Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 11, 193—207 (1969)

Minimal indefinite Randomisierungen von Spielen

D. Bierlein

Eingegangen am 27. Dezember 1967

Summary. For games with uncountably many pure strategies there exists in general not only a uniquely determined mixed extension, but a system of different "randomizations". A randomization for which the interval between lower and upper value is as small as possible is called "minimal indefinite". A minimal indefinite randomization is either definite (strictly determined) or the game is "essentially indefinite". The construction of increasing sequences of sets of minimal indefinitely randomized games by means of iterated "composition" leads to criteria for a randomization to be minimal indefinite. As a by-product we get an arsenal of necessary conditions for the existence of a definite randomization. The notion of randomization is understood here in a rather wide sense: Instead of using a condition adapted to convexity only a much weaker composibility-condition is required; conditions on measurability are reduced to a minimum.

Einleitung

Für die mathematische Beschreibung eines Entscheidungsproblems empfiehlt sich vor allem die Struktur eines Zweipersonen-Nullsummen-Spiels, wobei es von sekundärer Bedeutung ist, ob ein realer oder ein fiktiver Gegner gegenübersteht. Im Zentrum des Interesses stehen die Fragen:

1. Welche Strategien (innerhalb eines in Betracht zu ziehenden Arsenals von Strategien) sind als „optimal" zu klassifizieren?

2. Sollen randomisierte Strategien berücksichtigt werden und — falls überabzählbar viele reine Strategien vorliegen — welche Randomisierung des Spieles soll gewählt werden?

3. Wie lassen sich „optimale" Strategien numerisch ermitteln bzw. identifizieren?

Für ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel, das in *definiter* Randomisierung vorliegt, sind die Antworten geläufig:

Zu 1. Als „optimal" sind — im allgemeinen — die Minimaxstrategien zu betrachten.

Zu 2. Eine weitergehende Randomisierung bietet keinen Vorteil.

Zu 3. Für die numerische Ermittlung und die Identifizierung der Minimaxstrategien steht mit dem Sattelpunkt-Kriterium ein vielseitig verwendbares Werkzeug zur Verfügung.

Liegt das Spiel in einer *indefiniten* Randomisierung vor, so rückt zunächst Frage 2 in den Vordergrund, und zwar nun konkreter formuliert als Frage danach, ob eine weitergehende Randomisierung des Spieles existiert, für die das Indefinitheitsintervall kleiner ist als für die vorliegende Randomisierung. Daran schließt sich die Frage nach einer „minimal indefiniten" Randomisierung an, d.h. nach einer Randomisierung, deren Indefinitheitsintervall nicht mehr verkleinert werden kann. Eine minimal indefinite Randomisierung ist entweder definit oder es liegt eine „wesentliche" Indefinitheit vor. Für wesentlich indefinite Spiele stellt sich

Frage 1 von neuem; eine Antwort auf sie setzt eine Analyse der wesentlich indefiniten Spiele in minimal indefiniter Randomisierung voraus.

In dieser Arbeit werden Kriterien für das Vorliegen einer minimal indefiniten Randomisierung entwickelt, indem mit Hilfe des Prinzips der iterierten „Komposition" von Spielen umfangreiche Systeme von Spielen in minimal indefiniter Randomisierung konstruiert werden. Die sich hieraus unmittelbar ergebenden hinreichenden Bedingungen für ein wesentlich indefinites Spiel korrespondieren mit notwendigen Bedingungen für die Existenz einer definiten Randomisierung. Insofern bilden sie eine Ergänzung des reichhaltigen, auch in jüngerer Zeit noch erweiterten Arsenals[1] von hinreichenden Bedingungen für die Definitheit einer Randomisierung. Während durch die in der Literatur behandelten Definitheitskriterien im wesentlichen nur solche Spiele erfaßt werden, bei denen bereits die diskrete Randomisierung definit ist[2], wird in dieser Arbeit der Begriff „Randomisierung" sehr allgemein gefaßt: Einerseits wird an eine Randomisierung statt einer auf eine Konvexität abzielenden Bedingung nur eine wesentlich schwächere Komponierbarkeitsforderung gestellt, zum anderen werden die maßtheoretischen Bedingungen auf ein Minimum beschränkt. Das hat zur Folge, daß eine „maximale" Randomisierung in der Regel nicht existiert, daß also eine minimal indefinite Randomisierung nicht einfach als eine Randomisierung mit demselben Indefinitheitsintervall wie die maximale Randomisierung erklärt werden kann.

Abschnitt 1 der Arbeit dient der Begriffsbildung und der Bereitstellung allgemeinerer Hilfssätze über Randomisierungen. Als Start für die Iteration der „Komposition" von Spielen wird in Abschnitt 2 die Klasse der definiten Spiele gewählt, in Abschnitt 4 die umfassendere (von den Mengen der Kompositionsfolge in Abschnitt 2 nicht überdeckte) Klasse der „fastdefinit komponierbaren" Spiele, die bereits in [3] diskutiert wurden[3] und hier in Abschnitt 3 eingehender behandelt werden. Es wird gezeigt, daß die beiden Kompositionsfolgen nicht abbrechende aufsteigende Folgen von Mengen von Spielen in minimal indefiniten Randomisierungen bilden.

1. Begriffsbildung und Hilfssätze

Wir nennen (U, V, a) ein *Spiel*, falls U und V nichtleere Mengen sind und a eine auf $U \times V$ erklärte absolut beschränkte reelle Funktion ist, wobei $a(u, v) = a(u', v)\ \forall v \in V$ stets $u = u'$ impliziert und das Analogon bei Rollenvertauschung von u und v gilt. (Die Gleichheit in U und V deckt sich also mit der strategischen Äquivalenz. Ein Teil der Aussagen dieser Arbeit läßt sich auf den Fall einer unbeschränkten Auszahlungsfunktion a übertragen, der wesentliche Teil jedoch nicht.)

$$a_*(U, V) := \sup_{u \in U} \inf_{v \in V} a(u, v) \quad \text{und} \quad a^*(U, V) := \inf_{v \in V} \sup_{u \in U} a(u, v)$$

sind der *untere* bzw. *obere Spielwert* von (U, V, a).

[1] Siehe insbesondere [8], [6], [7].

[2] Vergleiche dazu [1]. Einfache Beispiele für Spiele, deren diskrete Randomisierung indefinit ist, eine weitergehende aber definit, lassen sich ohne Mühe angeben.

[3] Die in der Lecture Note [3] nur zitierten Sätze (insbesondere [3], (3.4)) und die Aussagen über das in [3], Abschnitt 4, vorgelegte „Satellitenjagd-Spiel" sind in dieser Arbeit zum Teil als Spezialfälle allgemeinerer Ergebnisse mit Beweisen aufgenommen.

$J(U, V) := [a_*(U, V), a^*(U, V)]$ nennen wir das *Indefinitheitsintervall* von (U, V, a). (U, V, a) heißt *definit*, falls $a_*(U, V) = a^*(U, V)$; $J(U, V)$ besteht dann aus einem Punkt, dem *Spielwert* $W(U, V)$. Für $\Gamma = (U, V, a)$ schreiben wir auch $a_*(\Gamma)$, $J(\Gamma)$ usw.

Als *gemischte Strategien* zu einem Spiel (X, Y, a) — mit den Systemen X und Y von „*reinen*" Strategien — kommen W.-Maße p über X bzw. q über Y in Betracht, für die die Erwartungswerte $a(p, y) := \int_X a(x, y)\, dp$ für alle $y \in Y$ bzw. $a(x, q) := \int_Y a(x, y)\, dq$ für alle $x \in X$ existieren. Die Gesamtheiten dieser W.-Maße bezeichnen wir mit $\tilde{P}$ bzw. $\tilde{Q}$.

