Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 20, 102–116 (1971)

Sur la convergence de Césaro des familles de mesures

G. HANSEL et J. P. RAOULT

Introduction

L'objet du présent article peut être introduit par une remarque élémentaire.

Etant donnée une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications bornées d'un ensemble T dans $\mathbb{R}$, sa convergence simple vers une application f peut s'exprimer par l'une quelconque des deux conditions équivalentes suivantes (où Π_n désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal supérieur ou égal à n)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall t \in T)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall n \geqq n_0)\, |f_n(t) - f(t)| \leqq \varepsilon, \tag{1}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall t \in T)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall J \in \Pi_{n_0}) \left| \frac{1}{\operatorname{card}(J)} \sum_{n \in J} (f_n(t) - f(t)) \right| \leqq \varepsilon. \tag{2}$$

La convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f s'exprime en échangeant dans (1) les deuxième et troisième quantificateurs, c'est à dire par la condition

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall t \in T)(\forall n \geqq n_0)\, |f_n(t) - f(t)| \leqq \varepsilon. \tag{1'}$$

Par contre la condition (1′) n'est pas équivalente à celle obtenue en échangeant les deuxième et troisième quantificateurs dans (2), c'est à dire à la condition

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall t \in T)(\forall J \in \Pi_{n_0}) \left| \frac{1}{\operatorname{card}(J)} \sum_{n \in J} (f_n(t) - f(t)) \right| \leqq \varepsilon; \tag{2'}$$

on a seulement les implications

$$(1') \Rightarrow (2') \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (1).$$

La condition (2′) est en fait équivalente à la convergence uniforme vers f, suivant l'ensemble filtrant $\mathscr{P}$ des parties finies de $\mathbb{N}$ ordonné par inclusion, de la famille $\left(\frac{1}{\operatorname{card}(J)} \sum_{n \in J} (f_n - f) \right)_{J \in \mathscr{P}}$; nous appellerons ici Césaro-généralisé uniforme (C-G uniforme) ce type de convergence.

L'objet de cet article est alors de dégager quelques propriétés de cette convergence quand, étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, les applications f_n sont des mesures bornées absolument continues par rappott à P.

Dans le premier paragraphe, l'étude directe d'un exemple de suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de probabilités convergeant C-G uniformément mais non uniformément, vers la probabilité P, nous permet de fournir des précisions sur la vitesse de convergence, vers 0, de la suite

$$\left(\sup_{\operatorname{card}(J) = n} \ \sup_{A \in \mathscr{A}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k \in J} (P_k(A) - P(A)) \right| \right)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Le deuxième paragraphe consiste en une étude préliminaire des C-G convergences.

Dans le troisième paragraphe, nous présentons le lien entre la convergence C-G uniforme des familles de mesures et les convergences analogues des familles de variables aléatoires, selon la topologie forte de L^1 et la topologie de la convergence en probabilité.

Dans les quatrième et cinquième paragraphes, nous donnons des conditions de convergence C-G uniforme des familles de mesures, sous des hypothèses complémentaires d'indépendance des densités, ou de mélange fort.

Einfin, nous donnons en Appendice des contre-exemples prouvant la fausseté de conjectures rencontrées ou cours de l'étude.

Notations. Dans toute la suite, on considérera des familles indexées par un ensemble infini A; on notera $\mathscr{P}$ l'ensemble des parties finies de A et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des parties de cardinal n de A; étant donné $I \in \mathscr{P}$, on notera $|I|$ le cardinal de I; on notera $\mathscr{S}$ l'ensemble des applications injectives de $\mathbb{N}^*$ dans A.

1) Exemple d'une suite de mesures convergeant C-G uniformément (mais non uniformément)

a) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de parties indépendantes, toutes de probabilité $\frac{1}{2}$; pour tout n, on définit P_n comme la probabilité admettant pour densité par rapport à P la fonction 2.1_{A_n} (où 1_{A_n} désigne la fonction indicatrice de A_n).

Soit $\mathscr{L}'$ l'ensemble des applications mesurables de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$.

Théorème. (1) *Notons, pour tout* $I \in \mathscr{P}$, $b_I = \sup\limits_{\phi \in \mathscr{L}'} \left| \frac{1}{\sqrt{|I|}} \sum\limits_{k\in I} \left(\int\limits_\Omega \phi\, dP_k - \int\limits_\Omega \phi\, dP \right) \right|$; *alors.*

(a) $b_I = \sup\limits_{A\in\mathscr{A}} \left| \frac{1}{\sqrt{|I|}} \sum\limits_{k\in I} (P_k(A) - P(A)) \right|$;

(b) b_I *ne dépend que de* $|I|$; *notons* b_n *la valeur commune des* b_I *pour tous les* I *appartenant à* $\mathscr{P}_n$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

(2) *La suite* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge* C-G *uniformément vers* P.

Démonstration. La conclusion (2) est une conséquence immédiate de la conclusion (1) dont la démonstration fait l'objet du paragraphe c ci-dessous.

b) Notations. Soit $\mathbb{B} = \{0, 1\}$; on pose $\mathbb{B}^0 = \emptyset$, $\mathbb{B}^* = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{B}^n$. Etant donnés $i = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{B}^n$ et $j = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{B}^m$, on notera:

$$(i, j) = (i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m) \quad (\in \mathbb{B}^{n+m}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute partie finie J de $\{1, \ldots, n\}$ et tout $i = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{B}^n$, on pose:

$$s_1^J(i) = \sum_{k\in J} i_k \quad \text{et} \quad s_0^J(i) = n - s_1^J(i).$$

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications

$$f: \mathbb{B}^* \longrightarrow [0,1]$$
$$i \rightsquigarrow x_i$$

satisfaisant à la condition suivante:

$$(\alpha) \quad (\forall i \in \mathbb{B}^*) \frac{x_{(i,0)} + x_{(i,1)}}{2} = x_i;$$

pour tout n, soit a_n l'application de $\mathscr{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$f \rightsquigarrow a_n(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{i \in \mathbb{B}^{n-1}} (x_{(i,1)} - x_{(i,0)}).$$

