folgt:

$$y_1^* + y_2^* \geqq (x_1^* + x_2^*)(x) - f_1(x) - f_2(x) \quad \text{für alle} \quad x \in C_1 \cap C_2.$$

Da definitionsgemäß

$$[f_1 + f_2, C_1 \cap C_2]^* = \{(y^*, x^*) \mid y^* \geqq x^*(x) - f_1(x) - f_2(x) \text{ für } x \in C_1 \cap C_2\}$$

ist, ist $S \subseteq [f_1 + f_2, C_1 \cap C_2]^* = [f, C]^*$. Da diese Menge nach Hilfssatz 8 schwach* abgeschlossen ist, folgt die Behauptung.

2. $\bar{S} \supseteq [f_1 + f_2, C_1 \cap C_2]^* = [f, C]^*$.

Um dies zu beweisen, gehen wir folgendermaßen vor:

S sei eine konvexe Menge von $R \times X$, die die Eigenschaft hat, daß mit $(y, x) \in S$ auch alle $(\bar{y}, x)$ mit $\bar{y} \geqq y$ zu S gehören. Wir definieren als duale Menge:

$$S^* = \{(y^*, x^*) \in R \times X^* \mid y^* \geqq x^*(x) - y \quad \text{für alle} \quad (y, x) \in S\}.$$

S^* enthält dann mit (y^*, x^*) auch alle $(\bar{y}^*, x^*)$ mit $\bar{y}^* \geqq y^*$. (Unsere Definition von $[f, C]^*$ ist ein Spezialfall dieser Definition.) Den Hilfssätzen 7 und 8 entsprechend gilt für S^*:

(i) *Ist $X^{**} = X$, ist S abgeschlossen und $S^* \neq \emptyset$, so ist $S^{**} = S$.*

(ii) *S^* ist abgeschlossen bezüglich der schwachen* Topologie von X^*.*

(iii) *Ist $X^{**} = X$, $S^* \neq \emptyset$, so ist S^{**} die abgeschlossene Hülle von S.*

Beweis von (iii). Ist nämlich $\bar{S}$ die abgeschlossene Hülle von S, so gilt $S \subseteq \bar{S} \subseteq S^{**}$, da S^{**} abgeschlossen ist bezüglich der durch X^* induzierten schwachen Topologie von $X^{**} = X$ und diese Topologie gröber ist als die Ausgangstopologie von X. Hieraus folgt durch zweimalige Anwendung der *-Operation:

$$S^{**} \subseteq \bar{S}^{**} = \bar{S} \subseteq S^{****} = S^{**}.$$

Wir zeigen nun $S^* \subseteq [f_1 + f_2, C_1 \cap C_2]$. Es sei wieder X^* mit seiner schwachen* Topologie versehen, so daß $X^{**} = X$ ist. Also ist

$$S^* = \{(y, x) \in R \times X \mid y \geqq (x_1^* + x_2^*)(x) - y_1^* - y_2^*, (y_i^*, x_i^*) \in [f_i^*, C_i^*]\}$$
$$= \{(y, x) \in R \times X \mid y \geqq (x_1^*(x) - f_1^*(x^*)) + (x_2^*(x) - f_2^*(x^*)), x_i^* \in C_i^*\}.$$

Da wir vorausgesetzt haben, daß die Mengen $[f_i, C_i]$ abgeschlossen sind, ist $[f_i, C_i] = [f_i, C_i]^{**} = [f_i^*, C_i^*]^*$. Mithin ist

$$f_i(x) = \sup_{x^* \in C_i^*} (x^*(x) - f_i^*(x^*)).$$

Für den Punkt $(y, x) \in S^*$ gilt also $x \in C_1 \cap C_2$, $y \geqq f_1(x) + f_2(x)$. (Ist $x \notin C_1 \cap C_2$, so ist $f_1(x) + f_2(x)$ nicht endlich.) Also ist

$$S^* \subseteq [f_1 + f_2, C_1 \cap C_2] = [f, C].$$

Bilden wir hiervon die dualen Mengen, so folgt:

$$S^{**} \supseteq [f_1 + f_2, C_1 \cap C_2]^* = [f, C]^*,$$

d.h. die Behauptung, da S^{**} wegen (iii) die abgeschlossene Hülle $\bar{S}$ von S ist.

Herleitung der beiden Folgerungen: Da die erste Folgerung evident ist, brauchen wir nur die zweite zu zeigen:

Ist der Punkt $(h^*(x^*), x^*) \notin S$, so gehört er als algebraischer Randpunkt von S zu $\bar{S}$, da jeder algebraische Randpunkt topologischer Randpunkt ist. Also ist $[h^*, C_1^* + C_2^*] \subseteq \bar{S}$. Da andererseits $[h^*, C_1^* + C_2^*]$ nach Voraussetzung schwach* abgeschlossen und als algebraischer Abschluß von S konvex ist, enthält es die abgeschlossene Hülle $\bar{S}$ von S und ist daher gleich $\bar{S}$.

Anmerkung. 1. Obgleich die beiden Komponenten von $S = [f_1, C_1]^* + [f_2, C_2]^*$ schwach* abgeschlossen sind, braucht S nicht abgeschlossen zu sein, wie das folgende Beispiel zeigt: $S = \left[\frac{1}{x}, x > 0\right] + \left[-\frac{1}{x}, x < 0\right]$ ist die offene obere Halbebene.

2. Ist $[h^*, C_1^* + C_2^*]$ schwach* abgeschlossen, so ist es als algebraischer Abschluß von S wieder konvex; daraus folgt, daß $h^*(x^*)$ ein konvexes Funktional sein muß.

4. Die starken Dualitätsaussagen

Aus Hilfssatz 10 folgt jetzt der

Starke Existenzsatz: *Es seien $f(x)$ und $-g(x)$ konvexe Funktionale mit konvexen Definitionsbereichen C bzw. D, $[f, C]$ und $[g, D]$ abgeschlossen.*

Sind dann die beiden Mengen $C \cap D$ und $C^* \cap D^*$ nicht leer, d.h. besitzen die primäre und die duale Optimierungsaufgabe zulässige Lösungen, so gilt:

1. Ist die Menge

$$S = [f^*, C^*] + [-g^*, -D^*]$$
$$= \{(y^*, x^*) \in R \times X^* \mid y^* \geqq f^*(x_1^*) - g^*(x_2^*), x^* = x_1^* - x_2^*, x_1^* \in C^*, x_2^* \in D^*\}$$

schwach abgeschlossen, so ist*

$$\sup_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x)) = \min_{x^* \in C^* \cap D^*} (f^*(x^*) - g^*(x^*))$$

2. Ist die mit dem Funktional

$$h^*(x^*) = \inf\{f^*(x_1^*) - g^*(x_2^*) \mid x^* = x_1^* - x_2^*, x_1^* \in C^*, x_2^* \in D^*\}$$

gebildete Menge $[h^*, C^* - D^*]$ *schwach* abgeschlossen, so ist*

$$\sup_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x)) = \inf_{x^* \in C^* \cap D^*} (f^*(x^*) - g^*(x^*))$$