Ein Spiel (P, Q, a) nennen wir eine *Randomisierung* (abgekürzt: Rg.) des Spieles (X, Y, a), falls

$$X \subset P \subset \tilde{P}, \quad Y \subset Q \subset \tilde{Q}, \quad a(p, q) = \int_X \int_Y a(x, y)\, dq\, dp = \int_Y \int_X a(x, y)\, dp\, dq \text{ [4]}$$

gilt und P und Q die Zusatzbedingung (**K**) erfüllen:

(**K**) *Zu jedem $\mu \in P$ bzw. $\mu \in Q$ und jeder μ-meßbaren Menge K_0 mit $\mu(K_0) > 0$ existiert ein $\mu' \in P$ bzw. $\mu' \in Q$ derart, daß $\mu'(K_0) = 1$ und $\mu'(K) \geqq \mu(K_0 K)$ für alle μ-meßbaren K.*

Die Forderung (**K**) ist schwächer als die Einschränkung, daß für P und Q nur die Systeme aller auf einem vorgegebenen σ-Ring über X bzw. Y definierten W.-Maße in Betracht kommen [5] (denn in diesem Fall kann in (**K**) für μ' das bedingte W.-Maß $\mu(K \mid K_0) := \mu(KK_0)/\mu(K_0)$ gewählt werden). Anschaulich bedeutet (**K**), daß es möglich ist, die außerhalb K_0 liegende Masse von μ auf K_0 zu überpflanzen und dort auf mindestens eine Art zu verteilen.

Danach sind $(\tilde{P}, Y, a)$ und $(X, \tilde{Q}, a)$ stets Randomisierungen; in den Fällen, in denen $\tilde{P}$ und $\tilde{Q}$ eine Rg. bilden, stellt $(\tilde{P}, \tilde{Q}, a)$ eine maximale Rg. [6] dar.

Die Menge aller gemischten Strategien zu (X, Y, a), die einen endlichen Träger besitzen, bezeichnen wir mit P^E bzw. Q^E und diejenigen, die einen abzählbaren Träger besitzen, mit P^D bzw. Q^D. Die Spiele $\Gamma^E := (P^E, Q^E, a)$ und $\Gamma^D := (P^D, Q^D, a)$ heißen *endliche* bzw. *diskrete* Rg. von (X, Y, a). Für zwei Randomisierungen $\Gamma = (P, Q, a)$ und $\Gamma' = (P', Q', a)$ von (X, Y, a) schreiben wir zur Abkürzung $\Gamma \subset \Gamma'$, falls $P \subset P'$ und $Q \subset Q'$, falls also Γ' eine über Γ hinausgehende Rg. — eine „Erweiterung" der Rg. Γ — ist.

Der folgende Hilfssatz soll einige bekannte Ungleichungen in Erinnerung rufen, zugleich aber auch gegen eine unzulässige Verallgemeinerung abschirmen:

(1.1) a) *Ist (P, Q, a) eine Rg. von (X, Y, a), so gilt*

$$a_*(X, Y) \leqq a_*(P, Y) = a_*(P, Q) \leqq a^*(P, Q) = a^*(X, Q) \leqq a^*(X, Y).$$

$$a_*(P, Y) \leqq a_*(\tilde{P}, Y), \quad a^*(X, \tilde{Q}) \leqq a^*(X, Q).$$

---

[4] Im Vergleich zu der in [4] diskutierten asymmetrischen gemischten Erweiterung handelt es sich hier also um eine symmetrische gemischte Erweiterung.

[5] Diese Einschränkung liegt der Definition einer gemischten Erweiterung in [8], [7], [5] u. a. zugrunde (vgl. dazu auch [1]) und schließt z.B. die unten definierte „endliche Rg." aus. Die in [3] skizzierte Definition einer gemischten Erweiterung ist im klassischen Sinn oder im Sinn der hier definierten Rg. zu präzisieren.

[6] Vgl. die hiervon abweichende Definition einer „maximalen gemischten Erweiterung" in [5], § 3.

b) *Es gilt nicht allgemein* $a_*(\tilde{P}, Y) \leqq a^*(X, \tilde{Q})$.

c) *Für* $\Gamma \subset \Gamma'$ *gilt* $J(\Gamma) \supset J(\Gamma')$.

d) *Stets gilt* $J(\Gamma^E) = J(\Gamma^D)$.

Beweis. Die Gleichungen und Ungleichungen in a), c) und d) sind elementare Folgerungen aus der Definition von a_* und a^*, wobei für den Beweis von d) die Voraussetzung, daß a absolut beschränkt ist, benötigt wird. Zu b) ist ein Beispiel mit $a_*(\tilde{P}, Y) > a^*(X, \tilde{Q})$ in [4], Abschnitt 1, zu finden; und zwar gilt dort $a_*(\tilde{P}, Y) = 1$, $a^*(X, \tilde{Q}) = 0$. (Ein Widersprich zu a) besteht nicht, da $\tilde{P}$ und $\tilde{Q}$ hier keine Rg. bilden.) ┘

Als Verallgemeinerung der definiten Rg. definieren wir: Γ ist eine *minimal indefinite* Rg. von (X, Y, a), falls $J(\Gamma) = J(\Gamma')$ für jede Rg. $\Gamma' \supset \Gamma$.

Hierzu sei bemerkt, daß für eine minimal indefinite Rg. Γ *nicht* allgemein $J(\Gamma) = [a_*(\tilde{P}, Y), a^*(X, \tilde{Q})]$ gilt: In dem zu (1.1) b) zitierten Beispiel aus [4], Abschnitt 1, sind $(\tilde{P}, Y, a)$ und $(X, \tilde{Q}, a)$ definite und damit minimal indefinite Randomisierungen mit $a_*(\tilde{P}, Y) > a^*(X, \tilde{Q})$.

Γ nennen wir *wesentlich indefinit*, falls jede Rg. Γ' mit $\Gamma' \supset \Gamma$ indefinit ist, also falls die Definitheit nicht durch eine Erweiterung der Rg. Γ erzwungen werden kann.

Die Schreibweise $X_m \nearrow X$ soll zum Ausdruck bringen, daß X durch die aufsteigende Folge von Teilmengen $X_1, X_2, \ldots$ ausgeschöpft wird, d. h. daß $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ mit $\bigcup_m X_m = X$ gilt; analog $Y_m \nearrow Y$. Zu gegebener Rg. (P, Q, a), bei der alle X_m p-meßbar sind für jedes $p \in P$ und alle Y_m q-meßbar für jedes $q \in Q$ setzen wir

$$P_m := \{p \in P \colon p(X_m) = 1\} \quad \text{und} \quad Q_m := \{q \in Q \colon q(Y_m) = 1\}.$$

Hierbei ersetzen wir — falls erforderlich — p bzw. q durch eine Fortsetzung von p bzw. q, bei der die Mengen $X_1, X_2, \ldots$ bzw. $Y_1, Y_2, \ldots$ zum Definitionsbereich von p bzw. q adjungiert sind. Da die zu adjungierenden Mengen aufsteigende Folgen bilden, existieren solche Fortsetzungen für jedes W.-Maß ([2], Satz 2B). Als Strategie ist ein Maß aus P bzw. Q mit jeder seiner Fortsetzungen strategisch äquivalent, so daß sich an der Rg. (P, Q, a) und an ihrem Indefinitheitsintervall bei diesem Vorgehen nichts ändert.

Mit P und Q erfüllen auch P_m und Q_m die Zusatzbedingung (**K**); somit sind auch (P_m, Q, a), (P, Q_m, a) und (P_m, Q_m, a) Randomisierungen. Für die folgenden Untersuchungen interessiert der Zusammenhang zwischen den Spielwerten von (P_m, Q, a) und (P, Q_m, a) einerseits und denen des „komponierten" Spieles (P, Q, a) und seiner Erweiterungen andererseits:

(1.2) *Ist* $\Gamma = (P, Q, a)$ *eine Rg. von* (X, Y, a) *und gilt* $X_m \nearrow X$, $Y_m \nearrow Y$, *so folgt für alle* $\Gamma' \supset \Gamma$

a) $\lim_{m\to\infty} a_*(P_m, Y) = a_*(\Gamma) \leqq a_*(\Gamma') \leqq \lim_{m\to\infty} a^*(X_m, Q)$.

b) $\lim_{m\to\infty} a_*(P, Y_m) \leqq a^*(\Gamma') \leqq a^*(\Gamma) = \lim_{m\to\infty} a^*(X, Q_m)$.

