Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 17, 259–308 (1971)


# Über Periodizitätseigenschaften spieltheoretischer Lernprozesse

JOACHIM ROSENMÜLLER

## Einleitung

Als Grundlage der Theorie der Spiele kann das Buch „Theory of Games and Economic Behaviour" von J. von Neumann und O. Morgenstern betrachtet werden, das 1944 erschien. In diesem Buch findet man u.a. einen grundlegenden Satz, der als „Minimax-Theorem" bekannt ist, und der besagt, daß in Zwei-Personen-Spielen die optimale Verhaltensweise beider Spieler wohldefiniert werden kann, wenn man die folgenden Voraussetzungen macht. Einmal darf jeder Spieler nur endlich viele Strategien zur Verfügung haben und andererseits muß ein direkter Interessengegensatz bestehen – d.h., ein Spieler gewinnt genau das, was sein Gegner verliert (sog. Nullsummenspiel). Unter diesen Voraussetzungen kann man das Spiel zunächst in geeigneter Weise „randomisieren" und danach optimale Strategien erklären. Jedem Spieler wird ein fester Wert garantiert, den er mit Hilfe einer optimalen Strategie erreichen kann.

Inzwischen gibt es eine Fülle von Beweisen für dieses Theorem; einer davon stammt in der uns hier interessierenden Form von J. Robinson und macht Gebrauch von einem iterativen Prozeß. Dieser Prozeß läßt sich grob so erklären, daß eine Reihe von Partien desselben Spieles nacheinander abläuft und jeder Spieler seine Strategien optimal gegen die vom Gegner in der Vergangenheit „durchschnittlich" gewählten Strategien einsetzt. Es stellt sich heraus, daß die Auszahlung dann gegen den oben erwähnten Spielwert konvergiert.

Es ist bemerkenswert, daß das Minimaxtheorem i.allg. falsch wird, sobald man die Forderung nach dem direkten Interessengegensatz fallen läßt, d.h., wenn kein Nullsummenspiel mehr vorliegt. Anstelle der optimalen Strategien kann man nur noch „Gleichgewichtsstrategien" erklären; das sind solche Strategien, die in gewisser Weise einen stabilen Zustand charakterisieren.

In dieser Arbeit interessieren wir uns für das Verhalten des Robinson-Prozesses in solchen Nicht-Nullsummenspielen. Dieser Prozeß muß nunmehr nicht notwendig konvergieren. Es zeigt sich vielmehr, daß unter gewissen Voraussetzungen auch periodische Erscheinungen auftreten. In §3 werden wir nämlich zu einer Klasse von Prozessen eine assoziierte Matrix erklären, deren Eigenwerte es uns ermöglichen, den „Eigenwert eines Robinson-Prozesses" zu definieren. Ist dieser Eigenwert 1, so konvergiert der Prozeß, ist er dagegen größer als 1, so wird der Prozeß asymptotisch periodisch.

Einige schon bekannte spezielle Ergebnisse, die wir in §2 behandeln, lassen sich in §4 mühelos unter die allgemeine Theorie subsummieren. §1 enthält die notwendigen Definitionen und Einführungen.

## Inhalt



## § 1. Definitionen

### *1.1. Allgemeines*

**Definition.** Unter einem Zweipersonenspiel

$$\Gamma_0 = (I, J; A, B)$$

verstehen wir zwei nichtleere Mengen

$$I = \{1, \dots, M\}$$

und

$$J = \{1, \dots, N\}$$

von natürlichen Zahlen sowie zwei reellwertige Matrizen

$$A = (A_{ij})$$

und

$$B = (B_{ij}) \quad i \in I, \quad j \in J$$

zusammen mit einer Spielvorschrift, welche zwei beteiligten Spielern die Auszahlungen $A_{ij}$ bzw. $B_{ij}$ zudiktiert, wenn diese durch Wahl eines $i \in I$ bzw. $j \in J$ eine Partie des Spieles realisiert haben. $I$ und $J$ heißen Strategienmengen, $A$ und $B$ Auszahlungsmatrizen.

**Definition.** Es sei

$$X = \{(x_1, \dots, x_M)/x_i \text{ reell}, \ x_i \geqq 0, \ (i \in I), \ \sum_I x_i = 1\}$$

$$Y = \{(y_1, \dots, y_N)/y_j \text{ reell}, \ y_j \geqq 0, \ (j \in J), \ \sum_J y_j = 1\}.$$

Dann heißt das Tupel

$$\Gamma = (X, Y; A, B)$$

die *gemischte Erweiterung* von $\Gamma_0$.

$\Gamma$ stellt in gewisser Weise eine Randomisierung von $\Gamma_0$ dar. Dabei stellen wir uns vor, daß beide Spieler eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $x \in X$ bzw. $y \in Y$ über ihre Strategienmengen $I$ bzw. $J$ legen. Die Erwartungswerte für die Auszahlungen sind dann in naheliegender Vektor-Matrix-Schreibweise

$$xAy=\sum_I\sum_J x_i A_{ij} y_j$$

und

$$xBy=\sum_I\sum_J x_i B_{ij} y_j.$$

Wenn wir im folgenden von einem Spiel reden, so wollen wir stets die gemischte Erweiterung $\Gamma$ eines Zweipersonenspieles $\Gamma_0$ im Auge haben. Ebenso meinen wir mit Strategien stets Vektoren $x\in X$ oder $y\in Y$. Die Elemente von $I$ und $J$ werden als reine Strategien bezeichnet.

**Definition.** Es sei

$$\Gamma=(X, Y; A, B)$$

ein Spiel. Ein Strategienpaar

$$(\bar{x}, \bar{y})\in X\times Y$$

heißt Gleichgewichtspunkt, falls gilt:

$$\bar{x}A\bar{y}\geqq xA\bar{y} \qquad (x\in X)$$

$$\bar{x}B\bar{y}\geqq \bar{x}By \qquad (y\in Y).$$

Ein Gleichgewichtspunkt ist Ausdruck für eine stabile Situation. Die Menge der Gleichgewichtspunkte des Spieles $\Gamma$:

$$G_\Gamma=\{(\bar{x}, \bar{y})/(\bar{x}, \bar{y}) \text{ Gleichgewichtspunkt in } \Gamma\}$$

ist stets nichtleer [1, 2].

Diese Tatsache ist für den Fall, daß $B=-A$ gilt („Nullsummenspiel") als „Minimaxtheorem" bekannt; es gilt dann nämlich

$$\bar{x}A\bar{y}=\min_Y \max_X xAy=\max_X \min_Y xAy=:v_\Gamma$$

für jeden Gleichgewichtspunkt $(\bar{x}, \bar{y})$. $v_\Gamma$ wird als „Spielwert" bezeichnet.

Wir führen einige weitere Bezeichnungen ein; es ist:

$A_{i.}$ die $i$-te Zeile der Matrix $A$

$A_{.j}$ die $j$-te Spalte der Matrix $A$

$$|y|=\sum_{s=1}^{t}|y_s| \qquad \text{für } y=(y_1, \dots, y_t),\ y_s \text{ reell}$$

$$|F|=\sup_{|y|=1}|Fy| \qquad \text{für eine } t\times t\text{-Matrix } F.$$

$$K_i=\{y\,|\,y\in Y, A_{i.}\,y\geqq A_{k.}\,y\,(k\in I)\} \qquad (i\in I)$$

$$L_j=\{x\,|\,x\in X, x\,B_{.j}\geqq x\,B_{.k}\,(k\in J)\} \qquad (j\in J)$$

$$X_i=\{(0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)\} \qquad (i\in I)$$

$$Y_j=\{(0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0)\} \qquad (j\in J)$$

$$K_{i_1,\ldots,i_s} = K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_s} \qquad (i_1, \ldots, i_s \in I)$$
$$L_{j_1,\ldots,j_s} = L_{j_1} \cap \cdots \cap L_{j_s} \qquad (j_1, \ldots, j_s \in J)$$
$$X_{i_1,\ldots,i_s} = \operatorname{conv} H(X_{i_1} \cup \cdots \cup X_{i_s})$$
$$Y_{j_1,\ldots,j_s} = \operatorname{conv} H(Y_{j_1} \cup \cdots \cup Y_{j_s}),$$

wobei $\operatorname{conv} H(M)$ die konvexe Hülle einer Menge $M$ bedeutet. $X_{i_1,\ldots,i_s}$ besteht also aus allen gemischten Strategien des Spielers 1, bei denen höchstens die reinen Strategien $i_1, \ldots, i_s$ ein von Null verschiedenes Gewicht erhalten.

Sämtliche angeschriebenen Mengen sind konvexe Polyeder. Zur Unterscheidung von Potenzen und oberen Indices wollen wir folgende Vereinbarung treffen:

1. Ein oberer Index an einer vektoriellen Größe bedeutet stets eine Indizierung; z.B. wird eine Folge von Vektoren mit $t^0, t^1, \ldots$ bezeichnet.

2. Ein oberer Index an einer skalaren Größe bedeutet eine Indizierung genau dann, wenn auch ein unterer Index auftritt; z.B. wird mit $t_i^0, t_i^1, \ldots$ die Folge der $i$-ten Komponenten der Vektoren $t^0, t^1, \ldots$ bezeichnet.

3. Ein oberer Index an einer skalaren Größe ohne unteren Index bedeutet stets eine Potenz.

4. Als Ausnahme bedeuten obere Indices an den Symbolen $\alpha, \rho, \lambda, \xi$ – mit oder ohne unteren Index – stets Potenzen.

Auf diese Weise werden wir es stets vermeiden können, daß wir Klammern schreiben müssen um Größen oben und unten zu indizieren.

Es folgt noch eine allgemeine Bemerkung, auf die wir von Zeit zu Zeit zurückgreifen wollen.

*Bemerkung D.* Es ist mitunter nötig, Forderungen bezüglich der Nichtsingularität gewisser Unterdeterminanten an die Auszahlungsmatrizen zu stellen. Diese Forderungen werden durchweg von fast allen (im Sinne des Lebesgue-Maßes im $M \cdot N$-dimensionalen Raum der Matrizen) Auszahlungsmatrizen erfüllt sein, und wir lassen daher nur eine Nullmenge von Matrizen außer Acht, wenn wir sie gegebenenfalls stillschweigend zur Voraussetzung machen. Wir führen einige Beispiele an.

1. **Definition.** Wir sagen, eine Matrix

$$A = (A_{ij}) \qquad (i \in I, j \in J)$$

erfülle die

„*Bedingung E*"

falls gilt:

Jede quadratische Untermatrix der Matrix

$$A^{\otimes} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & A & . \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

die zur letzten Zeile oder Spalte nicht fremd ist, ist nicht singulär.

Auf Bedingung E trifft die oben gemachte Bemerkung D zu. Fast alle Spielmatrizen haben also die folgende, aus Bedingung E herzuleitende Eigenschaft:

**Lemma** [1, 6]. *Sei $\Gamma=(X, Y; A, B)$ ein Spiel. Es gelte Bedingung E für die Matrizen A und B. Dann gibt es nur endlich viele Gleichgewichtspunkte, nämlich im Inneren jeder Menge*

$$X_{i_1,\dots,i_s} \times Y_{j_1,\dots,j_r}$$

*höchstens einen. Ist zusätzlich $B=-A$, so gibt es genau einen Gleichgewichtspunkt.*

2. Es sei $M>N$ angenommen. Für jedes $r$ mit $M \geqq r > N$ können wir unter Bedingung E

$$K_{i_1},\dots,_{i_r}=\emptyset \qquad (i_\rho \neq i_\sigma \text{ falls } \rho \neq \sigma)$$

annehmen. Denn die Punkte der betrachteten Menge lösen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{c} A_{i_1.}\, y-\lambda=0 \\ \vdots \quad \vdots \\ A_{i_r.}\, y-\lambda=0 \end{array} \tag{1}$$

in den $N+1$ Unbekannten $y_1,\dots,y_N$ und Bedingung E sorgt dafür, daß (1) nur die triviale Lösung hat, für die $\sum_J y_j=1$ nicht gelten kann.

3. Ebenso können wir stets

$$K_{i_1,\dots,i_r} \cap Y_{j_1,\dots,j_s}=\emptyset$$

für $r>s$, $i_\sigma \neq i_\rho$, $j_\mu \neq j_\nu$ falls $\sigma \neq \rho$, $\mu \neq \nu$ annehmen. Denn die Punkte der betrachteten Menge lösen das System

$$\begin{array}{l} A_{i_1.}\, y-\lambda=0 \\ \vdots \quad\;\; \vdots \\ A_{i_r.}\, y-\lambda=0 \\ \qquad y_k=0 \qquad (k \neq j_1,\dots,j_s), \end{array} \tag{2}$$

d.h. ein System in $N+1$ Unbekannten und mit $r+N-s>N$ Gleichungen; für fast alle Matrizen können wir dafür sorgen, daß es nur die triviale Lösung gibt.

Ähnliche Überlegungen werden wir von nun an nicht mehr in aller Ausführlichkeit anstellen, sondern uns auf Bemerkung D berufen.

Wir beenden unsere Vorbemerkungen mit einer

**Definition.** Seien $\Gamma=(X, Y; A, B)$ und $\Gamma'=(X, Y; A', B')$ zwei Spiele. $\Gamma$ und $\Gamma'$ heißen $D$-äquivalent, in Zeichen

$$\Gamma \sim \Gamma'$$

falls (mit den für $\Gamma$ eingeführten und sinngemäß auf $\Gamma'$ durch Beifügen eines Striches übertragenen Bezeichnungen) gilt:

1. $K_{i_1,\dots,i_r} \cap Y_{j_1,\dots,j_s} \neq \emptyset$

genau dann, wenn

$$K'_{i_1,\dots,i_r} \cap Y_{j_1,\dots,j_s} \neq \emptyset.$$

2. $L_{k_1,\dots,k_t} \cap X_{l_1,\dots,l_u} \neq \emptyset$

genau dann, wenn

$$L'_{k_1,\dots,k_t} \cap X_{l_1,\dots,l_u} \neq \emptyset.$$

Durch die so erklärte Äquivalenzrelation für Spiele werden Äquivalenzklassen von Spielen definiert. Wir bezeichnen mit $\tilde{\Gamma}$ die Äquivalenzklasse, der $\Gamma$ angehört, und können dann in naheliegender Weise eine Halbordnung für Äquivalenzklassen einführen. Wir schreiben nämlich

$$\tilde{\Gamma} \leqq \tilde{\Gamma}'$$

falls für beliebige $\Gamma \in \tilde{\Gamma}$, $\Gamma' \in \tilde{\Gamma}'$ gilt:

$$K'_{i_1,\ldots,i_r} \cap Y_{j_1,\ldots,j_s} \neq \emptyset$$

falls

$$K_{i_1,\ldots,i_r} \cap Y_{j_1,\ldots,j_s} \neq \emptyset$$

sowie

$$L'_{k_1,\ldots,k_t} \cap X_{l_1,\ldots,l_u} \neq \emptyset$$

falls

$$L_{k_1,\ldots,k_t} \cap X_{l_1,\ldots,l_u} \neq \emptyset .$$

Es genügt natürlich, dies für ein einziges Paar $\Gamma, \Gamma'$ nachzuweisen.

Wenn wir Bedingung E als gegeben ansehen und unter $g(\tilde{\Gamma})$ diejenige Funktion mit ganzzahligen Werten verstehen, die $\tilde{\Gamma}$ die Anzahl der Gleichgewichtspunkte eines (beliebigen) Repräsentanten von $\tilde{\Gamma}$ zuordnet, so gilt

$$g(\tilde{\Gamma}) \leqq g(\tilde{\Gamma}') \quad \text{falls } \tilde{\Gamma} \leqq \tilde{\Gamma}'.$$

### *1.2. Zwei Lernprozesse*

Es sei $\Gamma = (X, Y; A, B)$ die gemischte Erweiterung von $\Gamma_0 = (I, J; A, B)$. Wir denken uns eine beliebige Anzahl von Partien des Spieles $\Gamma_0$ zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2, \ldots$ hintereinander gespielt. Der erste Spieler verfahre dabei wie folgt:

Zu jedem Zeitpunkt $t+1$ betrachtet er alle vom Gegner bis zum Zeitpunkt $t$ tatsächlich gespielten reinen Strategien

$$j_1, \ldots, j_t$$

und berechnet die relative Häufigkeit, mit der eine gewisse Strategie aufgetaucht ist. Sodann bildet er die durch diese relativen Häufigkeiten definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung über $J$, d.h., den Vektor

$$y^t = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} e^{j_s} \tag{3}$$

mit

$$e^j = (0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0).$$

Aufgrund des starken Gesetzes der großen Zahlen kann er annehmen, daß mit wachsendem $t$ durch $y^t$ die Verteilung $y$ angenähert wird, mit der der Gegner seine reinen Strategien bei einer Randomisierung belegt hat, und es erscheint daher vernünftig, die reine Strategie $i_{t+1}$ so zu wählen, daß $e^{i_{t+1}}$ gegen $y^t$ optimal

ist, d.h., daß gilt
$$y^t \in K_{i_{t+1}}.$$

Wir nehmen nun an, daß der zweite Spieler ganz entsprechend verfährt. Dann ist durch (3) bzw.
$$x^t = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} x^{i_s} \tag{4}$$

ein Prozeß in $\Gamma$ definiert, der in der Literatur als „Robinson-Prozeß", „fictitious play", „learning process" o.ä. auftaucht. Wir schreiben (3) und (4) etwas um und erhalten:
$$x^t = \frac{1}{t} e^{i_t} + \frac{t-1}{t} \frac{1}{t-1} \sum_{s=1}^{t-1} e^{i_s}, \tag{5}$$

also
$$x^t = \frac{t-1}{t} x^{t-1} + \frac{1}{t} e^i \qquad (y^{t-1} \in K_i)$$
$$y^t = \frac{t-1}{t} y^{t-1} + \frac{1}{t} e^j \qquad (x^{t-1} \in L_j).$$

$x^t$ ist also eine konvexe Kombination aus $x^{t-1}$ und $e^i$, wobei im Laufe der Zeit immer mehr Gewicht auf $x^{t-1}$ gelegt wird. Insbesondere ist
$$x^t - x^{t-1} = \frac{1}{t} (e^i - x^{t-1}) \to 0 \qquad (t \to \infty), \tag{6}$$

so daß es auch nahe liegt, von (5) zu einem stetigen Prozeß überzugehen. Wir tun das in einfacher Weise, in dem wir (6) als Differenzengleichung auffassen und zu
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{t} (e^i - x^t) \qquad (y^t \in K_i) \\ \dot{y} &= \frac{1}{t} (e^j - y^t) \qquad (x^t \in L_j) \end{aligned} \tag{7}$$

übergehen, was sich zu
$$\begin{aligned} x^t &= \frac{t-\bar{t}}{t} e^i + \frac{\bar{t}}{t} \bar{x} \qquad (y^s \in K_i \text{ für } \bar{t} \leqq s \leqq t) \\ y^t &= \frac{t-\bar{t}}{t} e^j + \frac{\bar{t}}{t} \bar{y} \qquad (x^s \in L_j \text{ für } \bar{t} \leqq s \leqq t) \end{aligned} \tag{8}$$

integriert. Dabei sind $\bar{x} = x(\bar{t})$ und $\bar{y} = y(\bar{t})$ gewisse Anfangswerte.

In (5) und (8) steckt noch eine gewisse Willkür, da wir z.B. für $y^t \in K_{ik}$ gar nicht wissen, wie in (5) $x^{t+1}$ zu wählen ist. Jedoch nimmt der durch (8) gegebene Prozeß $y^t$ stets die Richtung von $\bar{y}$ auf $e^j$ zu und da wir nach Bemerkung D, Beispiel 3
$$\{y / A_{i.}\, y = A_{k.}\, y\} \cap Y_j = \emptyset \tag{9}$$

annehmen können, schneidet er die Menge $K_{ik}$ nur in einem Punkt, in welchem die Mehrdeutigkeit der Definition (8) ohne Belang ist.

Für den Prozeß (5) lassen wir einem Spieler im Zweifelsfall die freie Wahl. Wir legen uns nun fest auf die folgende

**Definition.** Der durch (5) gegebene Prozeß werde mit DFP (Discrete Fictitious Play) und der durch (8) gegebene mit CFP (Continuous Fictitious Play) bezeichnet.

Ist $B=-A$, so weiß man, daß die Auszahlung $x^t A y^t$ des DFP gegen $v_\Gamma$ konvergiert und daß jeder Häufungspunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Folge $(x^t, y^t)$ in $X \times Y$ die Eigenschaft

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in G_\Gamma$$

hat [3, 5]. Daraus folgt ein einfaches Corollar:

**Corollar.** *Es sei $\Gamma=(X, Y; A, B)$ und $B=-A$. Die Matrix $A$ möge Bedingung* E *erfüllen. Dann konvergiert der Prozeß DFP.*

Für fast alle Nullsummenspiele ist die Konvergenz des DFP also gesichert. Daher erscheint es zunächst nicht aussichtslos, das asymptotische Verhalten beider Prozesse auch für Nicht-Nullsummenspiele zu studieren. Wir werden dann aber sehen, daß auch andere Erscheinungen als Konvergenz möglich sind.