Beweis. Wir setzen in Hilfssatz 10: $f_1(x) = f(x)$, $C_1 = C$, $f_2(x) = -g(x)$, $C_2 = D$. Dann ist $f_1^*(x^*) = f^*(x^*)$, $C_1^* = C^*$, $f_2^*(x^*) = \sup_{x \in D} (x^*(x) + g(x)) = -\inf_{x \in D} (-x^*(x) - g(x)) = -g^*(-x^*)$, $C_2^* = -D^*$. Also ist das zu $h(x) = f(x) - g(x)$ bezüglich $C \cap D$ konjugierte Funktional

$$h^*(x^*) = \min(f^*(x_1^*) - g^*(x_2^*)) \quad \text{bzw.} \quad h^*(x^*) = \inf(f^*(x_1^*) - g^*(x_2^*))$$

mit $x^* = x_1^* - x_2^*$, $x_1^* \in C^*$, $x_2^* \in D^*$. Da es ein $x^* \in C^* \cap D^*$ gibt, ist $0 \in C^* - D^*$ und daher

$$h^*(0) = \min_{x^* \in C^* \cap D^*} (f^*(x^*) - g^*(x^*)) \quad \text{bzw.} \quad h^*(0) = \inf_{x^* \in C^* \cap D^*} (f^*(x^*) - g^*(x^*)) .$$

Andererseits ist $h^*(x^*) = \sup_{x \in C \cap D} (x^*(x) - f(x) + g(x))$, also

$$h^*(0) = \sup_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x)) .$$

Weiterhin gilt der

Starke Dualitätssatz: *Es seien* $f(x)$ *und* $-g(x)$ *konvexe Funktionale mit konvexen Definitionsbereichen* C *bzw.* D, $[f, C]$ *und* $[g, D]$ *abgeschlossen. Ist dann* $\sup_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x))$ *endlich, so gilt:*

1. Ist die Menge

$$S = [f^*, C^*] + [-g^*, -D^*]$$
$$= \{(y^*, x^*) \in R \times X^* \mid y^* \geqq f^*(x_1^*) - g^*(x_2^*),\ x^* = x_1^* - x_2^*,\ x_1^* \in C^*,\ x_2^* \in D^*\}$$

schwach abgeschlossen, so ist*

$$\sup_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x)) = \min_{x^* \in C^* \cap D^*} (f^*(x^*) - g^*(x^*)) .$$

2. Ist die mit dem Funktional

$$h^*(x^*) = \inf\{f^*(x_1^*) - g^*(x_2^*) \mid x^* = x_1^* - x_2^*,\ x_1^* \in C^*,\ x_2^* \in D^*\}$$

gebildete Menge $[h^*, C^* - D^*]$ *schwach* abgeschlossen, so ist*

$$\sup_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x)) = \inf_{x^* \in C^* \cap D^*} (f^*(x^*) - g^*(x^*)) .$$

Beweis. Das zum konvexen Funktional $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in C \cap D$ konjugierte Funktional ist $h^*(x^*) = \sup_{x \in C \cap D} (x^*(x) - f(x) + g(x))$ mit dem Definitionsbereich $E^* = \{x^* \in X^* \mid h^*(x^*) < \infty\}$. Nach Voraussetzung ist $h^*(0)$ endlich, also ist $0 \in E^*$. Andererseits ist auf Grund der Voraussetzungen und des Hilfssatzes 10 $E^* = C^* - D^*$. Aus $0 \in E^*$ folgt: Es gibt ein $x^* \in C^* \cap D^*$. Anwendung des starken Existenzsatzes ergibt dann die Aussage des starken Dualitätssatzes.

Durch zweimalige Anwendung des starken Existenzsatzes bekommt man schließlich das

Korollar zum starken Existenzsatz: *Es seien $f(x)$ und $-g(x)$ konvexe Funktionale mit konvexen Definitionsbereichen C bzw. D, $[f, C]$ und $[g, D]$ abgeschlossen. Sind dann die beiden Mengen $C \cap D$ und $C^* \cap D^*$ nicht leer, d.h. besitzen die primäre und die duale Aufgabe zulässige Lösungen und sind die Mengen*

$$[f, C] + [-g, D]$$
$$= \{(y, x) \in R \times X \mid y \geqq f(x_1) - g(x_2),\ x = x_1 + x_2,\ x_1 \in C,\ x_2 \in D\}$$
$$[f^*, C^*] + [-g^*, -D^*]$$
$$= \{(y^*, x^*) \in R \times X^* \mid y^* \geqq f^*(x_1^*) - g^*(x_2^*),\ x^* = x_1^* - x_2^*,\ x_1^* \in C^*,\ x_2^* \in D^*\}$$

abgeschlossen bezüglich der Ausgangstopologie von X bzw. der schwachen Topologie von X^*, so ist*

$$\max_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x)) = \min_{x^* \in C^* \cap D^*} (f^*(x^*) - g^*(x^*)),$$

d.h. beide Aufgaben besitzen optimale Lösungen.

§ 4 Lineare Optimierungsaufgaben

1. Definition der linearen Optimierungsaufgaben

Es seien wieder X und Z lokalkonvexe topologische Vektorräume, K_x und K_z konvexe Kegel von X bzw. Z. Sind in der Optimierungsaufgabe: Bestimme $\operatorname{Sup}\{f(x) \mid x \geqq 0,\ Tx \leqq z_0\}$ das Funktional $f(x)$ und der Operator T stetig und linear, so nennt man die Aufgabe eine lineare Optimierungsaufgabe. Die Aufgabe lautet also:

(1) *Bestimme* $\operatorname{Sup}\{x_0^*(x) \mid x \geqq_{K_x} 0,\quad Tx \leqq_{K_z} z_0;\quad T \text{ stetig linear}\}.$

Eine lineare Optimierungsaufgabe wird also durch die folgenden fünf Größen beschrieben: *Die konvexen Kegel $K_x \subseteq X$, $K_z \subseteq Z$, den stetigen linearen Operator T und die festen Vektoren $x_0^* \in X^*$, $z_0 \in Z$.*

2. Adjungierte Operatoren

Zur Bestimmung der dualen Aufgabe brauchen wir den Begriff des zu T adjungierten Operators T^*; man definiert:

Der adjungierte Operator T^* eines stetigen linearen Operators T von X in Z ist der Operator T^* von Z^* in X^*, der durch $T^*z^* = z^*T$ oder genauer $(T^*z^*)(x) = z^*(Tx)$ definiert ist.

Man kommt hierzu auf folgende Weise: Bildet man $z^*(Tx)$, so ist dies ein lineares Funktional von X; es ist stetig, da T und z^* stetig sind. Also ist es ein Element $x^* \in X^*$, das man durch T^*z^* bezeichnet. Die Abbildung $T^*: Z^* \to X^*$ ist linear. Damit T^* eine stetige lineare Abbildung von Z^* in X^* wird, muß man Z^* und X^* erst topologisieren. Wir haben in § 1,7 die schwache* Topologie von X^* definiert. Man zeigt nun (Bourbaki [*4*], S. 100 ff, Dunford-Schwartz S. 475ff.):

Versieht man die Räume Z^* und X^* mit ihrer schwachen Topologie, so ist der zu einem stetigen linearen Operator T von $X \to Z$ adjungierte Operator T^* von $Z^* \to X^*$ stetig.*

Ist T^* stetig bezüglich der schwachen Topologien von X^* und Z^*, so bleibt T^* stetig, wenn man Z^* und X^* gleichzeitig mit ihrer Mackey-Topologie oder ihrer starken Topologie versieht.*

Ist T umkehrbar eindeutig und sind T und T^{-1} stetig, so sind auch T^* und $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ stetig bezüglich der schwachen Topologie von X^* und Z^*.*