Notons, pour tout n, $A_n^1 = A_n$ et $A_n^0 = \complement A_n$ et, pour tout $i \in \mathbb{B}^n$, $A^i = \bigcap_{p=1}^{n} A_p^{i_p}$; la famille $(A^i)_{i \in \mathbb{B}^n}$ constitue une partition de Ω en 2^n parties, vérifiant toutes $P(A^i) = \frac{1}{2^n}$; soit π_n l'application de Ω dans $\mathbb{B}^n$ définie par:

$$\pi_n(\omega) = i \Leftrightarrow \omega \in A^i.$$

Soit $\phi \in \mathscr{L}'$; pour tout n, l'espérance conditionnelle $E^{\pi_n} \phi$ est une application de $\mathbb{B}^n$ dans $[0, 1]$ et, si f est l'application de $\mathbb{B}^*$ dans $[0, 1]$ canoniquement associée à la suite $(E^{\pi_n} \phi)_{n \in \mathbb{N}}$, elle appartient à $\mathscr{F}$; notons F l'application de $\mathscr{L}'$ dans $\mathscr{F}$ ainsi définie.

F est surjective; en effet, soit $f \in \mathscr{F}$, et soit, pour tout n, f_n la restriction de f à $\mathbb{B}^n$, et $\phi_n = f_n \circ \pi_n$; la condition (α) exprime que la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, bornée, et donc convergente; si $\phi (\in \mathscr{L}')$ est limite (P-presque sûre, et dans $L^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$) de $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, elle vérifie $F(\phi) = f$.

En particulier, pour que f soit image par F de la fonction indicatrice d'une partie de Ω appartenant à la tribu engendrée par la partition $(A^i)_{i \in \mathbb{B}^n}$, il faut et il suffit que, pour tout $i \in \mathbb{B}^n$, x_i soit égal à 0 ou à 1; on notera alors: $f \in \mathscr{F}_n$.

Enfin, pour tout $\phi \in \mathscr{L}'$, et tout n, on a:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi \, dP_n - \int_\Omega \phi \, dP &= 2 \sum_{i \in \mathbb{B}^{n-1}} \int_{A^{(i,1)}} \phi \, dP - \sum_{i \in \mathbb{B}^n} \int_{A^i} \phi \, dP \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{i \in \mathbb{B}^{n-1}} (x_{(i,1)} - x_{(i,0)}) = a_n[F(\phi)]. \end{aligned}$$

c) La conclusion (1) du théorème ci-dessus est donc conséquence de la proposition suivante:

Proposition. *Notons, pour tout* $I \in \mathscr{P}$, $b_I = \sup_{f \in \mathscr{F}} \left| \frac{1}{\sqrt{|I|}} \sum_{k \in I} a_k(f) \right|$; *alors,*

(a) $b_I = \sup_{f \in \mathscr{F}_{\sup I}} \left| \frac{1}{\sqrt{|I|}} \sum_{k \in I} a_k(f) \right|$;

(b) b_I *ne dépend que de* $|I|$; *notons* b_n *la valeur commune des* b_I *pour tous les* I *appartenant à* $\mathscr{P}_n$;

(c) $\lim_{n \to \infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Démonstration. 1. Nous allons démontrer que, si J est une partie de $\mathbb{N}$, de cardinal n, et si on note,

quand n est pair, $\quad n = 2m$

quand n est impair, $\quad n = 2m + 1$, il existe $\hat{f} \in \mathscr{F}_{\sup J}$ tel que

$$\Big|\sum_{p\in J} a_p(\hat{f})\Big| = \sup_{f\in\mathscr{F}} \Big|\sum_{p\in J} a_p(f)\Big| = \frac{n\, C_{n-1}^m}{2^n};$$

la proposition résulte alors immédiatement de ce que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sqrt{2m+1}}{2^{2m+1}}\, C_{2m}^m = \lim_{m\to\infty} \frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}}\, C_{2m-1}^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

2. Soit donc $J=\{d_1,\ldots,d_n\}$, et supposons que $d_1<d_2<\cdots<d_n$; posons $\sigma_J(f) = \sum_{p\in J} a_p(f)$; on a la relation

$$\sigma_J(f) = \frac{1}{2^{d_n}} \sum_{k\in\mathbb{B}^{d_n}} [s_1^J(k) - s_0^J(k)]\, x_k.$$

En effet, de la condition (α), on déduit, pour tout $i\in\mathbb{B}^*$ et tout $m\in\mathbb{N}^*$;

$$x_i = \frac{1}{2^m} \sum_{j\in\mathbb{B}^m} x_{(i,j)}.$$

Il en résulte facilement que

$$\sigma_J(f) = \frac{1}{2^{d_n}} \sum_{p=1}^{n} \sum_{i\in\mathbb{B}^{d_p-1}} \sum_{j\in\mathbb{B}^{d_n-d_p}} (x_{(i,1,j)} - x_{(i,0,j)});$$

soit $k\in\mathbb{B}^{d_n}$; x_k apparait dans la somme précédente $s_1^J(k)$ fois avec le coefficient $+1$ et $s_0^J(k)$ fois avec le coefficient -1.

3. De 2 il résulte, que n soit égal à $2m$ ou à $2m+1$, que $|\sigma_J(f)|$ atteint son maximum pour toute fonction $f\in\mathscr{F}$ satisfaisant à la condition:

$$(\forall\, k\in\mathbb{B}^{d_n})\; x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } s_1^J(k) \geqq m+1 \\ 0 & \text{si } s_1^J(k) \leqq m. \end{cases}$$

Soit $\hat{f}$ une telle fonction; on constate que $\hat{f}\in\mathscr{F}_{d_n}$; soit $p\in\{1,\ldots,n\}$; on a:

$$a_{d_p}(\hat{f}) = \frac{1}{2^{d_n}} \sum_{i\in\mathbb{B}^{d_p-1}} \sum_{j\in\mathbb{B}^{d_n-d_p}} (x_{(i,1,j)} - x_{(i,0,j)});$$

or

$$x_{(i,1,j)} - x_{(i,0,j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_1^J(i,1,j) = m+1 \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Il y a donc $C_{n-1}^m \cdot 2^{d_n-n}$ termes égaux à 1 sous le signe de sommation; il en résulte que

$$a_{d_p}(\hat{f}) = \frac{C_{n-1}^m}{2^n};$$

p ayant été choisi quelconque dans $\{1,\ldots,n\}$, le résultat annoncé s'en déduit.

