

Zur Theorie der bedingten Tests*

GERD NÖLLE †**

Eingegangen am 17. April 1968

Summary. The construction of a most powerful similar test with Neyman structure for composite hypotheses is frequently accomplished by the solution of a class of auxiliary problems asking for the determination of most powerful tests for simple hypotheses on the regions of constancy of a sufficient statistic. In detail, this class of so-called conditional tests has to be constructed so as to yield a test composed by them. This method due to Neyman is among others used by FRASER [3], KENDALL-STUART [6], LEHMANN [7], LEHMANN-SCHEFFÉ [8], WITTING [11]. The present paper investigates the suppositions on which this construction is possible and the form of the tests obtained hereby. In particular, it is shown that these tests are easy to determine in the case of dominated hypotheses.

1. Terminologie

In der vorliegenden Arbeit benutzen wir im wesentlichen die Terminologie von WITTING [11]. Insbesondere liegen allen Überlegungen meßbare Räume $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ zugrunde. Dabei kann z. B. \mathfrak{X} ein euklidischer Raum R_n und \mathfrak{B} dessen Borelkörper \mathfrak{B}_n oder allgemeiner $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{X} \mathfrak{B}_n := \{\mathfrak{X} B : B \in \mathfrak{B}_n\}$ sein; entsprechendes gilt für $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$.

Abbildungen von \mathfrak{X} in \mathfrak{X} geben wir durch $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ oder unter Fortlassen des Wertebereiches durch $T|\mathfrak{X}$ an. Für $S|\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ bedeutet $S(\cdot, t)$ den Schnitt von S an der Stelle $t \in \mathfrak{X}$. Eine meßbare Abbildung $T: (\mathfrak{X}, \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ heißt *Statistik*. Zu den Begriffen der Suffizienz, der (beschränkten) Vollständigkeit bzw. (beschränkten) totalen Vollständigkeit einer Statistik T vgl. WITTING [11] und FRASER [3]. Abbildungen $f: (\mathfrak{X}, \mathfrak{B}) \rightarrow (R_1, \mathfrak{B}_1)$ heißen *\mathfrak{B} -meßbare Funktionen*. Statt R_1 kann dabei auch der kompaktifizierte \bar{R}_1 mit seinem Borelkörper $\bar{\mathfrak{B}}_1$ auftreten. Eine \mathfrak{B} -meßbare Funktion $\varphi|\mathfrak{X}$ mit $0 \leq \varphi(x) \leq 1 \forall x \in \mathfrak{X}$ heißt ein *Test auf $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$* .

Über $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ betrachten wir Maße μ, ν, \dots und (nicht-leere) Mengen \mathfrak{B}, \dots von Wahrscheinlichkeitsmaßen w . Die hierdurch vermöge T über $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ induzierten Maße bezeichnen wir mit μ^T, ν^T, \dots , und die Mengen der w^T mit \mathfrak{B}^T, \dots . \mathfrak{B} heißt dominiert durch ein σ -finites μ , $\mathfrak{B} \ll \mu$, wenn jede μ -Nullmenge N auch \mathfrak{B} -Nullmenge ist, d. h. wenn $w(N) = 0 \forall w \in \mathfrak{B}$ gilt.

Ist $\mathfrak{A}(x)$ eine Aussage über die Punkte $x \in \mathfrak{X}$, so schreiben wir $\mathfrak{A}(x) [\mu]$ oder $\mathfrak{A}(\cdot) [\mu]$, wenn die Aussage $\mathfrak{A}(x)$ für alle $x \in \mathfrak{X}$ richtig ist, die im Komplement einer μ -Nullmenge liegen. Entsprechend ist $\mathfrak{A}(x) [\mathfrak{B}]$ zu verstehen. Häufig haben wir eine Schar $\mu(\cdot, t)|\mathfrak{B}$, $t \in \mathfrak{X}$, von Maßen zu betrachten. $\mu|\mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$ heißt *\mathfrak{D} -meßbares Maß*, wenn $\mu(\cdot, t)|\mathfrak{B}$ für jedes $t \in \mathfrak{X}$ ein Maß und $\mu(B, \cdot)|\mathfrak{X}$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$ eine

* Gekürzte Fassung einer von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Münster i. Westf. angenommenen Dissertation.

** Der Autor ist am 20. 7. 1968 verstorben.

\mathfrak{D} -meßbare Funktion ist. Entsprechend definieren wir die Sprechweise *\mathfrak{D} -meßbares σ -finites (bzw. endliches bzw. normiertes) Maß $\mu|_{\mathfrak{B} \times \mathfrak{X}}$* .

Den bedingten Erwartungswert bezüglich eines σ -Körpers $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$ einer \mathfrak{B} -meßbaren Funktion f , für die $\int f d\mu$ erklärt ist, bezeichnen wir mit $E_w(f|\mathfrak{F})(\cdot)$. Im Falle $\mathfrak{F} = T^{-1}(\mathfrak{D})$ ist $E_w(f|\mathfrak{F})(\cdot)$ eine Funktion $h(T(\cdot))$ mit \mathfrak{D} -meßbarem $h|_{\mathfrak{X}}$. Für $h(t)$ schreiben wir $E_w(f|t)$. Ist T suffizient für \mathfrak{W}_H , so sei $E_H(f|t)$ die von $w \in \mathfrak{W}_H$ unabhängige Version von $E_w(f|t)$, $w \in \mathfrak{W}_H$. Für eine Indikatorfunktion I_B einer Menge $B \in \mathfrak{B}$ heißt $w(B|t) := E_w(I_B|t)$ *bedingte Wahrscheinlichkeit* von B unter t . Entsprechend wird $w_H(B|t)$ definiert. Ist $w(\cdot|\cdot)|_{\mathfrak{B} \times \mathfrak{X}}$ eine \mathfrak{D} -meßbare Wahrscheinlichkeit, so sprechen wir von einer *regulär bedingten Wahrscheinlichkeit*.

2. Bedingte Testprobleme

Im Sinne der Theorie von NEYMAN und PEARSON hat ein Testproblem allgemein die folgende Gestalt: Gegeben sind ein meßbarer Raum $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, zwei disjunkte Mengen \mathfrak{W}'_H und \mathfrak{W}'_K von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf \mathfrak{B} sowie eine beliebige, aber feste Zahl $\alpha \in (0, 1)$ (die Werte $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ sind für die Praxis meist uninteressant und führen hier höchstens zu Komplikationen). Gesucht ist eine Funktion $\varphi^*|_{\mathfrak{X}}$ mit

$$(2.1) \quad \varphi^* \in \mathcal{P}' := \{ \varphi : \varphi \text{ Test auf } (\mathfrak{X}, \mathfrak{B}), E_w \varphi \leq \alpha \quad \forall w \in \mathfrak{W}'_H \},$$

$$(2.2) \quad E_w \varphi^* = \sup_{\varphi \in \mathcal{P}'} E_w \varphi \quad \forall w \in \mathfrak{W}'_K.$$

Die Bestimmung einer Lösung von (2.1–2.2) wird häufig dadurch erleichtert, daß man zunächst für geeignete Mengen \mathfrak{W}_H und \mathfrak{W}_K von Wahrscheinlichkeitsverteilungen über \mathfrak{B} eine Funktion φ^* sucht mit

$$(2.3) \quad \varphi^* \in \mathcal{P} := \{ \varphi : \varphi \text{ Test auf } (\mathfrak{X}, \mathfrak{B}), E_w \varphi = \alpha \quad \forall w \in \mathfrak{W}_H \},$$

$$(2.4) \quad E_w \varphi^* = \sup_{\varphi \in \mathcal{P}} E_w \varphi \quad \forall w \in \mathfrak{W}_K,$$

wobei also \mathcal{P} die Menge der für \mathfrak{W}_H ähnlichen Tests ist. Geht man nun zur Lösung dieses Problems davon aus, daß für \mathfrak{W}_H eine (beschränkt) vollständige suffiziente Statistik $T: (\mathfrak{X}, \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ existiert, so ist \mathcal{P} genau die Menge Φ der Tests mit *Neyman-Struktur bezüglich \mathfrak{W}_H* ,

$$(2.5) \quad \Phi := \{ \varphi : \varphi \text{ Test auf } (\mathfrak{X}, \mathfrak{B}), E_H(\varphi|t) = \alpha \quad [\mathfrak{W}_H^T] \}.$$

(Vgl. LEHMANN-SCHEFFÉ [8], Part I, § 4; die beschränkte Vollständigkeit von T ist auch notwendig für $\Phi = \mathcal{P}$.)

Nehmen wir nun an, T sei auch suffizient¹ für \mathfrak{W}_K , dann können wir (2.3–2.4) unter der Voraussetzung $\mathcal{P} = \Phi$ auch schreiben in der Form

$$(2.6) \quad E_w \varphi^* = E_{w^T} E_K(\varphi^*|t) \geq E_{w^T} E_K(\varphi|t) = E_w \varphi \quad \forall \varphi \in \Phi \quad \forall w^T \in \mathfrak{W}_K^T,$$

$$(2.7) \quad \varphi^* \in \Phi.$$

¹ Diese Voraussetzung ist natürlich stets erfüllt, wenn \mathfrak{W}_K eine einelementige Menge $\{w_0\}$ darstellt.

(2.6) ist sicher dann erfüllt, wenn gilt

$$(2.8) \quad E_K(\varphi^*|t) \geq E_K(\varphi|t) \quad [\mathfrak{B}_K^T] \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

(2.7–2.8) bildet nun eine neue Optimierungsaufgabe, die wir zur Unterscheidung von der ursprünglichen als *bedingtes Testproblem* bezeichnen². Zu seiner Formulierung wird lediglich die Suffizienz von T für \mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K , nicht aber deren Vollständigkeit für \mathfrak{B}_H benötigt, so daß es als ein von (2.3–2.4) losgelöstes Problem angesehen werden kann.

Die Forderung (2.8) scheint stärker zu sein als (2.6), denn während in (2.6) Integrale maximiert werden, wird das gleiche nun für die Integranden gefordert! Es gilt jedoch das

Lemma 2.1. *T sei suffizient für \mathfrak{B}_H .*

a) *Für $\varphi^* \in \Phi$ gilt $E_w \varphi^* \geq E_w \varphi \quad \forall \varphi \in \Phi \quad \forall w \in \mathfrak{B}_K$ genau dann, wenn*

$$E_w(\varphi^*|t) \geq E_w(\varphi|t) \quad [w^T] \quad \forall \varphi \in \Phi \quad \forall w \in \mathfrak{B}_K.$$

b) *Ist T auch suffizient für \mathfrak{B}_K , so ist (2.6) äquivalent mit (2.8).*

Beweis. a) Es genügt zu zeigen, daß die zweite Eigenschaft aus der ersten folgt, da die Umkehrung trivial ist. Nehmen wir an, es gebe ein $\varphi_0 \in \Phi$ und ein $w_0^T \in \mathfrak{B}_K^T$ derart, daß für $D := \{t: E_w(\varphi_0|t) > E_w(\varphi^*|t)\} \in \mathfrak{D}$ gilt $w_0^T(D) > 0$. Für den Test $\tilde{\varphi} := \varphi_0 I_{T^{-1}(D)} + \varphi^* I_{T^{-1}(D^c)}$ gilt wegen $D \in \mathfrak{D}$

$$E_H(\tilde{\varphi}|t) = I_D E_H(\varphi_0|t) + I_{D^c} E_H(\varphi^*|t) = \alpha(I_D + I_{D^c}) = \alpha[\mathfrak{B}_H^T],$$

also $\tilde{\varphi} \in \Phi$. Andererseits ist aber

$E_{w_0} \tilde{\varphi} = E_{w_0} E_w(\tilde{\varphi}|t) = E_{w_0} (I_D E_w(\varphi_0|t) + I_{D^c} E_w(\varphi^*|t)) > E_{w_0} E_w(\varphi^*|t) = E_{w_0} \varphi^*$
im Widerspruch zur Voraussetzung. Teil b) folgt sofort aus der Zusatzvoraussetzung. \square

Nach Teil b) von Lemma 2.1 ist also unter der zusätzlichen Voraussetzung $\Phi = \Psi$ eine Lösung von (2.7–2.8) eine solche von (2.3–2.4) und umgekehrt. Hieraus ergibt sich sofort der

Satz 2.2. *T sei vollständig und suffizient für \mathfrak{B}_H sowie suffizient für \mathfrak{B}_K . Dann ist ein Test φ^* genau dann Lösung von (2.3–2.4), wenn er (2.7–2.8) erfüllt.*

Bevor wir in den folgenden Abschnitten dazu übergehen, explizit Lösungen von (2.7–2.8) zu konstruieren, sollen hier noch Existenzaussagen angegeben werden, die Verallgemeinerungen einer bekannten Aussage für Lösungen von (2.1–2.2) bzw. (2.3–2.4) darstellen (vgl. WITTING [11], Satz 2.20).