3. *Bestimmung der dualen linearen Optimierungsaufgabe*

Um die duale Aufgabe zu berechnen, erweitern wir die ursprüngliche Aufgabe, die sich in den Räumen X und Z abspielte, zu einer äquivalenten Aufgabe in den Räumen

$$U = X \times Z \quad \text{und} \quad V = Z \times X .$$

Wir erweitern die Abbildung $T: X \to Z$ zu

$$\text{(2)} \quad S\colon\ U = X \times Z \to Z \times X = V \quad \text{mit} \quad Su = \begin{pmatrix} T & I_z \\ -I_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx + z \\ -x \end{pmatrix};$$

ihre Umkehrung ist dann

$$\text{(3)} \quad S^{-1}\colon V = Z \times X \to X \times Z = U \quad \text{mit} \quad S^{-1} v = \begin{pmatrix} 0 & -I_x \\ I_z & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ z + Tx \end{pmatrix};$$

dabei sind I_x und I_z die identischen Abbildungen von X bzw. Z. Wir versehen $U = X \times Z$ und $V = Z \times X$ mit ihren Produkttopologien; beide Abbildungen sind dann stetig. Wir ergänzen noch die Vektoren

$$x_0^* \in X^* \quad \text{zu} \quad u_0^* = (x_0^*, 0) \in X^* \times Z^* = U^*$$
$$z_0 \in Z \quad \text{zu} \quad v_0 = (z_0, 0) \in Z \times X = V .$$

Die konvexen Kegel K_u und K_v definieren wir durch

$$\text{(4)} \qquad K_u = K_x \times 0 , \qquad K_v = K_z \times X .$$

Dann betrachten wir die Optimierungsaufgabe

$$\text{(5)} \qquad \text{Bestimme} \quad \operatorname{Sup} \{u_0^*(u) \mid u \geqq_{K_u} 0, \quad Su \leqq_{K_v} v_0\} .$$

Ausgeschrieben lautet (5):

$$\text{(6)} \quad \text{Bestimme} \quad \operatorname{Sup} \{x_0^*(x) \mid x \geqq_{K_x} 0, \quad z = 0, \quad Tx + z \leqq_{K_z} z_0, \quad -x \in X\} .$$

Wegen der Definition (4) der konvexen Kegel K_u, K_v ist (6) nichts anderes als die Aufgabe (1); (5) und (1) sind also gleichwertig. S ist jetzt aber eine umkehrbar-eindeutige Abbildung.

Wir wenden nun die Theorie des § 2 an; wir setzen

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} f(u) &= 0 \quad\ \ \text{auf} \quad C = \{u \in U \mid Su \leqq v_0\} , \\ g(u) &= u_0^*(u) \ \text{auf} \quad D = \{u \in U \mid u \geqq 0\} . \end{aligned}$$

Es sind S und S^{-1} stetig, also ist auch $S^*: V^* \to U^*$ umkehrbar eindeutig und stetig bezüglich der schwachen* Topologien von V^* und U^*. Es ist

$$f^*(u^*) = \sup_{Su \leqq v_0} u^*(u) = \sup_{Su \leqq v_0} S^* v^*(u) = \sup_{Su \leqq v_0} (v^*(Su - v_0) + v^*(v_0)) ,$$

also

$$\text{(8)} \qquad f^*(u^*) = v^*(v_0) \quad \text{auf} \quad C^* = \{u^* \in U^* \mid u^* = S^* v^*, \quad v^* \geqq 0\} .$$

Ist nämlich $v^* \geqq 0$, so ist $v^*(Su - v_0) \leqq 0$; da es nun ein u_0 gibt mit $Su_0 - v_0 = 0$, ist das Supremum 0. Ist andererseits $v_1^* \ngeqq 0$, so gibt es wegen der Definition von K_v^* ein $v_1 = Su_1 \geqq 0$ mit $v_1^*(v_1) = v_1^* S u_1 < 0$. Dann gilt für $u_0 - \alpha u_1$, $\alpha > 0$: $S(u_0 - \alpha u_1) - v_0 = -\alpha S u_1 \leqq 0$ und $v_1^*(S(u_0 - \alpha u_1) - v_0) = -\alpha v_1^* S u_1$. Dieser Ausdruck geht gegen unendlich für $\alpha \to \infty$.

Weiterhin ist

$$g^*(u^*) = \inf_{u \geqq 0}(u^*(u) - u_0^*(u)) = \inf_{u \geqq 0}(u^* - u_0^*)(u) = 0 \quad \text{für} \quad u^* \geqq u_0^* .$$

Ist nämlich $u_1^* - u_0^* \ngeqq 0$, so gibt es wieder ein $u_1 \geqq 0$ mit $(u_1^* - u_0^*)(u_1) < 0$ und $(u_1^* - u_0^*)(\alpha u_1) \to -\infty$ für $\alpha \to \infty$.

Man erhält also

$$(9) \qquad g^*(u^*) = 0 \quad \text{für} \quad D^* = \{u^* \in U^* \,|\, u^* \geqq u_0^*\} .$$

Aus (8) und (9) folgt: Die zu (5) duale Aufgabe lautet:

$$(10) \qquad \text{Bestimme} \quad \operatorname{Inf}\{v^*(v_0) \,|\, v^* \geqq_{K_{v^*}} 0 , \quad S^* v^* \geqq_{K_{u^*}} u_0^*\} .$$

Nun ist $U^* = X^* \times Z^*$, $V^* = Z^* \times X^*$, die zu den konvexen Kegeln K_u, K_v (4) dualen Kegel sind

$$(11) \qquad K_u^* = K_x^* \times Z^* , \quad K_v^* = K_z^* \times 0 .$$

Weiterhin ist

$$(12) \qquad S^* = \begin{pmatrix} T^* & -I_{x^*} \\ I_{z^*} & 0 \end{pmatrix} .$$

Infolgedessen lautet (10) ausgeschrieben — x^* fällt durch die Forderung $x^* = 0$ wieder heraus —:

$$(13) \qquad \text{Bestimme} \quad \operatorname{Inf}\{z^*(z_0) \,|\, z^* \geqq_{K_{z^*}} 0 , \quad T^* z^* \geqq_{K_{x^*}} x_0^*\} .$$

4. Übertragung der Dualitätsaussagen

Wir haben damit nachgewiesen, daß zur Optimierungsaufgabe

$$(14) \qquad \text{Bestimme} \quad \operatorname{Sup}\{x_0^*(x) \mid x \geqq 0 , \ Tx \leqq z_0 , \quad T \text{ stetig linear}\}$$

die duale Aufgabe lautet

$$(15) \qquad \text{Bestimme} \quad \operatorname{Inf}\{z^*(z_0) \mid z^* \geqq 0 , \ T^* z^* \geqq x_0^* , \quad T^* \text{ stetig linear}\} .$$

Dabei werden Z^* und X^* gleichzeitig mit ihrer schwachen* oder ihrer starken oder ihrer Mackey-Topologie versehen.

Man beachte: Bekanntlich ist die Mackey-Topologie die feinste Topologie von X^*, für die $X^{**} = X$ ist (Köthe, Bourbaki [*4*]). Ist die Topologie von X^* feiner als die Mackey-Topologie, so ist die duale Aufgabe von (15) nicht mehr die Aufgabe (14).