## § 2. Drei typische Spezialfälle

### *2.1. Der Prozeß CFP im $2\times 2$-Spiel*

Es sei $\Gamma=(X, Y; A, B)$ die gemischte Erweiterung von $\Gamma_0=(I, J; A, B)$ mit

$$I=J=\{1, 2\}.$$

Wir setzen

$$\alpha=\frac{A_{11}-A_{21}}{A_{22}-A_{12}}, \qquad \beta=\frac{B_{11}-B_{12}}{B_{22}-B_{21}};$$

dabei haben wir es nicht nötig, uns auf Bemerkung D zu berufen, damit $\alpha$ und $\beta$ wohldefiniert sind, sondern wir können uns überzeugen, daß anderenfalls der Prozeß CFP trivialerweise konvergiert (vgl. auch [4]). Wir lassen die dazugehörigen Überlegungen aus, da sie nicht von großem Interesse sind, und bemerken, daß die einzig relevante Form des Prozesses die folgende ist:

$$\begin{aligned}
x^t &= \begin{cases} \dfrac{t-\bar{t}}{t} e^1 + \dfrac{\bar{t}}{t}\bar{x} & \text{falls } \dfrac{y_1^t}{y_2^t} \geqq \alpha \\[2ex] \dfrac{t-\bar{t}}{t} e^2 + \dfrac{\bar{t}}{t}\bar{x} & \text{falls } \dfrac{y_1^t}{y_2^t} \leqq \alpha \end{cases} \\
y^t &= \begin{cases} \dfrac{t-\bar{t}}{t} e^1 + \dfrac{\bar{t}}{t}\bar{y} & \text{falls } \dfrac{x_1^t}{x_2^t} \leqq \beta \\[2ex] \dfrac{t-\bar{t}}{t} e^2 + \dfrac{\bar{t}}{t}\bar{y} & \text{falls } \dfrac{x_1^t}{x_2^t} \geqq \beta \end{cases}
\end{aligned} \tag{10}$$

mit $\infty > \alpha, \beta > 0$ und $t_0 = 1$, $x^0 = x^{t_0} = y^0 = y^{t_0} = (1, 0)$.

Dieser Prozeß hat folgenden Verlauf:
Wegen

$$x_1^0 > \beta x_2^0$$
$$y_1^0 > \alpha y_2^0$$

hat der Prozeß unter Beachtung der Anfangsbedingungen zunächst die Gestalt

$$\begin{aligned} x^t &= (1, 0) \\ y^t &= \left(\frac{1}{t}, \frac{t-1}{t}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

d.h., Spieler 1 verharrt bei seiner Strategie, während Spieler 2 Gewicht auf die zweite reine Strategie verlagert. Diese Situation ändert sich so lange nicht, wie sie für Spieler 1 noch günstig ist, d.h., (11) gilt für

$$t_0 = 1 \leqq t \leqq t_1,$$

wobei $t_1$ so zu bestimmen ist, daß

$$\frac{y_1^{t_1}}{y_2^{t_1}} = \alpha, \quad \text{d.h.,} \quad \alpha = \frac{\dfrac{1}{t_1}}{\dfrac{t_1 - 1}{t_1}} = \frac{1}{t_1 - 1} \tag{12}$$

gilt. Aus $0 < \alpha < \infty$ folgt, daß es genau ein solches $t_1$ mit $t_0 < t_1 < \infty$ gibt. Für $t > t_1$ ist nun $\dfrac{y_1^t}{y_2^t} < \alpha$, so daß nun auch Spieler 1 beginnt seine Strategie zu ändern; wir haben in

$$x^t = \frac{t - \bar{t}}{t} e^2 + \frac{\bar{t}}{t} \bar{x}$$

$$y^t = \frac{t - \bar{t}}{t} e^2 + \frac{\bar{t}}{t} \bar{y}$$

für

$$x^{t_1} = \bar{x}, \quad y^{t_1} = \bar{y}, \quad \bar{t} = t_1$$

zu sorgen und das liefert

$$\begin{aligned} x^t &= \left(\frac{t_1}{t}, \frac{t_1 - t}{t}\right) \\ y^t &= \left(\frac{t_0}{t}, \frac{t_0 - t}{t}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Dies gilt für $t_1 \leqq t \leqq t_2$ mit

$$\beta = \frac{x_1^{t_2}}{x_2^{t_2}} = \frac{t_1}{t_2 - t_1}.$$

Nun verlagert wieder Spieler 2 Gewicht auf die erste Strategie; unter Beachtung der Stetigkeit bei $t=t_2$ folgt

$$\begin{aligned} x^t &= \left(\frac{t_1}{t}, \frac{t-t_1}{t}\right) \\ y^t &= \left(\frac{t-t_2+t_0}{t}, \frac{t_2-t_0}{t}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

für $t_2 \leqq t \leqq t_3$ mit $\alpha = \dfrac{t_3-t_2+t_0}{t_2-t_0}$.

Der folgende Schritt spielt sich in der Form

$$\begin{aligned} x^t &= \left(\frac{t-t_3+t_1}{t}, \frac{t_3-t_1}{t}\right) \\ y^t &= \left(\frac{t-t_2+t_0}{t}, \frac{t_2-t_0}{t}\right) \\ t_3 \leqq t &\leqq t_4, \qquad \beta = \frac{t_4-t_3+t_1}{t_3-t_1} \end{aligned} \tag{15}$$

ab. Danach beginnt die erste Phase von neuem.

Da die Form des Prozesses sich nach 4 Phasen wiederholt, ist es zweckmäßig, $t_{4n+\sigma} = t_\sigma^n$ $(\sigma=0, \ldots, 3;\ n=0, 1, 2, \ldots)$ zu schreiben. Durch Induktion weist man nach, daß allgemein gilt:

Für $t_0^n \leqq t \leqq t_1^n$

$$x^t = \frac{1}{t}\left(t - t_3^{n-1} + t_1^{n-1} - + \cdots + t_1^0,\ t_3^{n-1} - t_1^{n-1} + - \cdots t_1^0\right)$$

$$y^t = \frac{1}{t}\left(t_0^n - t_2^{n-1} + - \cdots + t_0^0,\ t - t_0^n + t_2^{n-1} - + \cdots - t_0^0\right).$$

Für $t_1^n \leqq t \leqq t_2^n$

$$x^t = \frac{1}{t}\left(t_1^n - t_3^{n-1} + - \cdots + t_1^0,\ t - t_1^n + t_3^{n-1} + - \cdots - t_1^0\right)$$

$$y^t = \frac{1}{t}\left(t_0^n - t_2^{n-1} + - \cdots + t_0^0,\ t - t_0^n + t_2^{n-1} - + \cdots - t_0^0\right).$$

Für $t_2^n \leqq t \leqq t_3^n$ (16)

$$x^t = \frac{1}{t}\left(t_1^n - t_3^{n-1} + - \cdots + t_1^0,\ t - t_1^n + t_3^{n-1} + - \cdots - t_1^0\right)$$

$$y^t = \frac{1}{t}\left(t - t_2^n + t_0^n - + \cdots + t_0^0,\ t_2^n - t_0^n + - \cdots - t_0^0\right).$$

Für $t_3^n \leqq t \leqq t_0^{n+1}$

$$x^t = \frac{1}{t}\left(t - t_3^n + t_1^n - + \cdots + t_1^0,\ t_3^n - t_1^n + - \cdots - t_1^0\right)$$

$$y^t = \frac{1}{t}\left(t - t_2^n + t_0^n - + \cdots + t_0^0,\ t_2^n - t_0^n + - \cdots - t_0^0\right),$$

wobei die $t_\sigma^n$ ($\sigma=0, \ldots, 3$; $n=0, 1, 2, \ldots$) sich sukzessive bestimmen aus

$$
\begin{aligned}
\frac{t_0^n - t_3^{n-1} + - \cdots + t_1^0}{t_3^{n-1} - t_1^{n-1} + - \cdots - t_1^0} &= \beta \\
\frac{t_0^n - t_2^{n-1} + - \cdots + t_0^0}{t_1^n - t_0^n + - \cdots - t_0^0} &= \alpha \\
\frac{t_1^n - t_3^{n-1} + - \cdots + t_1^0}{t_2^n - t_1^n + - \cdots - t_1^0} &= \beta \\
\frac{t_3^n - t_2^n + - \cdots + t_0^0}{t_2^n - t_0^n + - \cdots - t_0^0} &= \alpha .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß der Prozeß konvergiert.

Wir betrachten etwa $y^t$:

Es ist

$$\frac{y_1^{t_1^n}}{y_2^{t_1^n}} = \frac{y_1^{t_3^n}}{y_2^{t_3^n}} = \alpha$$

oder

$$y_1^{t_1^n} = y_1^{t_3^n} = \frac{\alpha}{1+\alpha},$$

ferner gilt

$$y_1^{t_0^n} \geqq y_1^t \geqq y_1^{t_2^n}$$

für

$$t_3^{n-1} \leqq t \leqq t_2^n .$$

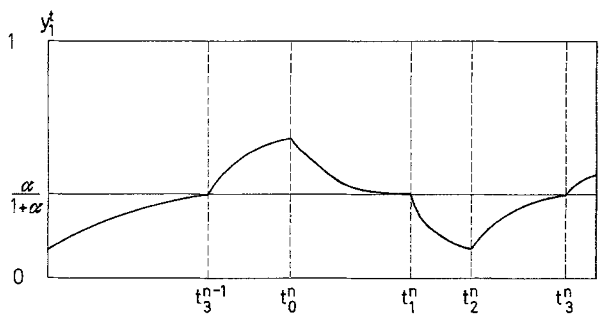


Fig. 1. Graph von $y_1^t$

Daher haben wir $y_1^{t_2^n} \to y_1^{t_1^n}$ bzw. $y_1^{t_3^n} \to y_1^{t_0^{n+1}}$ zu zeigen. Um etwa die erste Relation nachzuweisen ist wegen

$$y_1^{t_2^n} = \frac{t_0^n - t_2^{n-1} + - \cdots + t_0^0}{t_2^n} = \frac{t_0^n - t_2^{n-1} + - \cdots + t_0^0}{t_1^n} \cdot \frac{t_1^n}{t_2^n} = y_1^{t_1} \cdot \frac{t_1^n}{t_2^n}$$

hinreichend, $t_1^n / t_2^n \to 1$ zu zeigen. Allgemein sieht man also, daß

$$\frac{t_\sigma^n}{t_{\sigma+1}^n} \to 1 \qquad (\sigma=0, \ldots, 3) \tag{18}$$

hinreichend für die Konvergenz ist. Wir zeigen $t_0^n/t_1^n \to 1$. Aus (17) folgt

$$
\begin{aligned}
t_0^n &= (1+\beta)\,(t_3^{n-1} - t_1^{n-1} + - \cdots - t_1^0) \\
t_1^n &= \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)(t_0^n - t_2^{n-1} + - \cdots + t_0^0) \\
t_2^n &= \left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)(t_1^n - t_3^{n-1} + - \cdots + t_1^0) \\
t_3^n &= (1+\alpha)\,(t_2^n - t_0^n + - \cdots - t_0^0).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Mithin:

$$
t_2^n + \frac{1}{\beta}\, t_0^n = \frac{\beta+1}{\beta}\, t_1^n, \qquad t_2^n - t_1^n = \frac{1}{\beta}\,(t_1^n - t_0^n),
$$

und entsprechend

$$
\begin{aligned}
t_3^n - t_2^n &= \frac{1}{\alpha}\,(t_2^n - t_1^n) \\
t_0^{n+1} - t_3^n &= \beta\,(t_3^n - t_2^n) \\
t_1^{n+1} - t_0^{n+1} &= \alpha\,(t_0^{n+1} - t_3^n).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Durch Kombination der Formeln (20) erhalten wir

$$
t_1^{n+1} - t_0^{n+1} = t_1^n - t_0^n = \cdots = t_1^0 - t_0^0.
$$

Also

$$
\frac{t_1^n - t_0^n}{t_1^n} = \frac{t_1^0 - t_0^0}{t_1^n} \to 0,
$$

d.h.

$$
\frac{t_0^n}{t_1^n} \to 1.
$$

Ein geometrischer Beweis drängt sich übrigens auf, wenn man den Graphen der Funktion $(x^t, y^t)$ in $X \times Y$ betrachtet:

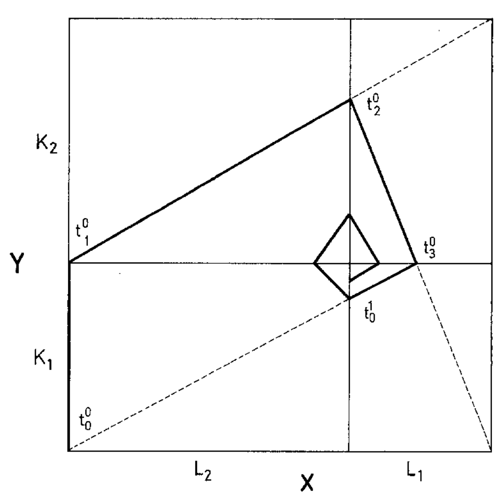


Fig. 2. „Spinnwebmodell“

Wir fassen zusammen:

**Satz 2.1.** *Sei* $\Gamma=(X, Y; A, B)$ *und* $\dim X=\dim Y=1$. *Dann konvergiert der Prozeß CFP. Die mit dem Prozeß verbundene Folge der Umkehrzeitpunkte* $t_\sigma^n$ ($\sigma=0, \ldots, 3$; $n=1, 2, \ldots$) *wächst proportional zu n.*

*2.2. Der Prozeß DFP im* $2\times 2$*-Spiel*

Wir machen die gleichen Voraussetzungen wie in 2.1, betrachten jedoch jetzt den diskreten Prozeß. Indem wir erneut die trivialerweise konvergenten Formen des Prozesses ausschließen erhalten wir aus den Formeln (5) die folgende relevante Form:

$$x^t=\begin{cases}\frac{1}{t}\left((t-1)\,x_1^{t-1}+1,(t-1)\,x_2^{t-1}\right) & \text{falls } \frac{y_1^{t-1}}{y_2^{t-1}}>\alpha\\ \frac{1}{t}\left((t-1)\,x_1^{t-1},(t-1)\,x_2^{t-1}+1\right) & \text{falls } \frac{y_1^{t-1}}{y_2^{t-1}}\leqq\alpha\end{cases}$$
$$y^t=\begin{cases}\frac{1}{t}\left((t-1)\,y_1^{t-1}+1,(t-1)\,y_2^{t-1}\right) & \text{falls } \frac{x_1^{t-q}}{x_2^{t-1}}<\beta\\ \frac{1}{t}\left((t-1)\,y_1^{t-1},(t-1)\,y_2^{t-1}+1\right) & \text{falls } \frac{x_1^{t-1}}{x_2^{t-1}}\geqq\beta\end{cases} \tag{21}$$

mit $t_0=1$, $x^1=y^1=(1,0)$, $\infty>\alpha, \beta>0$; $(t=1, 2, \ldots)$.

Dabei haben wir für

$$\frac{x_1^{t-1}}{x_2^{t-1}}=\beta \quad \text{und} \quad \frac{y_1^{t-1}}{y_2^{t-1}}=\alpha$$

willkürliche Festsetzungen getroffen um den Prozeß eindeutig zu machen. Wir diskutieren die ersten vier Phasen in etwas abgekürzter Form durch:

1. $t_0\leqq t\leqq t_1$, $t_0=1$

$$x^t=(1,0), \quad y_1^t=\frac{t-1}{t}\,y_1^{t-1}=\cdots=\frac{1}{t}\,y_1^1=\frac{1}{t}, \quad \text{d.h.,} \quad y^t=\frac{1}{t}(1,t-1)$$

mit $t_1$ derart, daß

$$\frac{y_1^{t_1-1}}{y_2^{t_1-1}}>\alpha\geqq\frac{y_1^{t_1}}{y_2^{t_1}}, \quad \text{d.h.,} \quad \frac{t_0}{t_1-1-t_0}>\alpha\geqq\frac{t_0}{t_1-t_0}$$

gilt.

2. $t_1+1\leqq t\leqq t_2$

$$x_1^t=\frac{t-1}{t}\,x_1^{t-1}=\cdots=\frac{t_1}{t}\,x_1^{t_1}=\frac{t_1}{t},$$

mithin

$$x^t=\frac{1}{t}(t_1,t-t_1), \quad y^t=\frac{1}{t}(t_0,t-t_0)$$

$$\frac{t_1}{t_2-1-t_1}\geqq\beta>\frac{t_1}{t_2-t_1}.$$

3. $t_2+1 \leqq t \leqq t_3$

$$y_1^t = \frac{t-1}{t} y_1^{t-1} = \cdots = \frac{t_2}{t} y_1^{t_2} = \frac{t_2-t_0}{t},$$

mithin

$$x^t = \frac{1}{t}(t_1, t-t_1), \qquad y^t = \frac{1}{t}(t-t_2+t_0, t_2-t_0)$$

$$\frac{t_3-t_2+t_0}{t_2-t_0} > \alpha \geqq \frac{t_3-1-t_2+t_0}{t_2-t_0}.$$

4. $t_3+1 \leqq t \leqq t_4$

$$x_2^t = \frac{t-1}{t} x_2^{t-1} = \cdots = \frac{t_3}{t} x^{t_3} = \frac{t_3-t_1}{t},$$

mithin

$$x^t = \frac{1}{t}(t-t_3+t_1, t_3-t_1), \qquad y^t = \frac{1}{t}(t-t_2+t_0, t_2-t_0)$$

$$\frac{t_4-t_3+t_1}{t_3-t_1} \geqq \beta > \frac{t_4-1-t_3+t_1}{t_3-t_1}$$

usw. Die folgenden Überlegungen verlaufen genau wie in 2.1. Wir setzen wieder $t_\sigma^n = t_{4n+\sigma}$ $(\sigma=0, \ldots, 3)$ und geben die Rekursionsformeln für die $t_\sigma^n$ an, die den Formeln (19) genau entsprechen. Es sei für beliebig reelles $\rho$ mit $[\rho]$ diejenige ganze Zahl $g$, für die $g+1>\rho \geqq g$ gilt und mit $]\rho[$ diejenige ganze Zahl $g'$, für die $g'+1 \geqq \rho > g'$ gilt, bezeichnet, dann haben wir

$$\begin{aligned}
t_0^n &= ](1+\beta)(t_3^{n-1}-t_1^{n-1}+-\cdots-t_1^0)[+1\\
t_1^n &= \left]\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)(t_0^n-t_2^{n-1}+-\cdots+t_0^0)\right[+1\\
t_2^n &= \left[\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)(t_1^n-t_3^{n-1}+-\cdots+t_1^0)\right]+1\\
t_3^n &= [(1+\alpha)(t_2^n-t_0^n+-\cdots-t_0^0)]+1.
\end{aligned} \tag{22}$$

Wir haben erneut $t_0^n/t_1^n \to 1$ zu zeigen.

Um einen ähnlich einfachen Beweis wie in 2.1 führen zu können, müssen wir uns bei diesem Stand der Untersuchung ausdrücklich darauf beschränken, $\alpha$ und $\beta$ rational zu wählen; sei etwa $1+\beta=r/s$ mit natürlichen Zahlen $r$ und $s$. Aus (22) folgt dann

$$t_2^n + \frac{1}{\beta} t_0^n = \frac{1+\beta}{\beta} t_1^n + 1 + \frac{1}{\beta} - \gamma_2^n - \frac{1}{\alpha} \gamma_0^n.$$

Die Fehler $\gamma_2^n$ und $\gamma_0^n$ entstehen durch das Weglassen der eckigen Klammern. Es ist $0 \leqq \gamma_2^n \leqq \frac{s-1}{s} < 1$, d.h., wir haben

$$t_2^n - t_1^n = \frac{1}{\beta}(t_1^n - t_0^n) + \delta_1^n$$

und es gibt von $n$ unabhängige reelle Zahlen $\rho_1$ und $R_1$ mit $0 < \rho_1 \leqq \delta_1^n \leqq R_1 < \infty$.

Entsprechend erhält man

$$t_3^n - t_2^n = \frac{1}{\alpha}(t_2^n - t_1^n) + \delta_2^n$$

$$t_0^{n+1} - t_3^n = \beta(t_3^n - t_2^n) + \delta_3^n$$

$$t_1^{n+1} - t_0^{n+1} = \alpha(t_0^{n+1} - t_3^n) + \delta_4^n.$$

Durch Einsetzen folgt

$$t_1^{n+1} - t_0^{n+1} = t_1^n - t_0^n + \varepsilon_n$$

mit

$$0 < c \leqq \varepsilon_n \leqq C < \infty$$

für gewisse Konstanten $c$ und $C$. Mithin ist

$$t_1^n - t_0^n = t_1^0 - t_0^0 + \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_n$$

mit

$$n\,c \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_n \leqq n\,C$$

oder kurz

$$t_1^n - t_0^n \sim n. \tag{23}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} t_1^n &= \left]\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)(t_0^n - t_2^{n-1} + t_0^{n-1} - t_2^{n-2} + - \cdots)\right[ + 1 \\ &\sim \sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{(n+1)\,n}{2}. \end{aligned} \tag{24}$$

$t_\sigma^n$ $(\sigma = 0, \ldots, 3)$ wächst also im wesentlichen wie $n^2$. Aus (23) und (24) folgern wir

$$\frac{t_1^n - t_0^n}{t_1^n} \to 0, \quad \text{also} \quad \frac{t_0^n}{t_1^n} \to 1.$$

Wir fassen zusammen:

**Satz 2.2.** *Sei* $\Gamma = (X, Y; A, B)$ *und* $\dim X = \dim Y = 1$. *Dann konvergiert der Prozeß DFP, falls A und B rationale Komponenten haben. Die mit dem Prozeß verbundene Folge der Umkehrzeitpunkte* $t_\sigma^n$ $(\sigma = 0, \ldots, 3;\ n = 1, 2 \ldots)$ *wächst proportional zu* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Miyasawa [4] hat diesen Satz ohne die Einschränkung auf rationale Auszahlungsmatrizen bewiesen. Der Beweis ist jedoch erheblich langwieriger. Später werden wir den Satz noch als Spezialfall einer allgemeinen Aussage gewinnen. Zunächst betrachten wir jedoch das Beispiel eines Prozesses, der nicht konvergiert.