Beweis. (1) Wir setzen $\underline{a}(p) := \inf_{y\in Y} a(p, y)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $p^\varepsilon \in P$ mit $\underline{a}(p^\varepsilon) > a_*(P, Y) - \varepsilon$. Wegen $X_m \nearrow X$ gilt $\varepsilon_m := p^\varepsilon(X - X_m) \to 0$. Zu jedem m wählen wir (für $\varepsilon_m < 1$ gemäß Bedingung (**K**) in der Definition einer Rg.)

ein $p_m \in P_m$ mit $p_m(K) \geqq p^\varepsilon(K X_m)$ für alle p^ε-meßbaren K. Unter Berücksichtigung von $|a| \leqq \gamma < \infty$ ist dann

$$|a(p_m, y) - a(p^\varepsilon, y)| = \left| \int_{X_m} a(x, y)\, d(p_m - p^\varepsilon) - \int_{X - X_m} a(x, y)\, dp^\varepsilon \right| \leqq 2\gamma\,\varepsilon_m \quad \forall y \in Y.$$

Für hinreichend großes m ergibt sich daraus

$$\underline{a}(p_m) \geqq \underline{a}(p^\varepsilon) - 2\gamma\,\varepsilon_m > a_*(P, Y) - \varepsilon \quad \text{und, da} \quad P \supset P_m,$$
$$a_*(P, Y) \geqq a_*(P_m, Y) \geqq \underline{a}(p_m) > a_*(P, Y) - \varepsilon.$$

Es gilt also $\lim_{m\to\infty} a_*(P_m, Y) = a_*(P, Y) = a_*(\Gamma)$ und analog $\lim_{m\to\infty} a^*(X, Q_m) = a^*(\Gamma)$.

(2) Das in (1) erhaltene Teilergebnis angewandt auf Γ' liefert zusammen mit (1.1) c)

$$a_*(\Gamma) \leqq a_*(\Gamma') = \lim_{m\to\infty} a_*(P'_m, Y).$$

Da wegen $P'_m \subset P'$, $Q \subset Q'$ auch (P'_m, Q, a) eine Rg. ist, gilt nach (1.1(a)) ferner

$$a_*(P'_m, Y) \leqq a^*(X_m, Q) \qquad \text{für jedes } m.$$

Mit (1) folgt daraus a) und analog b). ┘

2. Kompositionsfolge mit den definiten Spielen als Basis

$\mathfrak{D}_0$ sei die Klasse aller definiten Spiele (P, Q, a)[7]. Als erste Erweiterung von $\mathfrak{D}_0$ betrachten wir die Klasse aller Spiele, die sich aus definiten Spielen *komponieren* lassen in dem Sinn, daß sie als Rg. (P, Q, a) eines Spieles (X, Y, a) dargestellt werden können mit $X_m \nearrow X$, $Y_m \nearrow Y$ derart, daß (P_m, Q, a) und (P, Q_m, a) für alle m definit sind. Die iterierte Anwendung dieses Kompositionsprinzips führt zur Definition (für $k \geqq 1$):

$\mathfrak{D}_k$ ist die Klasse aller derjenigen Randomisierungen (P, Q, a) von Spielen (X, Y, a), für die bei geeigneter Wahl von $X_m \nearrow X$ und $Y_m \nearrow Y$ die „Komponenten" (P_m, Q, a) und (P, Q_m, a) für alle m zu $\mathfrak{D}_{k-1}$ gehören.

Offensichtlich bilden die Klassen $\mathfrak{D}_k$ eine aufsteigende Mengenfolge. Die Zugehörigkeit einer Rg. zu $\mathfrak{D}_k$ geht bei Erweiterung der Rg. nicht mehr verloren, wie durch vollständige Induktion sofort zu zeigen ist.

Alle durch iterierte Komposition aus definiten Spielen gewonnenen Randomisierungen haben mit diesen die Eigenschaft der minimalen Indefinitheit gemein:

(2.1) *Jede Rg. Γ aus $\mathfrak{D}_k$ ist minimal indefinit.*

Beweis (vollst. Ind. nach k). Für $k = 0$ ist die Aussage trivial. Es sei nun $\Gamma \in \mathfrak{D}_{k+1}$, und zwar eine Rg. von (X, Y, a) mit

$$X_m \nearrow X, \quad Y_m \nearrow Y \quad \text{und} \quad (P_m, Q, a) \in \mathfrak{D}_k, \quad (P, Q_m, a) \in \mathfrak{D}_k \quad \forall m.$$

Für $\Gamma' = (P', Q', a) \supset \Gamma$ folgt dann nach (1.2)a) mit (1.1)a) bzw. nach Induktionsannahme

$$a_*(\Gamma') = \lim_{m\to\infty} a_*(P'_m, Q') = \lim_{m\to\infty} a_*(P_m, Q) = a_*(\Gamma)$$

und analog $a^*(\Gamma') = a^*(\Gamma)$; d.h. Γ ist minimal indefinit. ┘

[7] Es sei daran erinnert, daß nach unserer Definition eines Spieles jede einzelne Rg. eines Spieles selbst wieder als Spiel zu betrachten ist. $\mathfrak{D}_0$ enthält also sämtliche definiten Randomisierungen aller Spiele.

Während die diskrete Rg. von (X, Y, a) stets zu $\mathfrak{D}_0$ gehört, sobald mindestens eine der beiden Mengen X, Y endlich ist, enthält $\mathfrak{D}_1$ die diskreten Randomisierungen aller Spiele mit abzählbar vielen reinen Strategien:

(2.2) $\mathfrak{D}_1 \supset \{(P^D, Q^D, a)$: *X und Y abzählbar*$\}$.

Beweis. X und Y lassen sich mit endlichen Mengen X_m bzw. Y_m ausschöpfen. Die diskreten Randomisierungen von (X_m, Y, a) und von (X, Y_m, a) sind dabei definit. ┘

Läßt man die Voraussetzung der Abzählbarkeit bei einem der beiden Strategiesysteme X, Y fallen, so kann man Spiele angeben, bei denen keine Rg. — auch nicht eine minimal indefinite — irgendeiner der Mengen der Kompositionsfolge $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots$ angehört. Ein Beispiel hierfür ist

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = (X, Y, a) \quad \text{mit} \quad X &= \boldsymbol{N}, \\ Y &= \{y \,|\, \boldsymbol{N}\colon\ 0 \leqq y(n) \nearrow 1\}^{8}, \\ a(x, y) &= y(x). \end{aligned}$$

Im Spiel Γ_1 kommt es für Spieler 1 darauf an, x möglichst groß zu wählen, während Spieler 2 bestrebt sein muß, eine monotone Funktion $y\,|\,\boldsymbol{N}$ zu nennen, die möglichst langsam gegen 1 konvergiert, die also möglichst lange möglichst klein bleibt.

Γ_1 ist minimal indefinit, doch gehört weder Γ_1 noch irgendeine Rg. von Γ_1 zu $\bigcup\limits_k \mathfrak{D}_k$; dies folgt aus dem folgenden Satz.

(2.3) *Für jede Rg.* (P, Q, a) *von* Γ_1 *gilt:*

a) $J(P, Q) = [0, 1]$.

b) $(P, Q, a) \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{D}_k$.

c) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existieren* $X_m(\varepsilon) \nearrow X$, $Y_m(\varepsilon) \nearrow Y$ *derart, daß*

$$\lim_{m\to\infty} a^*(X_m(\varepsilon), Q) < a_*(P, Y) + \varepsilon, \qquad \lim_{m\to\infty} a_*(P, Y_m(\varepsilon)) > a^*(X, Q) - \varepsilon.$$

Beweis zu a): Für alle $p \in \tilde{P} = P^D$ gilt $\inf\limits_{y\in Y} a(p, y) = \inf\limits_{y \in Y} \sum\limits_n y(n) \cdot p(x = n) = 0$ und für alle $q \in \tilde{Q}$ ist $\sup\limits_{x\in X} a(x, q) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_Y a(n, y)\,dq = \int\limits_Y \lim\limits_{n\to\infty} a(n, y)\,dq = 1$. Wegen $0 \leqq a \leqq 1$ folgt daraus $J(\Gamma_1) = J(P, Q) = J(P^D, \tilde{Q}) = [0, 1]$ für jede Rg. (P, Q, a).

Zu b): Zum Beweis der Behauptung $(P, Q, a) \notin \mathfrak{D}_k$ wird im folgenden gezeigt, daß für jedes Mengensystem $\{Y_{m_1, \ldots m_k}\colon m_i \in \boldsymbol{N}\}$ mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad (P, Q_{\mathfrak{m}}, a) \quad \text{definit} \quad \forall\, \mathfrak{m} \in \boldsymbol{N}^k$$

die Vereinigung aller $Y_{\mathfrak{m}}$ mit $\mathfrak{m} \in \boldsymbol{N}^k$ von Y verschieden ist.

Aus (*) folgt zunächst $a_*(P, Y_{\mathfrak{m}}) = a^*(P, Q_{\mathfrak{m}}) \geqq a^*(P, Q) = 1$ und, da in Γ_1 die Dominanz von x' über x für $x' > x$ besteht, $a_*(X, Y_{\mathfrak{m}}) = a_*(P, Y_{\mathfrak{m}}) \geqq 1$.