Da die Definitionsmengen C und D der beiden Funktionale nach (7)

$$C = \{(x, z) \in X \times Z \,|\, Tx + z \leqq_{K_z} z_0 , \quad -x \in X\}$$
$$D = \{(x, z) \in X \times Z \,|\, x \geqq_{K_x} 0 , \quad z = 0\}$$

sind und D bestimmt keine inneren Punkte besitzt, lauten unsere schwachen Dualitätsaussagen:

Schwacher Existenzsatz: *Besitzen beide Aufgaben* (14), (15) *zulässige Lösungen und besitzt die primäre Aufgabe* (14) *eine zulässige Lösung* x, *deren Bild* $z_0 - Tx$ *innerer Punkt von* K_z *ist, so ist* $\sup x_0^*(x) = \min z^*(z_0)$, *d. h. die duale Aufgabe besitzt eine optimale Lösung.*

Schwacher Dualitätssatz: *Gibt es ein* $x \in K_x$, *dessen Bild* $z_0 - Tx$ *innerer Punkt von* K_z *ist und ist das Supremum der primären Aufgabe endlich, so hat die duale Aufgabe eine optimale Lösung mit* $\sup x_0^*(x) = \min z^*(z_0)$.

Die in den starken Dualitätsaussagen vorkommenden Ausdrücke sind

$$\begin{aligned} S &= \{(y^*, x^*) \in R \times X^* \mid y^* \geqq z_1^*(z_0),\ T^* z_1^* - x_2^* = x^*, z_1^* \geqq 0, x_2^* \geqq x_0^*\} \\ &= \{(y^* + z_1^*(z_0),\ T^* z_1^* - x_2^*) \in R \times X^* \mid y^* \geqq 0, z_1^* \geqq 0, x_2^* \geqq x_0^*\}, \end{aligned}$$

$$h^*(x^*) = \inf\{z_1^*(z_0) \mid T^* z_1^* - x_2^* = x^*, z_1^* \geqq 0, x_2^* \geqq x_0^*\}.$$

Da sich an der Abgeschlossenheit der Menge S nichts ändert, wenn wir x_0^* durch 0 ersetzen, besagen unsere starken Dualitätsaussagen:

Starker Existenzsatz: *Besitzen beide Aufgaben zulässige Lösungen, sind* K_x *und* K_z *abgeschlossen, so gilt:*

1. *Ist die Menge* $\{(y^* + z^*(z_0),\ T^* z^* - x^*) \in R \times X^* \mid y^* \geqq 0, z^* \geqq 0, x^* \geqq 0\}$ *schwach* abgeschlossen, so ist* $\sup x_0^*(x) = \min z^*(z_0)$.

2. *Ist die mittels des Funktionals* $h^*(x^*)$ *gebildete Menge* $[h^*, C^* - D^*]$ *schwach* abgeschlossen, so ist* $\sup x_0^*(x) = \inf z^*(z_0)$.

Starker Dualitätssatz: *Ist das Supremum der Zielfunktion der primären Aufgabe endlich, sind* K_x, K_z *abgeschlossen, so gilt:*

1. *Ist die Menge* $\{(y^* + z^*(z_0),\ T^* z^* - x^*) \in R \times X^* \mid y^* \geqq 0, z^* \geqq 0, x^* \geqq 0\}$ *schwach* abgeschlossen, so ist* $\sup x_0^*(x) = \min z^*(z_0)$.

2. *Ist die mittels des Funktionals* $h^*(x^*)$ *gebildete Menge* $[h^*, C^* - D^*]$ *schwach* abgeschlossen, so ist* $\sup x_0^*(x) = \inf z^*(z_0)$.

Schließlich lautet das

Korollar zum starken Existenzsatz: *Besitzen beide Aufgaben zulässige Lösungen, sind* K_x, K_z *und die beiden Mengen*

$$\begin{aligned} U &= \{(y + x_0^*(x),\ Tx + z) \in R \times Z \mid y \geqq 0, \quad x \geqq 0, \quad z \geqq 0\} \\ V &= \{(y^* + z^*(z_0),\ T^* z^* - x^*) \in R \times X^* \mid y^* \geqq 0, \quad x^* \geqq 0, \quad z^* \geqq 0\} \end{aligned}$$

abgeschlossen bezüglich der Ausgangstopologien von X, Z *bzw. der schwachen* Topologie von* X^*, *so besitzen beide Aufgaben optimale Lösungen mit gleichen Extremalwerten.*

Sind X und Z endlich-dimensionale Vektorräume und werden die Kegel K_x, K_z, K_{x^*}, K_{z^*} durch Hyperebenen begrenzt, so sind die Mengen U und V Polyeder. Da diese immer abgeschlossen sind, gilt hier an Stelle des starken Dualitätssatzes und des Korollars zum Existenzsatz:

Existenzsatz der linearen Programmierungsaufgaben: Haben beide Aufgaben zulässige Lösungen, so haben beide Aufgaben optimale Lösungen mit gleichen Extremalwerten.

Dualitätssatz der linearen Programmierungsaufgaben: Besitzt die eine Aufgabe eine optimale Lösung, so hat auch die andere Aufgabe eine optimale Lösung mit gleichem Extremalwert.

5. *Diskussion der bisher veröffentlichten Literatur über lineare Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen*

Dualitätsaussagen bei Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen wurden bisher nur von BRATTON, DUFFIN und KRETSCHMER untersucht. BRATTON, DUFFIN und KRETSCHMER [*18*] behandeln nur lineare Optimierungsaufgaben. Erst in seiner neueren Arbeit [*19*] gibt KRETSCHMER auch Paare nicht-linearer Optimierungsaufgaben an, ohne aber eine allgemeine Theorie zu entwickeln. Man findet bei den drei genannten Autoren den schwachen und den starken Dualitätssatz Teil 1 für lineare Optimierungsaufgaben.

Bei DUFFIN und KRETSCHMER findet man noch folgende Begriffe:

Die duale lineare Optimierungsaufgabe

$$\text{Bestimme} \quad \operatorname{Inf}\{z^*(z_0) \mid z^* \geqq 0,\ T^*z^* \geqq x_0^*\}$$

heißt subconsistent, wenn es Filter $\{x_\alpha^*\} \subset K_x^*$ und $\{z_\alpha^*\} \subset K_z^*$ gibt mit $\underline{\lim}\,(T^*z_\alpha^* - x_\alpha^*) = x_0^*$. Als Sub-Wert (subvalue) bezeichnet man dann $m = \inf \underline{\lim}\, z_\alpha^*(z_0)$, genommen über alle zulässigen Filter $\{z_\alpha^*\}$. Beide Autoren zeigen dann:

Das Supremum der primären Aufgabe ist dann und nur dann endlich mit Extremalwert m, wenn die duale Aufgabe subconsistent ist mit Sub-Wert m.

Diese Aussage folgt aus unseren starken Dualitätsaussagen:

Nach Hilfssatz 10 wissen wir ja, daß die duale Menge zu $U = [-x_0^*(x), x \mid x \geqq 0,\ Tx \leqq z_0]$ gerade $\tilde{S}$ ist. Andererseits ist $U^* = [h^*, H^*]$ mit $h^*(x^*) = \sup\limits_{x \geqq 0,\, Tx \leqq z_0} (x^*(x) + x_0^*(x))$, $H^* = \{x^* \in X^* \mid h^*(x^*) < \infty\}$. Laut Voraussetzung ist $h^*(0) = \sup\limits_{x \geqq 0,\, Tx \leqq z_0} x_0^*(x)$ endlich, also $0 \in H^*$.