### *2.3. Asymptotisch periodisches Verhalten*

Sei $\Gamma = (X, Y; A, B)$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten den kontinuierlichen Prozeß CFP und setzen $t_0=1$, $x^{t_0}=y^{t_0}=(1,0,0)$ als Anfangswerte an. Dieser Prozeß spielt sich periodisch in 6 Phasen ab, nämlich

1. $y \in K_3$, $x \in L_1$;
2. $y \in K_3$, $x \in L_3$;
3. $y \in K_2$, $x \in L_3$;
4. $y \in K_2$, $x \in L_2$;
5. $y \in K_1$, $x \in L_2$;
6. $y \in K_1$, $x \in L_1$.

Wir können also wieder wie in 2.1 eine Folge von Umkehrzeitpunkten $t_\sigma^n = t_{6n+\sigma}$ $(\sigma=0,\ldots,5)$ berechnen, derart, daß bei $t_\sigma^n$ $(\sigma=0,2,4)$ jeweils $x^t$ und bei $t_\sigma^n$ $(\sigma=1,3,5)$ jeweils $y^t$ die Richtung ändert, d.h., Masse auf eine andere reine Strategie verlagert als vorher. Wir verzichten auf die einzelnen Berechnungen und geben nur die Rekursionsformeln für die Folge $t_\sigma^n$ $(\sigma=0,\ldots,5;\ n=0,1,2,\ldots)$ an. Diese sind wegen der einfachen Gestalt der vorliegenden Spielmatrizen in $\sigma=0,\ldots,5$ völlig symmetrisch, so daß wir $6n+\sigma=m$ setzen und

$$\begin{aligned} t^m &= 2t_{m-1} - t_{m-3} - t_{m-5} + t_{m-6} \\ &= 2t_{m-1} - t_{m-3} - t_{m-5} + 2t_{m-7} - \cdots \end{aligned} \tag{25}$$

schreiben. Wir interessieren uns für das asymptotische Verhalten der Folge $t_m/t_{m+1}$ $(m=0,1,\ldots)$. Zunächst ist

$$\begin{aligned} t_m &= 2t_{m-1} - t_{m-3} - t_{m-5} + 2t_{m-7} - t_{m-9} \cdots \\ t_{m-2} &= \qquad\quad 2t_{m-3} - t_{m-5} - t_{m-7} + 2t_{m-9} \cdots \\ t_{m-4} &= \qquad\qquad\qquad\quad 2t_{m-5} - t_{m-7} - t_{m-9} \cdots \end{aligned}$$

und daher

$$t_m + t_{m-2} + t_{m-4} = 2t_{m-1} + t_{m-3}$$

oder

$$t_m - t_{m-1} = t_{m-1} - t_{m-2} + t_{m-3} - t_{m-4}. \tag{26}$$

Setzen wir $s_m = t_m - t_{m-1}$, so folgt aus (26):

$$s_m = s_{m-1} + s_{m-3}. \tag{27}$$

Methoden für die Behandlung dieser Differenzengleichung sind bekannt. Man sieht, daß das Wachstum von $s_m$ durch

$$s_m \sim a_0 \lambda^m \tag{28}$$

mit gewissen Konstanten $a_0 > 0$, $\lambda > 1$ geregelt wird. Entsprechend folgt

$$t_m \sim a_0 \frac{\lambda^{m+1} - 1}{\lambda - 1} \tag{29}$$

und

$$\frac{t_{m-1}}{t_m} \to \frac{1}{\lambda} < 1. \tag{30}$$

(30) besagt, daß die „Umkehrpunkte“ $x^{t_m}$ bzw. $y^{t_m}$, d.h., diejenigen gemischten Strategien, bei denen die Spieler im Verlaufe des Prozesses jeweils die Belastung ihrer reinen Strategien wechseln, gegen drei feste Punkte in $X$ bzw. $Y$ konvergieren. Die Bahn des Prozesses $x^t$ bzw. $y^t$ nähert sich dementsprechend dem von den Wendepunkten aufgespannten Simplex, das „schließlich“ in zeitlich wachsenden Perioden durchlaufen wird.

Es gilt also der folgende

**Satz 2.3.** *Sei $\Gamma=(X, Y; A, B)$ und*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Dann ist der Prozeß CFP asymptotisch periodisch. Die mit dem Prozeß verbundene Folge der Umkehrzeitpunkte $t_m$ $(m=1, 2, \ldots)$ wächst exponentiell.*

Shapley [7] hat gezeigt, daß der Prozeß DFP für die ganze $D$-Äquivalenzklasse des obigen Spieles $\Gamma$ nicht konvergiert.

Wir haben nun verschiedene Tatsachen über CFP und DFP gesammelt, die sich für Spiele mit „kleinen“ Strategienmengen ergeben. Unser Ziel wird sein, die dabei aufgetretenen Erscheinungen, also hauptsächlich Konvergenz und Periodizität durch eine allgemeine Theorie zu erklären. Ferner ist zu prüfen, ob CFP und DFP sich gleich verhalten. Dies soll in den folgenden Paragraphen versucht werden.

## § 3. Allgemeine Theorie im quasiperiodischen Fall

### *3.1. Die assoziierte Matrix*

Angeregt durch eine Erscheinung, die bei allen Beispielen aus § 2 auftrat, geben wir die folgende

**Definition.** Es sei $(x^t, y^t)$ ein CFP oder DFP in einem Spiel $\Gamma=(X, Y; A, B)$. Wir sagen, der betrachtete Prozeß heiße quasiperiodisch, falls es ein $T>0$ und eine periodische Folge

$$q_\sigma=(i_\sigma, j_\sigma)\in I\times J \qquad (\sigma=0, \ldots, s-1)$$

gibt, für die stets entweder $i_{\sigma+1}\neq i_\sigma$ und $j_{\sigma+1}=j_\sigma$ oder $i_{\sigma+1}=i_\sigma$ und $j_{\sigma+1}\neq j_\sigma$ ist ($\sigma$ mod $s$ gerechnet), derart, daß mit $H_\sigma=L_{j_\sigma}\times K_{i_\sigma}$ gilt:

1. $(x^t, y^t)\in \bigcup_{\sigma=0}^{s-1} H_\sigma$ für $t\geqq T$,
2. für $t\geqq T$ und $(x^t, y^t)\in H_\sigma$ ist

$$t_1=\inf\{t' \mid t'>t, (x^t, y^t)\notin H_\sigma\}$$

stets endlich und erfüllt

$$(x^{t_1}, y^{t_1}) \in H_{\sigma+1}.$$

Anschaulich besagt diese Definition einfach, daß die $H_\sigma$ nacheinander durchlaufen werden ebenso wie die $K_{i_\sigma}$ und $L_{j_\sigma}$ – dies alles periodisch in einer festgelegten Reihenfolge. Offenbar sind die in § 2 betrachteten Prozesse alle quasiperiodisch. Wir wollen nun versuchen, die quasiperiodischen Prozesse rechnerisch in die Hand zu bekommen.

Zunächst betrachten wir einen – nicht notwendig quasiperiodischen – Prozeß CFP, den wir etwa zur Zeit $t=\bar{t}$ in einem gewissen Punkte $(x^{\bar{t}}, y^{\bar{t}})$ starten lassen. Es sei

$$(x^{\bar{t}}, y^{\bar{t}}) \in H_0 = L_{j_0} \times K_{i_0}.$$

Der Prozeß bewegt sich nun gemäß Formel (8) und erreiche als nächste konvexe Menge $H_1 = L_{j_1} \times K_{i_1}$, d.h., wir können einen eindeutig bestimmten Zeitpunkt $t_0$ fixieren, der $(x^t, y^t) \in H_0$ $(\bar{t} \leqq t \leqq t_0)$, $(x^{t_0}, y^{t_0}) \in H_1$ erfüllt. O.B.d.A. sei $i_0 = i_1$, $j_0 \neq j_1$. Danach ändert der Prozeß seine Richtung: lief er bisher gemäß Formel (8) auf den Vektor $(e^{i_0}, e^{j_0})$ zu, so nimmt er jetzt die Richtung auf $(e^{i_1}, e^{j_1})$ ein, so daß wir mit einiger Berechtigung $t_0$ als „Umkehrzeitpunkt" und $(x^{t_0}, y^{t_0})$ als „Umkehrpunkt" bezeichnen können. Nehmen wir weiterhin an, daß für jedes $H_\tau = L_{i_\tau} \times K_{j_\tau}$ eindeutig feststeht, daß der Prozeß „danach" in ein und nur ein $H_{\tau+1}$ einlaufen kann, so erhalten wir eine gewisse Folge

$$q_\tau = (i_\tau, j_\tau) \in I \times J \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots),$$

die die Reihenfolge der $H_\tau$ festlegt. Es bedeutet keine Einschränkung, wenn wir annehmen, daß

$$\begin{aligned}
&i_0 = i_1 = \cdots = i_{\tau_1}, \\
&j_0 \neq j_1 \neq \cdots \neq j_{\tau_1}, \\
&j_{\tau_1} = \cdots = j_{\tau_2}, \\
&i_{\tau_1} \neq \cdots \neq i_{\tau_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&j_\tau = j_{\tau_{2l-1}}, \qquad (\tau_{2l-1} \leqq \tau \leqq \tau_{2l}) \\
&i_\tau \neq i_{\tau+1}, \qquad (\tau_{2l-1} \leqq \tau \leqq \tau_{2l} - 1) \\
&i_\tau = i_{\tau_{2l}}, \qquad (\tau_{2l} \leqq \tau \leqq \tau_{2l+1}) \\
&j_\tau \neq j_{\tau+1}, \qquad (\tau_{2l} \leqq \tau \leqq \tau_{2l+1} - 1) \quad (l = 1, 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{31}$$

gilt.

Da es nur endlich viele verschiedene $H_\tau$ gibt, muß der Prozeß nach endlich vielen Schritten ein $H_{\tau'}$ erneut aufsuchen, etwa $H_{\tau'} = H_0$. Was wir jedoch nicht wissen ist, ob er danach die gleiche Reihenfolge beim Durchlaufen der $H_\tau$ einhält. Gerade dies wird nach Definition für einen quasiperiodischen Prozeß gefordert. In diesem Falle gibt es ein $K > 0$, so daß

$$i_{\tau_{2K}} = i_0, \quad j_{\tau_{2K}} = j_0 \text{ (erstmals)}$$

und

$$i_{\tau_{2K}+\tau}=i_\tau, \quad j_{\tau_{2K}+\tau}=j_\tau$$

oder allgemein

$$i_\tau=i_{\tau'}, \quad j_\tau=j_{\tau'}$$

falls $\tau'>\tau$, $\tau'=n\,\tau_{2K}+\tau$ mit ganzem $n$ gilt.

Hat der Prozeß den angegebenen eindeutigen Verlauf – quasiperiodisch oder nicht –, so ist uns durch das Schema (31) auch eine Folge von „Umkehrzeitpunkten" $t_\tau$ $(\tau=0,1,2,\ldots)$ gegeben, die durch

$$(x^{t_\tau}, y^{t_\tau})\in H_\tau\cap H_{\tau+1} \tag{32}$$

eindeutig definiert sind.

**Definition.** Die mit einem CFP verbundene Folge von Umkehrzeitpunkten $t_\tau$ $(\tau=0,1,2,\ldots)$ soll künftig „die zu dem CFP assoziierte Folge" heißen. Die entsprechenden Strategien $x^{t_\tau}$ bzw. $y^{t_\tau}$ heißen Umkehrpunkte in $X$ bzw. $Y$.

Für einen quasiperiodischen Prozeß ist die Folge $q_\tau$ periodisch – es gilt $q_s=q_0$. Der Prozeß ist also vollständig beschrieben durch die Angabe der Folge $q_0,\ldots,q_{s-1}$ oder ein dem Schema (31) entsprechendes endliches Schema:

$$\begin{aligned}
&i_0=i_1=\cdots=i_{\sigma_1},\\
&j_0\neq j_1\neq\cdots\neq j_{\sigma_1},\\
&j_{\sigma_1}=\cdots=j_{\sigma_2},\\
&i_{\sigma_1}\neq\cdots\neq i_{\sigma_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&j_\sigma=j_{\sigma_{2l-1}}, \quad (\sigma_{2l-1}\leqq\sigma\leqq\sigma_{2l})\\
&i_\sigma\neq i_{\sigma+1}, \quad (\sigma_{2l-1}\leqq\sigma\leqq\sigma_{2l}-1)\\
&i_\sigma=i_{\sigma_{2l}}, \quad (\sigma_{2l}\leqq\sigma\leqq\sigma_{2l+1})\\
&j_\sigma\neq j_{\sigma+1}, \quad (\sigma_{2l}\leqq\sigma\leqq\sigma_{2l+1}-1) \quad (l=0,\ldots,K).
\end{aligned} \tag{33}$$

Schließlich können wir den quasiperiodischen Prozeß noch durch einen Graphen (Fig. 3) repräsentieren, indem wir die $K_{i_\sigma}$ und $L_{j_\sigma}$ durch aneinandergereihte Rechtecke symbolisieren und zwei Prozeßkurven (für $x^t$ und $y^t$) einzeichnen, derart, daß jeweils eine Kurve einen Knick erhält, wenn die andere von einem Rechteck in das nächste übergeht. An die Knick- bzw. Übergangsstellen schreiben wir die entsprechenden Zeitpunkte der assoziierten Folge an, wobei wir jetzt naturgemäß $t_\tau=t_\sigma^n$ schreiben, falls $\tau=n\,s+\sigma$ für ein ganzes $n$ gilt.

Kennt man die assoziierte Folge $t_\tau$ $(\tau=0,1,2,\ldots)$ eines CFP, so kann man den Prozeß selbst leicht wie folgt ausrechnen:

$t\,y_j^t$ ergibt sich aus der assoziierten Folge $\{t_\tau\}$, indem man alle die Zeitdifferenzen $\Delta^{t_\tau}=t_\tau-t_{\tau-1}$ aufsummiert, für die $x^{t'}\in L_j$ $(t_{\tau-1}=t'=t_\tau)$ richtig ist. Insbesondere hat man $t-t_{\bar\tau}$ hinzuzuziehen, falls $x^{t'}\in L_j$ $(t_{\bar\tau}=t'=t)$ gilt.

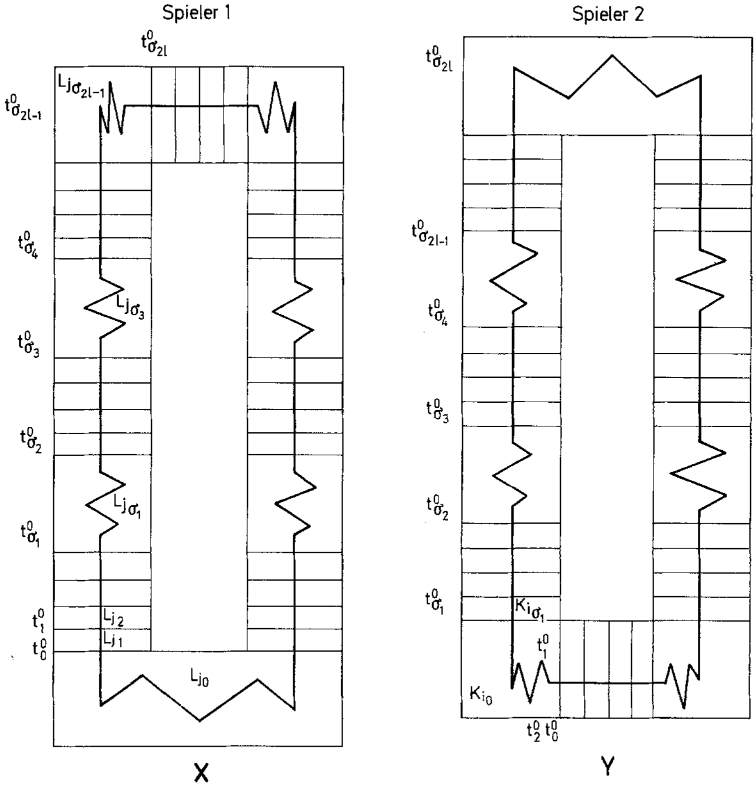


Fig. 3. Graph eines quasiperiodischen Prozesses

Genauer gilt der folgende

**Satz 3.1.** *Sei* $\Delta^{t_\tau}=t_\tau-t_{\tau-1}$ *und* $J^{t_\tau}=[t_{\tau-1},t_\tau]$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} t\,y_j^t &= \sum_{\substack{\tau \\ x^{t'}\in L_j \text{ für } t'\in J^{t_\tau}}}' \Delta^{t_\tau} \\ t\,x_i^t &= \sum_{\substack{\tau \\ y^{t'}\in K_i \text{ für } t'\in J^{t_\tau}}}' \Delta^{t_\tau}. \end{aligned} \tag{34}$$

*Dabei besagt der Strich am Summenzeichen, daß auch noch über die Größe* $t-t_{\bar\tau}$ *summiert werden soll, falls* $t_{\bar\tau}=\max\{t_\tau \mid t_\tau\leqq t\}$ *gilt und im Intervall* $[t_{\bar\tau},t]$ *die jeweils unter der Summe stehende Bedingung erfüllt ist.*

*Beweis.* Nach (8) ist

$$t'\,y^{t'}=(t'-\bar t)\,e^j+\bar t\,\bar y \qquad (x^s\in L_j \text{ für } \bar t\leqq s\leqq t')$$

und daher

$$\frac{d}{dt'}(t'\,y^{t'})=e^j \qquad (x^{t'}\in L_j),$$

d.h.,

$$\frac{d}{dt'}(t' y_j^{t'}) = 1 \qquad (x^{t'} \in L_j).$$

Trägt man also zur Veranschaulichung zunächst die Folge $t_\tau$ auf die Zahlengerade auf und danach die Funktion

$$f_j(t') = \frac{d}{dt'}(t' y_j^{t'}),$$

so hat man eine stückweise konstante Funktion, die die Werte 0 und 1 annimmt. Als Sprungstellen kommen gerade die Argumente $t' = t_\tau$ in Frage. Genau für die Intervalle $J^{t_\tau}$ ist $f_j(t') = 1$, für die

$$x^{t'} \in L_j \qquad (t_{\tau-1} \leqq t' \leqq t_\tau)$$

gilt und eventuell noch für das Intervall $[t_{\bar\tau}, t]$, falls

$$x^{t'} \in L_j \qquad (t_{\bar\tau} \leqq t' \leqq t)$$

gilt.

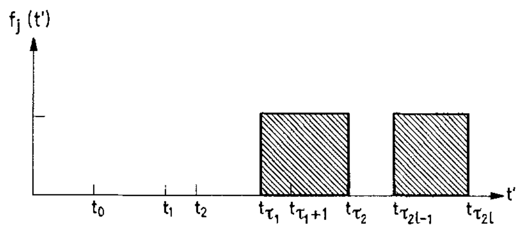


Fig. 4. Graph von $f_j(t')$

Mithin ist

$$\begin{aligned} t y_j^t &= \int_{[t_0, t] \cap \{t' \mid x^{t'} \in L_j\}} dt' \\ &= \sum_{\substack{\tau \\ x^{t'} \in L_j \text{ für } t' \in J^{t_\tau}}} \int_{t_{\tau-1}}^{t_\tau} dt' \\ &= \sum_{\substack{\tau \\ x^{t'} \in L_j \text{ für } t' \in J^{t_\tau}}} \Delta^{t_\tau}. \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Wir greifen nochmals auf unser Schema (31) zurück. Ist etwa

$$j = j_{\tau_{2l-1}} = \cdots = j_{\tau_{2l}}$$

so folgt aus (34)

$$t y_j^t = t_{\tau_{2l}} - t_{\tau_{2l-1}}$$

(rechter Hand stehen natürlich noch weitere Summanden, falls noch für weitere $j_{\tau_{l'}}$ ebenfalls $j = j_{\tau_{l'}}$ gilt).

Wir können unsere vor Satz 3.1 gemachten Andeutungen also auch so formulieren, daß wir jeweils die „Eintrittszeiten von $x^{t'}$ in $L_j$" von den „Austrittszeiten von $x^{t'}$ aus $L_j$" subtrahieren um $t y_j^t$ zu erhalten.