2) Préliminaires sur la C-G convergence

a) **Définition.** Etant donné un espace vectoriel réel E, et $\mathscr{T}$ une topologie sur E, nous dirons qu'une famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'éléments de E converge vers x au sens de Césaro généralisé pour la topologie $\mathscr{T}$ si et seulement si la famille $\left(\frac{1}{|I|}\sum_{k\in I} x_k\right)_{I\in\mathscr{I}}$

converge vers x, pour la topologie $\mathscr{T}$, suivant l'ensemble filtrant des parties finies de A (ordonné par inclusion).

On dira que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ C-G-$\mathscr{T}$ converge vers x (ou C-G converge vers x, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la topologie $\mathscr{T}$).

Cas particulier. Si $E=\mathbb{R}$, muni de la topologie usuelle, la C-G convergence de $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ vers x équivaut à sa convergence vers x selon le filtre des complémentaires des parties finies de A, autrement dit à l'existence de $S\in\mathscr{S}$ tel que la suite $(x_{S(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x et, pour tout $\alpha\notin S(\mathbb{N}^*)$, $x_\alpha=x$.

b) *Supposons la topologie de E définie par une distance d vérifiant les propriétés suivantes:*

(i) $\big(\forall (x,y)\in E^2\big)\ d(x,y)=d(x-y,0)$ (on notera $|x|=d(x,0)$);

(ii) $\big(\forall (\lambda,x)\in\mathbb{R}\times E\big)\ |\lambda x|\leqq \sup(|\lambda|,1)\cdot|x|$;

(iii) $(\forall x\in E)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x}{n}\right|=0$.

Il en est ainsi si E est un espace vectoriel normé, ou (voir [6], p. 113), si E est un espace de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{A},P)$, muni de la distance associée à la convergence en probabilité $\big(d(x,y)=\inf\limits_{\varepsilon>0}(\varepsilon+P[|x-y|\geqq\varepsilon])\big)$.

On a alors les propriétés suivantes:

1. La C-G convergence vers x de la famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ équivaut à la C-G convergence vers 0 de la famille $(x_\alpha-x)_{\alpha\in A}$; étant donnés deux scalaires λ et μ, si les familles $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $(y_\alpha)_{\alpha\in A}$ convergent C-G, respectivement vers x et vers y, la famille $(\lambda x_\alpha+\mu y_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G vers $\lambda x+\mu y$.

(Ces deux propriétés résultent des hypothèses (i) et (ii).)

2. Toute famille C-G convergente est bornée

Démonstration. Supposons la famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ non bornée et soit $I_0\in\mathscr{P}$; alors il existe $I\supset I_0$ tel que $\left|\frac{1}{|I|}\sum_{k\in I}x_k\right|\geqq 1$; en effet, il existe $\alpha_0\notin I_0$ tel que

$$|x_{\alpha_0}|>|I_0|+1+\Big|\sum_{k\in I_0}x_k\Big|,$$

et on a, d'après l'hypothèse (ii):

$$\left|\frac{1}{|I_0|+1}\sum_{k\in I_0\cup\{\alpha_0\}}x_k\right|\geqq\frac{1}{|I_0|+1}\Big|\sum_{k\in I_0\cup\{\alpha_0\}}x_k\Big|\geqq\frac{1}{|I_0|+1}(|I_0|+1)=1.$$

3. Pour que la famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G vers 0, il faut et il suffit que, pour tout $S\in\mathscr{S}$, la suite $(x_{S(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge au sens de Césaro vers 0.

Démonstration. Condition suffisante: évidente (en raisonnant par l'absurde).

Condition nécessaire: Soit $S\in\mathscr{S}$, et soit $\varepsilon>0$; il existe alors $I_0\in\mathscr{P}$ tel que, pour tout $I\supset I_0$, $\left|\frac{1}{|I|}\sum_{k\in I}x_k\right|\leqq\varepsilon/3$; si $I_0\subset S(\mathbb{N}^*)$, la convergence de la suite $(x_{S(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0, au sens de Césaro, est établie; si non, il existe, d'après l'hypothèse (iii), $M\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\geqq M$,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k\in I_0-S(\mathbb{N}^*)}x_k\right|\leqq\frac{\varepsilon}{3};$$

soit alors $n \geqq \sup(M, \sup\{m; S(m) \in I_0\})$; on a $n \geqq |I_0 - S(\mathbb{N}^*)|$, et

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{S(i)}\right| \leqq \left|\frac{1}{n}\sum_{k \in I_0 \cup S(\{1,\ldots,n\})} x_k\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k \in I_0 - S(\mathbb{N}^*)} x_k\right|$$

$$\leqq \frac{|I_0 - S(\mathbb{N}^*)| + m}{n}\left|\frac{1}{|I_0 - S(\mathbb{N}^*)| + n}\sum_{k \in I_0 \cup S(\{1,\ldots,n\})} x_k\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k \in I_0 - S(\mathbb{N}^*)} x_k\right|$$

$$\leqq 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

(N. B.: on a utilisé l'hypothèse (ii).)

Remarques. Si $A = \mathbb{N}^*$, on peut, dans l'énoncé de la propriété ci-dessus, remplacer $\mathscr{S}$ par $\mathscr{S}'$, ensemble des applications strictement croissantes de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même.

Dans le cadre des hypothèses de cet alinéa *b*, la convergence simple d'une suite n'entraîne pas sa convergence au sens de Césaro (voir à ce sujet l'appendice 1).

4. S'il existe une partition finie de A, soit $(J_0, J_1, \ldots, J_K)$ telle que J_0 (éventuellement vide) soit fini, et, pour tout $l \in \{1, \ldots, K\}$, la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in J_l}$ converge C-G vers 0, la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ elle-même converge C-G vers 0.