Da sich nun alle $x^* \in S$ darstellen lassen als $x^* = T^*z_1^* - x_2^*,\ z_1^* \geqq 0,\ x_2^* \geqq x_0^*$, d. h. als $x^* + x_0^* = T^*z_1^* - (x_2^* - x_0^*)$ und $[h^*, H^*] = \tilde{S}$ ist, gibt es Filter $\{x_\alpha^*\} \subset K_x^*$ und $\{z_\alpha^*\} \subset K_z^*$ mit $\inf \underline{\lim}\,(T^*z_\alpha^* - x_\alpha^*) = x_0^*$, d. h. die duale Aufgabe ist subconsistent und hat als Sub-Wert den Extremalwert der primären Aufgabe.

Ist umgekehrt die duale Aufgabe subconsistent, so gibt es Filter $\{x_\alpha^*\} \subset K_x^*$ und $\{z_\alpha^*\} \subset K_z^*$ mit $\inf \underline{\lim}\,(T^*z_\alpha^* - x_\alpha^*) = x_0^*$, d. h. Filter $\{x_\beta^*\}$ mit $\{x_\beta^* - x_0^*\} \subset K_x^*$ und $\{z_\beta^*\} = \{z_\alpha^*\} \subset K_z^*$ mit $\inf \underline{\lim}\,(T^*z_\beta^* - x_\beta^*) = 0$. Also ist $0 \in H^*$ und damit $h^*(0) = \sup\limits_{x \geqq 0,\, Tx \leqq z_0} x_0^*(x)$ endlich. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt, daß die Extremalwerte gleich sind.

6. *Das Kretschmersche Beispiel eines Paares linearer Optimierungsaufgaben mit verschiedenen Extremalwerten*

Es sei L_2 der Raum der quadratisch-Lebesgue-integrablen Funktionen, über dem Intervall $[0, 1]$, r seien Elemente des reellen Zahlkörpers R. Das Aufgabenpaar lautet (KRETSCHMER [*18*]):

$$\text{(16)} \qquad \text{Maximiere} \left\{ \int_0^1 x(t)\,dt \,\middle|\, x(t) \geqq 0,\ \int_0^t x(s)\,ds \leqq t,\ \int_0^1 x(s)\,ds \leqq 2 \right\},$$

$$\text{(17)} \qquad \text{Minimiere} \left\{ \int_0^1 t\,x(t)\,dt + 2r \,\middle|\, x(t) \geqq 0,\ r \geqq 0,\ \int_t^1 x(s)\,ds + r \geqq 1 \right\}.$$

Bei der primären Aufgabe (16) ist $X = L_2$, $Z = L_2 \times R$, bei der dualen Aufgabe (17) also $Z^* = L_2 \times R$, $X^* = L_2$. Die primäre Aufgabe hat die optimale Lösung $x(t) = 1$ mit dem Extremalwert 1, die duale Aufgabe die optimale Lösung $x(t) = 0$, $r = 1$ mit dem Extremalwert 2. Das Beispiel widerspricht nicht den schwachen Dualitätsaussagen, da die Mengen $\{x(t) \geqq 0\}$ bzw. $\{x(t) \geqq 0, r \geqq 0\}$ keine inneren Punkte besitzen. Wir zeigen, daß die Mengen S bzw. $[h^*, C^* - D^*]$ der starken Dualitätsaussagen nicht stark, also erst recht nicht schwach* abgeschlossen sind. Für die Aufgaben ist

$$S = \left\{\left(y^* + \int_0^1 t x_1(t)\,dt + 2r_1,\ \int_t^1 x_1(s)\,ds + r_1 - x_2(t)\right),\ y^* \geqq 0,\ x_1(t) \geqq 0,\ x_2(t) \geqq 0,\ r_1 \geqq 0\right\}.$$

Ist $(y^*, 1) \in S$, so ist $y^* \geqq 2$, wie man folgendermaßen sieht: Es muß

$$\int_t^1 x_1(s)\,ds + r_1 - x_2(t) = 1 \quad \text{mit} \quad x_1(t) \geqq 0, \quad x_2(t) \geqq 0, \quad r_1 \geqq 0$$

sein. Daraus folgt $r_1 \geqq 1$, $x_1(t) \geqq 0$, $x_2(t) \geqq 0$ und das Infimum von $\int_0^1 t x(t)\,dt + 2r_1$ ist 2. Also ist der Punkt $(1, 1) \notin S$. Er liegt auch nicht in $[h^*, C^* - D^*]$, da das Infimum angenommen wird. Wir zeigen jetzt:

$(1, 1) \in \bar{S}$, *der abgeschlossenen Hülle von S; S ist also nicht abgeschlossen.*

Die Funktion:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1 - \varepsilon^2 \\ 0 & \text{für} \quad 1 - \varepsilon^2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

unterscheidet sich von der Funktion $x(t) = 1$ um ε bezüglich der üblichen Norm $\|x(0)\| = \left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{1/2}$. Setzt man für $n > 0$

$$x_1(t) = \frac{n t^{n-1}}{1 - (1 - \varepsilon^2)^n} \qquad x_2(t) = \begin{cases} \dfrac{1 - t^n}{1 - (1 - \varepsilon^2)^n} - 1 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1 - \varepsilon^2 \\ \dfrac{1 - t^n}{1 - (1 - \varepsilon^2)^n} & \text{für} \quad 1 - \varepsilon^2 \leqq t \leqq 1, \end{cases}$$

$$r_1 = 0$$

so ist $x_2(t) \geqq 0$ und $x(t) = \int_t^1 x_1(s)\,ds + r_1 - x_2(t)$ für alle $t \in [0, 1]$. Damit wird aber

$$\int_0^1 t x_1(t)\,dt = \frac{n}{n+1} \frac{1}{1 - (1 - \varepsilon^2)^n}. \tag{18}$$

Ist ε fest, so kann durch genügend großes n der Ausdruck (18) beliebig nah an 1 herangebracht werden. Also ist $(1, 1) \in \bar{S}$. Wir haben damit zugleich einen optimalen Filter für die duale Aufgabe konstruiert.

§ 5 Eine nicht-lineare Optimierungsaufgabe (Verallgemeinerung einer Aufgabe von Eisenberg)

1. Die verallgemeinerte Eisenbergsche Aufgabe

Es ist nicht so ohne weiteres möglich, konkrete nicht-lineare Programmierungsaufgaben auf Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen zu übertragen. Zum Beispiel ist es bei Aufgaben mit quadratischer Zielfunktion notwendig, daß ein Skalarprodukt im topologischen Vektorraum erklärt ist, was nicht immer möglich ist. Selbst wenn ein Skalarprodukt erklärt ist, läßt sich die duale Aufgabe im allgemeinen nicht bestimmen. In speziellen topologischen Vektorräumen kann man diese Schwierigkeit oft umgehen.

Bemerkenswert ist, daß sich eine nicht notwendig lineare Programmierungsaufgabe — die Aufgabe von Eisenberg — auf lokalkonvexe topologische Vektorräume verallgemeinern läßt. Die Bestimmung der dualen Aufgabe bildet den Gegenstand dieses Paragraphen.