Mit Hilfe von Satz 3.1 können wir also zu jedem Zeitpunkt $t$ den Zustand des Prozesses $(x^t, y^t)$ genau angeben, falls wir die Folge $\{(i_\tau, j_\tau)\}$ und die assoziierte Folge $t_\tau$ kennen. Ist der Prozeß nun quasiperiodisch, so können wir aus den Formeln (34) auch Rekursionsformeln für die assoziierte Folge gewinnen.

**Satz 3.2.** *Es sei* $(x^t, y^t)$ *ein quasiperiodischer CFP und* $t_\sigma^n$ $(\sigma=0,\dots,s-1;\ n=0,1,2,\dots)$ *die assoziierte Folge. Dann gibt es eine* $s\times s$*-Matrix F derart, daß gilt*

$$t^n = F^n t^0 \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

*mit*

$$t^n = (t_0^n, \dots, t_{s-1}^n).$$

*Ist durch* (33) *ein Schema gegeben, das die Perioden des Prozesses regelt, so hat F die Gestalt*

$$F = -C^{-1} D$$

*mit*

$$C = (C_{\sigma_j}^{\sigma_i}), \qquad D = (D_{\sigma_j}^{\sigma_i}) \quad (i,j=0,\dots,2K;\ \sigma_0=0)$$

$$C_{\sigma_j}^{\sigma_i} = \begin{cases} \bar{A}_{\sigma_j}^{\sigma_i} & i=j=2l+1 \\ A_{\sigma_j}^{\sigma_i} & i=2l+1>j=2k \\ \bar{B}_{\sigma_j}^{\sigma_i} & i=j=2l \\ B_{\sigma_j}^{\sigma_i} & i=2l>j=2k-1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \qquad D_{\sigma_j}^{\sigma_i} = \begin{cases} -\bar{A}_{\sigma_j}^{\sigma_i} & i=j=2l+1 \\ A_{\sigma_j}^{\sigma_i} & i=2l+1<j=2k \\ -\bar{B}_{\sigma_j}^{\sigma_i} & i=j=2l \\ B_{\sigma_j}^{\sigma_i} & i=2l<j=2k+1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

*und*

$$A_{\sigma_j}^{\sigma_i} = \begin{pmatrix} a_{j_{\sigma_j} j_{\sigma_j+1}}^{i_{\sigma_i}} & \dots & a_{j_{\sigma_{j+1}-1} j_{\sigma_{j+1}}}^{i_{\sigma_i}} \\ \vdots & & \\ a_{j_{\sigma_j}\, \sigma_j+1}^{i_{\sigma_{i+1}-1}} & \dots & a_{j_{\sigma_{j+1}-1} j_{\sigma_{j+1}}}^{i_{\sigma_{i+1}-1}} \end{pmatrix} \quad (l=0,\dots,K;\ k=0,\dots,K;\ i,j=0,\dots,2K)$$

$$B_{\sigma_j}^{\sigma_i} = \begin{pmatrix} b_{i_{\sigma_j} i_{\sigma_j}+1}^{j_{\sigma_i}} & \dots & b_{i_{\sigma_{j+1}-1} i_{\sigma_{j+1}}}^{j_{\sigma_i}} \\ \vdots & & \\ b_{i_{\sigma_j} i_{\sigma_j}+1}^{j_{\sigma_{i+1}-1}} & \dots & b_{i_{\sigma_{j+1}-1} i_{\sigma_{j+1}}}^{j_{\sigma_{i+1}-1}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_{\sigma_j}^{\sigma_i} = \begin{pmatrix} a_{j_{\sigma_j}}^{i_{\sigma_i}} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & a_{j_{\sigma_j}}^{i_{\sigma_{i+1}-1}} \end{pmatrix}, \qquad \bar{B}_{\sigma_j}^{\sigma_i} = \begin{pmatrix} b_{i_{\sigma_j}}^{j_{\sigma_i}} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & b_{i_{\sigma_j}}^{j_{\sigma_{i+1}-1}} \end{pmatrix}$$

$$a^{i_\sigma} = A_{i_{\sigma+1}\cdot} - A_{i_\sigma\cdot};\quad b^{j_\sigma} = B_{\cdot j_{\sigma+1}} - B_{\cdot j_\sigma}$$

$$a_{rs}^i = a_r^i - a_s^i;\quad b_{rs}^j = b_r^j - b_s^j.$$

*Beweis.* Es sei $\{t_\tau\}$ die assoziierte Folge des betrachteten CFP. Wir schreiben wieder $t_\tau = t_\sigma^n$ für $\tau = sn+\sigma$ $(\sigma=0,\dots,s-1;\ n=0,1,2,\dots)$. Entsprechend ist

$$\begin{aligned} \Delta^{t_\sigma^n} &= t_\sigma^n - t_{\sigma-1}^n \qquad (\sigma=1,\dots,s-1) \\ \Delta^{t_0^n} &= t_0^n - t_{s-1}^{n-1}. \end{aligned} \tag{35}$$

Schließlich setzen wir noch zur Vereinfachung

$$\varepsilon_j^{t_\tau} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x^{t'} \in L_j \text{ für } t' \in J^{t_\tau} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{36}$$

und erklären $\varepsilon_j^{t_\varrho^n}$ entsprechend (mit der für die Rechnung mod $\sigma$ notwendigen Abänderung – vgl. (35)). Offenbar ist dann nach Definition des quasiperiodischen Prozesses

$$\varepsilon_j^{t_\sigma^n} = \varepsilon_j^{t_\sigma^{n-1}} = \cdots =: \varepsilon_j^\sigma.$$

Nach Satz 3.1 folgt nun

$$\begin{aligned}
t_\sigma^n y_j^{t_\sigma^n} &= \sum_{\tau' \leqq sn+\sigma}' \Delta^{t_{\tau'}} \varepsilon_j^{t_{\tau'}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{s-1} \Delta^{t_\varrho^\nu} \varepsilon_j^\varrho + \sum_{\varrho=0}^{\sigma} \Delta^{t_\varrho^n} \varepsilon_j^\varrho \\
&= \sum_{\nu=0}^{n-2} \sum_{\varrho=0}^{s-1} \Delta^{t_\varrho^\nu} \varepsilon_j^\varrho + \sum_{\varrho=0}^{s-1} \Delta^{t_\varrho^{n-1}} \varepsilon_j^\varrho + \sum_{\varrho=0}^{\sigma} \Delta^{t_\varrho^n} \varepsilon_j^\varrho \\
&= \sum_{\nu=0}^{n-2} \sum_{\varrho=0}^{s-1} \Delta^{t_\varrho^\nu} \varepsilon_j^\varrho + \sum_{\varrho=0}^{\sigma} \Delta^{t_\varrho^{n-1}} \varepsilon_j^\varrho + \sum_{\varrho=\sigma+1}^{s-1} \Delta^{t_\varrho^{n-1}} \varepsilon_j^\varrho + \sum_{\varrho=0}^{\sigma} \Delta^{t_\varrho^n} \varepsilon_j^\varrho \\
&= t_\sigma^{n-1} y_j^{t_\sigma^{n-1}} + \sum_{\varrho=\sigma+1}^{s-1} \Delta^{t_\varrho^{n-1}} \varepsilon_j^\varrho + \sum_{\varrho=0}^{\sigma} \Delta^{t_\varrho^n} \varepsilon_j^\varrho .
\end{aligned} \tag{37}$$

Die Umkehrpunkte $y^{t_\sigma^n}$ und $x^{t_\sigma^n}$ sind gerade dadurch definiert, daß

$$(x^{t_\sigma^n}, y^{t_\sigma^n}) \in H_\sigma \cap H_{\sigma+1}$$

gilt. Es ist $H_\sigma = L_{j_\sigma} \times K_{i_\sigma}$ und $H_{\sigma+1} = L_{j_{\sigma+1}} \times K_{i_{\sigma+1}}$.

O.B.d.A. nehmen wir an, daß $j_\sigma = j_{\sigma+1}$ und daher $i_\sigma \neq i_{\sigma+1}$ gilt – anderenfalls müssen wir die obige Rechnung (37) für $x^{t_\sigma^n}$ durchführen. Es gilt also

$$y^{t_\sigma^n} \in K_{i_\sigma} \cap K_{i_{\sigma+1}}, \quad \text{d.h.,} \quad A_{i_\sigma .} y^{t_\sigma^n} = A_{i_{\sigma+1} .} y^{t_\sigma^n}$$

oder mit der Vereinbarung $a^{i_\sigma} = A_{i_\sigma .} - A_{i_{\sigma+1} .}$ auch

$$a^{i_\sigma} y^{t_\sigma^n} = 0. \tag{38}$$

Ebenso ist aber auch $a^{i_\sigma} y^{t_\sigma^{n-1}} = 0$. Setzen wir noch $\varepsilon^\sigma = (\varepsilon_1^\sigma, \ldots, \varepsilon_N^\sigma)$, so folgt aus (37)

$$a^{i_\sigma} \left( \sum_{\varrho=\sigma+1}^{s-1} \Delta^{t_\varrho^{n-1}} \varepsilon^\varrho + \sum_{\varrho=0}^{\sigma} \Delta^{t_\varrho^n} \varepsilon^\varrho \right) = 0. \tag{39}$$

Schreiben wir (39) für $\sigma = 0, \ldots, s-1$ auf, so erhalten wir ein homogenes System von $s$ Gleichungen, in denen gerade die $2s$ Variablen $t_0^{n-1}, \ldots, t_{s-1}^{n-1}, t_0^n, \ldots, t_{s-1}^n$ auftauchen. Wenn wir jeweils die Koeffizienten von $t_\sigma^{n-1}$ $(\sigma = 0, \ldots, s-1)$ und von $t_\sigma^n$ $(\sigma = 0, \ldots, s-1)$ sammeln, so können wir auch mit zwei gewissen Koeffizienten-Matrizen $C$ und $D$ schreiben

$$C t^n + D t^{n-1} = 0. \tag{40}$$

Die Zeile $\sigma$ von (40) ist gerade durch (39) gegeben. In der Spalte $\varrho$ und der Zeile $\sigma$ der Matrix $C$ steht der Koeffizient $C_{\sigma\varrho}$ von $t_\varrho^n$ aus (39), das ist gerade

$$a^{i_\sigma} (\varepsilon^\varrho - \varepsilon^{\varrho+1}). \tag{41}$$

Für $\rho > \sigma$ taucht $t_\rho^n$ in (39) gar nicht auf, $D$ ist also eine Dreiecksmatrix. Für $\rho = \sigma$ ist

$$C_{\sigma\sigma} = a^{i_\sigma} \varepsilon^\sigma = \sum_{j=1}^{N} a_j^{i_\sigma} \varepsilon_j^\sigma.$$

Für genau ein $j$ ist $\varepsilon_j^\sigma = 1$, nämlich für dasjenige, das

$$x^{t'} \in L_j \quad \text{für} \quad t' \in J^{t_\sigma^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

liefert. Also ist $C_{\sigma\sigma} = a_j^{i_\sigma}$ mit

$$\text{„}x^{t'} \text{ läuft bei } t' = t_\sigma^n \text{ auf } e^j \text{ zu“.} \tag{42}$$

Betrachten wir nun den Koeffizienten $C_{\sigma\rho}$ mit $\rho < \sigma$. Dieser ist

$$C_{\sigma\rho} = a^{i_\sigma}(\varepsilon^\rho - \varepsilon^{\rho+1}) = \sum_{j=1}^{N} a_j^{i_\sigma}(\varepsilon_j^\rho - \varepsilon_j^{\rho+1}).$$

Es ist $H_\rho = L_{j_\rho} \times K_{i_\rho}$ und $H_{\rho+1} = L_{j_{\rho+1}} \times K_{i_{\rho+1}}$ sowie $(x^{t_\rho^n}, y^{t_\rho^n}) \in H_\rho \cap H_{\rho+1}$. Falls $j_\rho = j_{\rho+1}$ gilt, so ist gerade $\varepsilon_j^\rho = \varepsilon_j^{\rho+1} = 1$ und alle anderen Komponenten von $\varepsilon^\rho$ und $\varepsilon^{\rho+1}$ verschwinden, also ist $C_{\sigma\rho} = 0$. Falls dagegen $j_\rho \neq j_{\rho+1}$ ist, so erhalten wir aus $\varepsilon_{j_\rho}^\rho = \varepsilon_{j_{\rho+1}}^{\rho+1}$ offenbar $C_{\sigma\rho} = a_{j_\rho}^{i_\sigma} - a_{j_{\rho+1}}^{i_\sigma} =: a_{j_\rho j_{\rho+1}}^{i_\sigma}$, wobei wir $a_{jk}^i = a_j^i - a_k^i$ gesetzt haben. $C_{\sigma\rho}$ bestimmt sich also nach der Regel

$$\text{„}C_{\sigma\rho} = a_{j_\rho j_\rho+1}^{i_\sigma} \tag{43}$$

falls $x^{t_\rho^n}$ eine Gleichung $B_{\cdot j_\rho} x^{t_\rho^n} = B_{\cdot j_{\rho+1}} x^{t_\rho^n}$ erfüllt und $C_{\sigma\rho} = 0$ anderenfalls.“

Wir verfahren nun ebenso mit der Matrix $D$ und stellen fest, daß insbesondere auch $D$ eine Dreiecksmatrix ist, in deren Diagonale gerade die Glieder der Diagonale von $C$ stehen, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen.

Wenn dem quasiperiodischen Prozeß ein Schema der Art (33) zugrunde liegt, können wir aus dem Graphen (Fig. 3) genau ablesen, ob zu einem Zeitpunkt $t' = t_\sigma^n$ gerade für $x^{t'}$ oder für $y^{t'}$ eine Gleichung der Form (38) erfüllt ist. Wenn wir dann die Regeln (42) und (43) formal aufschreiben, bekommen wir gerade die in der Behauptung des Satzes angegebene Gestalt der Matrizen $C$ und $D$.

Die Matrizen $C$ und $D$ sind nun beide invertierbar. Denn zunächst sind beide Dreiecksmatrizen, deren Determinante gleich dem Produkt der Diagonalglieder ist. Letztere sind aber alle von Null verschieden, denn angenommen, es ist $a_j^{i_\sigma} = 0$, so folgt $A_{i_\sigma+1 j} = A_{i_\sigma j}$, d.h.

$$e^j \in Y_j \cap \{y \mid A_{i_{\sigma+1}.}\, y = A_{i_\sigma.}\, y\};$$

das haben wir aber (vgl. Bemerkung D und 3.1) schon ausgeschlossen.

Also sind $C$ und $D$ nichtsinguläre Matrizen und daher invertierbar. Aus (41) folgt dann

$$t^n = -C^{-1} D t^{n-1} = F t^{n-1} = \cdots \cdot F^n t^0. \tag{44}$$

**Definition.** Die Matrix $F$, die gemäß Satz 3.2 die assoziierte Folge erzeugt, heißt die zum Prozeß $(x^t, y^t)$ assoziierte Matrix.

### 3.2. *Eigenwerttheorie*

Es sei $\Gamma=(X, Y; A, B)$ ein Spiel sowie $(x^t, y^t)$ ein durch dieses Spiel erzeugter quasiperiodischer CFP mit assoziierter Matrix $F$. Wir wollen das Verhalten der assoziierten Folge $\{t_\sigma^n\}$ durch die Eigenwerte von $F$ charakterisieren.

**Lemma 1.** *Sei $(x^t, y^t)$ ein quasiperiodischer Prozeß CFP mit assoziierter Matrix $F$. Die Eigenwerte $\lambda_0, \ldots, \lambda_{s-1}$ von $F$ seien sämtlich einfach und es gelte $|\lambda_0|>|\lambda_1|>\cdots |\lambda_{s-1}|$. Dann gibt es ein reelles $\lambda \in \{\lambda_0, \ldots, \lambda_{s-1}\}$ und einen zu $\lambda$ gehörigen Eigenvektor $f$ von $F$, derart, daß für die assoziierte Folge $\{t_\sigma^n\}$ des CFP gilt:*

$$\frac{t^n}{\lambda^n} \to f \quad (n \to \infty).$$

*Beweis.* Unter den Voraussetzungen des Lemmas gibt es eine nichtsinguläre Matrix $U$, derart, daß

$$F=U\Pi U^{-1} \quad \text{mit} \quad \Pi=\begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{s-1} \end{pmatrix}$$

richtig ist. Also gilt

$$t_\sigma^n=(F^n t^0)_\sigma=(U\Pi^n U^{-1})_\sigma=\lambda_0^n \mu_\sigma^0+\cdots+\lambda_{s-1}^n \mu_\sigma^{s-1}, \tag{45}$$

wobei $M=(\mu_\sigma^\tau)$ $(\sigma, \tau=0, \ldots, s-1)$ eine gewisse Matrix ist, die sich aus $U$ und $t^0$ in naheliegender Weise berechnet. Sei $\lambda$ derjenige Eigenwert, der $\mu^\tau=(\mu_0^\tau, \ldots, \mu_{s-1}^\tau)=0$ für $|\lambda_\tau|>|\lambda|$ und $\mu^\tau \neq 0$ für $\lambda_\tau=\lambda$ erfüllt. Dann ist nach (45) offenbar

$$\frac{t^n}{\lambda^n} \to f \quad (n \to \infty)$$

richtig, wobei $f$ der aus den Koeffizienten von $\lambda$ in (45) gebildete Vektor ist. Wegen $t^n=F t^{n-1}$ $(n=1, 2, \ldots)$ folgt

$$\lambda \frac{t^n}{\lambda^n}=F \frac{t^{n-1}}{\lambda^{n-1}} \quad (n=1, 2, \ldots),$$

was nach Grenzübergang $\lambda f=Ff$ liefert. Da $\{t_\sigma^n\}$ eine reellwertige Folge ist, muß wegen

$$\frac{t_\sigma^n}{t_\sigma^{n+1}} \to \frac{1}{\lambda}$$

auch $\lambda$ und somit $f$ reell sein.

**Lemma 2.** *Sei $(x^t, y^t)$ ein quasiperiodischer CFP mit assoziierter Matrix $F$. Die Eigenwerte $\lambda_0, \ldots, \lambda_{s-1}$ seien sämtlich einfach und reelle Vielfache von Einheitswurzeln. Dann gibt es eine natürliche Zahl $r>1$ und eine reelle Zahl $\lambda>1$, sowie $r$ reelle Vektoren $f^0, \ldots, f^{r-1}$, derart, daß gilt:*

1. *$f^\rho$ $(\rho=0, \ldots, r-1)$ ist Eigenvektor von $F^r$ zum Eigenwert $\lambda$.*
2. $$\frac{t^{mr+\rho}}{\lambda^{mr+\rho}} \to f^\rho \quad (\rho=0, \ldots, r-1;\ m \to \infty).$$

*Beweis.* Wie in Lemma 1 schreiben wir

$$t_\sigma^n = \sum_{l=0}^{s-1} \mu_\sigma^l \lambda_l^n \qquad (\sigma=0, \ldots, s-1) \ (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Es sei etwa $|\lambda_0| \leqq \cdots \leqq |\lambda_{s-1}|$ und $l_0$ $(0 \leqq l_0 \leqq s-1)$ maximal mit der Eigenschaft, daß

$$\mu^{l_0} \neq 0$$

gilt. Sei ferner $\lambda = |\lambda_{l_0}|$ und etwa

$$|\lambda_{v_0}| = \cdots = |\lambda_{v_u}| = \lambda.$$

Wir setzen

$$\lambda_{v_0} = \lambda\, e^{\frac{2\pi i k_0}{r_0}}, \ldots, \lambda_{v_u} = \lambda\, e^{\frac{2\pi i k_u}{r_u}}.$$

Dann folgt

$$\frac{t_\sigma^n}{\lambda^n} \to \sum_{l=0}^{u} \mu_\sigma^l\, e^{\frac{2\pi i k_l n}{r_l}}. \tag{46}$$

Ist $r$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $r_0, \ldots, r_u$ und

$$f^\rho = \sum_{l=0}^{u} \mu^l\, e^{\frac{2\pi i k_l \rho}{r_l}} \qquad (\rho=0, \ldots, r-1),$$

so folgt aus (46)

$$\frac{t^{mr+\rho}}{\lambda^{mr+\rho}} \to f^\rho \qquad (\rho=0, \ldots, r-1;\, m\to\infty).$$

Schließlich ist noch wegen

$$\lambda^r \frac{t^{rm+\rho}}{\lambda^{rm+\rho}} = F^r \frac{t^{r(m-1)+\rho}}{\lambda^{r(m-1)+\rho}} \qquad (\rho=0, \ldots, r-1) \tag{47}$$

nach Grenzübergang auch $\lambda^r f^\rho = F^r f^\rho$ $(\rho=0, \ldots, r-1)$ richtig. Wir sehen nebenher: höchstens $s$ der Vektoren $f^\rho$ $(\rho=0, \ldots, r-1)$ sind verschieden. Natürlich muß stets $\lambda > 1$ gelten, da $t_\sigma^n$ $(\sigma=0, \ldots, s-1;\ n=0, 1, 2, \ldots)$ eine monoton wachsende Folge ist.