Démonstration. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe d'une part d'après l'hypothèse (iii), N tel que, si $n \geqq N$,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k \in J_0} x_k\right| \leqq \frac{\varepsilon}{K+1},$$

et d'autre part pour tout $l \in \{1, \ldots, K\}$, I_l^0, partie finie de J_l telle que pour toute partie finie de J_l contenant I_l^0, soit I_l, on ait:

$$\left|\frac{1}{|I_l|}\sum_{k \in I_l} x_k\right| \leqq \frac{\varepsilon}{K+1}.$$

Soit alors I^0 une partie finie de A, contenant $(\bigcup_{1 \leqq l \leqq K} I_l^0) \cup J_0$, et telle que $|I^0| \geqq N$; d'après l'hypothèse (ii) on a, pour tout I appartenant à $\mathscr{P}$ et contenant I^0,

$$\left|\frac{1}{|I|}\sum_{k \in I} x_k\right| \leqq \left|\frac{1}{|I|}\sum_{k \in J_0} x_k\right| + \sum_{1 \leqq l \leqq K}\left|\frac{1}{I \cap J_l}\sum_{k \in I \cap J_l} x_k\right| \leqq \varepsilon.$$

5. Pour que la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge C-G vers 0, il faut et il suffit que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}^*)(\forall n \geqq N)(\forall I \in \mathscr{P}_n)\left|\frac{1}{n}\sum_{k \in I} x_k\right| \leqq \varepsilon.$$

c) *Supposons la topologie de E définie par une norme.* On a alors les propriétés suivantes:

1. Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \subset A$, tel que

(i) ou J est fini, ou la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ converge C-G vers 0,

(ii) $(\forall \alpha \in \complement J)\ |x_\alpha| \leqq \varepsilon$,

la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ elle-même converge C-G vers 0.

(En particulier, si, pour tout $S\in\mathscr{S}$, la suite $(x_{S(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, la famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G vers 0, ce qui résulte également, en vertu de la propriété 1 b 3, de ce que, dans un espace normé, toute suite convergente converge au sens de Césaro.)

2. Pour que la famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G vers 0, il faut et il suffit que:

$$(\forall\,\varepsilon>0)\,(\exists\, n\in\mathbb{N}^*)\,(\forall\, I\in\mathscr{P}_n)\left|\frac{1}{n}\sum_{k\in I} x_k\right|\leqq\varepsilon.$$

N.B.: Les deux propriétés ci-dessus ne sont pas satisfaites pour la convergence C-G en probabilité, ainsi que la prouvent les contre-exemples donnés en Appendice 1.

d) *Considérons le cas où E est l'espace des applications bornées d'un ensemble T dans* $\mathbb{R}$, *muni de la topologie de la convergence uniforme.* Dans ce cas, la C-G (uniforme) convergence de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ vers 0 est intermédiaire entre les convergences simple et uniforme de cette famille vers 0, suivant le filtre $\mathfrak{F}$ des complémentaires des parties finies de A.

En effet, posons, pour tout $\varepsilon>0$ et tout $t\in T$,

$$N_t(\varepsilon)=\{\alpha\in A;\, |f_\alpha(t)|\geqq\varepsilon\};$$

alors,

1. pour que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G vers 0, il faut et il suffit que:

(i) $\sup\limits_{\alpha\in A}\sup\limits_{t\in T}|f_\alpha(t)|<\infty$ (i.e. la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ est bornée);

(ii) $(\forall\,\varepsilon>0)\sup\limits_{t\in T}|N_t(\varepsilon)|<\infty$;

2. pour que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge simplement vers 0 selon le filtre $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que

$$(\forall\,\varepsilon>0)\,(\forall\, t\in T)\,|N_t(\varepsilon)|<\infty;$$

3. pour que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge uniformément vers 0 selon le filtre $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que

$$(\forall\,\varepsilon>0)\,\Big|\bigcup_{t\in T} N_t(\varepsilon)\Big|<\infty.$$

Remarques. 1. La convergence C-G uniforme, vers 0, de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ est en fait intermédiaire entre les convergences quasi-uniforme (voir [4], p. 268) et uniforme de cette famille vers 0, selon le filtre $\mathfrak{F}$.

2. Dans le cas où $A=\mathbb{N}^*$, et où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers 0, il existe, pour tout $t\in T$, une suite décroissante unique, soit $(h_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour au moins une application bijective ϕ_t de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même, on ait, pour tout n, $h_n(t)=|f_{\phi_n(t)}(t)|$; alors, pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge C-G vers 0, il faut et il suffit que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0.

3) Convergence C-G uniforme d'une famille de mesures

Soit $(\Omega,\mathscr{B},P)$ un espace de probabilité, on note $\mathscr{M}$ (ou, plus précisément, $\mathscr{M}(\Omega,\mathscr{B},P)$) l'ensemble des fonctions σ-additives de $\mathscr{B}$ dans $\mathbb{R}$ (mesures bornées), absolument continues par rapport à P; de même, on note L^1 pour $L^1(\Omega,\mathscr{B},P)$.

La notation $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ désigne une famille d'éléments de $\mathscr{M}$; pour tout α, on note ϕ_α la densité de μ_α par rapport à P $((\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille d'éléments de $L^1)$.

a) On sait que la convergence uniforme, dans $\mathscr{M}$, d'une suite $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, équivaut à la convergence forte, dans L^1, de la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des densités correspondantes. On en déduit, d'après la propriété 2b3, que *la convergence C-G uniforme, dans $\mathscr{M}$, de la famille $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$, équivaut à la convergence C-G forte, dans L^1, de la famille $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$*.

b) La convergence simple d'une suite $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de mesures bornées équivaut (voir [8], p. 112) à la convergence faible dans L^1 de la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des densités correspondantes; il résulte alors de l'alinéa 2d que *la convergence C-G forte, dans L^1, de la famille $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$, est intermédiaire entre les convergences forte et faible, dans L^1*, selon le filtre des complémentaires des parties finies de A, de cette famille.

c) *Emploi de la convergence C-G en probabilité*

Lemme. *Pour que la famille $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G fortement dans L^1 vers 0, il faut et il suffit que:*

(i) *la famille $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G en probabilité vers 0;*

(ii) *l'ensemble $\{\phi_\alpha;\, \alpha\in A\}$ soit équi-intégrable.*

Démonstration. 1. *Condition nécessaire.* S'après la propriété 2b3, l'hypothèse est que, pour tout $S\in\mathscr{S}$, la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_{S(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge fortement dans L^1 vers 0; elle converge donc en probabilité vers 0, et il résulte à nouveau de la propriété 2b3 que la famille $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G en probabilité vers 0.