[8] Die Schreibweise $y(n) \nearrow 1$ dient als Abkürzung für $y(1) \leqq y(2) \leqq \cdots$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = 1$.

Also existiert zu jedem $\mathfrak{m} \in \boldsymbol{N}^k$, $n \in \boldsymbol{N}$ ein $x_{\mathfrak{m}}(n) \in X$ derart, daß

$$\inf_{y \in Y_{\mathfrak{m}}} y(x_{\mathfrak{m}}(n)) > 1 - \frac{1}{n}.$$

Damit ergibt sich

$$Y_{\mathfrak{m}} \subset \left\{y \in Y:\ y(x_{\mathfrak{m}}(n)) > 1 - \frac{1}{n}\ \forall n \in \boldsymbol{N}\right\} =:\ Y'_{\mathfrak{m}}.$$

Aus dem System der $x_{\mathfrak{m}}(n)$ wählen wir eine Folge $x^*(1), x^*(2), \ldots$ aus durch die Festsetzungen

$$l_{\mathfrak{m}} := \sum_{i=1}^{k} m_i \quad \text{für} \quad \mathfrak{m} = (m_1, \ldots, m_k),$$

$$\tilde{x}(l) := \max\left\{x_{\mathfrak{m}}(l) : \sum_{i=1}^{k} m_i = l\right\} \qquad \text{für} \quad l \geqq k,$$

$$x^*(l) := \begin{cases} \tilde{x}(k) & \text{für} \quad l = k \\ \max\{\tilde{x}(l),\ x^*(l-1) + 1\} & \text{für} \quad l > k. \end{cases}$$

Wegen $x_{\mathfrak{m}}(l) \leqq \tilde{x}(l) \leqq x^*(l)$ $\forall \mathfrak{m} \in \boldsymbol{N}^k$ mit $l_{\mathfrak{m}} = l$ und der Monotonie von $y(x)$ folgt

$$Y'_{\mathfrak{m}} \subset \left\{y \in Y:\ y(x^*(l_{\mathfrak{m}})) > 1 - \frac{1}{l_{\mathfrak{m}}}\right\} =:\ Y''_{\mathfrak{m}}.$$

Es sei nun $y^* | \boldsymbol{N}$ erklärt durch

$$y^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < x^*(k) \\ 1 - \frac{1}{l} & \text{für} \quad x^*(l) \leqq x < x^*(l+1) \qquad \forall l \geqq k. \end{cases}$$

Wegen $0 \leqq y^*(x) \nearrow 1$ gehört y^* zu Y, wegen $y^*(x^*(l)) = 1 - \frac{1}{l}$ $\forall l \in \boldsymbol{N}$ aber zu keinem $Y''_{\mathfrak{m}}$; es gilt also $y^* \in Y - \bigcup_{\mathfrak{m}} Y''_{\mathfrak{m}} \subset Y - \bigcup_{\mathfrak{m}} Y_{\mathfrak{m}}$ und somit $\bigcup_{\mathfrak{m}} Y_{\mathfrak{m}} \neq Y$.

Damit ist gezeigt, daß $(P, Q, a) \notin \mathfrak{D}_k$ $\forall k$. Daraus b).

Zu c): Für $X_m(\varepsilon) = X_m := \{1, 2, \ldots, m\}$, $Y_m(\varepsilon) := \left\{y \in Y: y(m) \geqq 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ gilt:

$$X_m \nearrow X, \qquad Y_m(\varepsilon) \nearrow Y \ \ \forall \varepsilon > 0,$$
$$a^*(X_m, Q) \leqq a^*(X_m, Y) \leqq \sup_{x \in X_m} \tilde{y}(x) = 0,$$

wobei $\tilde{y} \in Y$ mit $\tilde{y}(x) = 0$ $\forall x \leqq m$,

$$a_*(P, Y_m(\varepsilon)) \geqq a_*(X, Y_m(\varepsilon)) \geqq \inf_{y \in Y_m(\varepsilon)} y(m) \geqq 1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon.$$

Zusammen mit a) folgt daraus c). ┘

Die in (2.3)c) notierte Eigenschaft des Spieles Γ_1 ist, wie sich im folgenden Abschnitt ergeben wird, allgemein hinreichend für die minimale Indefinitheit einer Rg.

3. Fastdefinit komponierbare Spiele

Die Rg. (P, Q, a) von (X, Y, a) nennen wir ein *fastdefinit komponierbares* Spiel oder kurz fk., falls zu jedem positiven ε Mengenfolgen $X_m(\varepsilon) \nearrow X$ und

$Y_m(\varepsilon) \nearrow Y$ existieren mit

$$\lim_{m\to\infty} a^*(X_m(\varepsilon), Q) < a_*(P, Y) + \varepsilon, \quad \lim_{m\to\infty} a_*(P, Y_m(\varepsilon)) > a^*(X, Q) - \varepsilon.$$

Jede Rg. von Γ_1 ist nach (2.3) c) somit fk. Ist Γ fk., so auch jede über Γ hinausgehende Rg. Die Klasse aller fastdefinit komponierbaren Spiele sei mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Es gilt dann

(3.1) *Jedes fastdefinit komponierbare Spiel ist minimal indefinit.*

Beweis. $\Gamma = (P, Q, a)$ und $\Gamma' = (P', Q', a)$ seien Randomisierungen von (X, Y, a) mit $\Gamma' \supset \Gamma$. Ist $\Gamma \in \mathfrak{F}$ mit den komponierenden Mengenfolgen $X_m(\varepsilon)$ und $Y_m(\varepsilon)$, so gilt nach (1.2) a)

$$a_*(\Gamma') \leqq \lim_{m\to\infty} a^*(X_m(\varepsilon), Q) < a_*(\Gamma) + \varepsilon \leqq a_*(\Gamma') + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

und folglich $a_*(\Gamma') = a_*(\Gamma)$, analog $a^*(\Gamma') = a^*(\Gamma)$ mit (1.2) b). ┘

Zu den Mengen $\mathfrak{D}_k$ steht $\mathfrak{F}$ in folgender Beziehung:

(3.2) a) $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{F}$. b) $\mathfrak{F} - \mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{F}\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{D}_k} \neq 0$.

Beweis zu a): Die Komponenten (P_m, Q, a) und (P, Q_m, a) eines Spieles aus $\mathfrak{D}_1$ sind definit, erfüllen also nach (1.2) a) bzw. b)

$$\lim_{m\to\infty} a^*(X_m, Q) = \lim_{m\to\infty} a_*(P_m, Y) = a_*(P, Y)$$

$$\lim_{m\to\infty} a_*(P, Y_m) = \lim_{m\to\infty} a^*(X, Q_m) = a^*(X, Q),$$

sind also auch Komponenten eines fk. Spieles.

Zu b): Nach (2.3) b) und c) gilt $\Gamma_1 \in \mathfrak{F}\overline{\bigcup_k \mathfrak{D}_k}$. Daraus b). ┘

Insbesondere sind alle definiten Spiele fk. Eine vollständige Charakterisierung der fk. Spiele gelingt mit Hilfe des Konzepts der „Überholspiele":

Die Rg. (P, Q, a) von (X, Y, a) heißt *Überholspiel zum Überholintervall* $[\alpha_1, \alpha_2]$, falls zu jedem positiven ε Mengenfolgen $X^s = X^s(\varepsilon) \nearrow X$ und $Y^t = Y^t(\varepsilon) \nearrow Y$ existieren mit

$$a^*(X^s, Q^t) < \alpha_1 + \varepsilon \;\forall t > s \quad \text{und} \quad a_*(P^s, Y^t) > \alpha_2 - \varepsilon \;\forall s > t.$$

Ist Γ ein Überholspiel zu $[\alpha_1, \alpha_2]$, so auch jede über Γ hinausgehende Rg., und zwar zu einem $[\alpha_1, \alpha_2]$ umfassenden Überholintervall. In der in [3], Abschnitt 2, gegebenen Interpretation der Überholspiele zu einem echten Überholintervall wird ihr Wettkampfcharakter dargelegt, der daraus resultiert, daß es für jeden der beiden Spieler darauf ankommt, den Gegner bei der Wahl des Mengenindex s bzw. t zu überrunden. Der Sieger in diesem Wettlauf erzwingt mit einer geeigneten Strategie aus P^s bzw. Q^t eine Auszahlung $a > \alpha_2 - \varepsilon$ bzw. $a < \alpha_1 + \varepsilon$.