Satz 2.3. a) *Ist \mathfrak{B}_H dominiert und $\mathfrak{B}_K = \{w_0\}$, so existiert eine Lösung von (2.3–2.4); diese löst auch (2.7–2.8), falls T (beschränkt) vollständig und suffizient ist für \mathfrak{B}_H .*

b) *\mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K seien dominiert; T sei suffizient für \mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K . Dann existiert eine Lösung von (2.7–2.8); diese löst auch (2.3–2.4), falls T (beschränkt) vollständig ist für \mathfrak{B}_H .*

² Eine entsprechende Umformung kann man auch für (2.1–2.2) vornehmen, wenn man anstelle der Vollständigkeit von T deren totale Vollständigkeit fordert und Φ durch die Menge Φ' aller Tests mit $E_H(\varphi|t) \leq \alpha[\mathfrak{B}_H^T]$ ersetzt. Es gilt dann $\Psi' = \Phi'$ (vgl. FRASER [3], § 5.2). Auf diesen Fall lassen sich alle hier bewiesenen Aussagen sinngemäß übertragen.

Beweis. a) Der erste Teil ist eine bekannte Aussage (vgl. WITTING [11], Satz 2.20). Der zweite Teil ergibt sich hieraus sofort mit Satz 2.2, Teil b), da T auch suffizient ist für $\{w_0\}$.

b) Wegen Satz 2.2 genügt es wiederum, die erste Aussage zu beweisen. Da \mathfrak{B}_H dominiert ist, existiert eine abzählbare mit \mathfrak{B}_H äquivalente Teilmenge $\tilde{\mathfrak{B}}_H = \{w_{H,i} : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{B}_H$ (vgl. WITTING [11], Satz 2.5), so daß $\nu_H := \sum_{i=1}^{\infty} w_{H,i}/2^i$ ein mit \mathfrak{B}_H äquivalentes normiertes Maß ist (bei endlichem $\tilde{\mathfrak{B}}_H$ setze man $\nu_H := \sum_{i=1}^n w_{H,i}/n$). Entsprechend sei ν_K zu \mathfrak{B}_K konstruiert. Es sei nun $\varphi_n \in \Phi$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge mit

$$E_{\nu_K} \varphi_n \rightarrow \sup_{\varphi \in \Phi} E_{\nu_K} \varphi =: \beta \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wegen der schwachen Folgenkompaktheit der Menge der Testfunktionen (vgl. NÖLLE-PLACHKY [10]) existiert eine Teilfolge φ_{n_i} und ein Test φ^* mit

$$\int \varphi_{n_i} f d(\nu_H + \nu_K) \rightarrow \int \varphi^* f d(\nu_H + \nu_K) \quad \forall f \in L_1(\nu_K + \nu_H) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Dabei bezeichnet $L_1(\nu_K + \nu_H)$ den Raum der $(\nu_K + \nu_H)$ -integriblen \mathfrak{B} -meßbaren Funktionen.

Setzt man hier speziell $f = d\nu_K/d(\nu_H + \nu_K)$ ein, so folgt unmittelbar $E_{\nu_K} \varphi^* = \beta$. Für $f = (dw/d(\nu_H + \nu_K)) I_{T^{-1}(D)}$ mit $w \in \mathfrak{B}_H$ und $D \in \mathfrak{D}$ erhält man für $i \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_D \alpha dw^T &= \int_D E_H(\varphi_{n_i} | t) dw_T = \int_{T^{-1}(D)} \varphi_{n_i} dw \rightarrow \int_{T^{-1}(D)} \varphi^* dw \\ &= \int_D E_H(\varphi^* | t) dw^T \quad \forall D \in \mathfrak{D} \quad \forall w \in \mathfrak{B}_H, \end{aligned}$$

also $E_H(\varphi^* | t) = \alpha [\mathfrak{B}_H^T]$, d. h. $\varphi^* \in \Phi$. Wie beim Beweis von Lemma 2.1 folgt nun $E_{\nu_K}(\varphi^* | t) \geq E_{\nu_K}(\varphi | t) [\nu_K^T] \quad \forall \varphi \in \Phi$ wegen $E_{\nu_K} \varphi^* = \beta$.

Für jeden Test φ gilt aber $E_K(\varphi | t) = E_{\nu_K}(\varphi | t) [\nu_K^T]$, wie man leicht nachrechnet (vgl. WITTING [11], Beweis zu Satz 3.21), woraus nunmehr (2.8) folgt. \square

Nach Satz 2.3 kann man somit zumindest bei dominierten \mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K erwarten, daß sich Lösungen von (2.7–2.8) (bzw. (2.3–2.4)) explizit konstruieren lassen. Bei geeigneten Zusatzvoraussetzungen, die sich hauptsächlich auf die Struktur der Räume $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ beziehen, ist dies tatsächlich der Fall, wie in den folgenden Abschnitten gezeigt werden soll. Dabei können wir auch nicht-dominierte \mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K zulassen, so daß sich auch hierfür schließlich Existenzaussagen ergeben. Bei den folgenden Ausführungen behandeln wir ausschließlich das Problem (2.7–2.8), da der Zusammenhang mit (2.3–2.4) durch Satz 2.3 bereits gegeben ist.

3. Einige Grundannahmen

Für die explizite Konstruktion von Lösungen von (2.7–2.8) sind mehrere Annahmen erforderlich, die im folgenden zusammengestellt und kurz diskutiert werden sollen. Zur Formulierung des Problems benötigen wir bereits die Voraussetzung

- (3.1) Es existiert eine für \mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K suffiziente Statistik $T: (\mathfrak{X}, \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ mit $\mathfrak{X} = T(\mathfrak{X})$.

Wenn wir im folgenden von bedingten Erwartungswerten und Wahrscheinlichkeiten sprechen, so versteht sich dies bezüglich der unter der Annahme (3.1) existierenden Statistik T .

(3.2) Es existieren reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$w_H(\cdot|\cdot)|\mathfrak{B} \times \mathfrak{X} \quad \text{und} \quad w_K(\cdot|\cdot)|\mathfrak{B} \times \mathfrak{X}.$$

(3.3) Es gilt $\mathfrak{X}_t := T^{-1}(t) \in \mathfrak{B}$ für alle $t \in \mathfrak{X}$ und die gemäß (3.2) existierenden regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten haben die Eigenschaft: Es existiert eine \mathfrak{B}_H^T -Nullmenge N_H und eine \mathfrak{B}_K^T -Nullmenge N_K mit

$$w_H(\mathfrak{X}_t|t) = 1 \quad \forall t \in N_H^c, \quad w_K(\mathfrak{X}_t|t) = 1 \quad \forall t \in N_K^c.$$

(3.4) Es existiert eine \mathfrak{B}_H^T -Nullmenge N_0 mit der Eigenschaft: Jede \mathfrak{B}_H^T -Nullmenge $N \subset N_0^c$ ist auch eine \mathfrak{B}_K^T -Nullmenge.

Die Annahme $\mathfrak{X} = T(\mathfrak{X})$ kann man offenbar stets ohne Einschränkung der Allgemeinheit machen. (3.2) ist sicher dann erfüllt, wenn $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}) = (R_n, \mathfrak{B}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, oder allgemeiner $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_n(\mathfrak{X} \neq \emptyset)$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{X} \mathfrak{B}_n$ gilt, wie ein bekannter Beweis zeigt (vgl. z. B. WITTING [11], Satz 3.15). Hier kann man auch $n = \infty$, d. h. $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_\infty$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{X} \mathfrak{B}_\infty$ mit $(R_\infty, \mathfrak{B}_\infty) := \bigtimes_{i=1}^{\infty} (R_1^{(i)}, \mathfrak{B}_1^{(i)})$ zulassen, denn es existiert eine bijektive Abbildung $e: R_\infty \leftrightarrow R_1$ mit $e(\mathfrak{B}_\infty) = \mathfrak{B}_1$ und $e^{-1}(\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{B}_\infty$ (vgl. HALMOS [4], § 38, Aufgabe 7), mit deren Hilfe man das Problem leicht auf den Fall $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{X} \mathfrak{B}_1$ reduziert. Somit gilt der

Satz 3.1. *Unter der Voraussetzung (3.1) gilt (3.2) für $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_n(\mathfrak{X} \neq \emptyset)$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{X} \mathfrak{B}_n$, $1 \leq n \leq \infty$.*

Für allgemeinere Räume $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ gilt (3.2) jedoch nur unter zusätzlichen Annahmen. Für ein einzelnes Wahrscheinlichkeitsmaß w existieren bekanntlich reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten, wenn \mathfrak{B} separabel und w perfekt ist (vgl. HENNEQUIN-TORTRAT [9], §§ 21, 22). Sind nun Mengen \mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K perfekter Wahrscheinlichkeitsmaße vorgegeben, so werden die Festlegungen dieser regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten selbst unter (3.1) noch von den Elementen von \mathfrak{B}_H (bzw. \mathfrak{B}_K) abhängen. Fordert man jedoch zusätzlich die Dominiertheit von \mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K , so sind die im Beweis zu Satz 2.3 angegebenen Wahrscheinlichkeitsmaße ν_H und ν_K ebenfalls perfekt, so daß (bei separablem \mathfrak{B}) reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten $\nu_H(\cdot|\cdot)$ und $\nu_K(\cdot|\cdot)$ existieren. (3.2) ist dann erfüllt mit $w_H(\cdot|\cdot) := \nu_H(\cdot|\cdot)$, $w_K(\cdot|\cdot) := \nu_K(\cdot|\cdot)$.

Unter der Voraussetzung (3.3), die für die Konstruktion von Lösungen des bedingten Testproblems ganz wesentlich ist, läßt sich der bedingte Erwartungswert $E_H(\varphi|t)$ eines beliebigen Tests φ auf $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, der ja bekanntlich als Erwartungswert bezüglich der regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten gewonnen werden kann, darstellen in der Form

$$E_H(\varphi|t) = \int \varphi dw_H(\cdot|t) = \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi dw_H(\cdot|t) \quad [\mathfrak{B}_H^T]$$

(und entsprechend natürlich für \mathfrak{B}_K). Da für das rechtsstehende Integral nur die Restriktion

$$\bar{w}_H(\cdot|t) := w_H(\cdot|t)|\mathfrak{B}_t$$

von $w_H(\cdot|t)$ auf $\mathfrak{B}_t := \mathfrak{X}_t \mathfrak{B}$ bekannt sein muß, und diese unter (3.3) für $t \in N_H^c$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, hat man also eine Schar von Wahrscheinlichkeitsräumen $(\mathfrak{X}_t, \mathfrak{B}_t, \bar{w}_H(\cdot|t))$ für $t \in N_H^c$ erhalten, und es gilt³ mit $\varphi_t := \varphi|_{\mathfrak{X}_t}$

$$(3.5) \quad E_H(\varphi|t) = \int_{[\mathfrak{B}_H^T]_{\mathfrak{X}}} \varphi dw_H(\cdot|t) = \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi dw_H(\cdot|t) = \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi_t d\bar{w}_H(\cdot|t), \quad t \in N_H^c$$

(und entsprechend für \mathfrak{B}_K). Der bedingte Erwartungswert $E_H(\varphi|t)$ — definiert als Radon Nikodymsche Ableitung des Maßes $w_\varphi^T(D) := \int \varphi dw$ über \mathfrak{D} bezüglich w^T — läßt sich nunmehr „punktweise“ gewinnen als Erwartungswert von φ_t bezüglich $\bar{w}_H(\cdot|t)$ (vgl. hierzu auch LEHMANN [7], S. 46). Dies ist später von großer Bedeutung.