D'autre part, d'après l'alinéa b ci-dessus, pour tout $S\in\mathscr{S}$, la suite $(\phi_{S(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement dans L^1, et donc l'ensemble $\{\phi_{S(n)};\, n\in\mathbb{N}^*\}$ est équi-intégrable (voir [8], p. 112); un sous-ensemble de L^1 dont toute partie dénombrable est équi-intégrable est lui-même équi-intégrable; donc $\{\phi_\alpha;\, \alpha\in A\}$ est équi-intégrable.

2. *Condition suffisante.* Il résulte des conditions (i) et (ii) que, pour tout $S\in\mathscr{S}$,

– la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_{S(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0,

– l'ensemble $\{\phi_{S(n)};\, n\in\mathbb{N}^*\}$ est équi-intégrable, et il en est alors de même de l'ensemble $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_{S(i)};\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$;

donc (voir par exemple [8], p. 50), la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_{S(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge fortement dans L^1 vers 0; le résultat s'en déduit en vertu de la propriété 2b3.

Remarque. Si les densités ϕ_α sont échangeables (c'est à dire que pour tout $I\in\mathscr{P}$, le vecteur aléatoire à $|I|$ dimensions, $(\phi_k)_{k\in I}$, est symétrique), on sait (voir [7], p. 400) que, pour tout $S\in\mathscr{S}$, la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_{S(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, fortement dans L^1, vers l, valeur commune des espérances mathématiques des ϕ_α; la famille $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge donc C-G fortement dans L^1 vers l.

4) Convergence C-G forte, dans L^1, et indépendance

Dans ce paragraphe, les éléments ϕ_α de $L^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont supposés indépendants; il en résulte que, si la famille $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G fortement dans L^1 (et donc aussi C-G en probabilité) c'est nécessairement vers une constante l qui vérifie, pour tout $S\in\mathscr{S}$,

$$l=\lim_{n\to\infty} E\,\phi_{S(n)};$$

si, pour tout α, ϕ_α est la densité d'une mesure bornée μ_α, la famille $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$, si elle converge C-G uniformément dans $\mathscr{M}$, converge nécessairement vers la mesure μ, uniforme par rapport à P et de densité l.

Les résultats qui suivent sont obtenus à partir des résultats classiques du type «loi faible des grands nombres», qui fournissent des critères de convergence en probabilité vers 0, des suites

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\phi_{S(i)}-E\,\phi_{S(i)})\right)_{n\in\mathbb{N}^*},$$

et donc des suites

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\phi_{S(i)}-l)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

a) **Définition.** Soit une famille $(u_{n,\alpha})_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}^*\times A}$ de nombres réels; nous dirons qu'elle possède la propriété (U) si et seulement si la famille $\left(\sum_{k\in I} u_{|I|,k}\right)_{I\in\mathscr{P}}$ converge vers 0 suivant l'ensemble filtrant des parties finies de A.

Cette notion possède les propriétés suivantes:

1. Si la famille $(u_{n,\alpha})$ possède la propriété (U), elle converge vers 0, quand n tend vers l'infini, uniformément en α.

2. Pour que la famille $(u_{n,\alpha})$ possède la propriété (U), il faut et il suffit que, pour tout $S\in\mathscr{S}$, la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} u_{n,S(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3. S'il existe une famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ telle que, pour tout $(n,\alpha)\in\mathbb{N}^*\times A$, $u_{n,\alpha}=\frac{1}{n}x_\alpha$, il faut et il suffit, pour que la famille $(u_{n,\alpha})$ possède la propriété (U), que la famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge vers 0, suivant le filtre des complémentaires des parties finies.

4. Supposons qu'existent une famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $\delta>1$, tels que, pour tout

$$(n,\alpha)\in\mathbb{N}^*\times A,\qquad u_{n,\alpha}=\frac{1}{n^\delta}x_\alpha;$$

alors, pour que la famille $(u_{n,\alpha})$ possède la propriété (U), il faut et il suffit que la famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ soit bornée.

b) *Conditions suffisantes.*

1. Proposition. *Pour qu'une famille $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de variables aléatoires indépendantes, d'espérance mathématique nulle et moment d'ordre $\delta\,(1<\delta\leq 2)$ fini, converge C-G en probabilité vers 0, il suffit que la famille $\left(E(|\psi_\alpha|^\delta)\right)_{\alpha\in A}$ soit bornée.*

Démonstration. On sait (voir [7], p. 275) que, pour qu'une suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_{S(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge en probabilité vers 0, il suffit que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\delta}\sum_{k=1}^{n} E(|\psi_{S(k)}|^\delta)=0;$$

dire qu'il en est ainsi pour tout $S\in\mathscr{S}$, c'est dire, d'après la propriété 4a2, que la famille

$$\left(\frac{1}{n^\delta}E(|\psi_\alpha|^\delta)\right)_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}^*\times A}$$

possède la propriété (U), ou encore, d'après la propriété 4a4, que la famille $(E(|\psi_\alpha|^\delta))_{\alpha\in A}$ est bornée.

On déduit de cette Proposition les deux théorèmes ci-dessous:

2. Théorème. *Pour que la famille $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'éléments indépendants de L^1 converge C-G fortement, il suffit que:*

(i) *la famille $(E(\phi_\alpha))_{\alpha\in A}$ converge selon le filtre des complémentaires des parties finies de A (soit l sa limite);*

(ii) *pour tout $\varepsilon>0$, il existe $K>0$, $\delta\in]1,2]$ et $J\subset A$, tels que*

$$(\forall\alpha\in J)\int_\Omega|\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha|^\delta\,dP\leqq K$$

$$(\forall\alpha\in\complement J)\int_\Omega|\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha|\,dP\leqq\varepsilon.$$

La limite est alors l.