Die Klasse $\mathfrak{F}$ der fk. Spiele ist identisch mit der Gesamtheit derjenigen Überholspiele, die ihr Indefinitheitsintervall als Überholintervall besitzen:

(3.3) *Γ ist genau dann fastdefinit komponierbar, wenn es ein Überholspiel zu $J(\Gamma)$ ist.*[9]

[9] Die Sätze (3.3) und (3.4) dieser Arbeit entsprechen den in [3] ohne Beweis zitierten Sätzen (3.4) bzw. (2.1) bis (2.3).

Beweis. (1) $\Gamma = (P, Q, a)$ sei fk. mit den komponierenden Mengenfolgen $X_m(\varepsilon)$ und $Y_m(\varepsilon)$. Ist Γ definit, so erfüllen $X^s := X$, $Y^t := Y$ für $s, t \in \boldsymbol{N}$ die an das in der Definition eines Überholspiels erscheinende Teilmengensystem gestellten Forderungen; somit bleibt der Fall $a_*(\Gamma) < a^*(\Gamma)$:

Zu $\varepsilon > 0$ setzen wir zur Abkürzung

$$X_m := X_m(\varepsilon'), \qquad Y_m := Y_m(\varepsilon') \quad \text{mit} \quad \varepsilon' := \min\left\{\varepsilon, \frac{a^*(\Gamma) - a_*(\Gamma)}{2}\right\}.$$

Für jedes m gilt dann mit (1.2)b) nach Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} a^*(X_m, Q_n) = a^*(X_m, Q) \leqq \lim_{m\to\infty} a^*(X_m, Q) < a_*(\Gamma) + \varepsilon'.$$

Es existiert also eine Funktion $n \mid \boldsymbol{N}$ und analog eine Funktion $m \mid \boldsymbol{N}$ derart, daß

$$a^*(X_m, Q_n) < a_*(\Gamma) + \varepsilon' \quad \forall n \geqq n(m),$$
$$a_*(P_m, Y_n) > a^*(\Gamma) - \varepsilon' \quad \forall m \geqq m(n).$$

Für $m_1 := 1$, $n_1 := n(m_1)$, $m_t := m(n_{t-1})$, $n_t := n(m_t)$ für $t > 1$ ergibt sich

$$a^*(X_{m_t}, Q_{n_t}) < a_*(\Gamma) + \varepsilon' \leqq a^*(\Gamma) - \varepsilon' < a_*(P_{m_{t+1}}, Y_{n_t}),$$

ist also $X_{m_{t+1}}$ eine echte Obermenge von X_{m_t} und somit $m_{t+1} > m_t$. Daraus folgt $X_{m_t} \nearrow_t X$ und analog $Y_{n_t} \nearrow_t Y$.

Mit $X^s(\varepsilon) := X_{m_s}(\varepsilon')$, $Y^t(\varepsilon) := Y_{n_t}(\varepsilon')$ liegt ein Teilmengensystem im Sinn der Definition eines Überholspiels zu $J(\Gamma)$ vor; denn außer $X^s(\varepsilon) \nearrow X$, $Y^t(\varepsilon) \nearrow Y$ gilt:

$s > t$ impliziert $m_s \geqq m_{t+1} = m(n_t)$
und folglich $a_*(P^s, Y^t) > a^*(\Gamma) - \varepsilon' \geqq a^*(\Gamma) - \varepsilon$,

$t > s$ impliziert $n_t > n_s = n(m_s)$
und folglich $a^*(X^s, Q^t) < a_*(\Gamma) + \varepsilon' \leqq a_*(\Gamma) + \varepsilon$.

Γ ist also ein Überholspiel zu $J(\Gamma)$.

(2) $\Gamma = (P, Q, a)$ sei ein Überholspiel zu $J(\Gamma)$ mit den Komponenten $X^s(\varepsilon)$, $Y^t(\varepsilon)$. Dann besitzt Γ mit $X_m(\varepsilon) := X^m(\varepsilon/2)$, $Y_m(\varepsilon) := Y^m(\varepsilon/2)$ zugleich ein fastdefinit komponierendes System; denn es gilt mit (1.2)b)

$$a^*(X_m(\varepsilon), Q) = \lim_{t\to\infty} a^*\left(X^m\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), Q^t\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) < a_*(\Gamma) + \frac{\varepsilon}{2} \;\forall m \in \boldsymbol{N}$$

und mit (1.2)a) analog

$$a_*(P, Y_m(\varepsilon)) > a^*(\Gamma) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \in \boldsymbol{N}. \qquad \lrcorner$$

Die Überholspiele zum eigenen Indefinitheitsintervall sind also (nach (3.1) mit (3.3)) minimal indefinit. Die Einschränkung „zum eigenen Indefinitheitsintervall" ist dabei wesentlich: Es gibt Überholspiele Γ, die ein echtes Teilintervall von $J(\Gamma)$ als Überholintervall besitzen und nicht minimal indefinit sind. Ein Beispiel hierfür ist:

$$\Gamma_2 = (X, Y, a),$$

wobei X und Y Exemplare von $\boldsymbol{N}$ sind, und

$$a(x,y)=\begin{cases}0 & \text{für} \quad x<y\\ 2 & \text{für} \quad x=y\\ 1 & \text{für} \quad x>y.\end{cases}$$

Wie sofort zu verifizieren ist, gilt für Γ_2:

(1) Das System $X^s := \{1, \ldots, s\}$, $Y^t := \{1, \ldots, t\}$ erfüllt

$$X^s \nearrow X, \quad a^*(X^s, Y^t) = 0 \quad \forall t > s$$
$$Y^t \nearrow Y, \quad a_*(X^s, Y^t) = 1 \quad \forall s > t:$$

d.h. Γ_2 ist ein Überholspiel zu $[0, 1]$.

(2) $J(\Gamma_2) = [0, 2]$, $J(\Gamma_2^D) = [0, 1]$; d.h. Γ_2 ist nicht minimal indefinit und wegen (3.1) mit (3.3) kein Überholspiel zu $J(\Gamma_2)$.

Für Überholspiele mit beliebigem Überholintervall bleiben allgemein wenigstens folgende Aussagen gültig:

(3.4) *Ist Γ ein Überholspiel zu* $[\alpha_1, \alpha_2]$, *so gilt*

a) $J(\Gamma) \supset J(\Gamma') \supset [\alpha_1, \alpha_2]$ *für alle* $\Gamma' \supset \Gamma$.

b) *Im Fall $\alpha_1 < \alpha_2$ ist Γ wesentlich indefinit.*

Beweis. Mit (1.2) erhält man für jedes $\varepsilon > 0$

$$a_*(\Gamma) \leqq a_*(\Gamma') \leqq \lim_s a^*(X^s(\varepsilon), Q) = \lim_s \lim_t a^*(X^s(\varepsilon), Q^t(\varepsilon)) < \alpha_1 + \varepsilon.$$

Daraus folgt $a_*(\Gamma) \leqq a_*(\Gamma') \leqq \alpha_1$ und analog $a^*(\Gamma) \geqq a^*(\Gamma') \geqq \alpha_2$. Somit gilt a) und folglich b). ⌋

Ist Γ indefinit, besitzt aber eine definite Erweiterung Γ', so ist Γ nach (3.4) entweder kein Überholspiel oder ein Überholspiel zum einpunktigen Überholintervall $J(\Gamma') = \{W(\Gamma')\}$. Bei einem indefiniten Matrixspiel (X, Y, a) kann nur der erste dieser beiden Fälle auftreten:

(3.5) *Sind X und Y endlich und ist $\Gamma = (X, Y, a)$ indefinit, so ist Γ kein Überholspiel.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes existiert zu jedem Paar von Mengenfolgen $X^s \nearrow X$, $Y^t \nearrow Y$ ein $m_0 \in \boldsymbol{N}$, so daß $X^m = X$, $Y^m = Y$ $\forall m \geqq m_0$ und somit

$$a_*(X^s, Y^t) = a_*(\Gamma) < a^*(\Gamma) = a^*(X^s, Y^t) \quad \forall s, t \geqq m_0$$

gilt. Es gibt also kein Intervall $[\alpha_1, \alpha_2]$, das die an ein Überholintervall von Γ gestellten Bedingungen erfüllt. ⌋

Ein — nichtrandomisiertes — Matrixspiel ist also genau dann ein Überholspiel, und zwar zu einem einpunktigen Überholintervall, wenn es bereits selbst definit ist.