**Lemma 3.** *Sei $(x^t, y^t)$ ein quasiperiodischer Prozeß CFP mit assoziierter Matrix $F$. Für die Eigenwerte von $F$ gelte $|\lambda_0| > \cdots > |\lambda_p|$. Dann gibt es ein reelles $\lambda \in \{\lambda_0, \ldots, \lambda_p\}$ und einen zu $\lambda$ gehörigen Eigenvektor $f$ sowie eine natürliche Zahl $k$, derart, daß gilt*

$$\frac{t^n}{\lambda^n \binom{n}{k}} \to f \qquad (n\to\infty). \tag{48}$$

*Beweis.* Wir bezeichnen mit $h(z)$ ($z$ komplex) das Minimalpolynom der Matrix $F$. Die Matrix $F$ gestattet eine Darstellung $F = U\Pi U^{-1}$ mit nichtsingulärem

$U$ und

$$\Pi = \begin{pmatrix} J^0 & & \\ & \ddots & \\ & & J^p \end{pmatrix}.$$

Falls $\lambda_q$ $(0 \leqq q \leqq p)$ die (algebraische) Vielfachheit $l_q + 1$ hat und als $k_q + 1$-fache Wurzel in $h(z)$ auftaucht, so hat $J^q$ die folgende Gestalt

$$J^q = \begin{pmatrix} J_{\nu_1^q}(\lambda_q) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\nu_{r_q}^q}(\lambda_q) \end{pmatrix}$$

mit

$$J_\nu(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \dots 0 \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

sowie

$$\nu_1^q = k_q + 1, \qquad \nu_\rho^q \leqq k_q + 1 \quad (1 \leqq \rho \leqq r), \qquad \sum_{\rho=1}^{r_q} \nu_\rho^q = l_q + 1 \quad (0 \leqq q \leqq p).$$

Dies ist die sog. Jordan-Darstellung (vgl. [2]). Nun gilt

$$J_\nu^n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} & \dots & \binom{n}{\nu-1} \lambda^{n-\nu+1} \\ 0 & \lambda^n & & \binom{n}{\nu-2} \lambda^{n-\nu+2} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

und daher

$$\begin{aligned} t_\sigma^n = & \sum_{l=0}^{k_0} \mu_\sigma^{l,0} \lambda_0^{n-l} \binom{n}{l} \\ & + \sum_{l=0}^{k_1} \mu_\sigma^{l,1} \lambda_1^{n-l} \binom{n}{l} \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + \sum_{l=0}^{k_p} \mu_\sigma^{l,p} \lambda_p^{n-l} \binom{n}{l}, \end{aligned} \tag{49}$$

wobei jeweils $M^q = (\mu_\sigma^{l,q})$ eine feste Matrix ist. Wir wählen wieder das kleinste $q$ derart, daß $M^q \neq 0$ gilt und setzen $\lambda_q = \lambda$; darauf wählen wir größte $l$, das uns

$$\mu^{l,q} = (\mu_0^{l,q}, \dots, \mu_{s-1}^{l,q}) \neq 0$$

liefert und nehmen an, dieses sei etwa $l=k$. Dann ist nach (49) offenbar

$$\frac{t^n}{\lambda^n \binom{n}{k}} \to \lambda^k \mu^{k,q} \qquad (n\to\infty),$$

weshalb wir $f := \lambda^k \mu^{k,q}$ setzen. Dann ist

$$\frac{\lambda \binom{n}{k} t^n}{\binom{n-1}{k} \lambda^n \binom{n}{k}} = F \frac{t^{n-1}}{\binom{n-1}{k} \lambda^{n-1}}$$

und daher nach Grenzübergang $\lambda f = F f$.

Wir sehen nun, wie eine allgemeine Aussage von der Art der in Lemma 1 bis 3 gemachten aussehen muß:

$\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ seien die Eigenwerte der assoziierten Matrix $F$ eines CFP. Wir schreiben eine Entwicklung (49) an und suchen $q_0 = \min\{q | M^q \neq 0\}$. Es sei

$$|\lambda_{q_0}| = \cdots = |\lambda_{q_1}| =: \lambda \qquad (q_1 \geqq q_0); \tag{50}$$

wir bestimmen $l_q = \max\{l | \mu^{l,q} \neq 0\}$ und nehmen an, daß

$$l_{q_0} = \cdots = l_{q_2} =: k \tag{51}$$

gilt. Dann folgt das

**Lemma 4.** *Sind $\lambda_{q_0}, \ldots, \lambda_{q_2}$ reelle Vielfache von Einheitswurzeln, so gibt es natürliche Zahlen $k \geqq 1$ und $r \geqq 1$ sowie $r$ zum Eigenwert $\lambda^r$ der Matrix $F^r$ gehörige Eigenvektoren $f^0, \ldots, f^{r-1}$ derart, daß gilt*

$$\frac{t^{mr+\rho}}{\binom{mr+\rho}{k} \lambda^{mr+\rho}} \to f^\rho \qquad (\rho = 0, \ldots, r-1;\, m\to\infty). \tag{52}$$

Der *Beweis* ergibt sich aus den Beweisen zu Lemma 1 bis 3. Wir bemerken, daß aus $q_0 = q_2$ bereits folgt, daß $\lambda$ reell ist, denn sonst wäre die assoziierte Folge nicht reell. Natürlich umfaßt Lemma 4 die vorhergehenden Aussagen.

**Definition.** Sei $(x^t, y^t)$ ein quasiperiodischer Prozeß CFP mit assoziierter Matrix $F$. Es mögen die Voraussetzungen von Lemma 4 erfüllt sein. Unter dem *Eigenwert* des CFP verstehen wir dann die durch Lemma 4 bzw. (50) definierte reelle Zahl $\lambda$. Sind $k$ und $r$ die in Lemma 4 beschriebenen natürlichen Zahlen, so sagen wir, $\lambda$ sei von der *Vielfachheit* $k+1$ *und r-fach zyklisch.* Die zu $\lambda^r$ gehörigen Eigenvektoren von $F^r$ heißen auch die *Eigenvektoren* des CFP.

*Bemerkung.* Sämtliche Eigenvektoren eines CFP sind strikt positiv.

Denn wegen

$$0 < t_0^{mr} < t_1^{mr} < \cdots t_0^{mr+1} < \cdots t_{s-1}^{(m+1)r-1} < t_0^{(m+1)r}$$

muß

$$0 \leqq f_0^0 \leqq f_1^0 \leqq \cdots \lambda f_0^1 \leqq \cdots \lambda^{r-1} f_{s-1}^{r-1} \leqq \lambda^r f_0^0$$

gelten. Mithin verschwinden entweder sämtliche $f_\sigma^\rho$ $(\rho=0,\ldots,r-1)$ $(\sigma=0,\ldots,s-1)$ oder keines.

Nehmen wir an, das Erstere sei der Fall.

Dann ist mit den Bezeichnungen von Lemma 1 bis 4:

$$\frac{t_\sigma^n}{\lambda^n\binom{n}{k}} \to \mu_\sigma^{k,q_0}\left(\frac{\lambda_{q_0}}{\lambda}\right)^n + \cdots + \mu_\sigma^{k,q_2}\left(\frac{\lambda_{q_2}}{\lambda}\right)^n \quad (n\to\infty).$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$v=q_2-q_0;\qquad s_\sigma^n=\frac{t_\sigma^n}{\lambda^n\binom{n}{k}};\qquad \mu_\sigma^{k,q_0}=c_\sigma^0,\ldots,\mu_\sigma^{k,q_2}=c_\sigma^v;\qquad \frac{\lambda_{q_0}}{\lambda}=\xi_0,\ldots,\frac{\lambda_{q_2}}{\lambda}=\xi_v.$$

Dann gilt

und

$$\begin{aligned}
s_\sigma^n &\to c_\sigma^0\,\xi_0^n + \cdots + c_\sigma^v\,\xi_v^n,\\
s_\sigma^{n+1} &\to c_\sigma^0\,\xi_0^n\,\xi_0 + \cdots + c_\sigma^v\,\xi_v^n\,\xi_v\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
s_\sigma^{n+v} &\to c_\sigma^0\,\xi_0^n\,\xi_0^v + \cdots + c_\sigma^v\,\xi_v^n\,\xi_v^v.
\end{aligned}$$

Andererseits müßte $s_\sigma^n \to 0,\ldots,s_\sigma^{n+v}\to 0$ aus $f_\sigma^\rho=0$ $(\sigma=0,\ldots,s-1;\rho=0,\ldots,r-1)$ folgen. Mithin wäre

$$0 \leftarrow \begin{pmatrix} s_\sigma^n \\ \vdots \\ s_\sigma^{n+v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \xi_0 & \cdots & \xi_v \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_0^v & \cdots & \xi_v^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\sigma^0\,\xi_0^n \\ \vdots \\ c_\sigma^v\,\xi_v^n \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientendeterminante ist aber gerade die Vandermondesche, die nicht verschwindet, da alle $\xi_u$ $(u=0,\ldots,v)$ paarweise verschieden sind. Folglich muß

$$\begin{aligned}
&c_\sigma^0\,\xi_0^n \to 0\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&c_\sigma^v\,\xi_v^n \to 0 \qquad (\sigma=0,\ldots,s-1) \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

gelten, was mit $\mu^{k,q_0}\neq 0,\ldots,\mu^{k,q_2}\neq 0$ nicht vereinbar ist.

Wir bemerken ferner, daß für den Eigenwert $\lambda$ eines CFP jedenfalls $\lambda \geqq 1$ gelten muß – anderenfalls wäre die assoziierte Folge nicht monoton wachsend. Ist $\lambda=1$, so muß aus den gleichen Gründen $\lambda$ mindestens von der Vielfachheit 2 sein. In Satz 3.11 beweisen wir, daß $\lambda=1$ sogar mindestens zweifacher Eigenwert der Matrix $F$ sein muß – jedoch sind die Eigenwerte der Matrix und der Eigenwert des Prozesses immer auseinanderzuhalten.

**Definition.** Ein quasiperiodischer CFP heißt *asymptotisch periodisch*, falls die Umkehrpunkte $x^{t_\sigma^n}$, $y^{t_\sigma^n}$ (eventuell mod $r$) konvergieren, genauer:

$$x^{t_\sigma^{mr+\rho}} \to x^{\rho\sigma}$$

$$y^{t_\sigma^{mr+\sigma}} \to y^{\rho\sigma}$$

$$(\sigma=0,\ldots,s-1;\ \rho=0,\ldots,r-1;\ m\to\infty)$$

mit gewissen $x^{\rho\sigma}$, $y^{\rho\sigma}$, die *asymptotische Umkehrpunkte* heißen mögen. Die Bahn des Prozesses nähert sich dann der von den $x^{\rho\sigma}$ bzw. $y^{\rho\sigma}$ aufgespannten Bahn.

**Satz 3.3.** *Sei* $(x^t, y^t)$ *ein quasiperiodischer Prozeß mit Eigenwert* $\lambda$. *Ist* $\lambda > 1$, *so ist der Prozeß asymptotisch periodisch.*

*Beweis.* $\lambda$ sei $r$-fach zyklisch und von der Vielfachheit $k+1$. $f^0, \ldots, f^{r-1}$ seien die Eigenvektoren des Prozesses. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 = m_0 r$ derart, daß für $n = mr + \rho \geqq n_0$ stets gilt (Lemma 4):

$$\left| \frac{t_\sigma^n}{\lambda^n \binom{n}{k}} - f_\sigma^\rho \right| < \varepsilon. \tag{53}$$

Nach Satz 3.1 ist

$$t_\sigma^n y_j^{t_\sigma^n} = t_\sigma^{n-r} y^{t_\sigma^{n-r}} + \sum_{l=0}^{r-1} \left( \sum_{q=\sigma+1}^{s-1} \Delta^{t_q^{n-l-1}} \varepsilon_j^q + \sum_{q=0}^{\sigma} \Delta^{t_q^{n-l}} \varepsilon_j^q \right) \tag{54}$$

für fixiertes $\sigma$ und $j$. Mit gewissen Koeffizienten $c_q = c_{jq}$ $(\rho = 0, \ldots, s-1)$ läßt sich (54) auch umschreiben zu

$$t_\sigma^n y_j^{t_\sigma^n} - t_\sigma^{n-r} y_j^{t_\sigma^{n-r}} = \sum_{l=0}^{r-1} \left( \sum_{q=0}^{s-1} c_q t_q^{n-l-1} + \sum_{l=0}^{\sigma} c_q t_q^{n-l} \right). \tag{55}$$

Durch Division mit $\lambda_n \binom{n}{k}$ erhält man aus (55) unter Beachtung von (53)

$$\begin{aligned} \Bigg| f_\sigma^\rho y_j^{t_\sigma^n} - \frac{\binom{n-r}{k}}{\lambda^r \binom{n}{k}} f_\sigma^\rho y_j^{t_\sigma^{n-r}} - \sum_{l=0}^{r-1} \Bigg( \sum_{q=\sigma}^{s-1} c_q f_q^{\rho-l-1} \frac{\binom{n-l-1}{k}}{\lambda^{l+1} \binom{n}{k}} \\ + \sum_{q=0}^{\sigma} c_q f_q^{\rho-l} \frac{\binom{n-l}{k}}{\lambda^l \binom{n}{k}} \Bigg) \Bigg| < \varepsilon (r-1) s. \end{aligned} \tag{56}$$

Wir fassen die Koeffizienten der Glieder $\binom{n-l}{k} \Big/ \lambda^l \binom{n}{k}$ zusammen und dividieren noch mit $f_\sigma^\rho$, dann folgt aus (56)

$$\left| y_j^{t_\sigma^n} - \frac{\binom{n-r}{k}}{\lambda^r \binom{n}{k}} y_j^{t_\sigma^{n-r}} - \sum_{l=0}^{r} h_l \frac{\binom{n-l}{k}}{\lambda^l \binom{n}{k}} \right| < \frac{\varepsilon (r+1) s}{f_\sigma^\rho}$$

mit gewissen Koeffizienten $h_l$ $(l = 0, \ldots, r)$.

Wir setzen noch $M=m-m_0$ und schätzen ab:

$$\left| y_j^{t_\sigma^n} - \frac{\binom{n-Mr}{k}}{\lambda^{Mr}\binom{n}{k}} y_j^{t_\sigma^{n-Mr}} - \sum_{\mu=0}^{M-1} \frac{1}{\lambda^{\mu r}\binom{n}{k}} \sum_{l=0}^{r} h_l \frac{\binom{n-\mu r-l}{k}}{\lambda^l} \right|$$

$$\leqq \left| y_j^{t_\sigma^n} - \frac{\binom{n-r}{k}}{\lambda^r\binom{n}{k}} y_j^{t_\sigma^{n-r}} - \sum_{l=0}^{r} h_l \frac{\binom{n-l}{k}}{\lambda^l} \right|$$

$$+\frac{\binom{n-r}{k}}{\lambda^r\binom{n}{k}} \left| y_j^{t_\sigma^n} - \frac{\binom{n-2r}{k}}{\lambda^r\binom{n-r}{k}} y_j^{t_\sigma^{n-2r}} - \sum_{l=0}^{r} h_l \frac{\binom{n-r-l}{k}}{\lambda^l\binom{n-r}{l}} \right|$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\binom{n-(M-1)r}{k}}{\lambda^{(M-1)r}\binom{n}{k}} \left| y_j^{t_\sigma^{n-(M-1)r}} - \frac{\binom{n-Mr}{k}}{\lambda^r\binom{n-(M-1)r}{k}} y_j^{t_\sigma^{n-Mr}} \right.$$

$$\left. - \sum_{l=0}^{r} h_l \frac{\binom{n-(M-1)r-l}{k}}{\lambda^l\binom{n-(M-1)r}{k}} \right|$$

$$<\varepsilon \sum_{\mu=0}^{M-1} \frac{\binom{n-\mu r}{k}}{\lambda^{\mu r}\binom{n}{k}} \frac{s(r+1)}{f_\sigma^\rho} < \frac{\varepsilon}{\lambda^r}\,\frac{1}{\lambda-1}\,\frac{s(r+1)}{f_\sigma^\rho}.$$

Strebt nun $m\to\infty$, d.h., $n, M\to\infty$, so konvergiert

$$\sum_{\mu=0}^{M-1} \frac{1}{\lambda^{\mu r}\binom{n}{k}} \sum_{l=0}^{r} h_l \frac{\binom{n-\mu r-l}{}}{\lambda^l}$$

gegen eine feste Zahl $g_j$ während

$$\frac{\binom{n-Mr}{k}}{\lambda^{Mr}\binom{n}{k}} y_j^{t_\sigma^{n-Mr}} \to 0$$

aus der Beschränktheit von $Y$ folgt. Daher gibt es zu jedem $\eta>0$ ein $n_1$, so daß aus $n=mr+\rho\geqq n_1$ stets

$$|y_j^{t_\sigma^n}-g_j|<\eta$$

folgt, womit der Satz bewiesen ist.

**Satz 3.4.** *Sei $(x^t, y^t)$ ein quasiperiodischer CFP mit Eigenwert $\lambda$. Ist $\lambda=1$, so ist $\lambda$ nur einfach zyklisch und der Prozeß konvergiert gegen einen Gleichgewichtspunkt $(\bar{x}, \bar{y})$. $\bar{x}$ und $\bar{y}$ haben die gleiche Anzahl positiver Komponenten.*

*Beweis.* Es seien o.B.d.A. $K_1, \ldots, K_{M_0}$; $L_1, \ldots, L_{N_0}$ diejenigen der $K_i$ $(i\in I=\{1, \ldots, M\})$ bzw. $L_j$ $(j\in J=\{1, \ldots, N\})$ die von Prozeß $(x^t, y^t)$ („nach einer gewissen Zeit") durchlaufen werden. Dann gilt

$$\begin{aligned} &x_i\to 0 \quad (i\notin\{1, \ldots, M_0\})\\ &y_j\to 0 \quad (j\notin\{1, \ldots, N_0\}). \end{aligned} \tag{57}$$

Aus (8) leiten wir die Beziehung

$$t_\sigma^n\, y^{t_\sigma^n}-t_{\sigma-1}^n\, y^{t_{\sigma-1}^n}=(t_\sigma^n-t_{\sigma-1}^n)\, e^j \qquad (x^t\in L_j \text{ für } t_{\sigma-1}^n\leqq t\leqq t_\sigma^n) \tag{58}$$

her. Ist $\lambda$ etwa $r$-fach zyklisch und von der Vielfachheit $k+1$, so ist nach Lemma 4 für festes $\rho$ und $n=mr+\rho$

$$\frac{t_\sigma^{n-r}}{t_\sigma^n}=\frac{\dfrac{t_\sigma^{n-r}}{\binom{n-r}{k}}\,\dfrac{\binom{n-r}{k}}{\binom{n}{k}}}{\dfrac{t_\sigma^n}{\binom{n}{k}}}\to\frac{f_\sigma^\rho}{f_\sigma^\rho}=1 \qquad (\sigma=0, \ldots, s-1)$$

und folglich wegen

$$\frac{t_\sigma^{n-r}}{t_\sigma^n}\leqq\frac{t_{\sigma+1}^{n-r}}{t_\sigma^n}\leqq\cdots\leqq\frac{t_{\sigma-1}^n}{t_\sigma^n}\leqq\frac{t_\sigma^n}{t_\sigma^n}=1$$

auch

$$\frac{t_{\sigma-1}^n}{t_\sigma^n}\to 1 \quad\text{und}\quad \frac{t_\sigma^{n-1}}{t_\sigma^n}\to 1. \tag{59}$$

Aus (59) folgt offenbar, daß $f_\sigma^\rho=f_\sigma^{\rho-1}$ $(\sigma=0, \ldots, s-1; \rho=1, \ldots, r-1)$ gilt, d.h., alle Eigenvektoren des Prozesses sind gleich einem Vektor $f$, der ein Vielfaches des Vektors $(1, \ldots, 1)=e$ ist, etwa $f=de$. Mithin gilt mit den Bezeichnungen der nach Lemma 4 gemachten Bemerkung:

$$\begin{aligned} &c_\sigma^0\,\xi_0^n+\cdots+c_\sigma^v\,\xi_v^n\to d\\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots\\ &c_\sigma^0\,\xi_0^n\,\xi_0^v+\cdots+c_\sigma^v\,\xi_v^n\,\xi_v^v\to d \qquad (\sigma=0, \ldots, s-1; n\to\infty). \end{aligned}$$

Da alle $\xi_u$ $(u=0, \ldots, v)$ verschieden sein sollen, folgt aus der Nichtsingularität der Vandermondeschen Determinante $\Theta$

$$(c_\sigma^0 \xi_1^n, \ldots, c_\sigma^v \xi_v^n) \to \Theta^{-1} e d$$

d.h.

$$\xi_u^n \to \xi_u^{n+1} \qquad (u=0, \ldots, v; n \to \infty) \tag{60}$$

und das ist nur möglich, falls alle $\xi_u = 1$ $(u=0, \ldots, v)$ sind. Mithin ist $\lambda$ einfach zyklisch.