Bisher haben wir jedoch noch nicht geklärt, wann (3.3) gilt. Es läßt sich die folgende Aussage beweisen:

Satz 3.2. *Unter den Voraussetzungen (3.1—3.2) gilt (3.3), falls \mathfrak{D} separabel ist und die einpunktigen Mengen $\{t\}$ in \mathfrak{D} liegen für alle $t \in \mathfrak{X}$.*

Beweis. Offenbar gilt $\mathfrak{X}_t \in \mathfrak{B}$ für alle $t \in \mathfrak{X}$. Da \mathfrak{D} separabel ist, existiert ein abzählbarer Mengenkörper $\mathfrak{D}' = \{D_1, D_2, \dots\} \subset \mathfrak{D}$, der \mathfrak{D} erzeugt. Nach den bekannten Eigenschaften bedingter Erwartungswerte gilt

$$w_H(T^{-1}(D_i)|t) = E_H(I_{T^{-1}(D_i)}|t) = I_{D_i}(t) \quad \text{für } t \notin N_H, i \in \mathfrak{D}, \\ w(N_H, i) = 0 \quad \forall w \in \mathfrak{B}_H, \quad i = 1, 2, \dots$$

Damit stimmen die Wahrscheinlichkeitsmaße $\bar{w}(D) := w_H(T^{-1}(D)|t)$ und $I_D(t)$ für $t \notin N_H := \bigcup_{i=1}^\infty N_{H,i}$, $w(N_H) = 0$ für alle $w \in \mathfrak{B}_H$, über \mathfrak{D}' und nach dem Maßerweiterungssatz auch über \mathfrak{D} überein. Insbesondere gilt also $w_H(\mathfrak{X}_t|t) = I_{\mathfrak{D}}(t) = 1$ für $t \in N_H^c$. Der Beweis für \mathfrak{B}_K verläuft ebenso. \square

Ein etwas komplizierterer Beweis von LOËVE ([9], § 26.2A) zeigt, daß man auf die Voraussetzung $\{t\} \in \mathfrak{D} \quad \forall t \in \mathfrak{X}$ in Satz 3.3 auch verzichten kann, wenn diese Mengen durch die Atome des separablen σ -Körpers \mathfrak{D} und die Mengen \mathfrak{X}_t durch deren Urbilder ersetzt werden. Allgemeiner gilt dies auch bei beliebigem \mathfrak{D} , wenn $w_H(B|\cdot)$ und $w_K(B|\cdot)$ meßbar sind bezüglich eines separablen σ -Körpers $\tilde{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{D}$. Letzteres ist z. B. bei separablem \mathfrak{B} der Fall. Bei den folgenden Betrachtungen gehen wir jedoch stets von der etwas anschaulicheren Annahme (3.3) aus.

Es sei schließlich noch erwähnt, daß die in (3.3) auftretenden Ausnahm Nullmengen durch geeignete Wahl der Erwartungswerte innerhalb ihrer Äquivalenzklassen im allgemeinen nicht eliminiert werden können, wie BLACKWELL und RYLL-NARDZEWSKI [1] gezeigt haben.

Die Voraussetzung (3.4) schließlich wird aus beweistechnischen Gründen benötigt. Sie ist insbesondere erfüllt, wenn gilt $\mathfrak{B}_H \gg \mathfrak{B}_K$, was häufig der Fall ist. Darüberhinaus gilt der

³ Da φ beschränkt ist, existiert $\int \varphi dw_H(\cdot|t)$ für alle $t \in \mathfrak{X}$ und stellt eine \mathfrak{D} -meßbare Funktion dar (vgl. z. B. WITTING [11], Satz 3.15). Mithin ist wegen $\int \varphi dw_H(\cdot|t) = \int \varphi dw_H(\cdot|t)$ für $t \in N_H^c$ also auch $\int \varphi_t dw_H(\cdot|t)$ jedenfalls auf N_H^c eine $N_H^c \mathfrak{D}$ -meßbare Funktion.

Satz 3.3. *Ist \mathfrak{B}_K^T (oder \mathfrak{B}_K) dominiert, so gilt (3.4).*

Beweis. Es sei ν_K^T ein mit \mathfrak{B}_K^T äquivalentes endliches Maß und $\{N_j\}_{j=1, 2, \dots}$ eine Folge von Mengen aus

$$\mathfrak{N} := \{N : N \in \mathfrak{D}, w^T(N) = 0 \ \forall w^T \in \mathfrak{B}_H^T\}$$

mit der Eigenschaft

$$\nu_K^T(N_j) \rightarrow \sup\{\nu_K^T(N) : N \in \mathfrak{N}\} =: c < \infty \quad \text{für } j \rightarrow \infty.$$

Dann gilt $N_0 := \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \in \mathfrak{N}$ und $\nu_K^T(N_0) = c$. N_0 erfüllt (3.4). Gäbe es nämlich ein $N \subset N_0^c$, $N \in \mathfrak{N}$ und ein $w^T \in \mathfrak{B}_K^T$ mit $w^T(N) > 0$, so würde auch gelten $\nu_K^T(N) > 0$, und mithin für $N_0 + N \in \mathfrak{N}$ zu dem Widerspruch $c \geq \nu_K^T(N_0 + N) > \nu_K^T(N_0) = c$ führen. \square

Bemerkung. Bei Satz 3.3 kann man nicht auf die Voraussetzung der Dominiertheit von \mathfrak{B}_K^T verzichten. Dies zeigt das folgende triviale Beispiel: \mathfrak{B}_H^T sei eine Menge λ_1 -stetiger Verteilungen über $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}) = (R_1, \mathfrak{B}_1)$ und

$$\mathfrak{B}_K^T := \{w_t : w_t(B) := I_B(t) \ \forall B \in \mathfrak{B}, t \in \mathfrak{X}\}.$$

Da die leere Menge die einzige \mathfrak{B}_K^T -Nullmenge ist, kann (3.4) offenbar nicht gelten.

Über die Gültigkeit der Voraussetzungen (3.2–3.4) gilt aufgrund der vorstehenden Überlegungen somit insbesondere das

Korollar 3.4. *Unter der Annahme (3.1) sind (3.2–3.4) erfüllt, falls \mathfrak{B}_K dominiert ist und $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{X} \mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{X} \mathfrak{B}_m$, $1 \leq n, m \leq \infty$, gilt.*

4. Umformung des bedingten Testproblems

Unter den Voraussetzungen (3.1–3.4) soll das bedingte Testproblem nunmehr in eine leicht lösbare Form überführt werden. Wegen (3.3) und (3.5) (auch für \mathfrak{B}_K) kann (2.7–2.8) auch geschrieben werden in der Form

$$(4.1) \quad \varphi^* \in \Phi = \{\varphi : \varphi \text{ Test auf } (\mathfrak{X}, \mathfrak{B}), \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi d w_H(\cdot | t) = \alpha [\mathfrak{B}_H^T]\}$$

$$(4.2) \quad \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi^* d w_K(\cdot | t) \geq \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi d w_K(\cdot | t) [\mathfrak{B}_K^T] \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Hieran erkennt man, daß das bedingte Testproblem für jedes $t \in \mathfrak{X}$ in eine eigene Optimierungsaufgabe „zerfällt“. Störend ist jedoch, daß die in (4.1–4.2) auftretenden Nullmengen variabel sind, d.h. von φ abhängen dürfen. Wir lassen daher im folgenden nur eine einzige Ausnahmemenge zu, nämlich in der Terminologie von (3.3) und (3.4)

$$(4.3) \quad N_1 := N_0 \cup N_H \cup N_K.$$

N_1 muß natürlich nicht notwendig eine Nullmenge sein, weder für \mathfrak{B}_H noch für \mathfrak{B}_K . Die Ausführungen in Paragraph 3 legen es jedoch nahe, N_1 als Ausnahmemenge zuzulassen. Demgemäß betrachten wir nun in Abwandlung des Problems (4.1–4.2) für $t \in N_1^c$ über $(\mathfrak{X}_t, \mathfrak{B}_t)$ die Schar von (einfachen) Testproblemen

$$(4.4) \quad \varphi_t^* \in \mathcal{P}^t := \{\varphi_t : \varphi_t \text{ Test auf } (\mathfrak{X}_t, \mathfrak{B}_t), \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi_t d \bar{w}_H(\cdot | t) = \alpha\}$$

$$(4.5) \quad \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi_t^* d \bar{w}_K(\cdot | t) = \sup_{\varphi_t \in \mathcal{P}^t} \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi_t d \bar{w}_K(\cdot | t). \quad t \in N_1^c$$

Hat man hierfür eine Schar von Lösungen $\varphi_t^*, t \in N_1^c$, gefunden, so wird man versuchen nachzuweisen, daß die „zusammengesetzte“ Funktion

$$\varphi^*(\cdot) := \varphi_{T(\cdot)} | \mathfrak{X}$$

(nach geeigneter Definition auf N_1) eine Lösung von (4.1—4.2) darstellt. Dies setzt insbesondere voraus, daß $\varphi^*(\cdot)$ \mathfrak{B} -meßbar ist. Es gilt nun der

Satz 4.1. *Es mögen die Voraussetzungen (3.1—3.4) erfüllt sein. Hat man für jedes $t \in N_1^c$ eine Lösung φ_t^* von (4.4—4.5) derart, daß $\varphi_{T(\cdot)}^*(\cdot) | T^{-1}(N_1^c)$ eine $T^{-1}(N_1^c)$ \mathfrak{B} -meßbare Funktion ist, und definiert man $\varphi^*(\cdot) | \mathfrak{X}$ gemäß*

$$(4.6) \quad \varphi^*(x) := \begin{cases} \varphi_{T(x)}^*(x), & T(x) \in N_1^c \\ 1, & T(x) \in N_0 \cup N_H \\ \alpha, & T(x) \in N_K - (N_0 \cup N_H), \end{cases}$$

so löst φ^* (2.7—2.8) (und damit auch (4.1—4.2)).

Beweis. Offenbar ist φ^* eine \mathfrak{B} -meßbare Funktion und somit ein Test auf $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, da ja die Mengen N_0, N_1, N_H und N_K \mathfrak{D} -meßbar sind und $\varphi_{T(\cdot)}^*(\cdot)$ nach Voraussetzung $T^{-1}(N_1^c)$ \mathfrak{B} -meßbar ist. Nach (4.6) und (3.5) gilt somit

$$E_H(\varphi^* | t) = \int_{[\mathfrak{B}_H^T]} I_{N_1^c}(t) \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi_t^* d\bar{w}_H(\cdot | t) + I_{N_0 \cup N_H}(t) + \alpha I_{N_K - (N_0 \cup N_H)}(t).$$

Wegen (4.4) hat aber der rechtsstehende Ausdruck den Wert α für alle $t \notin N_0 \cup N_H$. Dies ist eine \mathfrak{B}_H^T -Nullmenge, d. h. es gilt $E_H(\varphi^* | t) = \alpha [\mathfrak{B}_H^T]$, also (2.7).