Auf eine naheliegende Variante des Überholspiels, das in [4] behandelte „*Überholspiel vom Typ Ω*", lassen sich die wesentlichen Teile der obigen Aussagen *nicht* übertragen:

Bei der Definition eines Überholspiels vom Typ Ω treten aufsteigende Systeme $\{X_t\colon t < \Omega\}$ und $\{Y_t\colon t < \Omega\}$ an die Stelle der aufsteigenden Folgen in der oben formulierten Definition eines Überholspiels. Während jede Randomisierung Γ, die Überholspiel zu $J(\Gamma)$ ist, nach (3.1) mit (3.3) minimal indefinit ist, liegt diese Eigenschaft bei Überholspielen vom Typ Ω in der Regel nicht vor. Vielmehr sind die Randomisierungen $(\tilde{P}, Q^D, a)$ und $(P^D, \tilde{Q}, a)$ von $\Gamma = (X, Y, a)$ definit mit den Spielwerten $a^*(\Gamma)$ bzw. $a_*(\Gamma)$, falls Γ ein Überholspiel vom Typ Ω zu $J(\Gamma)$ ist und eine nicht allzu einschneidende Meßbarkeitsvoraussetzung erfüllt ([4], Satz (4.2)). Für $a_*(\Gamma) < a^*(\Gamma)$ ist hier also Γ ein nicht minimal indefinites Überholspiel vom Typ Ω zu $J(\Gamma)$, während $(\tilde{P}, Q^D, a)$ und $(P^D, \tilde{Q}, a)$ als definite Überholspiele vom Typ Ω mit dem echten Intervall $J(\Gamma)$ als Überholintervall demonstrieren, daß auch Satz (3.4) sich nicht auf Überholspiele vom Typ Ω ausdehnen läßt.

4. Kompositionsfolge mit den fastdefinit komponierbaren Spielen als Basis

Da die Klasse $\mathfrak{F}$ der — nach (3.1) minimal indefiniten — fastdefinit komponierbaren Spiele nach (3.2)b) von den Mengen $\mathfrak{D}_k$ der in Abschnitt 2 gebildeten Kompositionsfolge nicht überdeckt wird, liegt es nahe, noch die Folge der durch iterierte Komposition mit $\mathfrak{F}$ als Basis entstehenden Mengen von Spielen zu untersuchen. Von $\mathfrak{F}_1 := \mathfrak{F}$ ausgehend definieren wir für $k > 1$ analog zur Definition von $\mathfrak{D}_k$ in Abschnitt 2:

$\mathfrak{F}_k$ ist die Klasse aller derjenigen Randomisierungen (P, Q, a) von Spielen (X, Y, a), für die bei geeigneter Wahl von $X_m \nearrow X$ und $Y_m \nearrow Y$ die „Komponenten“ (P_m, Q, a) und (P, Q_m, a) für alle m zu $\mathfrak{F}_{k-1}$ gehören.

Genau wie für die Klassen $\mathfrak{D}_k$ gilt

$$\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \cdots \quad \text{und} \quad \Gamma' \in \mathfrak{F}_k \quad \forall \Gamma' \supset \Gamma \in \mathfrak{F}_k .$$

Das Analogon zu (2.1) ist

(4.1) *Jede Randomisierung Γ aus $\mathfrak{F}_k$ ist minimal indefinit.*

Beweis. Die Verankerung der vollständigen Induktion für $k = 1$ folgt aus (3.1), der Schluß von k auf $k + 1$ erfolgt wie im Beweis zu (2.1). ┘

Eine notwendige Bedingung für eine nichtwesentliche Indefinitheit eines indefiniten Spieles Γ, d.h. für die Existenz einer definiten Erweiterung von Γ, ist nach (4.1) die Nichtzugehörigkeit von Γ zu $\bigcup_k \mathfrak{F}_k$.

Wegen (3.2)a) gilt $\mathfrak{F}_k \supset \mathfrak{D}_k$ für jedes k. Insbesondere enthält also $\mathfrak{F}_k$ alle definiten Randomisierungen sämtlicher Spiele. Daß die Folge $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots$ nicht abbricht, läßt sich an folgendem Beispiel eines zu $\mathfrak{D}_k$ und somit auch zu $\mathfrak{F}_k$, nicht aber zu $\mathfrak{F}_{k-1}$ gehörenden Spieles erkennen.

$$\begin{aligned} \Gamma_3 = (X, Y, a) \quad \text{mit} \quad X &= \{Y_{\mathfrak{n}} \colon \mathfrak{n} \in N^k\}, \\ Y &= \{(y_1, \ldots, y_\varkappa | N^{\varkappa-1}, \ldots, y_k | N^{k-1}) \colon y_\varkappa(\cdot) \in N \,\forall \varkappa\}, \\ a(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{für} \quad y \in x \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei

$$Y_{\mathfrak{n}} := \{y \in Y \colon y_1 \leqq n_1, y_2(n_1) \leqq n_2, \ldots, y_k(n_1, \ldots, n_{k-1}) \leqq n_k\}.$$

Für $k = 2$ läßt sich Γ_3, wie in [3], Abschnitt 4 näher ausgeführt wird, als eine Jagd des Spielers 1 auf einen von Spieler 2 im Zeitpunkt y_1 [10] auf die Bahn $y_2 | \boldsymbol{N}$ geschickten Satelliten mit Hilfe einer im Zeitpunkt n_1 und zwar bis in die Höhe n_2 wirksamen Sperre interpretieren.

(4.2) a) $\Gamma_3 \in \mathfrak{D}_k$.

b) *Keine Rg. von* Γ_3 *gehört zu* $\mathfrak{F}_{k-1}$.

Beweis zu a). Für

$$Y_{n_1 \ldots n_\varkappa} := \{y \in Y \colon\ y_1 \leqq n_1, \ldots, y_\varkappa(n_1, \ldots, n_{\varkappa-1}) \leqq n_\varkappa\}$$

und

$$X_l := \{Y_{\mathfrak{n}} \colon\ n_1 \leqq l\} \quad \text{gilt} \quad Y_{n_1 \ldots n_k} \underset{n_k}{\nearrow} Y_{n_1 \ldots n_{k-1}} \underset{n_{k-1}}{\nearrow} \cdots \underset{n_2}{\nearrow} Y_{n_1} \underset{n_1}{\nearrow} Y$$

und

$$X_l \underset{l}{\nearrow} X.$$

Für $\mathfrak{n} \in \boldsymbol{N}^k$ ist $(X, Y_{\mathfrak{n}}, a)$ definit mit Spielwert 1 (z.B. ist jedes Strategienpaar (x, y) mit $x = Y_{\mathfrak{n}}$ ein Sattelpunkt), für $l \in \boldsymbol{N}$ und $n_i \in \boldsymbol{N}$ sind (X_l, Y, a) und $(X_l, Y_{n_1 \ldots n_\varkappa}, a)$ definit mit Spielwert 0 (jedes Strategienpaar (x, y) mit $y_1 > l$ ist ein Sattelpunkt).

Daraus folgt rekursiv

$$(X, Y_{n_1 \ldots n_\varkappa}, a) \in \mathfrak{D}_{k-\varkappa} \quad \text{für} \quad \varkappa = k, k-1, \ldots, 0.$$

Zum Beweis von b) wird gezeigt, daß für hinreichend kleines ε (und zwar für $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$) kein fastdefinit komponierendes System existiert, — genauer: daß für $\{T_{\mathfrak{m}} \colon\ \mathfrak{m} \in \boldsymbol{N}^{k-1}\}$ mit

$$(*) \begin{cases} T_{m_1 \ldots m_{k-1}} \underset{m_{k-1}}{\nearrow} T_{m_1 \ldots m_{k-2}} \nearrow \cdots \nearrow T_{m_1} \underset{m_1}{\nearrow} \bigcup\limits_{\mathfrak{m}} T_{\mathfrak{m}}, \\ a_*(P, T_{\mathfrak{m}}) > a^*(X, Q) - \varepsilon, \text{ wobei } \varepsilon \leqq \frac{1}{2} \text{ und } (P, Q, a) \text{ eine Rg. von } \Gamma_3 \text{ ist,} \end{cases}$$

stets $\bigcup\limits_{\mathfrak{m}} T_{\mathfrak{m}} \neq Y$ gilt.