(58) und (59) liefern zusammen

$$y^{t_{\sigma-1}^n} \to y^{t_\sigma^n} \qquad (\sigma=1, \ldots, s-1),$$

woraus allgemein

$$y^{t_\sigma^n} \to y^{t_{\sigma'}^n} \qquad (\sigma, \sigma'=1, \ldots, s-1) \tag{61}$$

folgt. Aus Kompaktheitsgründen existiert ein Häufungspunkt der Folge $y^{t_\sigma^n}$ (für festes $\sigma$; $n=0, 1, 2, \ldots$), etwa $\bar{y}$; sei $n_q$ $(q=1, 2, \ldots)$ eine Teilfolge der natürlichen Zahlen mit

$$y^{t_\sigma^{n_q}} \to \bar{y} \qquad (q \to \infty). \tag{62}$$

Dann ist wegen (61) auch

$$y^{t_{\sigma'}^{n_q}} \to \bar{y} \qquad (q \to \infty) \cdot (\sigma'=0, \ldots, s-1). \tag{63}$$

Nach Konstruktion der Folge $y^{t_\sigma^n}$ $(\sigma=0, \ldots, s-1)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ gibt es gewisse $K_1, \ldots, K_{s-1}$ derart, daß

$$y^{t_\sigma^n} \in K_\sigma \cap K_{\sigma+1} \tag{64}$$

gilt. Die angeschriebenen Mengen $K_\sigma \cap K_{\sigma+1}$ sind aber abgeschlossen und daher muß aus (63) und (64) folgen $\bar{y} \in K_{1 \ldots M_0}$. Entsprechend gilt $\bar{x} \in L_{1 \ldots N_0}$ für einen Häufungspunkt $\bar{x}$ der Folge $\{x^{t_\sigma^n}\}$. Aus (57) folgt nunmehr

$$\begin{aligned} &\bar{x} \in X_{1, \ldots, M_0} \cap L_{1, \ldots, N_0} \\ &\bar{y} \in Y_{1, \ldots, N_0} \cap K_{1, \ldots, M_0}. \end{aligned} \tag{65}$$

Vergleichen wir nun (65) mit unseren unter Bemerkung D, Punkt 3 gemachten Ausführungen, so sehen wir, daß $M_0 \leqq N_0$ und $N_0 \leqq M_0$, also $M_0 = N_0$, gelten muß. Ebenso sehen wir mit den Methoden der Bemerkung D:

$$\begin{aligned} X_{1, \ldots, M_0} \cap L_{1, \ldots, N_0} &= \{\bar{x}\} \\ Y_{1, \ldots, N_0} \cap K_{1, \ldots, M_0} &= \{\bar{y}\}. \end{aligned}$$

Also hat die Folge $\{y^{t_\sigma^n}\}$ bzw. $\{x^{t_\sigma^n}\}$ nur einen einzigen Häufungspunkt $\bar{y}$ bzw. $\bar{x}$; aus (65) lesen wir ab, daß $(\bar{x}, \bar{y})$ ein Gleichgewichtspunkt ist.

### *3.3. Berechnung der asymptotischen Umkehrpunkte*

Es sei $(x^t, y^t)$ ein quasiperiodischer CFP mit Eigenwert $\lambda > 1$. $\lambda$ sei $r$-fach zyklisch und von der Vielfachheit $k+1$. Wie wir schon in 3.2 bemerkt haben, gilt für die Komponenten der Eigenvektoren des Prozesses:

$$0 < f_0^0 \leqq f_1^0 \leqq \cdots \leqq \lambda f_0^1 \leqq \cdots \leqq \lambda^{r-1} f_{s-1}^{r-1} \leqq \lambda^r f_0^0 . \tag{66}$$

Ist speziell $r=1$, so gilt

$$0 < f_0 \leqq f_1 \leqq \cdots \leqq \lambda f_0 \tag{67}$$

für den einzigen Eigenvektor des Prozesses. Aus Eigenwert und Eigenvektoren berechnen sich die asymptotischen Umkehrpunkte

$$y^{\rho,\sigma} = \lim_{m\to\infty} y^{t_\sigma^{mr+\rho}}$$

und

$$x^{\rho,\sigma} = \lim_{m\to\infty} x^{t_\sigma^{mr+\rho}}$$

wie folgt:

Wie in (54) haben wir wieder

$$t_\sigma^n y_j^{t_\sigma^n} - t_\sigma^{n-r} y_j^{t_\sigma^{n-r}} = \sum_{l=0}^{r-1} \left( \sum_{q=\sigma+1}^{s-1} (t_q^{n-l-1} - t_{q-1}^{n-l-1})\, \varepsilon_j^q + \sum_{q=0}^{\sigma} (t_q^{n-l} - t_{q-1}^{n-l})\, \varepsilon_j^q \right.$$
$$(j \in J;\ \sigma = 0, \ldots, s-1;\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ q \bmod s \text{ zu rechnen}).$$

Division mit $\lambda^n \binom{n}{k}$ und Grenzübergang liefert für $n = mr + \rho \to \infty$:

$$\begin{aligned} f_\sigma^\rho y_j^{\rho,\sigma} - \frac{1}{\lambda^r} f_\sigma^\rho y_j^{\rho,\sigma} = \sum_{l=0}^{r-1} \Bigg( & \sum_{q=\sigma+1}^{s-1} \frac{1}{\lambda^{l+1}} (f_q^{\rho-l-1} - f_{q-1}^{\rho-l-1})\, \varepsilon_j^q \\ & + \sum_{q=0}^{\sigma} \frac{1}{\lambda^l} (f_q^{\rho-l} - f_{q-1}^{\rho-l})\, \varepsilon_j^q \Bigg). \end{aligned} \tag{68}$$

Es folgt in naheliegender Bezeichnungsweise mit Hilfe von $\Delta$:

$$y_j^{\rho,\sigma} = \frac{\lambda^r}{f_\sigma^\rho (\lambda^r - 1)} \sum_{l=0}^{r-1} \left( \sum_{q=\sigma+1}^{s-1} \frac{\Delta^{f_q^{\rho-l-1}}}{\lambda^{l+1}}\, \varepsilon_j^q + \sum_{q=0}^{\sigma} \frac{\Delta^{f_q^{\rho-l}}}{\lambda^l}\, \varepsilon_j^q \right), \tag{69}$$

wobei natürlich $f^{\rho-l}$ für alle in Frage kommenden $\rho$ und $l \bmod r$ zu rechnen ist.

Wir drücken das verbal aus im folgenden Satz:

**Satz 3.5.** *Zur Berechnung der Komponente $y_j^{\rho,\sigma}$ des asymptotischen Umkehrpunktes $y^{\rho,\sigma}$ $(\rho = 0, \ldots, r-1)$ $(\sigma = 0, \ldots, s-1)$ hat man wie folgt vorzugehen: Man addiert alle Differenzen $\Delta^{f_q^{\rho'}}$, für die $x^t \in L_j$ $\left(t \in J^{t_q^n} (n = 0, 1, 2, \ldots)\right)$ gilt und zwar mit dem Gewicht $1/\lambda^p$ falls $\rho' = \rho - p$ $(p \in \{0, \ldots, r-1\};\ \rho, \rho' \bmod r$ zu rechnen) ist. Danach muß man noch mit einem Faktor $\dfrac{\lambda^r}{f_\sigma^\rho (\lambda^r - 1)}$ multiplizieren.*

Damit können wir nun die Gestalt der asymptotisch angenäherten Bahn berechnen, falls der Eigenwert des Prozesses $\lambda > 1$ erfüllt. Ist $\lambda$ $r$-fach zyklisch, so besteht die Bahn aus $r$ Zyklen, die nacheinander durchlaufen werden.

### *3.4. Verhalten des diskreten Prozesses*

Den Begriff quasiperiodisch haben wir für DFP und CFP gleichermaßen definiert. Ebenso haben das Schema (33) und der Graph (Fig. 3) in beiden Fällen Gültigkeit.

Wir wenden uns jetzt dem DFP zu und untersuchen, welche der in 3.2 gewonnenen Ergebnisse sich auf ihn übertragen lassen.

Da wir es nunmehr mit diskreten Zeitpunkten

$$t = t_0^0,\, t_0^0+1,\, t_0^0+2, \ldots$$

zu tun haben, haben wir keine Veranlassung mehr, $y^t \in K_{ij}$ für gewisse $t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $i \in I$ und $j \in J$ anzunehmen und müssen daher den Begriff der assoziierten Folge neu fassen. Da ferner $(x^t, y^t)$ $t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ nicht mehr kontinuierlich ist, müssen wir uns bezüglich der durch (5) gegebenen Definition festlegen, wie ein Spieler sich verhalten soll, falls zwei optimale reine Strategien zu einem gewissen Zeitpunkt für ihn zur Wahl stehen. Wir werden sehen, daß es keinen Einfluß auf das asymptotische Verhalten des Prozesses hat, wenn wir in einem solchen Fall dem betreffenden Spieler die freie Wahl lassen.

Wir setzen nun $t_0^0 > T$ so an, daß $(x^{t_0^0}, y^{t_0^0}) \in H_0$ gilt. Danach durchläuft $(x^t, y^t)$ die $H_\sigma$ in der vorgeschriebenen Reihenfolge $\sigma = 0, 1, \ldots, s-1$. Jedesmal, wenn

$$(x^{t'}, y^{t'}) \in H_\sigma \qquad (t_\sigma^n \leqq t' \leqq t)$$

gilt und etwa $i_\sigma \neq i_{\sigma+1}$ ist, gibt es genau ein $t_{\sigma+1}^n \geqq t$ derart, daß

$$y^{t_\sigma^n - 1} \in K_{i_\sigma}, \qquad y^{t_\sigma^n} \in K_{i_{\sigma+1}}$$

gilt ($\sigma \bmod s$ zu rechnen). Dadurch ist die assoziierte Folge $t_\sigma^n$ ($\sigma = 0, \ldots, s-1$; $n = 0, 1, 2, \ldots$) erklärt und wir können daher die Begriffe „Umkehrpunkt" und „asymptotisch periodisch" übernehmen. Von jetzt an werden wir nicht mehr extra vermerken, daß wir es mit diskreten Zeitpunkten zu tun haben.

Wie früher definieren wir (mit den notwendigen Abänderungen, die sich aus dem Rechnen mit $\sigma \bmod s$ ergeben):

$$J^{t_\sigma^n} = \{t \mid t_{\sigma-1}^n + 1 \leqq t \leqq t_\sigma^n\}$$

$$\varepsilon_j^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{falls } x^t \in L_j \text{ für } t \in J^{t_\sigma^n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Delta^{t_\sigma^n} = t_\sigma^n - (t_{\sigma-1}^n - 1).$$

Dann gilt

**Satz 3.6.** *Es ist*

$$t_\sigma^n y_j^{t_\sigma^n} = \sum_{\substack{v \\ t_q^v \leqq t_\sigma^n}} \Delta^{t_q^v} \varepsilon_j^q + w_j^\sigma(n) \qquad (\sigma = 0, \ldots, s-1)\,(n = 0, 1, 2, \ldots; j \in J).$$

*Dabei ist $w_j^\sigma(n)$ mit $0 \leqq w_j^\sigma(n) \leqq ns$ eine Fehlergröße, die durch die erwähnte freie Wahl eines Spielers unter gleichguten Strategien entsteht (vgl. auch* [7]*).*

*Beweis.* Das Ergebnis entspricht dem aus Satz 3.1.

Ist $t' \in J^{t_q^\nu}$ $(t_q^\nu \leqq t_\sigma^n)$, $x^{t'} \in L_j$, so gilt

$$\begin{aligned} t_q^\nu y^{t_q^\nu} &= (t_q^\nu - 1)\, y^{t_q^\nu - 1} + e^j \\ &= (t_q^\nu - 1)\left(\frac{t_q^\nu - 2}{t_q^\nu - 1}\, y^{t_q^\nu - 2} + \frac{1}{t_q^\nu - 1}\, e^j\right) + e^j \\ &= (t_q^\nu - 2)\, y^{t_q^\nu - 2} + 2 e^j \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (t_{q-1}^\nu + 1)\, y^{t_{q-1}^\nu + 1} + \left(t_q^\nu - (t_{q-1}^\nu + 1)\right) e^j \end{aligned} \tag{70}$$

d.h., zwischen $t_{q-1}^\nu + 1$ und $t_q^\nu$ wird genau $\Delta^{t_q^\nu}$ auf die Komponente $j$ von $t\, y^t$ hinzuaddiert – genau wie im Beweise von Satz 3.1. Ist nun zufällig

$$x^{t_q^\nu - 1} \in L_j \cap L_{j'}, \tag{71}$$

so steht es nicht fest, ob $t_q^\nu y^{t_q^\nu}$ in (70) noch um 1 erhöht wird oder nicht. Addieren wir alle diese Fehlerglieder während des ganzen $\nu$-ten Zyklus, so wissen wir jedenfalls, daß wir höchstens $s$ mal eine 1 zu addieren haben. Also ist

$$0 \leqq w_j^\sigma(n) \leqq s\, n \tag{72}$$

und sogar

$$0 \leqq w_j^\sigma(n) - w_j^\sigma(n-1) \leqq s. \tag{73}$$

**Satz 3.7.** *Sei* $(x^t, y^t)$ *ein quasiperiodischer DFP, der nach dem Schema* (32) *oder dem Graphen* (33) *abläuft. Es seien ferner* $C$ *und* $D$ *die aus Satz* 3.3 *entnommenen Matrizen. Dann gibt es einen festen Vektor* $c = (c_1, \ldots, c_{s-1})$, *derart, daß für die assoziierte Folge* $\{t_\sigma^n\}$ *des Prozesses stets gilt*

$$-c \leqq C t^n + D t^{n-1} \leqq c.$$

*Beweis.* Wir setzen wieder

$$\begin{aligned} a^{i_\sigma} &= A_{i_{\sigma+1}\cdot} - A_{i_\sigma\cdot} \qquad (\sigma = 0, \ldots, s-1;\ \sigma \bmod s \text{ zu rechnen}) \\ \varepsilon^\sigma &= (\varepsilon_1^\sigma, \ldots, \varepsilon_N^\sigma) \end{aligned} \tag{74}$$

und bemerken, daß

$$t_\sigma^n y^{t_\sigma^n} a^{i_\sigma} \geqq 0, \qquad (t_\sigma^n - 1)\, y^{t_\sigma^n - 1} a^{i_\sigma} \leqq 0 \tag{75}$$

sowie

$$t_\sigma^n y^{t_\sigma^n} - (t_\sigma^n - 1)\, y^{t_\sigma^n - 1} = e^{j_\sigma} \tag{76}$$

gilt. Sei schließlich noch $u_j^\sigma(n) = w_j^\sigma(n) - w_j^\sigma(n-1)$ und $u^\sigma(n) = \left(u_1^\sigma(n), \ldots, u_N^\sigma(n)\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gesetzt. Dann folgt aus Satz 3.6 (bei zunächst festgehaltenem $\sigma$):

$$t_\sigma^n y^{t_\sigma^n} = \sum_{q=\sigma+1}^{s-1} \Delta^{t_q^{n-1}} \varepsilon^q + \sum_{q=0}^{\sigma} \Delta^{t_q^n} \varepsilon^q + t_\sigma^{n-1} y^{t_\sigma^{n-1}} - u^\sigma(n)$$

und daher nach (76)

$$(t_\sigma^n - 1)\, y^{t_\sigma^n - 1} = \sum_{q=\sigma+1}^{s-1} \Delta^{t_q^{n-1}} \varepsilon^q + \sum_{q=0}^{\sigma} \Delta^{t_q^n} \varepsilon^q + t_\sigma^{n-1} y^{t_\sigma^{n-1}} - u^\sigma(n) - e^{j_\sigma}, \tag{77}$$

$$t_\sigma^n y^{t_\sigma^n} = \sum_{q=\sigma+1}^{s-1} \Delta^{t_q^{n-1}} \varepsilon^q + \sum_{q=0}^{\sigma} \Delta^{t_q^n} \varepsilon^q + (t_0^{n-1} - 1)\, y^{t_\sigma^{n-1} - 1} - u^\sigma(n) + e^{j_\sigma}. \tag{78}$$

Wir multiplizieren (77) und (78) beidseitig mit $a^{i_\sigma}$ und beachten (75). Dann folgt aus (77)

$$\sum_{q=\sigma+1}^{s-1} \Delta^{t_q^{n-1}} \varepsilon^q + \sum_{q=0}^{\sigma} \Delta^{t_q^n} \varepsilon^q \leqq a^{i_\sigma} e^{j_\sigma} + u^\sigma(n)\, e^{j_\sigma} \leqq a^{i_\sigma}_{j_\sigma} + s \tag{79}$$

und aus (78)

$$\sum_{q=\sigma+1}^{s-1} \Delta^{t_q^{n-1}} \varepsilon^q + \sum_{q=0}^{\sigma} \Delta^{t_q^n} \varepsilon^q \leqq -a^{i_\sigma}_{j_\sigma} - s. \tag{80}$$

Vergleich mit Satz 3.2 und dem dort angegebenen Beweis lehrt, daß

$$\sum_{q=\sigma+1}^{s-1} \Delta^{t_q^{n-1}} \varepsilon^q + \sum_{q=0}^{\sigma} \Delta^{t_q^n} \varepsilon^q = 0 \qquad (\sigma = 0, \dots, s-1)$$

gerade äquivalent ist mit

$$C_{\sigma.}\, t^{n-1} + D_{\sigma.}\, t^n = 0 \qquad (\sigma = 0, \dots, s-1);$$

m.a.W.:

(79) und (80) bedeuten gerade

$$a^{i_\sigma}_{j_\sigma} + s \geqq C_{\sigma.}\, t^{n-1} + D_{\sigma.}\, t^n \geqq a^{i_\sigma}_{j_\sigma} - s, \tag{81}$$

was gezeigt werden sollte.

Um den Begriff des Eigenwertes für den DFP zu erklären, bedarf es nun noch einiger Vorbereitungen.

Zunächst können wir den Begriff der assoziierten Matrix ohne weiteres übernehmen — es ist

$$F = C^{-1} D$$

zu setzen. Für jedes $g$ im $s$-dimensionalen euklidischen Raum $R^s$ betrachten wir eine (49) entsprechende Entwicklung der Potenzen von $F$ nach den Eigenwerten von $F$:

$$\begin{aligned} F^n g = &\sum_{q=0}^{k_0} \mu_\sigma^{q,0} \lambda_0^{n-q} \binom{n}{q} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \sum_{q=0}^{k_p} \mu_\sigma^{q,p} \lambda_p^{n-q} \binom{n}{q}. \end{aligned} \tag{82}$$

Dabei hängen die Vektoren

$$\mu^{q,u} = (\mu_0^{q,u}, \dots, \mu_{s-1}^{q,u}) \qquad (q = 0, \dots, k_u;\ u = 0, \dots, p)$$

von $g$ ab. Wir erklären nun zunächst für natürliche $k', k$ und komplexe $\lambda', \lambda$ die Relation

$$(k, \lambda) > (k', \lambda')$$

dadurch, daß entweder $|\lambda| > |\lambda'|$ oder $|\lambda| = |\lambda'|$ und $k > k'$ gelten soll und definieren dann:

$$\begin{gathered} H_{\lambda_u, k} = \{g \in R^s \mid \text{in (82) ist } \mu^{l,v} = 0 \text{ für } (\lambda_v, l) > (\lambda_u, k)\} \\ (u = 1, \dots, p) \\ (k = 0, \dots, \max k_q). \end{gathered}$$

$H_{\lambda_u,k}$ ist offenbar ein linearer Unterraum des $R^s$, der zudem unter $F$ invariant ist. Daher kann man $F$ auf $H_{\lambda_u,k}$ einschränken und

$$|F|_{\lambda_u,k} = \sup_{\substack{|g|=1 \\ g\in H_{\lambda_u,k}}} |Fg|$$

schreiben. Dann ist sicher einerseits für $g\in H_{\lambda_u,k}$ $|Fg| \leqq |F|_{\lambda_u,k}|g|$ und andererseits weiß man, daß die Folge

$$\frac{|F^n|_{\lambda_u,k}}{\lambda_u^n \binom{n}{k}} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

beschränkt ist. Es folgt nun die Definition des Eigenwertes für den DFP:

**Definition.** Sei $(x^t, y^t)$ ein quasiperiodischer DFP mit assoziierter Matrix $F$ und assoziierter Folge $\{t_\sigma^n\}$. Für die Eigenwerte $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ von $F$ mögen die Voraussetzungen des Lemma 4 gelten. Ist

$$P = \{(\lambda_u, k) | \text{Für jedes } n \text{ gibt es ein } m \geqq n, \text{ so daß } t^m \in H_{\lambda_u,k'} \text{ und}$$
$$t^m \notin H_{\lambda_v,k''} \text{ für } (\lambda_v, k'') < (\lambda_u, k') \text{ gilt}\}$$

und sind $(\lambda_{u_1}, k), \ldots, (\lambda_{u_d}, k)$ so gewählt, daß aus $(\lambda_u, k') \in P$ stets $(\lambda_u, k') \not> (\lambda_{u_\nu}, k)$ $(\nu=1,\ldots,d)$ folgt, so heißt

$$\lambda = |\lambda_{u_1}| = \cdots = |\lambda_{u_d}|$$

der Eigenwert des DFP. $k+1$ heißt die Vielfachheit von $\lambda$. Ist $\lambda_{u_\nu} = \lambda e^{2\pi i \frac{l_\nu}{r_\nu}}$ mit ganzzahligen $l_\nu, r_\nu$, $(\nu=1,\ldots,d)$, so heißt $\lambda$ $r$-fach zyklisch, falls $r = kg\, V(r_1, \ldots, r_d)$ ist. Wir bezeichnen mit $H_\lambda$ die lineare Hülle der Menge

$$\left\{ g \,|\, g \in \bigcup_{\nu=1}^{d} H_{\lambda_{u_\nu},k},\ g \notin H_{\lambda_u,k'} \text{ falls } (\lambda_u, k') < (\lambda_{u_\nu}, k)(\nu=1,\ldots,d) \right\}.$$

Nach Definition gibt es dann „immer wieder" Vektoren $t^n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ in $H_\lambda$. Ist $\overline{H}_\lambda$ die lineare Hülle von $\bigcup_{\nu=1}^{d} H_{\lambda_\nu}, k$, so wissen wir, $\overline{H}_\lambda$ $F$-invariant ist. Wir schreiben

$$|F|_\lambda = \sup_{\substack{g\in \overline{H}_\lambda \\ |g|=1}} |Fg|$$

und wissen, daß $\dfrac{|F^n|_\lambda}{\lambda^n \binom{n}{k}}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ beschränkt ist.