Es bleibt somit (2.8) zu zeigen. Hierfür sei $\varphi^0 \in \mathfrak{F}$ beliebig gewählt. Wegen (3.5) gilt dann mit $\varphi_t^0 := \varphi^0 | \mathfrak{X}_t$

$$\int_{\mathfrak{X}_t} \varphi_t^0 d\bar{w}_H(\cdot | t) = \alpha \quad \forall t \in N_{\varphi^0}^c, N_{\varphi^0} \supset N_H \text{ (o. B. d. A.)}, \quad w^T(N_{\varphi^0}) = 0 \quad \forall w^T \in \mathfrak{B}_H^T,$$

also insbesondere $\varphi_t^0 \in \mathcal{P}^t$ für alle $t \in N_{\varphi^0}^c N_1^c$. Für solche t können wir also wegen (4.5) eine Abschätzung gemäß (2.8) (oder äquivalent gemäß (4.2)) durchführen. Dies muß jedoch für alle $t \in N_1^c$ außerhalb einer \mathfrak{B}_K^T -Nullmenge möglich sein. Nach Definition (4.3) von N_1 gilt $N_{\varphi^0} N_1^c \subset N_0^c$. Die \mathfrak{B}_H^T -Nullmenge $N_{\varphi^0} N_1^c$ ist mithin wegen (3.4) auch eine \mathfrak{B}_K^T -Nullmenge (!), so daß wir die folgende Beziehung erhalten

$$I_{N_1^c} = I_{N_1^c(N_{\varphi^0} + N_{\varphi^0}^c)} = I_{N_1^c N_{\varphi^0}^c} \quad [\mathfrak{B}_K^T].$$

Somit gilt nach den Voraussetzungen des Satzes

$$\begin{aligned} E_K(\varphi^* | t) &= I_{N_1^c}(t) \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi_t^* d\bar{w}_K(\cdot | t) + I_{N_0 \cup N_H}(t) + \alpha I_{N_K - (N_0 \cup N_H)}(t) \quad [\mathfrak{B}_K^T] \\ &= I_{N_1^c N_{\varphi^0}^c}(t) \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi_t^* d\bar{w}_K(\cdot | t) + I_{N_1}(t) \quad [\mathfrak{B}_K^T] \\ &\geq I_{N_1^c N_{\varphi^0}^c}(t) \int_{\mathfrak{X}_t} \varphi_t^0 d\bar{w}_K(\cdot | t) + I_{N_1}(t) \int_{\mathfrak{X}} \varphi^0 d\bar{w}_K(\cdot | t) \quad [\mathfrak{B}_K^T] \\ &= \int_{\mathfrak{X}} \varphi^0 d\bar{w}_K(\cdot | t) = E_K(\varphi^0 | t) \quad [\mathfrak{B}_K^T]. \end{aligned}$$

Da $\varphi^0 \in \mathfrak{F}$ beliebig gewählt war, gilt also auch (2.8) für φ^* . \square

Bemerkung. Vergleicht man einmal (2.8) mit (4.5), so erkennt man, daß das verbandstheoretische Supremum — als solches läßt sich nämlich $E_K(\varphi^*|t)$ in (2.8) auffassen — ersetzt ist durch das punktweise Supremum; dabei sehen wir einmal ab von den Schwierigkeiten, die im Vergleich der Nebenbedingungen bestehen (vgl. Beweis zu Satz 4.1). Im allgemeinen ist eine solche Vorgehensweise bekanntlich nicht möglich. Wenn also der hier eingeschlagene Weg trotzdem zum Ziele führt — wobei zu bedenken ist, daß Satz 4.1 noch eine Meßbarkeitsforderung enthält —, so muß dies seinen Grund darin haben, daß sich die Version $\int_{\mathfrak{X}_t} \varphi d\bar{w}_K(\cdot|t)$

($t \in N_K^c$) des bedingten Erwartungswertes $E_K(\varphi|t)$ in gewisser Weise „regelmäßiger“ verhält als andere Versionen. Dies äußert sich z. B. auch darin, daß für eine Testfunktion $\tilde{\varphi}(T(\cdot))$ mit \mathfrak{D} -meßbarem $\tilde{\varphi}(\cdot)$ gilt

$$\int_{\mathfrak{X}} \tilde{\varphi} \varphi d w_K(\cdot|t) = \tilde{\varphi}(t) \int_{\mathfrak{X}} \varphi d w_K(\cdot|t) \quad \text{für alle } t \in N_K^c,$$

während allgemein nur $E_K(\tilde{\varphi} \varphi|t) = \tilde{\varphi}(t) E_K(\varphi|t)$ [\mathfrak{B}_K^T] zutrifft, und hierbei die Ausnahmemenge von $\tilde{\varphi}$ und φ abhängen kann.

5. Explizite Konstruktion von Lösungen der bedingten Testprobleme und ein Meßbarkeitsbeweis

Bisher haben wir nur geklärt, unter welchen Voraussetzungen sich Lösungen von (4.4—4.5) zu einer Lösung von (2.7—2.8) zusammensetzen lassen. Dagegen ist noch nichts darüber gesagt worden, ob solche Lösungen existieren und wie sie aussehen. Dies ist schon allein deshalb nicht trivial, weil in Satz 4.1 eine Meßbarkeitsforderung an die zusammengesetzte Funktion $\varphi_{T(\cdot)}^*(\cdot)$ gestellt wird, die man also nachprüfen muß. Damit dies möglich ist, hat man zunächst explizite Lösungen von (4.4—4.5) für $t \in N_1^c$ zu bestimmen.

Für jedes $t \in N_1^c$ ist (4.4—4.5) ein Testproblem der Gestalt (2.3—2.4), wobei \mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K zu ersetzen sind durch die einelementigen Mengen $w_H(\cdot|t)$ und $w_K(\cdot|t)$. Ein solches Testproblem hat aber nach dem Lemma von NEYMAN und PEARSON stets eine Lösung (vgl. z. B. WITTING [11], Satz 2.33). Hierin besteht der eigentliche Vorteil aller von uns durchgeführten Überlegungen.

Zur expliziten Konstruktion der Lösungen von (4.4—4.5) benötigt man Dichten von $\bar{w}_H(\cdot|t)$ und $\bar{w}_K(\cdot|t)$ bezüglich eines (gemeinsamen) dominierenden Maßes $\bar{\mu}(\cdot, t)|\mathfrak{B}_t$, $t \in N_1^c$. Demgemäß gelte

(5.1) Für alle $t \in N_1^c$ ist $\bar{\mu}(\cdot, t)|\mathfrak{B}_t$ ein σ -finites Maß mit $\{\bar{w}_H(\cdot|t), \bar{w}_K(\cdot|t)\} \ll \bar{\mu}(\cdot, t)$.

Hierbei kann natürlich insbesondere

(5.2)
$$\bar{\mu}(\cdot, t) := \bar{w}_H(\cdot|t) + \bar{w}_K(\cdot|t), \quad t \in N_1^c$$

verwendet werden, so daß (5.1) unter den Voraussetzungen (3.1—3.4) keine zusätzliche Annahme ist. Definieren wir zur Abkürzung

(5.3)
$$\bar{p}_H(x, t) := \frac{d\bar{w}_H(\cdot|t)}{d\bar{\mu}(\cdot, t)}(x), \quad \bar{p}_K(x, t) := \frac{d\bar{w}_K(\cdot|t)}{d\bar{\mu}(\cdot, t)}(x) \quad \text{für } x \in \mathfrak{X}_t,$$

wobei $\bar{p}_H(x, t)$ und $\bar{p}_K(x, t)$ als *bedingte Dichten* bezeichnet werden sollen, so ist nach dem oben zitierten Lemma von NEYMAN und PEARSON eine Lösung von

(4.4–4.5) gegeben durch

$$(5.4) \quad \varphi_t^*(x) := \begin{cases} 1, & \bar{p}_K(x, t) > c(t) \bar{p}_H(x, t) \\ \gamma(t), & \bar{p}_K(x, t) = c(t) \bar{p}_H(x, t), \\ 0, & \bar{p}_K(x, t) < c(t) \bar{p}_H(x, t) \end{cases} \quad x \in \mathfrak{X}_t, \quad t \in N_1^c.$$

Dabei werden $c(t)$ und $\gamma(t)$, $0 \leq \gamma(t) \leq 1$, bestimmt aus

$$(5.5) \quad \begin{aligned} & \bar{w}_H(B_{>}(t, c(t)) | t) + \gamma(t) \bar{w}_H(B_{=}(t, c(t)) | t) = \alpha, \\ & B_{\underset{=}{>}}(t, k) := \{x \in \mathfrak{X}_t : \bar{p}_K(x, t) \underset{=}{>} k \bar{p}_H(x, t)\}, \quad (t, k) \in N_1^c \times R_1. \end{aligned}$$

Damit (4.6) und (5.4–5.5) eine Lösung von (2.7–2.8) darstellt, ist gemäß Satz 4.1 nachzuprüfen, ob $\varphi_{T(\cdot)}^*(\cdot) | T^{-1}(N_1^c)$ eine N_1^c \mathfrak{B} -meßbare Funktion ist. In den folgenden Betrachtungen soll untersucht werden, wann dies der Fall ist. LEHMANN und SCHEFFÉ [8], Part II, Appendix, geben einen Meßbarkeitsbeweis von LECAM für den Fall an, daß $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ ein Produktraum $(\mathfrak{X}' \times \mathfrak{X}, \mathfrak{B}' \times \mathfrak{D})$ und T die Projektion von $\mathfrak{X}' \times \mathfrak{X}$ auf \mathfrak{X} ist, also $T(x', t) = t$ für $(x', t) \in \mathfrak{X}' \times \mathfrak{X}$, so daß $\mathfrak{X}_t = \mathfrak{X}' \times \{t\}$, $\mathfrak{B}_t = (\mathfrak{X}' \times \{t\}) \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \times \{t\}$ ($:= \{B' \times \{t\} : B' \in \mathfrak{B}'\}$) ist. Also kann $(\mathfrak{X}_t, \mathfrak{B}_t)$ auch aufgefaßt werden als $(\mathfrak{X}', \mathfrak{B}')$. (Wie bei Satz 3.3 sei $\{t\} \in \mathfrak{D}$ für alle $t \in \mathfrak{X}$.) In gleicher Weise können die Maße $\bar{w}_H(\cdot | t) | \mathfrak{B}_t$ mit Werten $\bar{w}_H(B' \times \{t\} | t)$ überführt werden in Maße⁴ $\tilde{w}_H(\cdot | t) | \mathfrak{B}'$ mit Werten $\tilde{w}_H(B' | t) := \bar{w}_H(B' \times \{t\} | t)$, $t \in N_H^c$ (und ebenso für „ K “ statt „ H “). Da außerdem bei den von LEHMANN und SCHEFFÉ betrachteten Exponentialfamilien die Tests in einer einfachen Form gegeben sind, nämlich mit $\mathfrak{X}' \subset R_1$ (z. B.) durch

$$\varphi_t^*(x') = I_{(c(t), \infty)}(x') + \gamma(t) I_{\{c(t)\}}(x'),$$

geht (5.5) über in

$$\tilde{w}_H((c(t), \infty) | t) + \gamma(t) \tilde{w}_H(\{c(t)\} | t) = \alpha.$$

Man erkennt, daß die den Mengen $B_{\underset{=}{>}}(t, c(t))$ entsprechenden Intervalle $(c(t), \infty)$ und $\{c(t)\}$ nur über $c(t)$ von t und nicht auch noch explizit von t abhängen! In diesem Falle beruht der Meßbarkeitsbeweis darauf, daß $\tilde{F}(t, k) := \tilde{w}_H((-\infty, k] | t)$ bei festem $k \in R_1$ eine \mathfrak{D} -meßbare Funktion ist. Hieraus folgt dann die für den weiteren Beweis wichtige Tatsache, daß sie in beiden Variablen, also $\mathfrak{D} \times \mathfrak{B}_1$ -meßbar ist. Wir wollen zeigen, daß dieser Beweisgedanke auch hier zum Ziele führt, wenn man eine zusätzliche Voraussetzung an die Dichten $\bar{p}_H(\cdot, \cdot)$ und $\bar{p}_K(\cdot, \cdot)$ stellt. Wir fordern nämlich, daß die „zusammengesetzten“ Funktionen $\bar{p}_H(\cdot, T(\cdot)) | T^{-1}(N_1^c)$ und $\bar{p}_K(\cdot, T(\cdot)) | T^{-1}(N_1^c)$ $T^{-1}(N_1^c)$ \mathfrak{B} -meßbare Funktionen sind. Dadurch scheint das Problem der Meßbarkeit von $\varphi_{T(\cdot)}^*(\cdot)$ nicht gelöst, sondern nur auf eine andere Ebene verlagert zu sein. Wir werden jedoch in Paragraph 6 Bedingungen für die Gültigkeit dieser Voraussetzungen angeben.

Satz 5.1. *Es mögen die Voraussetzungen (3.1–3.4) erfüllt sein. Für die gemäß (5.4–5.5) festgelegten Lösungen φ_t^* von (4.4–4.5) ist $\varphi_{T(\cdot)}^*(\cdot) | T^{-1}(N_1^c)$ eine*

⁴ $\tilde{w}_H(\cdot | t) | \mathfrak{B}'$ ist offenbar genau die Randverteilung von $w_H(\cdot | t) | \mathfrak{B}$ bezüglich der ersten Komponente.

$T^{-1}(N_1^c)$ \mathfrak{B} -meßbare Funktion, falls

$$\bar{p}_H(\cdot, T(\cdot))|T^{-1}(N_1^c) \quad \text{und} \quad \bar{p}_K(\cdot, T(\cdot))|T^{-1}(N_1^c)$$

meßbare Funktionen bezüglich $T^{-1}(N_1^c)$ \mathfrak{B} sind.