Démonstration. Il résulte de l'hypothèse (ii) que l'ensemble $\{\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha;\,\alpha\in A\}$ est équi-intégrable; soit alors $\varepsilon>0$, et soit J partie de A, qui lui est associée en vertu de l'hypothèse (ii); ou J est fini, ou la famille $(\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha)_{\alpha\in J}$ converge C-G fortement dans L^1 vers 0, en vertu de la proposition ci-dessus et du Lemme 3c. Il résulte alors de la propriété 2c1 que la famille $(\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G fortement dans L^1 vers 0.

D'autre part, la famille $(E\,\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G vers l, en tant que famille de nombres réels, et donc converge C-G fortement vers l en tant que famille d'éléments de L^1; il résulte alors de la propriété 1a1 que la famille $((\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha)+E\,\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge C-G fortement dans L^1 vers l.

Remarque. La conclusion (2) du théorème du paragraphe 1 peut être obtenue par application du théorème ci-dessus.

3. Théorème. *Pour que la famille $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'éléments indépendants de L^1 converge C-G fortement, il suffit que:*

(i) *la famille $(E(\phi_\alpha))_{\alpha\in A}$ converge selon le filtre des complémentaires des parties finies de A (soit l sa limite);*

(ii) *$\{\phi_\alpha;\,\alpha\in A\}$ soit équi-intégrable;*

(iii) *pour tout $\varepsilon>0$, il existe $c>0$ et $J\subset A$ tels que*

$$\sum_{\alpha\in J}P[|\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha|\geqq c]<\infty$$

(ce qui implique qu'il y a au plus une infinité dénombrable d'éléments α de J tels que $P[|\phi_\alpha - E\phi_\alpha| \geqq c] \neq 0$) et

$$(\forall \alpha \in \complement J) \int_\Omega |\phi_\alpha - E\phi_\alpha| \, dP < \varepsilon.$$

La limite est alors l.

Démonstration. Etant donné $\varepsilon > 0$, soient c et J satisfaisant à la condition (iii) de l'énoncé ci-dessus, et soit, pour tout $\alpha \in J$, ψ_α l'élément de L^1 obtenu en tronquant $\phi_\alpha - E\phi_\alpha$ à la valeur c; $\{\psi_\alpha - E\psi_\alpha; \alpha \in J\}$ est borné (pour la norme de L^∞) et donc, d'après la Proposition 4b1, la famille $(\psi_\alpha - E\psi_\alpha)_{\alpha \in J}$ converge C-G en probabilité vers 0.

Il est élémentaire que, pour toute famille $(\theta_\beta)_{\beta \in B}$ dans L^1, l'hypothèse

$$\sum_{\beta \in B} P[\theta_\beta \neq 0] < \infty$$

est une condition suffisante de convergence C-G en probabilité vers 0; c'est le cas, ici, de la famille $(\phi_\alpha - E\phi_\alpha - \psi_\alpha)_{\alpha \in J}$ et donc, d'après la propriété 2a1, la famille $(\phi_\alpha - E\phi_\alpha - E\psi_\alpha)_{\alpha \in J}$ converge aussi C-G en probabilité vers 0; en raison des hypothèses (i) et (ii), $\{\phi_\alpha - E\phi_\alpha - E\psi_\alpha; \alpha \in I\}$ est équi-intégrable, et donc $(\phi_\alpha - E\phi_\alpha - E\psi_\alpha)_{\alpha \in J}$ converge C-G fortement dans L^1 vers 0; il en résulte que la famille de nombres réels $(E\psi_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge C-G vers 0, et on en déduit que la famille $(\phi_\alpha - E\phi_\alpha)_{\alpha \in J}$ converge C-G fortement dans L^1 vers 0.

On achève la démonstration comme pour le théorème précédent.

c) *Condition nécessaire et suffisante.*

1. Proposition. *Pour qu'une famille $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'éléments indépendants de L^1, d'espérance mathématique nulle, converge C-G en probabilité vers 0, il faut et il suffit que les trois familles $(a_{n,\alpha})$, $(b_{n,\alpha})$ et $(c_{n,\alpha})$ définies ci-dessous possèdent la propriété (U): pour tout $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times A$,*

$$a_{n,\alpha} = P[|\psi_\alpha| \geqq n],$$

$$b_{n,\alpha} = \frac{1}{n} \int_{[|\psi_\alpha| < n]} \psi_\alpha \, dP,$$

$$c_{n,\alpha} = \frac{1}{n^2} \Big[\int_{[|\psi_\alpha| < n]} \psi_\alpha^2 \, dP - \Big(\int_{[|\psi_\alpha| < n]} \psi_\alpha \, dP \Big)^2 \Big].$$

Démonstration. Pour tout $S \in \mathscr{S}$, il résulte du «critère classique de convergence dégénérée» (voir [7], p. 278) que la suite $(\psi_{S(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité au sens de Césaro vers 0 si et seulement si les trois suites suivantes convergent vers 0:

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_{n,S(i)}\Big)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad \Big(\sum_{i=1}^n b_{n,S(i)}\Big)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad \Big(\sum_{i=1}^n c_{n,S(i)}\Big)_{n \in \mathbb{N}^*};$$

la proposition s'en déduit immédiatement.