Für hinreichend große $n$ gilt stets $t^n \in \overline{H}_\lambda$, also z.B. auch $t^{n+m} - F^m t^n \in \overline{H}_\lambda$ $(m=0,1,2,\ldots)$. Davon werden wir nun häufig Gebrauch machen.

**Satz 3.8.** *Es sei $(x^t, y^t)$ ein quasiperiodischer DFP mit Eigenwert $\lambda$. Dann ist $\lambda \geqq 1$.*

*Beweis.* Nach Satz 3.7 gibt es eine Konstante $\gamma$ derart, daß gilt

$$|t^n - F t^{n-1}| \leqq \gamma \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

falls $\{t_\sigma^n\}$ die assoziierte Folge des Prozesses ist. Wir wählen ein $m$, so daß $t^m \in H_\lambda$ gilt, dann folgt

$$|t^{n+m} - F^n t^m| \leqq \gamma \sum_{\nu=0}^{n-1} |F^\nu|_\lambda \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{83}$$

Angenommen es ist $\lambda<1$ sowie $\lambda$ etwa $r$-fach zyklisch und von der Vielfachheit $k+1$. Wie in Lemma 4 beweisen wir: es gibt Konstanten $\delta_0, \ldots, \delta_{r-1}$ derart, daß man zu jedem $\varepsilon$ ein $N$ findet, mit dem man

$$\left| \left| \frac{F^\nu}{\lambda\nu \binom{\nu}{k}} \right|_\lambda - \delta_\rho \right| < \varepsilon, \qquad (\nu \geqq N, \nu = m r + \rho, 0 \leqq \rho \leqq r-1) \tag{84}$$

sicherstellen kann. Es seien $\varepsilon$ und $N$ fixiert. Wir haben für $n-1>N$:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} |F^\nu|_\lambda \leqq \sum_{\nu=0}^{N-1} |F^\nu|_\lambda + \sum_{\nu=N}^{n-1} \left| |F^\nu|_\lambda - \delta_{\rho(\nu)} \lambda^\nu \binom{\nu}{k} \right| + \sum_{\nu=N}^{n-1} \left| \delta_{\rho(\nu)} \lambda^\nu \binom{\nu}{k} \right|,$$

wobei wir $\delta_{\rho(\nu)} = \delta_{\rho'}$ für $\nu = m r + \rho'$ $(0 \leqq \rho \leqq r-1)$ gesetzt haben. Mit (84) können wir fortfahren:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n-1} |F^\nu|_\lambda &\leqq \text{const}_1 + \varepsilon \sum_{\nu=N}^{n-1} \lambda^\nu \binom{\nu}{k} + \max_{0 \leqq \rho \leqq r-1} |\delta_\rho| \sum_{\nu=N}^{n-1} \lambda^\nu \binom{\nu}{k} \\ &\leqq \text{const}_2, \text{ falls } \lambda < 1. \end{aligned}$$

Aus (84) folgt auch $|F^n|_\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$, während (83) und (85) zusammen

$$|t^{n+m} - F^n t^m| \leqq \gamma \, \text{const}_2$$

liefern, woraus insgesamt zu ersehen ist, daß die Folge $\{t_\sigma^n\}$ notwendig beschränkt sein muß. Dann kann sie aber nicht assoziierte Folge eines DFP sein.

**Satz 3.9.** *Sei $(x^t, y^t)$ ein quasiperiodischer DFP mit Eigenwert $\lambda > 1$. Dann ist der Prozeß asymptotisch periodisch.*

*Beweis.* Die Vielfachheit von $\lambda$ sei $k+1$; $\{t_\sigma^n\}$ sei die assoziierte Folge. Dann gilt

$$-c \leqq C t^n + D t^{n-1} \leqq c \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

und

$$\frac{-c}{\lambda^n \binom{n}{k}} \leqq \frac{C t^n}{\lambda^n \binom{n}{k}} - \frac{\binom{n-1}{k}}{\lambda \binom{n}{k}} \frac{D t^{n-1}}{\lambda^{n-1} \binom{n-1}{k}} \leqq \frac{c}{\lambda^n \binom{n}{k}}.$$

Daher gibt es eine Konstante $\gamma$, so daß gilt:

$$\left| \frac{t^n}{\lambda^n \binom{n}{k}} - \frac{\binom{n-1}{k}}{\lambda \binom{n}{k}} \frac{F t^{n-1}}{\lambda^{n-1} \binom{n-1}{k}} \right| \leqq \gamma.$$

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ $(\varepsilon_i > 0)$ eine Nullfolge und $N_1$ so gewählt, daß $t^{N_1} \in H_\lambda$ und $\frac{C_2 \gamma}{\lambda^{N_1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ mit $C_2 = \frac{1}{\lambda - 1}$ gilt. Dann ist

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{t^{N_1+n}}{\lambda^{N_1+n}\binom{N_1+n}{k}} - \frac{\binom{N_1}{k}\binom{n}{k}}{\binom{N_1+n}{k}} \frac{F^n}{\lambda^n \binom{n}{k}} \frac{t^{N_1}}{\binom{N_1}{k}\lambda^{N_1}} \right| \\
&= \left| \frac{t^{N_1+n}}{\lambda^{N_1+n}\binom{N_1+n}{k}} - \frac{\binom{N_1}{k}}{\binom{N_1+n}{k}\lambda^n} F^n \frac{t^{N_1}}{\binom{N_1}{k}\lambda^{N_1}} \right| \\
&\leqq \left| \frac{t^{N_1+n}}{\lambda^{N_1+n}\binom{N_1+n}{k}} - \frac{\binom{N_1+n-1}{k}}{\lambda\binom{N_1+n}{k}} F \frac{t^{N_1+n-1}}{\lambda^{N_1+n-1}\binom{N_1+n-1}{k}} \right| + \frac{|F|_\lambda}{\lambda} \frac{\binom{N_1+n-1}{k}}{\binom{N_1+n}{k}} \\
&\quad \cdot \left| \frac{t^{N_1+n-1}}{\lambda^{N_1+n-1}\binom{N_1+n-1}{k}} - \frac{\binom{N_1+n-2}{k}}{\lambda\binom{N_1+n-1}{k}} F \frac{t^{N_1+n-2}}{\lambda^{N_1+n-2}\binom{N_1+n-2}{k}} \right| \\
&\quad + \frac{|F^2|_\lambda}{\lambda^2} \frac{\binom{N_1+n-2}{k}}{\binom{N_1+n}{k}} \qquad\qquad (85) \\
&\quad \cdot \left| \frac{t^{N_1+n-2}}{\lambda^{N_1+n-2}\binom{N_1+n-2}{k}} - \frac{\binom{N_1+n-3}{k}}{\lambda\binom{N_1+n-2}{k}} F \frac{t^{N_1+n-3}}{\lambda^{N_1+n-3}\binom{N_1+n-3}{k}} \right| \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \frac{|F^{n-1}|_\lambda}{\lambda^{n-1}} \frac{\binom{N_1+1}{k}}{\binom{N_1+n}{k}} \left| \frac{t^{N_1+1}}{\lambda^{N_1+1}\binom{N_1+1}{k}} - \frac{\binom{N_1}{k}}{\lambda\binom{N_1+1}{k}} F \frac{t^{N_1}}{\lambda^{N_1}\binom{N_1}{k}} \right| \\
&\leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{|F^\nu|_\lambda}{\lambda^\nu} \frac{\binom{N_1+n-\nu}{k}}{\binom{N_1+n}{k}} \frac{\gamma}{\lambda^{N_1+n-\nu}\binom{N_1+n-\nu}{k}} \\
&= \frac{\gamma}{\lambda^{N_1+n}} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{|F^\nu|_\lambda}{\lambda^\nu} \leqq \frac{\bar{C}\gamma}{\lambda^{N_1+n}} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\lambda^\nu \binom{\nu}{k}}{\binom{N_1+n}{k}}
\end{aligned}
$$

mit einer gewissen Konstanten $\bar{C}$,

$$\leqq \bar{C}\frac{\gamma}{\lambda^{N_1+n}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\lambda^{\nu}\leqq\frac{\bar{C}C_2\gamma}{\lambda^{N_1}}<\frac{\bar{C}\varepsilon_1}{2}.$$

Wir schreiben (85) in der Form

$$\left|\frac{t^{N_1+n}}{\lambda^{N_1+n}\binom{N_1+n}{k}}-\frac{\binom{n}{k}}{\binom{N_1+n}{k}}\frac{F^n}{\lambda^n\binom{n}{k}}\frac{t^{N_1}}{\lambda^{N_1}}\right|<\frac{\eta_1}{2},\qquad \eta_1=\bar{C}\varepsilon_1. \tag{86}$$

Nun wissen wir, daß

$$\frac{F^n t^{N_1}}{\lambda^n\binom{n}{k}\lambda^{N_1}}\to f^{\rho}\qquad (n=mr+\rho\to\infty,\rho=1,\dots,r-1)$$

gilt. Dabei hängt $f^{\rho}$ eventuell noch von $N_1$ ab: $f^{\rho}=f^{\rho,N_1}$. Wir wählen $M_1$ so, daß aus $n\geqq M_1$, $n=mr+\rho$

$$\left|\frac{\binom{n}{k}}{\binom{N_1+n}{k}}\frac{F^n}{\lambda^n\binom{n}{k}}\frac{t^{N_1}}{\lambda^{N_1}}-f^{\rho,N_1}\right|<\frac{\eta_1}{2} \tag{87}$$

folgt, was wegen $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{N_1+n}{k}}\to 1$ möglich ist.

Dann liefern (86) und (87) zusammen für hinreichend großes $n$

$$\left|\frac{t^{N_1+n}}{\lambda^{N_1+n}\binom{N_1+n}{k}}-f^{\rho,N_1}\right|<\eta_1\qquad (n=M_1, n=mr+\rho).$$

Nun führen wir die ganze Rechnung nacheinander für $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\dots$ bzw. $\eta_2,\eta_3,\dots$ durch. Wir finden zu $\eta_l$ $(l=1,2,\dots)$ ein $N_l$ und $M_l$, derart, daß

$$\left|\frac{t^{N_l+n}}{\lambda^{N_l+n}\binom{N_l+n}{k}}-f^{\rho,N_l}\right|<\eta_l\qquad (l=1,2,\dots;n\geqq M_1;n=mr+\rho).$$

Nun haben wir nur noch für festes $l$ und $l'$ ein $n$ mit $n\geqq\max(N_l+M_l,N_{l'}+M_{l'})$ zu wählen, um einzusehen, daß

$$|f^{\rho,N_l}-f^{\rho,N_{l'}}|<\eta_l+\eta_{l'}$$

gilt. Daraus folgt die Konvergenz der Folge $f^{\rho,N_l}$ $(l=0,1,2,\dots)$

$$f^{\rho,N_l}\to f^{\rho}\qquad (l\to\infty).$$

Ebenso gilt dann aber auch

$$\frac{t^n}{\lambda^n \binom{n}{k}} \to f^\rho \qquad (n = m r + \rho \to \infty;\ \rho = 0, \ldots, r-1).$$

Vergleich mit Lemma 4 lehrt, daß die assoziierten Folgen des CFP und des DFP sich asymptotisch gleich verhalten. Wir können also den Beweis von Satz 3.3 wörtlich übernehmen, womit alles gezeigt ist.

**Corollar.** *Es gibt ein $\bar{N}$, so daß unter den Voraussetzungen von Satz* 3.9 *für die assoziierte Folge des betrachteten DFP stets $t^n \in H_\lambda$ $(n \geqq \bar{N})$ gilt.*

Anderenfalls könnte nicht

$$\frac{t^n}{\lambda^n \binom{n}{k}} \to f^\rho \qquad (n = m r + \rho \to \infty)$$

gelten.

**Satz 3.10.** *Sei $(x^t, y^t)$ ein quasiperiodischer DFP mit Eigenwert $\lambda$. Ist $\lambda = 1$, so konvergiert der Prozeß gegen einen Gleichgewichtspunkt $(\bar{x}, \bar{y})$. $\bar{x}$ und $\bar{y}$ haben die gleiche Anzahl positiver Komponenten.*

*Beweis.* Sei $\{t_\sigma^n\}$ die assoziierte Folge des DFP. Dann gilt nach Satz 3.7

$$-c \leqq C t^n + D t^{n-1} \leqq c,$$

so daß $s^n := t^n - F t^{n-1}$ dem Betrage nach beschränkt ist. Ferner haben wir

$$t^n = F t^{n-1} + s^n = F^2 t^{n-2} + F s^{n-1} + s^n = \cdots = \sum_{\nu=0}^{n} F^{n-\nu} s^\nu. \tag{88}$$

Wie wir schon einmal bemerkt haben (Lemma 3) ist mit passendem $U$

$$F = U \begin{pmatrix} J^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J^p \end{pmatrix} U^{-1}$$

mit

$$J^q = \begin{pmatrix} J_{\nu_1^q}(\lambda_q) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\nu_{r_q}^q} \end{pmatrix} \qquad (q = 1, \ldots, p)$$

und

$$J_\nu(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad (\nu_1^q = k_q + 1,\ \nu_\mu^q \leqq k_q + 1;\ \mu = 1, \ldots, r_q,\ q = 0, \ldots, p),$$

wobei $k_q$ $(q = 0, \ldots, p)$ die in Lemma 3 angegebene Bedeutung hat.

Wir schreiben nun

$$F = U \sum_{q=0}^{p} \bar{J}_q U^{-1}$$

mit

$$\bar{J}_q = \left.\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & J^q & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\} s$$

und unter weiterer sinngemäßer Benutzung des Querstriches

$$F = U \sum_{q=0}^{p} \sum_{u=1}^{r_q} \bar{J}_{\nu_u^q}(\lambda_q)\, U^{-1}.$$

Wegen

$$J_{\nu_u^q}^n(\lambda_q) = \begin{pmatrix} \lambda_q^n & \binom{n}{1} \lambda_q^{n-1} & \cdots & \binom{n}{\nu_u^q - 1} \lambda^{n-\nu_u^q+1} \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_q^n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{v=0}^{\nu_u^q - 1} \lambda_q^{n-v} \binom{n}{v} E^{v,\nu_u^q} \qquad (q=0,\dots,p)$$

mit

$$E^{v,\nu} = \left.\begin{pmatrix} \overbrace{0 \dots 0\ 1}^{v+1} \dots 0 \\ 0 \quad \ddots\ 1 \end{pmatrix}\right\} \nu$$

können wir fortfahren:

$$F^n = U \sum_{q=0}^{p} \sum_{u=1}^{r_q} \bar{J}_{\nu_u^q}^n(\lambda_q)\, U^{-1}$$

$$= U \sum_{q=0}^{p} \sum_{u=1}^{r_q} \sum_{v=0}^{\nu_u^q - 1} \lambda_q^{n-v} \binom{n}{v} \bar{E}^{v,\nu_u^q}\, U^{-1}$$

$$= U \sum_{q=0}^{p} \sum_{u=1}^{r_q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{n-v} \binom{n}{v} \bar{E}^{v,\nu_u^q}\, U^{-1}$$

$$(\text{mit } \bar{E}^{v,\nu_u^q} = 0 \text{ für } v \geqq \nu_u^q)$$

$$= U \sum_{q=0}^{p} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{n-v} \binom{n}{v} \sum_{u=1}^{r_q} \bar{E}^{v,\nu_u^q}\, U^{-1}$$

$$= \sum_{q=0}^{p} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{n-v} \binom{n}{v} G^{v,q}$$

$$\left(\text{mit } G^{v,q} = \sum_{u=1}^{r_q} U \bar{E}^{v,\nu_u^q} U^{-1}\right).$$

Seien nun $\lambda_0, \dots, \lambda_Q$ $(Q \leqq p)$ diejenigen Eigenwerte von $F$, die den Betrag 1 haben. Dann wissen wir: es gibt Konstanten $C_3$ und $\Theta < 1$, derart, daß gilt:

$$\left| F^n - \sum_{q=0}^{Q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{n-v} \binom{n}{v} G^{v,q} \right|_\lambda \leqq C_3 \Theta^n \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{89}$$

aus (88) und (89) folgt mit einer gewissen Konstanten $C_4$:

$$\left| t^n - \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{q=0}^{Q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda^{n-\nu-v} \binom{n-\nu}{v} G^{v,q} s^\nu \right| \leqq C_3 \sum_{\nu=0}^{n} \Theta^\nu \sup_{\nu=1\dots n} s^\nu \leqq C_4$$

und

$$\left| t^{n-r} - \sum_{\nu=0}^{n-r} \sum_{q=0}^{Q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{n-r-\nu-v} \binom{n-r-\nu}{v} G^{v,q} s^\nu \right| \leqq C_4,$$

d.h. mit $\mu=n-v$ ($\mu, v=0, \dots, n$)

$$\left|t^n - \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{q=0}^{Q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{\mu-v} \binom{\mu}{v} G^{v,q} s^{n-\mu}\right| \leqq C_4$$

$$\left|t^{n-r} - \sum_{\mu=r}^{n} \sum_{q=0}^{Q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda^{\mu-v} \binom{\mu}{v} \left(\frac{1}{\mu_q^r} \frac{\binom{\mu-r}{v}}{\binom{\mu}{v}}\right) G^{v,q} s^{n-\mu}\right| \leqq C_4. \tag{90}$$

Nun ist $\lambda_q^r=1$ ($q=0, \dots, Q$) jedenfalls richtig, falls etwa $\lambda$ $r$-fach zyklisch ist. Setzen wir daher

$$b_v^\mu = 1 - \frac{\binom{\mu-r}{v}}{\binom{\mu}{v}} \qquad (v=0, \dots, \max_{q=0\dots Q} k_q, \mu=0, 1, 2, \dots),$$

so kann man sicher für $\varepsilon>0$ auch $b_v^\mu<\varepsilon$ für alle in Frage kommenden $v$ erreichen, falls man nur für $\mu \geqq M=M(\varepsilon)$ sorgt. Dann ist

$$|t^n - t^{n-r}| \leqq \left|\sum_{\mu=r}^{n} \sum_{q=0}^{Q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{\mu-v} \binom{\mu}{v} b_v^\mu G^{v,q} s^{n-\mu}\right| + C_5$$

für ein gewisses $C_5$ und wir können daher abschätzen:

$$\frac{|t^n - t^{n-r}|}{|t^n|} \leqq \frac{\left|\sum_{\mu=r}^{n} \sum_{q=0}^{Q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{\mu-v} \binom{\mu}{v} b_v^\mu G^{v,q} s^{n-\mu}\right| + C_5}{\left|\sum_{\mu=0}^{n} \sum_{q=0}^{Q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{\mu-v} \binom{\mu}{v} G^{v,q} s^{n-\mu}\right| - C_4}$$

$$= \frac{\left|\sum_{\mu=r}^{M-1} \sum_{q=0}^{Q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{\mu-v} \binom{\mu}{v} b_v^\mu G^{v,q} s^{n-\mu}\right| + \varepsilon \left|\sum_{\mu=M}^{n} \sum_{q=0}^{Q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{\mu-v} \binom{\mu}{v} G^{v,q} s^{n-\mu}\right| + C_5}{\left|\sum_{\mu=0}^{n} \sum_{q=0}^{Q} \sum_{v=0}^{k_q} \lambda_q^{\mu-v} \binom{\mu}{v} G^{v,q} s^{n-\mu}\right| - C_4}.$$

Aus (90) ist ersichtlich, daß die unter dem letzten Bruchstrich stehende Summe mit $n\to\infty$ über alle Grenzen strebt, da gleiches für $|t^n|$ gilt. Daher gibt es ein $N=N(\varepsilon)$, so daß

$$\frac{|t^n - t^{n-r}|}{|t^n|} < 2\varepsilon \qquad (n=N)$$

erreicht werden kann. Also gilt

$$\frac{|t^n - t^{n-r}|}{|t^n|} \to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{91}$$

Nun ist

$$|t^n - t^{n-r}| = \sum_{\sigma=0}^{s-1} |t_\sigma^n - t_\sigma^{n-r}| \geqq |t_s^n - t_s^{n-r}|$$

und

$$|t^n| = \sum_{\sigma=0}^{s-1} |t_\sigma^n| \leqq s\, t_{s-1}^n .$$

Daher gilt

$$0 \leqq \frac{|t_{s-1}^n - t_{s-1}^{n-r}|}{t_{s-1}^n} \leqq s \frac{|t^n - t^{n-r}|}{|t^n|} \to 0 ,$$

d.h.

$$\frac{t_{s-1}^{n-r}}{t_{s-1}^n} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

und ebenso

$$\frac{t_{\sigma-1}^n}{t_\sigma^n} \to 1 \qquad (n \to \infty). \tag{92}$$

(92) und (59) sind aber genau die gleichen Beziehungen, so daß wir nun alles in der Hand haben, um den Beweis von Satz 3.4 durchzuziehen.