Beweis. Wir betrachten zunächst die über $N_1^c \times R_1$ definierte Funktion

$$F(t, k) := \bar{w}_H(\{x \in \mathfrak{X}_t: \bar{p}_K(x, t) \leq k \bar{p}_H(x, t)\} | t), \quad (t, k) \in N_1^c \times R_1,$$

aus der sich $c(t)$ und $\gamma(t)$ berechnen lassen wegen $F(t, k) = 1 - \bar{w}_H(B_{>}(t, k) | t)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $0 \leq \bar{p}_H(x, t) < \infty$ und $0 \leq \bar{p}_K(x, t) < \infty$ für alle $x \in \mathfrak{X}_t$ und alle $t \in N_1^c$ annehmen. Für jedes $t \in N_1^c$ ist $F(t, \cdot)$ eine Verteilungsfunktion über R_1 . Offensichtlich ist $F(t, k)$ nämlich (schwach) monoton wachsend und rechtsseitig stetig in k . Für $k < 0$ gilt außerdem $F(t, k) = 0$, denn für solche k hat man

$$\{x \in \mathfrak{X}_t: \bar{p}_K(x, t) \leq k \bar{p}_H(x, t)\} \subset \{x \in \mathfrak{X}_t: \bar{p}_H(x, t) = 0\},$$

und die rechtsstehende Menge ist sicher eine $\bar{w}_H(\cdot | t)$ -Nullmenge, $t \in N_1^c$. Schließlich beweist man mit einem ähnlichen Argument $\lim_{k \rightarrow \infty} F(t, k) = 1$ für alle $t \in N_1^c$.

Wir zeigen nun, daß $F(\cdot, k)|N_1^c$ für jedes $k \in R_1$ eine N_1^c \mathfrak{D} -meßbare Funktion ist. Definiert man

$$A(k) := \{x \in T^{-1}(N_1^c): \bar{p}_K(x, T(x)) \leq k \bar{p}_H(x, T(x))\},$$

so gilt $A(k) \in T^{-1}(N_1^c)$ \mathfrak{B} nach den Voraussetzungen des Satzes und

$$\{x \in \mathfrak{X}_t: \bar{p}_K(x, t) \leq k \bar{p}_H(x, t)\} = A(k) \mathfrak{X}_t \quad \forall (t, k) \in N_1^c \times R_1.$$

Hieraus folgt nach Definition von $\bar{w}_H(\cdot | t)$ und wegen (3.3) die Behauptung, denn

$$F(t, k) = \bar{w}_H(A(k) \mathfrak{X}_t | t) = w_H(A(k) | t) \quad \forall (t, k) \in N_1^c \times R_1.$$

Wie bei dem von LEHMANN und SCHEFFÉ [8], II, Appendix, angegebenen Beweis (vgl. auch WITTING [11], Hilfssatz 4.3) folgt nun, daß $c(\cdot)$ und $\gamma(\cdot)$ N_1^c \mathfrak{D} -meßbare Funktionen und somit die Komposition $c(T(\cdot))$ und $\gamma(T(\cdot))$ $T^{-1}(N_1^c)$ \mathfrak{B} -meßbare Funktionen sind. Nach den Voraussetzungen des Satzes ist dann aber auch

$$\varphi_{T(x)}^*(x) = \begin{cases} 1, & \bar{p}_K(x, T(x)) > c(T(x)) \bar{p}_H(x, T(x)) \\ \gamma(T(x)), & \bar{p}_K(x, T(x)) = c(T(x)) \bar{p}_H(x, T(x)) \\ 0, & \bar{p}_K(x, T(x)) < c(T(x)) \bar{p}_H(x, T(x)) \end{cases}$$

eine $T^{-1}(N_1^c)$ \mathfrak{B} -meßbare Funktion. \square

Aus Satz 3.6 ergeben sich eine Reihe von Folgerungen, die in einem eigenen Abschnitt zusammengestellt werden sollen.

6. Einige Folgerungen

Wir fassen zunächst die Ergebnisse von Satz 4.1 und Satz 5.1 zusammen zu

Korollar 6.1. *Es mögen die Voraussetzungen (3.1–3.4) erfüllt sein. Außerdem seien die Funktionen $\bar{p}_H(\cdot, T(\cdot))|T^{-1}(N_1^c)$ und $\bar{p}_K(\cdot, T(\cdot))|T^{-1}(N_1^c)$ $T^{-1}(N_1^c)$ \mathfrak{B} -meßbar. Dann gilt:*

Es existiert eine Lösung $\varphi^|X$ von (2.7–2.8); diese kann gemäß (4.6) und (5.4–5.5) festgelegt werden.*

Bemerkung. Setzt man zur Lösung von (2.1–2.2) die totale Vollständigkeit von T für \mathfrak{B}'_H voraus, so führt dies zu (2.7–2.8) mit Φ' statt Φ (vgl. Fußnote 2). Entsprechend wird (4.4–4.5) abgewandelt. Diese neue Schar von Testaufgaben wird nach dem Neyman Pearson Lemma aber auch durch (5.4–5.5) gelöst, und es gilt Korollar 6.1, wobei zu berücksichtigen ist, daß in (3.1–3.4) jeweils \mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K durch \mathfrak{B}'_H und \mathfrak{B}'_K zu ersetzen sind. Damit ist insbesondere gezeigt, daß unter den angegebenen Voraussetzungen, nämlich denen des Korollars 6.1 und der totalen Vollständigkeit von T die Optimierung von $E_w \varphi$ für $w \in \mathfrak{B}'_K$ unter der Nebenbedingung $E_w \varphi \leq \alpha \forall w \in \mathfrak{B}_H$ gleichbedeutend ist mit derjenigen unter der Nebenbedingung $E_w \varphi = \alpha \forall w \in \mathfrak{B}_H$.

Korollar 6.1 ist nicht so sehr eine Existenzaussage für Lösungen der bedingten oder der ursprünglichen Testprobleme, als vielmehr eine Aussage über deren Konstruktionsmöglichkeit. Die Forderung der Meßbarkeit der Funktionen $\bar{p}_H(\cdot, T(\cdot))$ und $\bar{p}_K(\cdot, T(\cdot))$ läßt sich zwar häufig bei praktischen Problemen nachprüfen, jedoch haben wir noch nichts darüber ausgesagt, unter welchen allgemeinen Voraussetzungen sie erfüllt werden kann.

Dies soll im folgenden diskutiert werden. Hierzu ist es zweckmäßig, nicht mit den Maßen $\bar{w}_H(\cdot|t)$ und $\bar{w}_K(\cdot|t)$ auf \mathfrak{B}_t , sondern mit $w_H(\cdot|t)$ und $w_K(\cdot|t)$ auf \mathfrak{B} zu arbeiten. Dementsprechend sei $\mu(\cdot, t)|\mathfrak{B}$ gegeben durch

$$(6.1) \quad \mu(\cdot, t) := w_H(\cdot|t) + w_K(\cdot|t), \quad t \in \mathfrak{T}$$

und die bedingten Dichten jetzt für alle $x \in \mathfrak{X}$ erklärt durch

$$(6.2) \quad p_H(x, t) := \frac{dw_H(\cdot|t)}{d\mu(\cdot, t)}(x), \quad p_K(x, t) := \frac{dw_K(\cdot|t)}{d\mu(\cdot, t)}(x), \quad x \in \mathfrak{X}, t \in \mathfrak{T}.$$

Die Bezeichnung „bedingte Dichten“ führt dabei nicht zu Verwechslungen mit (5.3), denn jedenfalls für $\bar{\mu}(\cdot, t)$ gemäß (5.2) gilt $\bar{\mu}(\cdot, t) = \mu(\cdot, t)|\mathfrak{B}_t$ für alle $t \in N_1^c$ und unter der Voraussetzung (3.3) offensichtlich

$$(6.3) \quad \bar{p}_H(\cdot, t) = p_H(\cdot, t)|\mathfrak{X}_t [\bar{\mu}(\cdot, t)], \quad \bar{p}_K(\cdot, t) = p_K(\cdot, t)|\mathfrak{X}_t [\bar{\mu}(\cdot, t)] \quad \forall t \in N_1^c.$$

Diese Beziehungen besagen insbesondere, daß man in (5.4) statt $\bar{p}_H(x, t)$ und $\bar{p}_K(x, t)$ auch $p_H(x, t)$ und $p_K(x, t)$ einsetzen kann, da ja dort ohnehin nur solche Paare (x, t) in Erscheinung treten, für die $x \in \mathfrak{X}_t$, d. h. $T(x) = t$ gilt und im übrigen nach dem zur Herleitung von (5.4–5.5) verwendeten Lemma von NEYMAN und PEARSON jede Version der Dichten $d\bar{w}_H(\cdot|t)/d\mu(\cdot, t)$ und $d\bar{w}_K(\cdot|t)/d\mu(\cdot, t)$ zulässig ist. Die Verwendung der Dichten (6.2) hat den Vorteil, daß man anstatt nach der Meßbarkeit von $\bar{p}_H(\cdot, T(\cdot))$ und $\bar{p}_K(\cdot, T(\cdot))$ über $T^{-1}(N_1^c)$ auch nach derjenigen von $p_H(\cdot, T(\cdot))$ und $p_K(\cdot, T(\cdot))$ über $T^{-1}(N_1^c)$ oder auch über \mathfrak{X} fragen kann, um Existenzaussagen über Lösungen der bedingten Testprobleme aufstellen zu können. $p_H(\cdot, T(\cdot))|\mathfrak{X}$ (und entsprechend $p_K(\cdot, T(\cdot))|\mathfrak{X}$) kann man nun aber auffassen als Komposition zweier Abbildungen gemäß $x \xrightarrow{T'} (x, T(x)) \xrightarrow{p_H} p_H(x, T(x))$. Die Kompositionen $p_H(\cdot, T(\cdot))|\mathfrak{X}$ und $p_K(\cdot, T(\cdot))|\mathfrak{X}$ sind also jedenfalls dann \mathfrak{B} -meßbar, wenn die Abbildungen $p_H: \mathfrak{X} \times \mathfrak{T} \rightarrow R_1$ und $p_K: \mathfrak{X} \times \mathfrak{T} \rightarrow R_1$ mit Werten $p_H(x, t)$ und $p_K(x, t)$ $\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}$ -meßbar sind, denn T' ist offensichtlich meßbar bezüglich \mathfrak{B} über \mathfrak{X} und $\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}$ über $\mathfrak{X} \times \mathfrak{T}$.

Lemma 6.2. *Es mögen die Voraussetzungen (3.1–3.2) erfüllt sein. Überdies sei \mathfrak{B} separabel. Dann existieren Versionen $p_H(\cdot, \cdot)|\mathfrak{X} \times \mathfrak{T}$ und $p_K(\cdot, \cdot)|\mathfrak{X} \times \mathfrak{T}$ der*

Dichten

$$\frac{dw_H(\cdot|t)}{d\mu(\cdot,t)}(x) \quad \text{und} \quad \frac{dw_K(\cdot|t)}{d\mu(\cdot,t)}(x),$$

für die $p_H(\cdot, T(\cdot))|_{\mathfrak{X}}$ und $p_K(\cdot, T(\cdot))|_{\mathfrak{X}}$ \mathfrak{B} -meßbar sind.

Beweis. (für „ H' “) Nach (3.2) ist $w_H|_{\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}}$ ein \mathfrak{D} -meßbares Wahrscheinlichkeitsmaß und nach (6.1) $\mu|_{\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}}$ ein \mathfrak{D} -meßbares endliches Maß. Wir zeigen nun, daß eine $\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}$ -meßbare Funktion $p_H|_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{T}}$ existiert mit $p_H(x, t) = \frac{dw_H(\cdot|t)}{d\mu(\cdot,t)}(x)$. Nach den Ausführungen vor Lemma 6.2 ist dann $p_H(\cdot, T(\cdot))|_{\mathfrak{X}}$ eine \mathfrak{B} -meßbare Funktion.