2. Théorème. *Pour que la famille $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'éléments indépendants de L^1 converge C-G fortement, il faut et il suffit qu'elle vérifie les propriétés suivantes:*

(i) *la famille $(E(\phi_\alpha))_{\alpha \in A}$ converge, selon le filtre des complémentaires des parties finies de A (soit l sa limite);*

(ii) $\{\phi_\alpha;\ \alpha\in A\}$ *est équi-intégrable;*

(iii) *les trois familles définies ci-dessous possèdent la propriété* (U): *pour tout* $(n,\alpha)\in\mathbb{N}^*\times A$,

$$a_{n,\alpha}=P[|\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha|\geqq n]$$

$$b_{n,\alpha}=\frac{1}{n}\int_{[|\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha|<n]}(\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha)\,dP$$

$$c_{n,\alpha}=\frac{1}{n^2}\Big[\int_{[|\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha|<n]}(\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha)^2\,dP-\Big(\int_{[|\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha|<n]}(\phi_\alpha-E\,\phi_\alpha)\,dP\Big)^2\Big]$$

la limite est alors l.

Démonstration. La condition nécessaire est élémentaire; la démonstration de la condition suffisante est analogue à celle du théorème 4b2 ci-dessus.

5) Convergence C-G uniforme de mesures et propriété de mélange

Soit $(\Omega,\mathscr{B},P)$ un espace de probabilité et $T\colon \Omega\to\Omega$ une application bijective préservant la mesure ainsi que son inverse.

On dit que T est fortement mélangeante ([5]) si et seulement si

$$(\forall\,(F,G)\in\mathscr{B}^2)\lim_{n\to\infty}P\big(T^{-n}(F)\cap G\big)=P(F)\,P(G).$$

Soient $n\in\mathbb{N}$, $F\in\mathscr{B}$, et $\mu_{n,F}$ la mesure définie sur $\mathscr{B}$ par

$$G\to\mu_{n,F}(G)=P\big(T^{-n}(F)\cap G\big)-P(F)\,P(G).$$

Le théorème de Blum et Hanson ([1] et [2]) peut alors s'interpréter en termes de C-G convergence de la manière suivante:

Théorème. *L'application T est fortement mélangeante si et seulement si, pour tout $F\in\mathscr{B}$, la suite $(\mu_{n,F})_{n\in\mathbb{N}}$ converge C-G uniformément vers* 0.

Démonstration. La mesure $\mu_{n,F}$ admet pour densité par rapport à P l'application $\phi_{n,F}=1_F\circ T^n-P(F)$. D'après l'alinéa 3a, la suite $(\mu_{n,F})_{n\in\mathbb{N}}$ converge C-G uniformément vers 0 si et seulement si la suite $(1_F\circ T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge C-G fortement dans L^1 vers $P(F)$. Mais cette convergence est encore équivalente (cf. 2b3, remarque) à la convergence forte dans L^1, pour toute suite croissante S d'entiers, de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1_F\circ T^{S(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $P(F)$.

Il résulte alors du théorème de Blum et Hanson que cela est équivalent à ce que T soit fortement mélangeante.

Remarques. 1. On peut se demander, si dans la cas où T est fortement mélangeante, la C-G convergence est également uniforme en F. Un exemple donné en Appendice 2 prouve qu'il n'en est rien.

2. Dans le cas où $(\Omega,\mathscr{B},P)=(\bar{\Omega},\bar{\mathscr{B}},\bar{P})^{\mathbb{Z}}$, et où T est le shift

$$\big((\forall\,(\bar{\omega}_z)_{z\in\mathbb{Z}})\,T\big((\bar{\omega}_z)_{z\in\mathbb{Z}}\big)=(\bar{\omega}_{z+1})_{z\in\mathbb{Z}}\big),$$

la convergence C-G uniforme de la suite $(\mu_{n,F})_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 résulte également des considérations suivantes.

La tribu $\mathscr{B}$ étant engendrée par le clan $\mathscr{C}$ des cylindres à base finie, il suffit de démontrer que, pour tout $C \in \mathscr{C}$ la suite $(1_C \circ T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge C-G fortement, dans L^1, vers $P(C)$. Soit donc C un cylindre à base dans $\bar{\Omega}^l$ et considérons, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$, la suite $(1_C \circ T^{ml+k})_{m \in \mathbb{N}}$; elle est composée de fonctions indicatrices de cylindres indépendants, et donc de variables aléatoires indépendantes, qui sont toutes de même loi, d'espérance mathématique $P(C)$, et bornées; d'après le théorème 4b2, elle converge C-G fortement dans L^1 vers $P(C)$ et il en est de même, d'après la propriété 2b4, de la suite $(1_C \circ T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ elle-même.

Appendice 1

Suites de variables aléatoires, convergeant C-G en probabilité, et ne satisfaisant pas aux propriétés données en 1c

Soit, pour tout n, $\mathscr{L}_n$ la probabilité, définie sur $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ ($\mathscr{R}$ tribu borélienne), de fonction de répartition

$$x \rightsquigarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-\dfrac{1}{x+n} & \text{si } x \geqq 0. \end{cases}$$

On sait (voir [3], p. 51) que, si $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout n, ϕ_n soit de loi $\mathscr{L}_n$, elle converge en probabilité vers 0, mais il n'en est pas de même de la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi_i\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$; on a ainsi un *contre-exemple pour la propriété* 1.

Pour obtenir un *contre-exemple pour la propriété* 2, on va construire une suite double d'entiers, soit $(a_m, b_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $a_m < b_m \leqq a_{m+1}$; on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H(n) = \begin{cases} a_m & \text{si } n = a_m \\ b_m & \text{si } a_m < n < a_{m+1}; \end{cases}$$

dans toute la suite, $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, telle que, pour tout n, ϕ_n soit de loi $\mathscr{L}_{H(n)}$.

Pour tout n, on a

$$P\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi_i \geqq \varepsilon\right] \geqq P\left[\sup_{1 \leqq i \leqq n} \phi_i \geqq n\varepsilon\right] \geqq 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n\varepsilon + H(i)}\right)$$
$$\geqq 1 - \left(1 - \frac{1}{n\varepsilon + H(n)}\right)^n;$$

si n est tel qu'existe $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n = a_m$, $H(n) = n$; il en résulte que

$$P\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi_i \geqq \varepsilon\right]$$

ne peut tendre vers 0, et donc que la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas C-G en probabilité vers 0.