Zunächst notieren wir für Γ_3

$$\tilde{P} = P^D, \quad \tilde{Q} = \{q \colon\ (Y, {}^B X, q) \text{ ein W.-Feld}\}, \quad a(x, q) = q(x),$$

$$a(p, y) = \sum_{x \colon y \in x} p\{x\} = \sum_{x \in \mathfrak{T}(p) \colon y \in x} p\{x\} \quad \forall p \in P^D,$$

wobei zur Abkürzung $p\{x\} := p(\{x\})$ für $x \in X$ gesetzt wird und

$$\mathfrak{T}(p) := \{x \in X \colon\ p\{x\} > 0\}$$

der Träger von p ist.

Aus (*) ergeben sich damit die Folgerungen (1), ..., (5):

(1) Es existiert ein System $\{p_{\mathfrak{m}} \colon\ \mathfrak{m} \in \boldsymbol{N}^{k-1}\} \subset P^E = \{p \in P^D \colon\ \mathfrak{T}(p) \text{ endlich}\}$ derart, daß

$$a(p_{\mathfrak{m}}, y) > 1 - \varepsilon \quad \forall y \in T_{\mathfrak{m}}.$$

Beweis zu (1). Gilt $a_*(P, T_{\mathfrak{m}}) > a^*(X, Q) - \varepsilon$ für irgendeine Rg. (P, Q, a) von Γ_3, so wegen (1.1)a) auch $a_*(\tilde{P}, T_{\mathfrak{m}}) > a^*(X, \tilde{Q}) - \varepsilon$ und wegen $\tilde{P} = P^D$ und (1.1)d) schließlich $a_*(P^E, T_{\mathfrak{m}}) > a^*(X, \tilde{Q}) - \varepsilon$.

---

[10] Den Parametern y_1, y_2, n_1 und n_2 entsprechen bei der Beschreibung des Satellitenjagd-Spieles in [3] die Daten t_y, y, t bzw. h.

Zu $q \in \tilde{Q}$ und $\varepsilon > 0$ existiert wegen

$$Y_{n_1 \dots n_\varkappa} \underset{n_\varkappa}{\nearrow} Y_{n_1 \dots n_{\varkappa-1}} \quad \forall \varkappa$$

ein $\mathfrak{n}^0 \in \boldsymbol{N}^k$ derart, daß

$$q(Y - Y_{n_1^0}) < \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{und} \quad q(Y_{n_1^0 \cdots n_{\varkappa-1}^0} - Y_{n_1^0 \cdots n_\varkappa^0}) < \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{für} \quad \varkappa = 2, \dots, k$$

und damit

$$a(Y_{\mathfrak{n}^0}, q) = q(Y_{\mathfrak{n}^0}) > 1 - \varepsilon$$

erfüllt ist. Daraus folgt $\sup\limits_{x \in X} a(x, q) = 1$ für jedes $q \in \tilde{Q}$ und somit $a^*(X, \tilde{Q}) = 1$.

Wir erhalten damit $a_*(P^E, T_\mathfrak{m}) > 1 - \varepsilon$ und daraus (1).

Zu $p_\mathfrak{m}$ definieren wir

$$\mathscr{X}_\mathfrak{m} := \{\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}(p_\mathfrak{m}) \colon p_\mathfrak{m}(\mathfrak{X}) \geqq \varepsilon\} = \left\{\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}(p_m) \colon \sum_{x \in \mathfrak{X}} p_\mathfrak{m}\{x\} \geqq \varepsilon\right\}.$$

Es gilt dann

(2) $\quad T_\mathfrak{m} \subset \bigcup\limits_{x \in \mathfrak{X}} x \quad \forall \mathfrak{X} \in \mathscr{X}_\mathfrak{m}$.

Beweis zu (2). Für $y \in Y - \bigcup\limits_{x \in \mathfrak{X}} x$ mit $\mathfrak{X} \in \mathscr{X}_\mathfrak{m}$ folgt

$$a(p_\mathfrak{m}, y) = \sum_{x: y \in x} p_\mathfrak{m}\{x\} \leqq p_\mathfrak{m}(X - \mathfrak{X}) \leqq 1 - \varepsilon,$$

also $y \in Y - T_\mathfrak{m}$; daraus (2).

Für endliche Teilmengen $\mathfrak{X}$ von X sei

$$\bar{n}_i(\mathfrak{X}) := \max\{n_i \colon Y_\mathfrak{n} \in \mathfrak{X}\}, \quad \underline{n}_i(\mathfrak{X}) := \min\{n_i \colon Y_\mathfrak{n} \in \mathfrak{X}\}, \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, k.$$

Aus $\mathscr{X}_\mathfrak{m}$ werden nun $\mathfrak{X}'_\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{X}''_\mathfrak{m}$ ausgewählt derart, daß

$$\bar{n}_{k-1}(\mathfrak{X}'_\mathfrak{m}) = \min\{\bar{n}_{k-1}(\mathfrak{X}) \colon \mathfrak{X} \in \mathscr{X}_\mathfrak{m}\}, \quad \underline{n}_{k-1}(\mathfrak{X}''_\mathfrak{m}) = \max\{\underline{n}_{k-1}(\mathfrak{X}) \colon \mathfrak{X} \in \mathscr{X}_\mathfrak{m}\}.$$

Für jedes $\mathfrak{m} \in \boldsymbol{N}^{k-1}$ besteht dabei wegen $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$ die Ungleichung

(3) $\quad \underline{n}_{k-1}(\mathfrak{X}(p_\mathfrak{m})) \leqq \bar{n}_{k-1}(\mathfrak{X}'_\mathfrak{m}) \leqq \underline{n}_{k-1}(\mathfrak{X}''_\mathfrak{m}) \leqq \bar{n}_{k-1}(\mathfrak{X}(p_\mathfrak{m})) < \infty$.

Beweis zu (3). Mit der Abkürzung $p_\mathfrak{m}(n_{k-1} \in Z) := p_\mathfrak{m}(\{Y_\mathfrak{n} \colon n_{k-1} \in Z\})$ ergibt sich aus der Definition von $\mathfrak{X}'_\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{X}''_\mathfrak{m}$

$$p_\mathfrak{m}(\underline{n}_{k-1}(\mathfrak{X}(p_\mathfrak{m})) \leqq n_{k-1} < \bar{n}_{k-1}(\mathfrak{X}'_\mathfrak{m})) < \varepsilon,$$

$$p_\mathfrak{m}(\underline{n}_{k-1}(\mathfrak{X}''_\mathfrak{m}) < n_{k-1} \leqq \bar{n}_{k-1}(\mathfrak{X}(p_\mathfrak{m}))) < \varepsilon,$$

und daraus

$$p_\mathfrak{m}(\bar{n}_{k-1}(\mathfrak{X}'_\mathfrak{m}) \leqq n_{k-1} \leqq \underline{n}_{k-1}(\mathfrak{X}''_\mathfrak{m})) > 1 - 2\varepsilon \geqq 0$$

und

$$\bar{n}_{k-1}(\mathfrak{X}'_\mathfrak{m}) \leqq \underline{n}_{k-1}(\mathfrak{X}''_\mathfrak{m}).$$

Die übrigen Ungleichungen in (3) gelten, da $\mathfrak{X}(p_\mathfrak{m})$ eine endliche Obermenge von $\mathfrak{X}'_\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{X}''_\mathfrak{m}$ ist.

Bei der Konstruktion eines $y^* \in Y - \bigcup_{\mathfrak{m}} T_{\mathfrak{m}}$ wird eine Fallunterscheidung getroffen werden danach, ob $(n_1, \ldots, n_{k-2})$ zu

$$L_\infty := \{\mathfrak{l} \in \boldsymbol{N}^{k-2}\colon \sup\{\bar{n}_{k-1}(\mathfrak{T}'_{\mathfrak{l},t})\colon t \in \boldsymbol{N}\} = \infty\}$$

gehört oder nicht[11].

(4) Zu jedem $\mathfrak{l} \in L_\infty$ existiert eine Menge $N(\mathfrak{l}) \subset \boldsymbol{N}$ mit $\sup N(\mathfrak{l}) = \infty$ derart, daß die Intervalle $[\underline{n}_{k-1}(\mathfrak{T}''_{\mathfrak{l},t}), \bar{n}_{k-1}(\mathfrak{T}''_{\mathfrak{l},t})]$ für $t \in N(\mathfrak{l})$ disjunkt sind.