Es sei $\{F_1, F_2, \dots\}$ ein Erzeugendensystem von \mathfrak{B} . Definiert man

$$\mathfrak{F}_n := \mathfrak{B}(\{F_1, \dots, F_n\}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

so gilt für $n \rightarrow \infty$ mit $\mathfrak{F}_\infty := \mathfrak{B}\left(\bigcup_{i=1}^\infty \mathfrak{F}_i\right)$ und $\mu'(\cdot, t) := \mu(\cdot, t)/\mu(\mathfrak{X}, t)$ wegen $\mathfrak{F}_\infty = \mathfrak{B}$

$$E_{\mu'(\cdot,t)}\left(\frac{dw_H(\cdot|t)}{d\mu'(\cdot,t)}\middle|\mathfrak{F}_n\right) \rightarrow E_{\mu'(\cdot,t)}\left(\frac{dw_H(\cdot|t)}{d\mu'(\cdot,t)}\middle|\mathfrak{F}_\infty\right) = \frac{dw_H(\cdot|t)}{d\mu'(\cdot,t)}[\mu'(\cdot, t)] \quad \forall t \in \mathfrak{T}.$$

Für jedes $t \in \mathfrak{T}$ ist nämlich

$$\left\{E_{\mu'(\cdot,t)}\left(\frac{dw_H(\cdot|t)}{d\mu'(\cdot,t)}\middle|\mathfrak{F}_n\right) : 1 \leq n \leq \infty\right\} \quad \text{wegen} \quad E_{\mu'(\cdot,t)}\frac{dw_H(\cdot|t)}{d\mu'(\cdot|t)} = 1 < \infty$$

ein Martingal, für das die angegebene Konvergenzaussage gilt nach DOOB [2], Chap. VII, Theorem 4.3.

Sind nun F_{n1}, \dots, F_{nm_n} die Atome von \mathfrak{F}_n , so gilt

$$E_{\mu'(\cdot,t)}\left(\frac{dw(\cdot|t)}{d\mu'(\cdot,t)}\middle|\mathfrak{F}_n\right)(x) = f_n(x, t) := \sum_{j=1}^{m_n} \frac{w(F_{nj}|t)}{\mu'(F_{nj}, t)} I_{F_{nj}}(x) \quad \forall t \in \mathfrak{T},$$

da der bedingte Erwartungswert über den F_{nj} konstant sein muß. \sum' bedeutet Summation über solche j , für die $\mu'(F_{nj}, t) > 0$ ist. $f_n(x, t)$ ist aber $\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}$ -meßbar, denn für $z \in R_1$ gilt

$$\{(x, t) : f_n(x, t) > z\} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m_n} F_{nj} \times \left\{ \left\{ t : \frac{w_H(F_{nj}|t)}{\mu'(F_{nj}, t)} > z, \mu'(F_{nj}, t) > 0 \right\} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \{t : \mu'(F_{nj}, t) = 0\} \right\}, & z < 0 \\ \sum_{j=1}^{m_n} F_{nj} \times \left\{ t : \frac{w_H(F_{nj}|t)}{\mu'(F_{nj}, t)} > z, \mu'(F_{nj}, t) > 0 \right\}, & z \geq 0, \end{cases}$$

und diese Mengen liegen in $\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}$. Somit ist $p'_H(x, t) := \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x, t)$ eine

$\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}$ -meßbare Funktion mit $p'_H(x, t) = \frac{dw_H(\cdot|t)}{d\mu'(\cdot,t)}(x)$; also hat

$$p_H(x, t) := \mu(\mathfrak{X}, t) p'_H(x, t) = \frac{dw_H(\cdot,t)}{d\mu(\cdot,t)}(x)$$

die oben angegebenen Eigenschaften. \square

Bemerkung. Der Beweis zu Lemma 3.9 zeigt, daß man anstelle von $\mu(\cdot, t)$ aus (6.1) auch jedes andere \mathfrak{D} -meßbare endliche Maß $\tilde{\mu}(\cdot, t)$ mit $\tilde{\mu}(\cdot, t) \gg \{w_H(\cdot|t), w_K(\cdot|t)\}$ für alle $t \in \mathfrak{T}$ verwenden kann.

Es folgt nun unmittelbar das

Korollar 6.3. *Es mögen die Voraussetzungen (3.1–3.4) erfüllt sein. Überdies sei \mathfrak{B} separabel. Dann gilt:*

a) *Es existiert eine Lösung φ^* von (2.7–2.8).*

b) *Über die Konstruktion von φ^* gilt die Aussage von Korollar 6.1, wenn man dort statt \bar{p}_H und \bar{p}_K die Funktionen p_H und p_K aus Lemma 6.2 verwendet.*

Beweis. Die Aussagen folgen unmittelbar aus Korollar 6.1 mit Hilfe von Lemma 6.2 und wegen (6.3). \square

Korollar 6.3 ist eine Existenzaussage über Lösungen des bedingten Testproblems, die Satz 2.3 ergänzt. Während wir bei Satz 2.3 \mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K als dominiert annehmen mußten, gilt Korollar 6.3 auch für nicht-dominierte \mathfrak{B}_H und \mathfrak{B}_K , jedoch nur unter den Voraussetzungen (3.1–3.4) und der Annahme der Separabilität von \mathfrak{B} .

Als letztes soll eine Folgerung bewiesen werden, die in eine ganz andere Richtung orientiert ist, als die bisherigen Aussagen. Für die Lösungen (5.4–5.5) von (4.4–4.5) gilt nämlich (bei festem $t \in N_1^c$) entweder $\int \varphi_i^* d\bar{w}_K(\cdot|t) > \alpha$ oder $\bar{w}_K(\cdot|t) = \bar{w}_H(\cdot|t)$ (vgl. WITTING [11], Korollar 2.26). Es liegt nahe zu versuchen, hieraus Aussagen über die Gütefunktion $E_w \varphi^*$, $w \in \mathfrak{B}_K$, von Lösungen φ^* des Problems (2.3–2.4) zu gewinnen. Da der Test $\varphi \equiv \alpha$ in \mathcal{P} liegt, gilt natürlich $E_w \varphi^* \geq \alpha$ für alle $w \in \mathfrak{B}_K$. Darüber hinaus läßt sich jedoch die folgende Aussage beweisen:

Korollar 6.4. *Die Voraussetzungen des Korollars 6.3 über die Lösbarkeit des Problems (2.7–2.8) seien erfüllt und φ^* bezeichne eine Lösung. Außerdem sei T vollständig für \mathfrak{B}_H , so daß φ^* auch (2.3–2.4) erfüllt.*

Dann gilt:

a) *Für $w_0 \in \mathfrak{B}_K$ ist $E_{w_0} \varphi^* > \alpha$, falls T nicht suffizient ist für $\mathfrak{B}_H \cup \{w_0\}$. Ist umgekehrt T suffizient für $\mathfrak{B}_H \cup \{w_0\}$ und gilt $\mathfrak{B}_H \gg w_0$, so ist $E_{w_0} \varphi^* = \alpha$.*

b) *Es existiert mindestens ein $w_0 \in \mathfrak{B}_K$ mit $E_{w_0} \varphi^* > \alpha$, falls T nicht suffizient ist für $\mathfrak{B}_H \cup \mathfrak{B}_K$. Ist umgekehrt T suffizient für $\mathfrak{B}_H \cup \mathfrak{B}_K$ und gilt $\mathfrak{B}_H \gg \mathfrak{B}_K$, so ist $E_w \varphi^* = \alpha$ für alle $w \in \mathfrak{B}_K$.*

Beweis. a) Offenbar können wir annehmen, φ^* sei gemäß (4.6) und (5.4–5.5) festgelegt. Da für φ_i^* sicher $\int \varphi_i^* d\bar{w}_K(\cdot|t) \geq \alpha$ gilt für $t \in N_1^c$, haben wir (vgl. Beweis von Satz 4.1)

$$E_K(\varphi^*|t) = \int_{[\mathfrak{B}_K^t]} \varphi_i^* d\bar{w}_K(\cdot|t) + I_{N_0 \cup N_H}(t) + \alpha I_{N_K - (N_0 \cup N_H)}(t) \geq \alpha \quad \forall t \in \mathfrak{T}.$$

Also kann $\alpha = E_{w_0} \varphi^* = E_{w_0^T} E_K(\varphi^*|t)$ nur dann eintreten, wenn für

$$N := \{t \in N_1^c : \int \varphi_i^* d\bar{w}_K(\cdot|t) > \alpha\} \in N_1^c \mathfrak{D}$$

gilt $w_0^T(N) = 0$. Wir wollen zeigen, daß dann T suffizient ist für $\mathfrak{B}_H \cup \{w_0\}$. Da φ_i^* eine Lösung von (4.4–4.5) darstellt, gilt (vgl. WITTING [11], Korollar 2.26)

$$(6.4) \quad \bar{w}_H(\cdot|t) = \bar{w}_K(\cdot|t) \quad \forall t \in N_1^c - N.$$

Wir definieren ein \mathfrak{D} -meßbares Wahrscheinlichkeitsmaß $w| \mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$ gemäß

$$(6.5) \quad w(B, t) := I_{N_H \cup N_0}(t) w_K(B|t) + I_{(N_H \cup N_0)^c}(t) w_H(B|t), \quad B \in \mathfrak{B}, t \in \mathfrak{X}.$$

Hierfür gilt wegen $w^T(N_H \cup N_0) = 0$ für alle $w^T \in \mathfrak{W}_H^T$

$$(6.6) \quad w(B, \cdot) = w_H(B|\cdot) \quad [\mathfrak{W}_H^T] \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Andererseits ist nach (4.3)

$$(N_H \cup N_0)^c = (N_1 - (N_H \cup N_0)) + N_1^c = (N_K - (N_H \cup N_0)) + N + (N_1^c - N),$$

so daß wegen $w_0^T((N_K - (N_H \cup N_0)) + N) = 0$ und (6.4–6.5) auch gilt

$$(6.7) \quad w(B, \cdot) = w_K(B|\cdot) \quad [w_0^T] \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

(6.6) und (6.7) besagen aber, daß $w(\cdot, \cdot)| \mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$ eine von $w \in \mathfrak{W}_H \cup \{w_0\}$ unabhängige Festlegung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $E_w(I_B|t)$, $B \in \mathfrak{B}$, $w \in \mathfrak{W}_H \cup \{w_0\}$ darstellt. Also ist T suffizient für $\mathfrak{W}_H \cup \{w_0\}$.

Es sei nun umgekehrt T suffizient für $\mathfrak{W}_H \cup \{w_0\}$. Dann existiert eine von $w \in \mathfrak{W}_H \cup \{w_0\}$ unabhängige Festlegung $E.(\varphi^*|t)$ der bedingten Erwartungswerte $E_w(\varphi^*|t)$, $w \in \mathfrak{W}_H \cup \{w_0\}$. Wegen $\varphi^* \in \mathcal{P} = \Phi$ gilt

$$E.(\varphi^*|t) = E_H(\varphi^*|t) = \alpha \quad [\mathfrak{W}_H^T].$$

Wegen $\mathfrak{W}_H \gg w_0$ (offenbar würde auch $\mathfrak{W}_H^T \gg w_0^T$ ausreichen), erhalten wir $E.(\varphi^*|t) = \alpha$ $[w_0^T]$, und damit $E_{w_0} \varphi^* = E_{w_0^T} E.(\varphi^*|t) = \alpha$.

b) Diese Aussage beweist man wie a), indem man berücksichtigt, daß an die Stelle von w_0^T -Nullmengen \mathfrak{W}_K^T -Nullmengen treten. $_$

Mit den hier bewiesenen Korollaren haben wir in dem durch die Annahmen (3.1–3.4) gegebenen Rahmen Aussagen über Existenz, Konstruktion und Form von Lösungen des bedingten (und damit auch des ursprünglichen) Testproblems gewonnen.

7. Bedingte Dichten dominierter Hypothesen

Während wir in den vorhergehenden Paragraphen eine Konstruktionsmöglichkeit für Lösungen des bedingten Testproblems für beliebiges \mathfrak{W}_H und \mathfrak{W}_K angegeben haben, wollen wir hier nur solche Probleme betrachten, bei denen \mathfrak{W}_H und \mathfrak{W}_K dominiert sind, wobei wir dann offenbar annehmen können, daß beide Mengen ein gemeinsames dominierendes Maß haben. Dabei wird sich ergeben, daß die in Korollar 6.1 gestellte Meßbarkeitsannahme bei geeigneten zu (3.1–3.4) analogen Voraussetzungen erfüllt ist und die ermittelten Lösungen eine einfache Form haben.