Nous allons démontrer qu'on peut cependant choisir la suite $(a_m, b_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ de telle sorte que

$$(\forall m \in \mathbb{N}^*)(\exists n \in \mathbb{N}^*)(\forall I \in \mathscr{P}_n)\, P\left[\frac{1}{n} \sum_{k \in I} \phi_k > \frac{1}{m}\right] < \frac{1}{m};$$

la suite des fonctions de répartition des variables aléatoires ϕ_n étant croissante, il suffit pour cela que, pour tout $m>0$, soit satisfaite la propriété suivante:

$$(P_m)\quad \text{il existe } n \text{ tel que } P\left[\sum_{k=1}^{n} \phi_k > \frac{n}{m}\right] < \frac{1}{m} \text{ et } a_m < n < a_{m+1}.$$

Etant donné M, supposons avoir construit les suites finies $(a_1, \ldots, a_M)$, $(b_1, \ldots, b_{M-1})$ de sorte que la propriété (P_m) soit satisfaite pour tout $m<M$; nous allons construire b_M et a_{M+1} de sorte que la propriété (P_M) soit satisfaite: soit $\delta>0$, tel que

$$P\left[\sum_{k=1}^{a_M} \phi_k \geqq \delta\right] \leqq \frac{1}{2M},$$

et soit $l \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{l+a_M}{M} - \delta > 0;$$

soit alors h tel que $h>a_M$ et que, pour toute variable aléatoire ψ, de loi $\mathscr{L}_n$,

$$P\left[\psi > \frac{1}{l}\left(\frac{l+a_M}{M} - \delta\right)\right] < \frac{1}{2lM};$$

prenons $b_M = h$ et $a_{M+1} = \sup(b_M, a_M + l + 1)$; on a bien

$$a_M < b_M \leqq a_{M+1}$$

et, si $n = a_M + l$ $(a_M < n < a_{M+1})$,

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{k=1}^{n} \phi_k \geqq \frac{n}{M}\right] &\leqq P\left[\sum_{k=1}^{a_M} \phi_k \geqq \delta\right] + P\left[\sum_{k=a_M+1}^{a_M+l} \phi_k \geqq \frac{l+a_M}{M} - \delta\right] \\ &\leqq \frac{1}{2M} + \sum_{k=a_M+1}^{a_M+l} P\left[\phi_k \geqq \frac{1}{l}\left(\frac{l+a_M}{M} - \delta\right)\right] \\ &\leqq \frac{1}{2M} + l\,\frac{1}{2lM} = \frac{1}{M}. \end{aligned}$$

Appendice 2

En situation de shift, la famille de bi-mesures $(Q_n)_{n\in N^*}$ n'est pas C-G-uniformément convergente vers 0

Soit $(\Omega, \mathscr{B}, P) = (\bar{\Omega}, \bar{\mathscr{B}}, \bar{P})^{\mathbb{Z}}$ et soit T le shift (voir ci-dessus 5, remarque 2).

On suppose $\bar{P}$ non trivial $((\exists\, \bar{B} \in \bar{\mathscr{B}})\, \bar{P}(\bar{B}) \in]0, 1[)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la bi-mesure Q_n, définie sur $\mathscr{B}^2$ par

$$(F, G) \rightsquigarrow Q_n(F, G) = P(F \cap T^{-n}(G)) - P(F)\,P(G).$$

Pour que la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne soit pas C-G uniformément convergente vers 0, il suffit, d'après la propriété 1 d 1, que

$$(\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, N \in \mathbb{N}^*)(\exists\, F \in \mathscr{B})\, |\{n \in \mathbb{N}^*;\, Q_n(F, F) \geqq \varepsilon\}| \geqq N.$$

Soit donc $N \in \mathbb{N}^*$; la probabilité $\bar{P}$ étant non triviale, il existe $l \in \mathbb{N}^*$, et $F_0\, (\in \mathscr{B})$, cylindre à base dans $\bar{\Omega}^l$, tels que

$$P(F_0) = p \geqq (\tfrac{3}{4})^{1/N}.$$

Soit alors M tel que $\frac{1}{4} \leqq p^M \leqq \frac{1}{2}$, et soit

$$F = F_0 \cap T^{-l}(F_0) \cap \cdots \cap T^{-(M-1)l}(F_0).$$

Par construction, $P(F) = \big(P(F_0)\big)^M = p^M$. Soit $h \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$; on a

$$F \cap T^{-hl}(F) = \bigcap_{m=0}^{M+h-1} T^{-ml}(F),$$

donc $P\big(F \cap T^{-hl}(F)\big) = p^{M+h}$.

Par suite, pour tout $h \leqq N$,

$$\begin{aligned} Q_n(F, F) = P(F \cap T^{-hl} F) - \big(P(F)\big)^2 = p^{M+h} - p^{2M} &\geqq p^M (p^N - p^M) \\ &\geqq \tfrac{1}{4}\big(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{16}, \end{aligned}$$

et donc

$$\{n \in \mathbb{N};\ Q_n(F, F) \geqq \tfrac{1}{16}\} \supset \{l, 2l, \ldots, Nl\},$$

d'où enfin

$$|\{n \in N;\ Q_n(F, F) \geqq \tfrac{1}{16}\}| \geqq N.$$

Bibliographie

1. Blum, J.R., Hanson, D.L.: On the mean ergodic theorem for subsequences. Bull. Amer. math. Soc. **66**, 308–311 (1960).
2. Brunel, A., Keane, M.: Ergodic theorems for operator sequences. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **12**, 231–240 (1969).
3. Dugué, D.: Traité de statistique théorique et appliquée. Paris: Masson 1958.
4. Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear operators, part I. New York: Interscience Publishers 1964.
5. Halmos, P.R.: Lectures on Ergodic theory. Publications of the Mathematical Society of Japan 1956.
6. Hennequin, P.L., Tortrat, A.: Théorie des probabilités et quelques applications. Paris: Masson 1965.
7. Loève, M.: Probability theory. Princeton: Van Nostrand 1960.
8. Neveu, J.: Bases Mathématiques de Calcul des Probabilités. Paris: Masson 1964.

G. Hansel
J.P. Raoult
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Rouen
F-76 Mont-Saint-Aignan
France

(Reçu le 6 juillet 1970)