*Bemerkung.* Vergleichen wir das Wachstum der assoziierten Folge $\{t_\sigma^n\}$ eines CFP und der assoziierten Folge des entsprechenden DFP, die mit $\{\bar{t}_\sigma^n\}$ bezeichnet sein möge, so wissen wir nunmehr, daß

$$t^n \sim \bar{t}^n \tag{93}$$

gilt, falls beide Prozesse den Eigenwert $\lambda > 1$ mit gleicher Vielfachheit haben. Ist dagegen $\lambda = 1$, so können wir nicht sicher sein, daß (93) gilt. Ist nämlich $k+1$ die Vielfachheit von $\lambda$, so gilt sicher $t^n \sim \binom{n}{k}$, jedoch wegen

$$\bar{t}^n = \sum_{\nu=0}^{n} F^{n-\nu} s^\nu = \sum_{\mu=0}^{n} F^\mu s^{n-\mu}$$

möglicherweise

$$\bar{t}^n \sim \sum_{\mu=0}^{n} \binom{\mu}{k} \sim \binom{n}{k+1} .$$

### *3.5. Einiges über die Eigenwerte der assoziierten Matrix*

**Satz 3.11.** *Sei $F$ die assoziierte Matrix eines CFP bzw. DFP. Dann besitzt $F$ den Eigenwert $\lambda = 1$ und die zu diesem Eigenwert gehörigen Eigenvektoren spannen einen mindestens zweidimensionalen Vektorraum auf (vgl. auch S. 287).*

*Beweis.* Es sei $F = -C^{-1} D$, die zum Eigenwert 1 gehörigen Vektoren – wenn sie existieren – sind Lösungen der Gleichung $(C+D)f = 0$. Wir betrachten die in Satz 3.2 angegebene Form der Matrizen $C$ und $D$. Beide haben die gleiche Hauptdiagonale, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen, so daß durch Addition eine Matrix entsteht, die sich aus gewissen Blocks von Zeilen zusammensetzt. Zwei aufeinanderfolgende Blocks haben die Gestalt

$$\begin{matrix} A_0^{\sigma_{2l-1}} & 0 & A_{\sigma_2}^{\sigma_{2l-1}} & 0 \ldots 0 & A_{\sigma_{2l-2}}^{\sigma_{2l-1}} & 0 & A_{\sigma_{2l}}^{\sigma_{2l-1}} & 0 \ldots \\ 0 & B_{\sigma_1}^{\sigma_{2l}} & 0 & B_{\sigma_3}^{\sigma_{2l}} \ldots B_{\sigma_{2l-3}}^{\sigma_{2l}} & 0 & B_{\sigma_{2l-1}}^{\sigma_{2l}} & 0 & B_{\sigma_{2l+1}}^{\sigma_{2l}} . \end{matrix}$$

Wir definieren nun zwei Vektoren $f^1$ und $f^2$ so, daß jeweils Zeilen, die aus einem Block des ersten Typus stammen, automatisch senkrecht auf $f^2$ stehen und umgekehrt; d.h., wir setzen $f^1$ und $f^2$ fest, indem wir die Komponenten einfach wie folgt unter die Zeilen von $C+D$ schreiben:

$$\begin{array}{rllllll} & A_0^{\sigma_{2l-1}} & 0\ldots0 & A_{\sigma_2}^{\sigma_{2l-1}} & 0\ldots0 & \\ & 0\ldots0 & B_{\sigma_1}^{\sigma_{2l}} & 0\ldots0 & B_{\sigma_3}^{\sigma_{2l}} & 0\ldots \\ f^1: & 1\ldots1 & 0\ldots0 & 1\ldots1 & 0\ldots0 & 1\ldots \\ f^2: & 0\ldots0 & 1\ldots1 & 0\ldots0 & 1\ldots1 & 0\ldots. \end{array}$$

Offenbar stehen $f^1$ und $f^2$ senkrecht aufeinander und es ist

$$(C+D)_{\sigma.}f^1=0 \tag{94}$$

falls $(C+D)_{\sigma.}$ eine Zeile aus dem zweiten Block ist. Wir müssen nur noch zeigen, daß (94) auch für Zeilen aus dem ersten Block gilt, d.h., daß

$$\sum_{u=0}^{s-1}(C+D)_{\sigma u}=0$$

richtig ist. Es gilt aber wegen $C_{\sigma\sigma}=-D_{\sigma\sigma}$:

$$\begin{aligned}\sum_{u=0}^{s-1}(C_{\sigma u}+D_{\sigma u}) &= \sum_{u=0}^{\sigma-1}C_{\sigma u}+\sum_{u=\sigma+1}^{s-1}D_{\sigma u}\\ &= \sum_{\substack{u=0\\ x^{t_u^n}\in L_{j_u}\cap L_{j_{u+1}}}}^{\sigma-1} a_{j_u j_{u+1}}^{i_\sigma} + \sum_{\substack{u=\sigma+1\\ x^{t_u^n}\in L_{j_u}\cap L_{j_{u+1}}}}^{s-1} a_{j_u j_{u+1}}^{i_\sigma}\end{aligned}$$

nach (43). (Dabei ist $j_s=j_0$.) Ist $x^{t_u^n}\notin L_{j_u}\cap L_{j_{u+1}}$ für ein $u$ und $n=0,1,2,\ldots$, so muß $j_u=j_{u+1}$ gelten, also können wir fortfahren.

$$\sum_{u=0}^{s-1}(C_{\sigma u}+D_{\sigma u})=\sum_{u=0}^{s-1}a_{j_u j_{u+1}}^{i_\sigma}=a_{j_0}^{i_\sigma}-a_{j_1}^{i_\sigma}+\cdots+a_{j_{s-1}}^{i_\sigma}-a_{j_0}^{i_\sigma}=0.$$

**Satz 3.12.** *Ist für festes $\sigma$:*

$$K_{i_\sigma}\cap K_{i_{\sigma+1}}=K_{i_{\bar\sigma_l}}\cap K_{i_{\bar\sigma_l+1}} \quad (0\leqq\bar l\leqq s-1;\ l=1,\ldots,\bar l)\ (K_{i_{\bar\sigma_l}}\neq K_{i_{\bar\sigma_l+1}}),$$

*so hat der Eigenwert $\lambda=1$ der assoziierten Matrix $F$ eines CFP oder DFP mindestens die algebraische Vielfachheit $\bar l$.*

Der Beweis ist trivial: in dem betrachteten Falle gibt es $\bar l$ Zeilen der Matrix $C+D$, die übereinstimmen.

**Satz 3.13.** *Die assoziierte Folge $\{t_\sigma^n\}$ eines CFP sei gemäß* (49) *nach Eigenwerten der assoziierten Matrix entwickelt. Es sei ferner $\lambda_{q_0},\ldots,\lambda_{q_2}$ gemäß* (50) *und* (51) *definiert. Dann muß mindestens eine unter den Zahlen $\lambda_{q_0},\ldots,\lambda_{q_2}$ reell sein.*

*Beweis.* Wir benutzen die in der Bemerkung nach Lemma 4 angeschriebenen Abkürzungen. Für festes $\sigma$ $(0\leqq\sigma\leqq s-1)$ haben wir dort bewiesen, daß nicht $s_\sigma^n\to 0$ $(n\to\infty)$ gelten kann, da die Koeffizientendeterminante des Systems

$$s_\sigma^{n+u}=c_\sigma^0\,\xi_0^n\,\xi_0^u+\cdots+c_\sigma^v\,\xi_v^n\,\xi_v^u \qquad (u=0,\ldots,v) \tag{95}$$

nicht verschwindet. Wir behaupten nun, daß es nicht einmal eine Teilfolge $s_\sigma^{n_l}$ $(l=0,1,2,\ldots)$ von $\{s_\sigma^n\}$ gibt, die

$$s_\sigma^{n_l} \mapsto 0 \qquad (l \to \infty) \tag{96}$$

erfüllt. Denn falls (96) gilt, so finden wir unter den Folgen

$$\{s_\sigma^{n_l+1}\}, \{s_\sigma^{n_l+2}\}, \ldots, \{s_\sigma^{n_l+v}\}$$

sicher eine – etwa $\{s_\sigma^{n_l+w}\}$ – derart, daß

$$s_\sigma^{n_l+w} \not\mapsto 0;$$

anderenfalls könnten wir erneut ein System (95) anschreiben und wie eben argumentieren. Notfalls nach Auswahl einer Teilfolge können wir $s_\sigma^{n_l+w} \to s_\sigma > 0$ $(l \to \infty)$ erreichen. Es folgt

$$\frac{t_\sigma^{n_l}}{t_\sigma^{n_l+w}} = \frac{\lambda^w \binom{n_l}{k}}{\binom{n_l+w}{k}} \frac{\lambda^{n_l+w}\binom{n_l+w}{k}}{\lambda^{n_l}\binom{n_l}{k}} \frac{t_\sigma^{n_l}}{t_\sigma^{n_l+w}} = \frac{\lambda^w \binom{n_l}{k}}{\binom{n_l+w}{k}} \frac{s_\sigma^{n_l}}{s^{n_l+w}} \to 0 \qquad (l \to \infty)$$

und

$$0 < \frac{t_\sigma^{n_l}}{t_{\sigma+1}^{n_l}} < \frac{t_\sigma^{n_l}}{t_\sigma^{n_l+w}} \to 0 \qquad (l \to \infty).$$

Aus (58) folgt nun

$$\frac{|y^{t_\sigma^{n_l}+1} - e^j|}{|y^{t_\sigma^{n_l}} - e^j|} = \frac{t_\sigma^{n_l}}{t_{\sigma+1}^{n_l}} \to 0,$$

d.h. $y^{t_\sigma^{n_l}+1} \to e^j$ für ein gewisses $e^j$ und $l \to \infty$. O.B.d.A. ist z.B.

$$y^{t_\sigma^{n_l}+1} \in K_{i_{\sigma+1}} \cap K_{i_{\sigma+2}} \qquad (K_{i_{\sigma+1}} \neq K_{i_{\sigma+2}})$$

und da die Mengen $K_i$ $(i=1,\ldots,M)$ sämtlich abgeschlossen sind, folgt

$$e^j \in K_{i_{\sigma+1}} \cap K_{i_{\sigma+2}}. \tag{97}$$

Genau diese Beziehung haben wir aber mit Hilfe von Bemerkung D (vgl. auch (9)) ausgeschlossen. Also kann (96) nicht richtig sein; es muß stets $s_\sigma^n > \varepsilon$ $(n=0,1,2,\ldots)$ für ein gewisses $\varepsilon > 0$ gelten. Aus

$$c_\sigma^0 \xi_0^n + \cdots + c_\sigma^v \xi_v^n > \varepsilon \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

folgt

$$c_\sigma^0 \sum_{n=0}^{m-1} \xi_0^n + \cdots + c_\sigma^v \sum_{n=0}^{m-1} \xi_v^n > m\varepsilon$$

$$\frac{1}{m} c_\sigma^0 \sum_{n=0}^{m-1} \xi_0^n + \cdots + \frac{1}{m} c_\sigma^v \sum_{n=0}^{m-1} \xi_v^n > \varepsilon \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Es ist aber bekannt, daß

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m} \xi^n \to 0 \qquad (m \to \infty)$$

für jede komplexe Zahl $\xi$ vom Betrage 1 mit $\xi \neq 1$ gilt. Also muß mindestens ein $\xi_u$ $(0 \leqq u \leqq v)$

$$\xi_u = 1$$

erfüllen. Damit ist der Satz bewiesen.

## §4. Anwendungen

Wir erinnern uns an die in § 2 untersuchten Prozesse. Für den Prozeß CFP im $2 \times 2$-Spiel (2.1) findet man als Lösungen der Gleichung $\det(\lambda C + D) = 0$

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Daraus folgt nach Satz 3.4, daß der Prozeß konvergiert. Das charakteristische Polynom der Matrix $F = -C^{-1} D$ ist $P(z) = (z-1)^4$, das Minimalpolynom $Q(z) = (z-1)^2$. Nach Lemma 3 ist also

$$t_\sigma^n \sim n \qquad (\sigma = 0, \dots, 3).$$

Das ist auch das Ergebnis von Satz 2.1. Daß der entsprechende DFP ebenfalls konvergiert sichert uns Satz 3.10. Unsere nach Satz 3.10 gemachte Bemerkung erklärt das Ergebnis von Satz 2.2, nämlich daß für die assoziierte Folge des DFP

$$t_\sigma^n \sim \frac{n(n-1)}{2} \qquad (\sigma = 0, 1, 2, 3)$$

gilt. Schließlich betrachten wir noch den in 2.3 untersuchten stetigen Prozeß.

Der Eigenwert des Prozesses ist $\lambda = (1{,}47\,..\,)^6 > 1$. Er ist von der Vielfachheit 1 und einfach zyklisch. Nach Satz 3.3 ist der Prozeß asymptotisch periodisch und nach Satz 3.9 gilt gleiches für die diskrete Form. Wir haben also alle bisher bekannten Ergebnisse als Aussagen der Eigenwerttheorie erklären können.

Wir geben nun das Beispiel eines Spieles an, bei dem nicht von vornherein klar ist, welches Verhalten ein durch dieses Spiel gegebener Prozeß schließlich bevorzugt.

Es sei $\Gamma = (X, Y; A, B)$ mit $I = J = \{1, 2, 3\}$; wir setzen

$$b^1 = B_{.1} - B_{.2}, \qquad b^2 = B_{.2} - B_{.3}$$

sowie

$$a^1 = A_{1.} - A_{2.}, \qquad a^2 = A_{2.} - A_{3.}, \qquad a^3 = A_{3.} - A_{1.}$$

und fordern

$$b_1^1 > 0; \quad b_2^1, b_3^1 < 0;$$
$$b_3^2 > 0; \quad b_1^2, b_2^2 < 0;$$
$$\frac{b_2^1}{b_1^1} > \frac{b_2^2}{b_1^2}$$

sowie

$$a_1^1 \cdot a_3^1 < 0; \qquad a_1^2, a_2^2 < 0; \qquad a_2^3\, a_3^3 < 0;$$
$$K_{123} = \{\tilde{y}\} \neq \emptyset.$$

Es ist anschaulicher, die konvexen Polyeder $L_j$ $(j = 1, 2, 3)$ und $K_i$ $(i = 1, 2, 3)$ in $X$ bzw. $Y$ einzuzeichnen und das Spiel dadurch wie folgt graphisch zu repräsentieren.

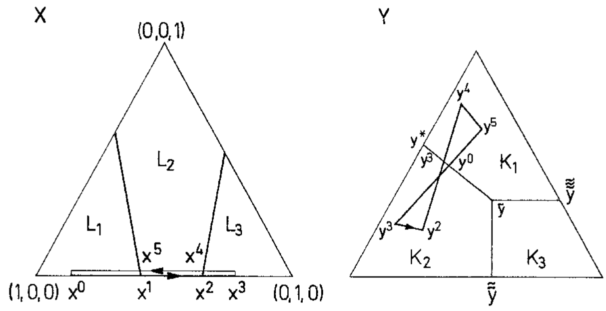


Fig. 5. Zum Schema (98)

Wir lassen einen CFP $(x^t, y^t)$ bei $((1,0,0),(1,0,0))$ starten. Dann gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder gibt es ein $\bar{t}$ mit $0<\bar{t}<\infty$ so, daß $x^{\bar{t}}\in L_2$, $y^{\bar{t}}\in K_3$ gilt – dann konvergiert der Prozeß notwendig gegen den Gleichgewichtspunkt $(\bar{x},\bar{y})=((0,0,1),(0,1,0))$.

Oder der Prozeß ist quasiperiodisch; das Schema (33) kann dann lauten:

$$\begin{aligned} q_0&=(2,1)\\ q_1&=(2,2)\\ q_2&=(2,3)\\ q_3&=(1,3)\\ q_4&=(1,2)\\ q_5&=(1,1)\\ q_6&=(2,1). \end{aligned} \tag{98}$$

Der Prozeß muß sich dann einer Bahn ähnlich der in Fig. 5 gezeichneten annähern – falls der Eigenwert $\lambda$ einfach zyklisch ist.

Wir spezialisieren uns nun auf

$$a^1=(1,0,-1), \quad b^1=(1,\eta,b_3^1), \quad b^2=(-\eta,1,b_3^2)$$

mit $\eta>1$ und zeigen, daß der Prozeß jetzt konvergieren muß. Für die Eigenwerte der Matrix $F$ gilt dann nämlich:

$$\lambda_0=\cdots=\lambda_3=1, \quad \lambda_4=\frac{1}{\eta}, \quad \lambda_5=\eta^2.$$

Also hat der Prozeß einen einfach zyklischen Eigenwert $\lambda=\eta^2$ von der Vielfachheit 1. Der zu $\lambda$ gehörige Eigenvektor ist

$$f=(1,1,1+\eta,1+\eta,1+\eta,\eta+\eta^2).$$

Wir ziehen nun die Formel (58) heran, die nach Division mit $\lambda^n$ und Grenzübergang $n\to\infty$ in

$$f_\sigma y^{0,\sigma}-f_{\sigma-1}\,y^{0,\sigma-1}=(f_\sigma-f_{\sigma-1})\,e^j \tag{99}$$

für festes $\sigma=0, \dots, s-1$ und ein gewisses $e^j$ übergeht. Aus (99) folgt

$$\frac{|y^{0,\sigma}-e^j|}{|y^{0,\sigma-1}-e^j|}=\frac{f_{\sigma-1}}{f_\sigma} \tag{100}$$

und entsprechend

$$\frac{|x^{0,\sigma}-e^k|}{|x^{0,\sigma-1}-e^k|}=\frac{f_{\sigma-1}}{f_\sigma}.$$

Aus der hier vorliegenden speziellen Gestalt von $f$ folgt leicht

$$x^{0,0}=x^{0,1}=x^{0,5}$$
$$x^{0,2}=x^{0,3}=x^{0,4}$$

und daher

$$y^{0,0}=y^{0,1}=y^{0,5}$$
$$y^{0,2}=y^{0,3}=y^{0,4},$$

was nicht möglich ist. Also bleibt für diesen Prozeß nur die erste Möglichkeit: er muß „nach einiger Zeit" den Gleichgewichtspunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ ansteuern. Andererseits sieht man: wenn $\eta$ nahe bei 1 liegt und man dafür sorgt, daß $\tilde{y}$, $\tilde{\tilde{y}}$, $\tilde{\tilde{\tilde{y}}}$ (vgl. Fig. 5) nahe bei $e^2=(1,0,1)$ liegen, so wird der Prozeß jedenfalls „ziemlich lange" die durch (98) vorgeschriebene quasiperiodische Form haben. Er „zögert" gewissermaßen eine Zeitlang, ehe er sich für den Gleichgewichtspunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ entscheidet. Wir erklären das mit der Bemerkung, daß für $\eta \to 1$ auch $x^1 \to x^2$ gilt und daß für $\eta=1$ in $(x^1, y^*)=\left((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\right)$ ein neuer Gleichgewichtspunkt entsteht.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. K. Jacobs für sein dauerndes Interesse an meinen Bemühungen.

## Literatur

1. Bohnenblust, H.F., Karlin, S., Shapley, L.S.: Solutions of discrete two-person-games. Contributions to the theory of games, edited by H.W. Kuhn and A.W. Tucker. Ann. Math. Studies **24**, 51 – 72 (1950).
2. Gantmacher, F.: Matrizenrechnung I, Allgemeine Theorie. Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 36. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1958.
3. Jacobs, K.: Ausgewählte Kapitel aus der Spieltheorie und verwandten Gebieten, Proseminarausarbeitung, Göttingen (1964).
4. Miyasawa, K.: On the convergence of the learning process in a 2 2 non-zero-sum two-person-game. Economic Research Program, Research Memorandum No. 33. Princeton: Princeton University 1961.
5. Robinson, J.: An iterative method of solving a game. Ann. of Math. **54**, 296 – 301 (1951).
6. Rosenmüller, J.: Über Gleichgewichtspunkte in speziellen Bimatrix-Spielen. Diplomarbeit, Göttingen (1965).
7. Shapley, L.S.: Some topics in two-person-games. Advances in game theory, edited by M. Dresher and others. Ann. Math. Studies **52**, 1 – 28 (1964).

Dr. Joachim Rosenmüller
Mathematisches Institut der Universität
BRD-8520 Erlangen, Bismarckstr. $1\frac{1}{2}$
Deutschland

*(Eingegangen am 23. Juni 1969)*