Wie üblich nehmen wir eine Statistik $T: (\mathfrak{X}, \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ als gegeben an, für die wir später (3.1) voraussetzen. Dann gehen wir aus von der Grundannahme

$$(7.1) \quad \text{Es existiert ein } \sigma\text{-finites Maß } \mu \text{ auf } \mathfrak{B} \text{ mit } \mathfrak{W}_H \ll \mu \text{ und } \mathfrak{W}_K \ll \mu. \text{ Das Maß } \mu^T \text{ ist ebenfalls } \sigma\text{-finit.}$$

Da wir bei den späteren Ausführungen auf die Ergebnisse der vorhergehenden Paragraphen zurückgreifen wollen, müssen wir neben (3.1) auch die Voraussetzungen (3.2–3.4) sicherstellen. Zunächst sei bemerkt, daß (3.4) unter der Annahme (7.1) wegen Satz 3.3 stets gilt. Im folgenden wollen wir nun zeigen, daß

die Bedingungen (3.2–3.3) erfüllt sind, wenn wir analoge Voraussetzungen an μ stellen. Hierzu müssen wir zunächst klären, ob es unter der Annahme (7.1) — also für σ -finites μ und μ^T — sinnvoll ist, von „bedingten Maßen“ (oder „bedingten Wahrscheinlichkeiten“) $\mu(\cdot|\cdot) \mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$ zu sprechen. Der gewöhnlichen Vorgehensweise für die Definition bedingter Wahrscheinlichkeiten folgend, müssen wir $\mu(B|\cdot)$ bei festen $B \in \mathfrak{B}$ auffassen als Radon-Nikodymsche Ableitung bezüglich μ^T des Maßes

$$(7.2) \quad \mu_B^T(D) := \int_{T^{-1}(D)} I_B d\mu = \mu(BT^{-1}(D)), \quad D \in \mathfrak{D}.$$

Da wir μ^T als σ -finit vorausgesetzt haben, existiert $d\mu_B^T/d\mu^T$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$, und es gilt offenbar

$$(7.3) \quad 0 \leq \frac{d\mu_B^T}{d\mu^T}(\cdot) \leq 1 \quad [\mu^T].$$

Demnach können wir unter der Annahme (7.1) auch für σ -finites μ von *bedingten Wahrscheinlichkeiten* $\mu(B|t) := \frac{d\mu_B^T}{d\mu^T}(t)$, $B \in \mathfrak{B}$, $t \in \mathfrak{X}$, sprechen, und auch fordern, daß $\mu(\cdot|\cdot) \mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$ ein \mathfrak{D} -meßbares Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Dann sprechen wir wiederum von *regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten*. In Analogie zu (3.2–3.3) fordern wir nun

(7.4) Es existieren reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten $\mu(\cdot|\cdot) \mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$.

(7.5) Es gilt $\mathfrak{X}_t := T^{-1}(t) \in \mathfrak{B}$ für alle $t \in \mathfrak{X}$ und die gemäß (7.4) existierenden regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten haben die Eigenschaft: Es existiert eine μ^T -Nullmenge N_{μ^T} mit $\mu(\mathfrak{X}_t|t) = 1$ für alle $t \in N_{\mu^T}^c$.

Man kann zeigen, daß sich $\mu(\cdot|\cdot)$ unter der Annahme (7.1) auch als bedingte Wahrscheinlichkeiten eines geeigneten normierten Maßes μ' gewinnen lassen, so daß man insbesondere alle hierüber bekannten Aussagen übertragen kann. Bezeichnen nämlich \mathfrak{X}_i , $i = 1, 2, \dots$, eine disjunkte Zerlegung von \mathfrak{X} mit

$$0 < \mu^T(\mathfrak{X}_i) < \infty, \quad i = 1, 2, \dots,$$

so gehen wir aus von dem mit μ äquivalenten normierten Maß μ' ,

$$(7.6) \quad \mu'(B) := \sum \mu(BT^{-1}(\mathfrak{X}_i)) / (2^i \mu^T(\mathfrak{X}_i)), \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Bei $0 < \mu^T(\mathfrak{X}) < \infty$ sei $\mu' := \mu/\mu^T(\mathfrak{X})$, dementsprechend sind dann auch die folgenden Formeln abzuändern. Wegen $\mu' \equiv \mu$ gilt auch $(\mu')^T \equiv \mu^T$, und man rechnet leicht nach, daß gilt

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \frac{d(\mu')^T}{d\mu^T}(t) &= \sum_i \frac{1}{2^i \mu^T(\mathfrak{X}_i)} I_{\mathfrak{X}_i}(t), \\ \frac{d\mu'}{d\mu}(x) &= \sum_i \frac{1}{2^i \mu^T(\mathfrak{X}_i)} I_{T^{-1}(\mathfrak{X}_i)}(x) = \frac{d(\mu')^T}{d\mu^T}(T(x)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun allgemein für den in Analogie zu der oben beschriebenen Vorgehensweise definierten bedingten Erwartungswert $E_{\mu}(f|t)$ einer beliebigen \mathfrak{B} -meßbaren Funktion f mit $f \geq 0$, der also als Radon-Nikodymsche Ableitung

$\frac{d\mu_f^T}{d\mu^T}(t)$ des Maßes

$$\mu_f^T(D) := \int_{T^{-1}(D)} f d\mu, \quad D \in \mathfrak{D}, \quad \text{mit} \quad 0 \leq \frac{d\mu_f^T}{d\mu^T}(\cdot) \quad [\mu^T]$$

gegeben ist,

$$\begin{aligned} \int_D E_\mu(f|t) d(\mu')^T &= \sum_i \frac{1}{2^i \mu^T(\mathfrak{X}_i)} \int_{D \cap \mathfrak{X}_i} E_\mu(f|t) d\mu^T \\ &= \sum_i \frac{1}{2^i \mu^T(\mathfrak{X}_i)} \int_{T^{-1}(D \cap \mathfrak{X}_i)} f d\mu = \int_{T^{-1}(D)} f d\mu' \quad \forall D \in \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$(7.8) \quad E_\mu(f|\cdot) = E_{\mu'}(f|\cdot) \quad [\mu^T],$$

insbesondere

$$\mu(B|\cdot) = \mu'(B|\cdot) \quad [\mu^T] \quad \forall B \in \mathfrak{B} \quad \text{für} \quad f = I_B.$$

Es gilt also das

Lemma 7.1. *Ist $\mu|\mathfrak{B}$ ein σ -finites Maß, für das μ^T ebenfalls σ -finit ist, so können die bedingten Erwartungswerte $E_\mu(f|\cdot)|\mathfrak{X}$ für $f \geq 0$ und insbesondere die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mu(\cdot|\cdot)|\mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$ festgelegt werden als bedingte Erwartungswerte $E_{\mu'}(f|\cdot)|\mathfrak{X}$ bzw. Wahrscheinlichkeiten $\mu'(\cdot|\cdot)|\mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$ des in (7.6) definierten normierten Maßes $\mu'|\mathfrak{B}$.*

Über die Gültigkeit von (7.4) bzw. (7.5) gelten analog zu den Ausführungen in Paragraph 3 sowie nach Lemma 7.1 die folgenden Aussagen:

Satz 7.2. *Unter der Voraussetzung (7.1) gilt (7.4) für $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_n (\mathfrak{X} \neq \emptyset)$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{X} \mathfrak{B}_n$, $1 \leq n \leq \infty$.*

Über allgemeineren Räumen gilt (7.4), falls μ' perfekt und \mathfrak{B} separabel ist.

Satz 7.3. *Unter den Voraussetzungen (7.1) und (7.4) gilt (7.5), falls \mathfrak{D} separabel ist und die einpunktigen Mengen $\{t\}$ in \mathfrak{D} liegen für alle $t \in \mathfrak{X}$.*

Korollar 7.4. *Unter der Annahme (7.1) sind (7.4—7.5) erfüllt, wenn $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{X} \mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{X} \mathfrak{B}_m$, $1 \leq n, m \leq \infty$, gilt.*

Als wesentliche Folgerung sei noch bemerkt, daß nach den obigen Ausführungen unter den Voraussetzungen (7.1) und (7.4—7.5) für eine beliebige \mathfrak{B} -meßbare Funktion $f \geq 0$ die folgende zu (3.5) analoge Formel gilt:

$$(7.9) \quad E_\mu(f|t) = \int_{[\mu^T] \mathfrak{X}_t} f d\mu(\cdot|t) = \int_{\mathfrak{X}_t} f d\mu(\cdot|t) = \int_{\mathfrak{X}_t} f_t d\bar{\mu}(\cdot|t), \quad t \in N_{\mu^T}^c,$$

mit

$$f_t := f|\mathfrak{X}_t, \quad \bar{\mu}(\cdot|t) := \mu(\cdot|t)|\mathfrak{B}_t, \quad \mathfrak{B}_t = \mathfrak{X}_t \mathfrak{B}.$$

Als Funktion von t ist $\int_{\mathfrak{X}_t} f_t d\mu(\cdot|t) N_{\mu^T}^c$ \mathfrak{D} -meßbar. Schließlich sei noch angemerkt, daß wir wiederholt Gebrauch machen von der Beziehung

$$(7.10) \quad \int_D E_\mu(f|\cdot) d\mu^T(\cdot) = \int_D \frac{d\mu_f^T}{d\mu^T} d\mu^T = \mu_f(D) = \int_{T^{-1}(D)} f d\mu \quad \forall D \in \mathfrak{D}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß durch die Annahmen (3.1), (7.1) und (7.4–7.5) die Voraussetzungen (3.2–3.3) sichergestellt sind. Dabei werden wir gleichzeitig die Gestalt der bedingten Dichten (5.3) ermitteln, wobei $\mu(\cdot|t)$ das oben angegebene Wahrscheinlichkeitsmaß ist (für $t \in N_{\mu^T}^c$). Wegen (3.1) und (4.1) gilt nach dem Neyman-Kriterium

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \frac{dw}{d\mu}(x) &= f_w(T(x)) h_H(x) \quad [\mu] \quad \forall w \in \mathfrak{B}_H, \\ \frac{dw}{d\mu}(x) &= f_w(T(x)) h_K(x) \quad [\mu] \quad \forall w \in \mathfrak{B}_K, \end{aligned}$$

wobei $h_H|_{\mathfrak{X}}$ und $h_K|_{\mathfrak{X}}$ \mathfrak{B} -meßbare Funktionen und $f_w|_{\mathfrak{T}}$ ($w \in \mathfrak{B}_H \cup \mathfrak{B}_K$) \mathfrak{D} -meßbare Funktionen sind, die wir im übrigen alle als nicht-negativ annehmen können. In Verallgemeinerung einer Aussage bei LEHMANN [7] (§ 2.5, Lemma 6) können wir nun folgendes beweisen:

Satz 7.5. *Es mögen die Voraussetzungen (3.1), (7.1) und (7.4–7.5) erfüllt sein. Dann gilt*

a)

$$(7.12) \quad \frac{dw^T}{d\mu^T}(t) = f_w(t) \int h_H(\cdot) d\mu(\cdot|t) \quad [\mu^T] \quad \forall w \in \mathfrak{B}_H,$$

und analog für „K“ statt „H“.

b) *Zu gegebener Festlegung der regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mu(\cdot|\cdot)|_{\mathfrak{B} \times \mathfrak{T}}$ mit (7.5) existieren reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten*

$$w_H(\cdot|\cdot)|_{\mathfrak{B} \times \mathfrak{T}} \quad \text{mit} \quad w_H(\cdot|t) \leq \mu(\cdot|t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathfrak{T}$$

und $w_H(\mathfrak{X}_t|t) = 1$ für alle $t \in N_{\mu^T}^c$. Es gilt für alle $t \in \mathfrak{T}$

$$(7.13) \quad \frac{dw_H(\cdot|t)}{d\mu(\cdot|t)}(x) = \begin{cases} h_H(x) \left(\int h_H(\cdot) d\mu(\cdot|t)^{-1} \right) & t \in \tilde{N}_H^c \\ 1, & t \in \tilde{N}_H \end{cases}$$

mit

$$(7.14) \quad \tilde{N}_H^c := \{t: 0 < \int h_H(\cdot) d\mu(\cdot|t) < \infty\}, \quad w^T(\tilde{N}_H) = 0 \quad \forall w^T \in \mathfrak{B}_H^T.$$

Entsprechendes gilt für „K“ statt „H“.