Es seien wieder X und Z lokalkonvexe topologische Vektorräume, $K_x \subseteq X$ und $K_z \subseteq Z$ abgeschlossene konvexe Kegel, T ein stetiger linearer Operator von X in Z. Die dualen Räume X^* und Z^* seien mit festen Topologien $\mathfrak{T}_{x*}$ bzw. $\mathfrak{T}_{z*}$ versehen, die feiner als die schwache* und gröber als die Mackey-Topologie sind. Dann ist $X^{**} = X$, $Z^{**} = Z$, wie wir in § 1,5 referiert haben. Nach Hilfssatz 1 aus § 1,8 sind die zu K_x bzw. K_z dualen Kegel $K_x^* \subseteq X^*$ bzw. $K_z^* \subseteq Z^*$ schwach* abgeschlossen. Außerdem ist die adjungierte Abbildung $T^*: Z^* \to X^*$ schwach* stetig. $-g(x)$ und $f^*(z^*)$ seien konvexe, nach unten halbstetige Funktionale mit Definitionsbereichen K_x bzw. K_z^*; beide seien homogen vom ersten Grade, d. h. es gelte $g(\alpha x) = \alpha g(x)$, $f^*(\alpha z^*) = \alpha f^*(z^*)$ für positives reelles α.

Wir stellen dann die Aufgabe:

$$\text{(1)} \qquad \textit{Bestimme} \quad \operatorname{Sup}\{g(x) \,|\, x \geqq_{K_x} 0,\ z^*(Tx) \leqq f^*(z^*) \quad \textit{für alle} \quad z^* \geqq_{K_z^*} 0\}\,.$$

Wie wir zeigen werden, ist die dazu duale Aufgabe

$$\text{(2)} \qquad \textit{Bestimme} \quad \operatorname{Inf}\{f^*(z^*) \,|\, z^* \geqq_{K_z^*} 0, \quad z^*(Tx) \geqq g(x) \quad \textit{für alle} \quad x \geqq_{K_x} 0\}\,.$$

Wir merken noch an, daß die Eisenbergsche Aufgabe eine Verallgemeinerung der linearen Optimierungsaufgabe ist. Setzt man nämlich $g(x) = x_0^*(x)$, $f^*(z^*) = z^*(z_0)$, so lautet die Aufgabe

$$\text{Bestimme} \quad \operatorname{Sup}\{x_0^*(x) \,|\, x \geqq 0,\ z^* Tx \leqq z^*(z_0) \quad \text{für alle} \quad z^* \geqq 0\}\,.$$

Aus $z^*(z_0) - z^*(Tx) = z^*(z_0 - Tx) \geqq 0$ für alle $z^* \geqq 0$ folgt aber nach Hilfssatz 1 aus § 1,8: $z_0 - Tx \geqq 0$, d.h. $Tx \leqq z_0$.

2. Ein Hilfssatz

Um die zu (1) duale Aufgabe (2) herzuleiten, zeigen wir erst einmal den

Hilfssatz 11: *Ist* $C_z = \{z \in Z \,|\, z^*(z) \leqq f^*(z^*)$ *für alle* $z^* \geqq 0\}$, *so ist* C_z *nichtleer und* $f^*(z^*) = \sup\limits_{z \in C_z} z^*(z)$.

Beweis: Wir betrachten die Menge

$$[f^*(z^*), K_z^*] = \{(y^*, z^*) \in R \times Z^* \,|\, y^* \geqq f^*(z^*),\ z^* \in K_z^*\}$$

und den Punkt $P = (f^*(z_0^*) - \alpha, z_0^*)$ mit $\alpha > 0$, $z_0^* \in K_z^*$. Die Menge $[f^*(z^*), K_z^*]$ ist konvex und nach Hilfssatz 5 abgeschlossen, P gehört ihr nicht an. Also gibt es eine strikt-trennende Hyperebene, d. h. ein stetiges lineares Funktional $(y, z) \in (R \times Z^*)^* = R \times Z$ mit

$$z(z^*) + yy^* \leqq 0 < z(z_0^*) + y(f^*(z_0^*) - \alpha) \quad \text{für alle} \quad (y^*, z^*) \in [f^*, K_z^*]\,,$$

oder

$$z^*(z) + y^* y \leqq 0 < z_0^*(z) + y(f^*(z_0^*) - \alpha) \quad \text{für alle} \quad (y^*, z^*) \in [f^*, K_z^*]\,.$$

Nun ist $y \neq 0$, da sich sonst ein Widerspruch ergibt; es muß $y < 0$ sein, da y^* beliebig groß werden kann. Wir können also $y = -1$ setzen und erhalten

$$z^*(z) - y^* \leqq 0 < z_0^*(z) - f^*(z_0^*) + \alpha \quad \text{für alle} \quad (y^*, z^*) \in [f^*, K_z^*]\,.$$

Aus der linken Ungleichung folgt $z^*(z) \leqq f^*(z^*)$ für alle $z^* \geqq 0$, d. h. $z \in C_z$. Aus der ganzen Ungleichung folgt für $y^* = f^*(z_0^*)$, $z^* = z_0^*$

$$z_0^*(z) \leqq f^*(z_0^*) < z_0^*(z) + \alpha\,, \quad (\alpha > 0)\,,$$

d. h. die gewünschte Aussage.

3. *Berechnung der dualen Aufgabe*

Wie bei der Bestimmung der dualen linearen Aufgabe in § 4 gehen wir auch hier vor:

Wir betrachten wieder die Räume $U = X \times Z$, $V = Z \times X$, die Abbildung S: $U = X \times Z \to Z \times X = V$ und ihre Umkehrung S^{-1}, definiert durch

$$Su = S\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & I_z \\ -I_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \qquad S^{-1}v = \begin{pmatrix} 0 & -I_x \\ I_z & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}.$$

Wir ergänzen $g(x)$ zu $G(u) = G(x, z) = g(x)$, $f^*(z^*)$ zu $F^*(v^*) = F^*(z^*, x^*) = f^*(z^*)$ und definieren $K_u = K_x \times 0$, $K_v = K_z \times X$; dann ist $K_u^* = K_x^* \times Z^*$, $K_v^* = K_z^* \times 0$. Wir stellen nun die Aufgaben:

(3) Bestimme $\operatorname{Sup}\{G(u) \mid u \geqq 0,\ v^*Su \leqq F^*(v^*)$ für alle $v^* \geqq 0\}$

(4) Bestimme $\operatorname{Inf}\{F^*(v^*) \mid v^* \geqq 0,\ v^*Su \geqq G(u)$ für alle $u \geqq 0\}$.

Ausgeschrieben besagen (3) und (4): Man bestimme

(5) $\operatorname{Sup}\{g(x) \mid x \geqq 0,\ z = 0,\ z^*Tx + z^*z - x^*x \leqq f^*(z^*)$ für alle $z^* \geqq 0,\ x^* = 0\}$

(6) $\operatorname{Inf}\{f^*(z^*) \mid z^* \geqq 0,\ x^* = 0,\ z^*Tx + z^*z - x^*x \geqq g(x)$ für alle $x \geqq 0,\ z = 0\}$.

Offensichtlich sind die Aufgaben (1) und (5) bzw. (2) und (6) äquivalent.

Wir wenden nun die Theorie des § 2 an und setzen

(7) $f(u) = 0$ auf $C = \{u \in U \mid v^*Su \leqq F^*(v^*)$ für alle $v^* \geqq 0\}$
$g(u) = G(u)$ auf $D = \{u \in U \mid u \geqq 0\}$.