Beweis zu (4). Für $\mathfrak{l} \in L_\infty$ ist nach (3) auch $\sup\{\underline{n}_{k-1}(\mathfrak{T}''_{\mathfrak{l},t})\colon t \in \boldsymbol{N}\} = \infty$ und $\bar{n}_{k-1}(\mathfrak{T}''_{\mathfrak{l},t}) < \infty$ für jedes $t \in \boldsymbol{N}$. Es existiert also eine monotone Teilfolge $t_i \nearrow \infty$ natürlicher Zahlen mit

$$\underline{n}_{k-1}(\mathfrak{T}''_{\mathfrak{l},t_{i+1}}) > \bar{n}_{k-1}(\mathfrak{T}''_{\mathfrak{l},t_i}) \quad \forall i \in \boldsymbol{N}.$$

$N(\mathfrak{l}) := \{t_1, t_2, \ldots\}$ besitzt dann die in (4) geforderte Eigenschaft.

Nach dieser Vorbereitung definieren wir eine Strategie y^* des Spielers 2, von der dann zu zeigen ist, daß sie nicht zu $\bigcup_{\mathfrak{m}} T_{\mathfrak{m}}$ gehört:

$$y^* = (y_1^*, \ldots, y_\varkappa^* \,|\, \boldsymbol{N}^{\varkappa-1}, \ldots, y_k \,|\, \boldsymbol{N}^{k-1}),$$

wobei für $\mathfrak{l} \in L_\infty$ (entsprechend (4)) gesetzt wird

$$y_k^*(\mathfrak{l}, n_{k-1}) := \begin{cases} \bar{n}_k(\mathfrak{T}''_{\mathfrak{l},t}) + 1 & \text{für} \quad \underline{n}_{k-1}(\mathfrak{T}''_{\mathfrak{l},t}) \leqq n_{k-1} \leqq \bar{n}_{k-1}(\mathfrak{T}''_{\mathfrak{l},t}) \\ & \text{mit} \quad t \in N(\mathfrak{l}) \\ 1 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$y_\varkappa^* \,|\, \boldsymbol{N}^{\varkappa-1} := 1 \quad \text{für} \quad \varkappa \leqq k-1$$

und für $\mathfrak{l} \in \boldsymbol{N}^{k-2} - L_\infty$

$$\begin{aligned} y_k^*(\mathfrak{l}, n_{k-1}) &:= 1 \quad \text{für} \quad n_{k-1} \in \boldsymbol{N} \\ y_{k-1}^*(\mathfrak{l}) &:= \max\{\bar{n}_{k-1}(\mathfrak{T}'_{\mathfrak{l},t})\colon t \in \boldsymbol{N}\} + 1 \\ y_\varkappa^* \,|\, \boldsymbol{N}^{\varkappa-1} &:= 1 \quad \text{für} \quad \varkappa \leqq k-2. \end{aligned}$$

(5) $\quad y^* \in Y - \bigcup_{\mathfrak{m}} T_{\mathfrak{m}}$.

Beweis zu (5). Aus der Definition von y^* ist abzulesen, daß

$$y^* \notin x \quad \forall x \in \mathfrak{T}''_{\mathfrak{l},t} \quad \forall \mathfrak{l} \in L_\infty, \quad t \in N(\mathfrak{l}).$$

Da $\mathfrak{T}''_{\mathfrak{l},t} \in \mathscr{X}_{\mathfrak{l},t}$, folgt nach (2)

$$y^* \notin T_{\mathfrak{l},t} \quad \forall \mathfrak{l} \in L_\infty, \quad t \in N(\mathfrak{l}),$$

wegen der Voraussetzung $T_{\mathfrak{l},t} \nearrow T_{\mathfrak{l}}$ und $\sup N(\mathfrak{l}) = \infty$ (aus (4)) schließlich

$$(\alpha) \qquad y^* \notin T_{\mathfrak{l}} \quad \forall \mathfrak{l} \in L_\infty.$$

Zum anderen ist

$$y^* \notin x \quad \forall x \in \mathfrak{T}'_{\mathfrak{l},t}, \quad \forall \mathfrak{l} \in \boldsymbol{N}^{k-2} - L_\infty, \quad t \in \boldsymbol{N}.$$

---

[11] Hierbei bedeutet $\mathfrak{l}, t = (l_1, \ldots, l_{k-2}), t$ den Vektor $(l_1, \ldots, l_{k-2}, t)$.

Nach (2) folgt wegen $\mathfrak{T}'_{\mathfrak{l},t} \in \mathscr{X}_{\mathfrak{l},t}$

$$y^* \notin T_{\mathfrak{l},t} \qquad \forall \mathfrak{l} \in N^{k-2} - L_\infty, \qquad t \in N \qquad \text{und}$$

$$(\beta) \qquad y^* \notin T_{\mathfrak{l}} \qquad \forall \mathfrak{l} \in N^{k-2} - L\infty .$$

Zusammen ergibt sich aus (α) und (β) wegen (*)

$$y^* \notin \bigcup_{\mathfrak{l} \in N^{k-2}} T_{\mathfrak{l}} = \bigcup_{\mathfrak{m} \in N^{k-1}} T_{\mathfrak{m}}$$

und wegen $y^* \in Y$ die Behauptung (5).

Kein Teilmengensystem mit der Eigenschaft (*) schöpft also Y voll aus; damit ist der Beweis zu b) abgeschlossen. ┘

Mit Γ_3 gehört auch jede Rg. von Γ_3 zu $\mathfrak{D}_k$ und somit zu $\mathfrak{F}_k$. Aus (4.2) a) und b) ergibt sich also

$$\mathfrak{D}_k \overline{\mathfrak{F}_{k-1}} = (\mathfrak{D}_k - \mathfrak{D}_{k-1})(\mathfrak{F}_k - \mathfrak{F}_{k-1}) \neq 0 ,$$

d.h. die beiden Kompositionsreihen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots$ und $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots$ brechen nicht ab.

Naheliegend ist die Frage, ob die Zugehörigkeit einer Rg. zu $\bigcup \mathfrak{F}_k$ nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die minimale Indefinitheit sei. Dazu ist zu bemerken, daß bei Überholspielen vom Typ Ω durch Wahl von Auszahlungsfunktionen, bei denen die Meßbarkeit für die im Beweis zu [4], (4.2) benötigten Maße verlorengeht, die Strategiemengen $\tilde{P}$ und $\tilde{Q}$ so stark eingeschränkt werden können, daß das Spiel keine definite Rg. besitzt[12]. Auf diesem Weg lassen sich Beispiele wesentlich indefiniter Spiele in minimal indefiniter Rg. finden, die nicht zu $\bigcup \mathfrak{F}_k$ gehören. Damit wird aber auch klar, daß eine Typologie der minimal indefiniten Randomisierungen *außerhalb* $\bigcup \mathfrak{F}_k$ im Wesentlichen auf eine Typologie der in Betracht kommenden maßtheoretischen Pathologien hinauslaufen würde.

Literatur

1. Bierlein, D.: Eine Bemerkung zur diskreten gemischten Erweiterung eines unendlichen Spieles. Arch. der Math. **12**, 224–226 (1961).
2. — Über die Fortsetzung von Wahrscheinlichkeitsfeldern. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **1**, 28–46 (1962).
3. — Über wesentlich indefinite Spiele. Lecture Notes in Math., Vol. **31**, 28–35. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
4. — Spiele mit mehr als einem Spielwert. Arch. der Math., Vol. **19**, 330–336 (1968).
5. Burger, E.: Einführung in die Theorie der Spiele, 2. Auflage. Berlin: De Gruyter & Co. 1966.
6. Fan, Ky: Minimax theorems. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 42–47 (1953).
7. Tjoe-Tie, Teh: Minimax theorems on conditionally compact sets. Ann. math. Statistics **34**, 1536–1540 (1963).
8. Wald, A.: Statistical decision functions. New York: Wiley 1950.

Professor Dr. D. Bierlein
Inst. f. Mathem. Statistik
Universität Karlsruhe
75 Karlsruhe
Englerstraße

[12] Ist andererseits die in [4], (4.2) formulierte — implizit eine Meßbarkeitsbedingung für die Auszahlungsfunktion darstellende — Voraussetzung $P^\varepsilon \neq 0, Q^\varepsilon \neq 0 \;\; \forall \varepsilon > 0$ erfüllt, so sind die dann existierenden definiten Randomisierungen von Überholspielen des Types Ω natürlich minimal indefinite Randomisierungen, die bereits in $\mathfrak{D}_0$ und somit in jedem $\mathfrak{F}_k$ enthalten sind.