Beweis. a) Die Funktion $f_w(t) \int h_H(x) d\mu(\cdot|t)$ ist sicher \mathfrak{D} -meßbar. Wegen (7.4), (7.5), (7.9) und (7.10) gilt

$$\begin{aligned} \int_D f_w(t) \int h_H(\cdot) d\mu(\cdot|t) d\mu^T(t) &= \int_{DN_{\mu^T}^c \mathfrak{X}_t} \int f_w(T(\cdot)) h_H(\cdot) d\mu(\cdot|t) d\mu^T(t) \\ &= \int_{DN_{\mu^T}^c \mathfrak{X}} \int f_w(T(\cdot)) h_H(\cdot) d\mu(\cdot|t) d\mu^T(t) = \int_D E_{\mu} \left(\frac{dw}{d\mu} \middle| t \right) d\mu^T(t) \\ &= \int_{T^{-1}(D)} \frac{dw}{d\mu} d\mu = w^T(D) \quad \forall D \in \mathfrak{D}, \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

b) Wir bezeichnen in Analogie zu (6.2) die auf der rechten Seite in (7.13)

stehende Funktion mit $\tilde{p}_H(x, t)$. Diese ist sicher $\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}$ -meßbar, denn

$$\int h_H(\cdot) d\mu(\cdot | t)$$

ist \mathfrak{D} -meßbar, so daß insbesondere $\tilde{N}_H^c \in \mathfrak{D}$ gilt.

Wir definieren nun eine \mathfrak{D} -meßbare Wahrscheinlichkeit $\tilde{w}_H(\cdot, \cdot) | \mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$ vermöge

$$(7.15) \quad \tilde{w}_H(B, t) := \int_B \tilde{p}_H(\cdot, t) d\mu(\cdot | t), \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Dann ist $\tilde{w}_H(B, t)$ bei festem $B \in \mathfrak{B}$ eine \mathfrak{D} -meßbare Funktion⁵ und wegen $\tilde{p}_H(x, t) \geq 0 \forall x \in \mathfrak{X} \forall t \in \mathfrak{X}$ ein Maß über \mathfrak{B} für jedes $t \in \mathfrak{X}$. Ferner gilt für $t \in \tilde{N}_H^c$

$$\tilde{w}_H(\mathfrak{X}, t) = \left(\int_{\mathfrak{X}} h_H(\cdot) d\mu(\cdot | t) \right) \left(\int_{\mathfrak{X}} h_H(\cdot) d\mu(\cdot | t) \right)^{-1} = 1,$$

und für $t \in \tilde{N}_H$ erhält man $\tilde{w}_H(\mathfrak{X}, t) = \mu(\mathfrak{X} | t) = 1$ wegen (7.4).

Für $t \in N_{\mu^x}^c$ gilt sogar $\tilde{w}_H(\mathfrak{X}_t, t) = 1$, denn für $t \in N_{\mu^x}^c \cap \tilde{N}_H^c$ bzw. $t \in N_{\mu^x}^c \cap \tilde{N}_H$ kann man wegen (7.5) in den beiden vorstehenden Gleichungen \mathfrak{X} durch \mathfrak{X}_t ersetzen.

Wir wollen nun zeigen, daß $\tilde{w}_H(B, \cdot)$ der Gleichung

$$(7.16) \quad \int_D \tilde{w}_H(B, \cdot) dw^T(\cdot) = \int_{T^{-1}(D)} I_B dw \quad \forall D \in \mathfrak{D} \quad \forall w \in \mathfrak{B}_H \quad \forall B \in \mathfrak{B}$$

genügt, womit die Behauptung des Satzes bewiesen ist. Denn nach (7.16) und den obigen Ausführungen ist dann $w_H(\cdot | \cdot) := \tilde{w}_H(\cdot, \cdot)$ eine von $w \in \mathfrak{B}_H$ unabhängige reguläre Festlegung der bedingten Wahrscheinlichkeiten der Maße $w \in \mathfrak{B}_H$ mit $w_H(\mathfrak{X}_t | t) = 1$ für alle $t \in N_{\mu^x}^c$, für die nach (7.15) gilt

$$\frac{dw_H(\cdot, t)}{d\mu(\cdot | t)}(x) \Big|_{[\mu(\cdot | t)]} = \tilde{p}_H(x, t) \quad \forall t \in \mathfrak{X}.$$

Da, wie man sich leicht überlegt, $w^T(\tilde{N}_H) = 0 \forall w^T \in \mathfrak{B}_H^T$ gilt, ergibt sich (7.16) aus der folgenden Gleichungskette, bei der wir (7.5), (7.9–7.12) und (7.15) ausnutzen:

$$\begin{aligned} \int_D \tilde{w}_H(B, \cdot) dw^T(\cdot) &= \int_D \int_B \tilde{p}_H(\cdot, t) d\mu(\cdot | t) dw^T(t) \\ &= \int_{D \cap \tilde{N}_H^c \cap N_{\mu^x}^c} \left\{ \int_{B \cap \mathfrak{X}_t} h_H(\cdot) d\mu(\cdot | t) \left(\int h_H(\cdot) d\mu(\cdot | t) \right)^{-1} \right\} f_w(t) \int h_H(\cdot) d\mu(\cdot | t) d\mu^T(t) \\ &= \int_{D \cap \tilde{N}_H^c \cap N_{\mu^x}^c} \int I_B(\cdot) h_H(\cdot) f_w(T(\cdot)) d\mu(\cdot | t) d\mu^T(t) \\ &= \int_{D \cap \tilde{N}_H^c \cap N_{\mu^x}^c} E_{\mu} \left(I_B \frac{dw}{d\mu} \Big| t \right) d\mu^T(t) = \int_{D \cap \tilde{N}_H^c} I_B \frac{dw}{d\mu} d\mu \\ &= \int_{D \cap \tilde{N}_H^c} I_B dw = \int_D I_B dw \quad \forall D \in \mathfrak{D} \quad \forall w \in \mathfrak{B}_H \quad \forall B \in \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

(Man beachte, daß \tilde{N}_H keine μ^T -Nullmenge sein muß!)]

⁵ Dies folgt leicht aus der Gültigkeit für Indikatorfunktionen $I_{B' \times D}$, $B' \in \mathfrak{B}$, $D \in \mathfrak{D}$, mit $\int_B I_{B' \times D} d\mu(\cdot | t) = I_D(t) \mu(BB' | t)$.

Bemerkung. Wegen $w_H(\mathcal{X}_t|t) = \mu(\mathcal{X}_t|t) = 1$ für $t \in N_{\mu^x}^c$ ist die rechte Seite in (4.14) auch eine Festlegung der Dichten

$$\frac{d\tilde{w}_H(\cdot|t)}{d\mu(\cdot|t)}(x), \quad x \in \mathcal{X}_t, \quad t \in N_{\mu^x}^c.$$

Entsprechendes gilt für „ K “ statt „ H “. $_$

Aus Satz 7.5 folgt nun unmittelbar das

Korollar 7.6. *Es mögen die Voraussetzungen (3.1), (7.1) und (7.4—7.5) erfüllt sein. Dann gilt:*

a) *Die Annahmen (3.2—3.4) sind erfüllt. Insbesondere kann $N_H = N_K = N_{\mu^x}$ oder auch $N_H = N_{\mu^x} \cup \tilde{N}_H$ und $N_K = N_{\mu^x} \cup \tilde{N}_K$ gewählt werden (wobei \tilde{N}_K^c analog zu (7.14) definiert ist).*

b) *Es existiert eine $\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}$ -meßbare Version der bedingten Dichten $\frac{dw_H(\cdot|t)}{d\mu(\cdot|t)}$ mit $\mu(\cdot|t)$ gemäß (7.4—7.5), nämlich die durch (7.13) gegebene Funktion.*

Beweis. a) Wir hatten weiter oben bereits festgestellt, daß (3.4) durch (7.1) sichergestellt ist. (3.2—3.3) folgen aus Satz 7.5 b), wobei zu beachten ist, daß \tilde{N}_H bzw. \tilde{N}_K eine \mathfrak{B}_H^T - bzw. \mathfrak{B}_K^T -Nullmenge ist.

b) Im Beweis zu Satz 7.5 b) hatten wir festgestellt, daß die rechte Seite von (7.13) (dort $\tilde{p}(x, t)$ genannt) $\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}$ -meßbar ist. $_$

8. Lösung für dominierte Hypothesen

Wir setzen im folgenden stets (3.1), (7.1) und (7.4—7.5) voraus. Nach Korollar 7.6 a) sind dann auch die Annahmen (3.2—3.4) erfüllt. Wir wählen

$$N_H = N_{\mu^x} \cup \tilde{N}_H, \quad N_K = N_{\mu^x} \cup \tilde{N}_K.$$

Mit der \mathfrak{B}_H^T -Nullmenge N_0 aus (3.4) erhalten wir N_1 aus (4.3) zu

$$(8.1) \quad N_1 = N_0 \cup N_H \cup N_K = N_0 \cup N_{\mu^x} \cup \tilde{N}_H \cup \tilde{N}_K.$$

Die Voraussetzungen des Korollars 6.1 sind erfüllt, denn die Funktionen

$$\tilde{p}_H(\cdot, T(\cdot))|_{T^{-1}(N_1^c)} \quad \text{und} \quad \tilde{p}_K(\cdot, T(\cdot))|_{T^{-1}(N_1^c)}$$

sind nach der Bemerkung im Anschluß an Satz 7.5 wegen $N_1^c \subset N_{\mu^x}^c$ gegeben durch

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \tilde{p}_H(x, T(x)) &= h_H(x) \left\{ \int h_H(\cdot) d\mu(\cdot|T(x)) \right\}^{-1}, \\ \tilde{p}_K(x, T(x)) &= h_K(x) \left\{ \int h_K(\cdot) d\mu(\cdot|T(x)) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad x \in T^{-1}(N_1^c),$$

und diese Funktionen sind sicher $T^{-1}(N_1^c)$ \mathfrak{B} -meßbar.

Setzt man zur Abkürzung noch mit $c(t)$ aus (5.4)

$$(8.3) \quad \tilde{c}(t) := c(t) c'(t), \quad c'(t) := \left(\int h_H(\cdot) d\mu(\cdot|t) \right) \left(\int h_K(\cdot) d\mu(\cdot|t) \right)^{-1},$$

so liefern (4.6) und (5.4—5.5)

$$(8.4) \quad \varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi_{T(x)}^*(x), & T(x) \in N_1^c \\ 1, & T(x) \in N_0 \cup N_{\mu^x} \cup \tilde{N}_H \\ \alpha, & T(x) \in N_K - (\tilde{N}_0 \cup N_{\mu^x} \cup \tilde{N}_H) \end{cases}$$

$$(8.5) \quad \varphi_t^*(x) = \begin{cases} 1, & h_K(x) > \tilde{c}(t) h_H(x) \\ \gamma(t), & h_K(x) = \tilde{c}(t) h_H(x), \quad x \in \mathcal{X}_t, \quad t \in N_1^c. \\ 0, & h_K(x) < \tilde{c}(t) h_H(x) \end{cases}$$

3. FRASER, D. A. S.: Nonparametric methods in statistics. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1959.
4. HALMOS, P. R.: Measure theory. Princeton-New Jersey: D. Van Nostrand Co., Inc. 1961.
5. HENNEQUIN, P. L., et A. TORTRAT: Théorie des probabilités et quelques applications. Paris: Masson et Cie Éditeurs 1965.
6. KENDALL, M. G., and A. STUART: The advanced theory of statistics, Vol. 2. London: Charles Griffin & Co., Ltd 1961.
7. LEHMANN, E. L., Testing Statistical Hypotheses. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1959.
8. —, and H. SCHEFFÉ: Completeness, similar regions, and unbiased estimation. Part I: Sankhyā 10, 305—340 (1950). Part II: Sankhyā 15, 219—236 (1955).
9. LOÈVE, M.: Probability theory. Princeton-New Jersey: D. Van Nostrand Co., Inc. 1960.
10. NÖLLE, G., u. D. PLACHKY: Zur schwachen Folgenkompaktheit von Testfunktionen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 8, 182—184 (1967).
11. WITTING, H.: Mathematische Statistik. Stuttgart: B. G. Teubner 1966.

Dr. G. NÖLLE
Institut für Mathem. Statistik der
Universität Münster
44 Münster (Westf.), Schloßplatz 2