Dann ist

$$f^*(u^*) = \sup_{u \in C} u^*u = \sup_{u \in C} (S^*v^*)u = \sup_{u \in C} v^*Su = F^*(v^*) \quad \text{für} \quad v^* \geqq 0$$

nach Hilfssatz 11. Ist $u^* = S^*v^*$ mit $v^* \ngeqq 0$, so ist das Supremum nicht endlich, wie man folgendermaßen sieht:

Nach Hilfssatz 11 ist die Menge C nicht leer; es gibt also ein $u_0 \in C$ mit $v^*Su_0 \leqq F^*(v^*)$ für alle $v^* \geqq 0$. Ist nun $v_1^* \ngeqq 0$, so gibt es nach der Definition des dualen Kegels (§ 1,7) ein $v_1 = Su_1 \geqq 0$ mit $v_1^*Su_1 < 0$; für dieses u_1 gilt natürlich $v^*Su_1 \geqq 0$ für alle $v^* \geqq 0$. Also ist für $\alpha > 0$:

$$v^*S(u_0 - \alpha u_1) = v^*Su_0 - \alpha v^*Su_1 \leqq v^*Su_0 \leqq F^*(v^*) \quad \text{für alle} \quad v^* \geqq 0,$$

d. h. $u_0 - \alpha u_1 \in C$ für alle $\alpha > 0$. Für dieses $u_0 - \alpha u_1$ gilt aber:

$$v_1^*S(u_0 - \alpha u_1) = v_1^*Su_0 - \alpha v_1^*Su_1 \to \infty \quad \text{für} \quad \alpha \to \infty,$$

das Supremum kann also nicht endlich sein.

Damit haben wir

(8) $$f^*(u^*) = F^*(v^*) \quad \text{und} \quad C^* = \{u^* = S^*v^* \mid v^* \geqq 0\}$$

gezeigt. Andererseits ist

(9) $g^*(u^*) = \inf\limits_{u \geqq 0}(u^*u - G(u)) = 0$ mit $D^* = \{u^* \mid u^*u \geqq G(u)$ für alle $u \geqq 0\}$.

Ist nämlich $u^*u - G(u) < 0$ für ein $u \geqq 0$, so wird $u^*(\alpha u) - G(\alpha u) = \alpha(u^*u - G(u))$ für $\alpha \to \infty$ beliebig klein.

Da $f^*(u^*) - g^*(u^*) = F^*(v^*)$, $C^* \cap D^* = \{v^* \geqq 0, (S^*v^*)u = v^*Su \geqq G(u)$ für alle $u \geqq 0\}$ ist, haben wir gezeigt, daß (4) die duale Aufgabe zu (3) und damit (2) die duale Aufgabe zu (1) ist.

4. *Übertragung der Dualitätssätze*

Da die Definitionsmengen C und D der Funktionale $f(u)$ und $g(u)$ nach (7) die Form haben

$$C = \{(x, z) \in X \times Z \,|\, z^*(Tx + z) \leqq f^*(z^*) \quad \text{für alle} \quad z^* \geqq 0\}$$
$$D = \{(x, z) \in X \times Z \,|\, x \geqq_{K_x} 0,\ z = 0\}$$

und die Menge D sicher keine inneren Punkte besitzt, lauten die schwachen Dualitätsaussagen:

Schwacher Existenzsatz: *Besitzen beide Aufgaben* (1) *und* (2) *zulässige Lösungen und besitzt die primäre Aufgabe* (1) *eine zusätzliche Lösung x, die innerer Punkt der Menge $C = \{x \in X \,|\, z^*(Tx) \leqq f^*(z^*)$ für alle $z^* \geqq 0\}$ ist, so ist* $\sup g(x) = \min f^*(z^*)$, *d. h. die duale Aufgabe hat eine optimale Lösung.*

Schwacher Dualitätssatz: *Gibt es ein $x \in K_x$, das innerer Punkt von $C = \{x \in X \,|\, z^*(Tx) \leqq f^*(z^*)$ für alle $z^* \geqq 0\}$ ist, und ist das Supremum der primären Aufgabe* (1) *endlich, so hat die duale Aufgabe* (2) *eine optimale Lösung mit*

$$\sup g(x) = \min f^*(z^*)\,.$$

Um die in den starken Dualitätsaussagen genannten Ausdrücke zu berechnen, brauchen wir

$$\text{(10)}\quad f^*(u^*) = f^*(z_1^*) \quad \text{für} \quad C^* = \{(T^* z_1^* - x_1^*, z_1^*) \in X^* \times Z^* \,|\, z_1^* \geqq 0,\ x_1^* = 0\}$$
$$= \{(T^* z_1^*, z_1^*) \in X^* \times Z^* \,|\, z_1^* \geqq 0\}\,,$$

$$g^*(u^*) = 0 \quad \text{für}$$

$$\text{(11)}\qquad D^* = \{(x_2^*, z_2^*) \in X^* \times Z^* \,|\, x_2^* x + z_2^* z \geqq g(x) \text{ für alle } x \geqq 0,\ z = 0\}$$
$$= \{(x_2^*, z_2^*) \in X^* \times Z^* \,|\, x_2^* x \geqq g(x) \text{ für alle } x \geqq 0\}\,.$$

Infolgedessen ist

$$\text{(12)}\quad \begin{aligned} S &= \{(y^*, x^*, z^*) \,|\, y^* \geqq f^*(z_1^*);\ x^* = T^* z_1^* - x_2^*,\ z_1^* \geqq 0,\ x_2^* x \geqq g(x) \text{ für } x \geqq 0, \\ &\qquad z^* = z_1^* - z_2^*,\ z_2^* \text{ beliebig}\} \\ &= \{(y^*, x^*) \,|\, y^* \geqq f^*(z_1^*);\ x^* = T^* z_1^* - x_2^*, z_1^* \geqq 0, x_2^* x \geqq g(x) \text{ für } x \geqq 0\} \times Z^* \\ &= \{(y^* + f^*(z^*), T^* z^* - x^*) \,|\, y^* \geqq 0,\ z^* \geqq 0, x^* x \geqq g(x) \textit{ für alle } x \geqq 0\} \times Z^*\,. \end{aligned}$$

Das Funktional $h^*(x^*)$ ergibt sich als

$$\text{(13)}\quad h^*(x^*) = \inf\{f^*(z^*) \,|\, T^* z^* - x_2^* = x^*, z^* \geqq 0, x_2^* x \geqq g(x) \text{ für } x \geqq 0\}\,.$$

Verwenden wir dies in den starken Dualitätsaussagen des § 3, so ergibt sich für die verallgemeinerte Eisenbergsche Aufgabe:

Starker Existenzsatz: *Besitzen beide Aufgaben* (1) *und* (2) *zulässige Lösungen, so gilt:*

1. *Ist die Menge* $S = \{(y^* + f^*(z^*),\ T^* z^* - x^*) \in R \times X^* \,|\, y^* \geqq 0, z^* \geqq 0, x^*(x) \geqq g(x)$ *für alle* $x \geqq 0\}$ *schwach* abgeschlossen, so ist* $\sup g(x) = \min f^*(z^*)$, *d.h. die duale Aufgabe besitzt eine optimale Lösung.*

2. *Ist die mittels des Funktionals* $h^*(x^*)$ (13) *und der Mengen* (10) *und* (11) *gebildete Menge* $[h^*, C^* - D^*]$ *schwach* abgeschlossen, so ist* $\sup g(x) = \inf f^*(z^*)$.

Starker Dualitätssatz: *Ist das Supremum der Zielfunktion der primären Aufgabe endlich, so gilt:*

1. Ist die Menge $S = \{(y^* + f^*(z^*),\ T^*z^* - x^*) \in R \times X^* \mid y^* \geqq 0, z^* \geqq 0, x^*(x) \geqq g(x)$ *für alle* $x \geqq 0\}$ *schwach* abgeschlossen, so ist* $\sup g(x) = \min f^*(z^*)$, *d.h. die duale Aufgabe besitzt eine optimale Lösung.*

2. Ist die mittels des Funktionals $h^*(x^*)$ (13) *und der Mengen* (10) *und* (11) *gebildete Menge* $[h^*, C^* - D^*]$ *schwach* abgeschlossen, so ist* $\sup g(x) = \inf f^*(z^*)$.

5. Ein Beispiel einer nicht-linearen Eisenbergschen Aufgabe

Es sei $L_2(I)$ der Raum der quadratisch-Lebesgue-integrablen Funktionen über dem Intervall $I = [0, 1]$. Es sei $X = Z = L_2(I)$, T die identische Abbildung von X in Z. Der Raum sei wie üblich durch die Norm $\|x\| = \left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{1/2}$ topologisiert. Dann ist auch $X^* = Z^* = L_2(I)$; versehen wir ihn mit der gleichen Topologie, so ist $X^{**} = Z^{**} = L_2(I)$. Als Kegel der positiven Elemente definieren wir in allen Räumen

$$K = \{x(t) \geqq 0 \text{ für fast alle } t \in [0, 1]\}.$$

Da jedes lineare Funktional $x^*(x) = \int_0^1 x^*(t)\,x(t)\,dt$ ist, lautet die EISENBERGsche Aufgabe für $f^*(z^*) = \|z^*\|$ und konkaves $g(x)$:

$$\text{Bestimme } \operatorname{Sup}\left\{g(x) \mid x(t) \geqq 0,\ \int_0^1 z^*(t)\,x(t)\,dt \leqq \left(\int_0^1 z^{*2}(t)\,dt\right)^{1/2} \text{ für } z^*(t) \geqq 0\right\}.$$

Setzt man in der zweiten Nebenbedingung $z^*(t) = x(t)$, so folgt hieraus für $x(t) \neq 0$ als Nebenbedingungen der Aufgabe:

$$x(t) \geqq 0,\ \int_0^1 x^2(t)\,dt \leqq 1. \tag{14}$$

Ist umgekehrt (14) erfüllt, so folgt aus der Schwarzschen Ungleichung wieder die zweite Nebenbedingung der Aufgabe; beide Bedingungen sind also gleichwertig. Infolgedessen lautet unsere Optimierungsaufgabe:

$$\text{Bestimme } \operatorname{Sup}\left\{g(x(t)) \mid x(t) \geqq 0,\ \int_0^1 x^2(t)\,dt \leqq 1\right\}. \tag{15}$$

In dieser Aufgabe ist die zweite Nebenbedingung sicher nicht linear. Sie besagt: Es gibt einen Operator $A : X \to R$ — nämlich $\int_0^1 x^2(t)\,dt$ — mit der Bedingung $0 \leqq Ax \leqq 1$. Dieser Operator ist natürlich nicht linear, da $Ax = A(-x)$, also $\neq -Ax$ ist für $x \neq 0$. Die zu (15) duale Aufgabe lautet:

$$\text{Bestimme } \operatorname{Inf}\left\{\left(\int_0^1 z^{*2}(t)\,dt\right)^{1/2} \mid z^*(t) \geqq 0,\ \int_0^1 z^*(t)\,x(t)\,dt \geqq g(x(t)) \text{ für alle } x(t) \geqq 0\right\}. \tag{16}$$

Setzt man $g(x) = x_0^*(x)$, so läßt sich die zweite Nebenbedingung in (16) zu $z^*(t) \geqq x_0^*(t)$ reduzieren, und die Aufgaben:

$$\text{Bestimme } \operatorname{Sup}\left\{\int_0^1 x_0^*(t)\,x(t)\,dt \mid x(t) \geqq 0,\ \int_0^1 x^2(t)\,dt \leqq 1\right\}$$

$$\text{Bestimme } \operatorname{Inf}\left\{\left(\int_0^1 z^{*2}(t)\,dt\right)^{1/2} \mid z^*(t) \geqq 0,\ z^*(t) \geqq x_0^*(t)\right\}$$

sind dual zueinander. Ihre optimalen Lösungen sind

$$x(t) = x_0^*(t)\left(\int_0^1 x_0^{*2}(t)\,dt\right)^{-1/2}, \quad z^*(t) = x_0^*(t).$$

Beide Aufgaben haben die gleichen Extremalwerte.

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Topologie generale, Livre III, Chap. 1 et 2. Paris: Herman et Ci 1952.
[2] — Topologie generale, Livre III, Chap. 3 et 4. Paris: Herman et Ci 1952.
[3] — Espaces vectoriels topologiques, Livre V, Chap. 1 et 2. Paris: Herman et Ci 1953.
[4] — Espaces vectoriels topologiques, Livre V, Chap. 3, 4 et 5. Paris: Herman et Ci 1955.
[5] BRATTON, D.: The duality theorem in linear programming. Cowles Commission Discussion Paper: Mathematics No. 427, January 6, 1955.
[6] CHARNES, A., W. W. COOPER, and K. KORTANEK: Duality in semiinfinite programs and some works of HAAR and CARATHEODORY. Management Sci. **9**, 209—228 (1963).
[7] DIETER, U.: Dualität bei konvexen Optimierungs-(Programmierungs-)Aufgaben. Z. Unternehmensforschung **9**, 120—141 (1965).
[8] DUFFIN, R. J.: Infinite programs. In: KUHN-TUCKER: Linear inequalities and related systems, S. 157—171. Princeton University Press 1956.
[9] DUNFORD, N., and J. T. SCHWARTZ: Linear operators, Part I. New York: Interscience Publishers Inc. 1958.
[10] EISENBERG, E.: Duality in homogeneous programming. Proc. Amer. math. Soc. **12**, 783—787 (1961).
[11] FAN, K.: On systems of linear inequalities. In: KUHN-TUCKER: Linear inequalities and related systems. S. 99—156. Princeton University Press 1956.
[12] FENCHEL, W.: Convex cones, sets and functions. Lecture Notes, Department of Mathematics, Princeton, University (1953).
[13] HURWICZ, L.: Programming in linear spaces. In: K. J. ARROW, L. HURWICZ, and H. UZAWA: Studies in linear and non-linear programming. Stanford University Press 1958.
[14] —, and H. UZAWA: A note on the Lagrangian saddle-points. In: K. J. ARROW, L. HURWICZ, and H. UZAWA: Studies in linear and non-linear programming. Stanford University Press 1958.
[15] KARLIN, S.: Mathematical methods and theory in games, programming, and economics, Vol. I and II. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1959.
[16] KELLEY, J. L., and I. NAMIOKA: Linear topological spaces. New York: Van Nostrand 1963.
[17] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
[18] KRETSCHMER, K. S.: Programmes in paired spaces. Canadian J. Math. **13**, 221—238 (1961).
[19] — On the scope of the theory of programs in paired spaces. International Symposium on Mathematical Programming, London, July 6—10, 1964.
[20] NEUMARK, M. A.: Normierte Algebren. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959.

Die folgenden Arbeiten sind erst nach Fertigstellung des vorliegenden Beitrages erschienen:

[21] BRØNSTED, A.: Conjugate convex functions in topological vector spaces. Mat.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **34**, no. 2, 27 pp (1964).
[22] ROCKAFELLAR, R. T.: Minimax theorems and conjugate saddle functions. Math. Scandinav. **14**, 151—171 (1964).
[23] — Duality theorems for convex functions. Bull. Amer. math. Soc. **70**, 189—192 (1964).
[24] — Helly's theorem and minima of convex functions. Duke math. J. **32**, 381—397 (1965).

Mathematisches Seminar
der Universität Kiel