Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 27, 257–262 (1973)

Zur Konstruktion optimaler Sequenztests*

Volker Mammitzsch und Hans-Werner Fuchs

Wir gehen bei unseren Betrachtungen von folgendem *Modell* aus (Richter [4]): Gegeben seien ein Meßraum $(\Omega, \mathfrak{F})$ mit den Wahrscheinlichkeitsmaßen (= *Hypothesen*) $P_1, \ldots, P_n$ auf $\mathfrak{F}$; eine Folge von σ-Körpern $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{F}_\infty \subset \mathfrak{F}$ über Ω; nicht-leere Mengen (= *Schadensbereiche*) $S(\omega, t)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $t \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$ mit $S(\omega, t) \subset R^n$ für $t = 1, 2, \ldots$ und $S(\omega, \infty) = \{\vec{\infty}\}$. Hierin bedeute $\vec{\infty}$ den Vektor, dessen Komponenten sämtlich gleich ∞ sind.

Unter diesen Annahmen setzen wir fest (vgl. [3] und [4]):

Definition. 1. Ein Sequenztest (T, s) besteht aus

(a) einer Stopzeit T der Familie $(\mathfrak{F}_t)_{t \leqq \infty}$ mit $P_\nu(T = \infty) = 0$ für alle $\nu = 1, \ldots, n$;

(b) einer Schadensfunktion s, d.h. einer Abbildung $s\colon \Omega \to R^n \cup \{\vec{\infty}\}$ derart, daß $1_{\{T \leqq t\}} s$ [1] für alle $t < \infty$ $\mathfrak{F}_t$-meßbar ist und $s(\omega) \in S(\omega, T(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt.

2. Es bedeute $\mathfrak{T}$ die Klasse aller Sequenztests gemäß 1. und

$$^k\mathfrak{T} := \{(T, s) \in \mathfrak{T}\colon T \leqq k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \infty;$$

dabei ist natürlich $\mathfrak{T} = {}^\infty\mathfrak{T}$.

3. Wir setzen $r(T, s) := \int_\Omega s \circ d\vec{P}$ [2] (=*Risikovektor*), falls das Integral (eigentlich oder uneigentlich) existiert, und nennen $^k\mathfrak{R} := \{r(T, s)\colon (T, s) \in {}^k\mathfrak{T}\} \cap R^n$ den k-stufigen *Risikobereich*. Gelegentlich schreiben wir auch $\mathfrak{R}$ statt $^\infty\mathfrak{R}$.

4. Sei $A \geqq 0$ [3] eine $m \times n$-Matrix, dann heißt der Test (T, s) *A-optimal* bezüglich $^k\mathfrak{T}$, wenn $r(T, s)$ eine A-Ecke[4] von $^k\mathfrak{R}$ ist. (Speziell für $A = p'$ [5] bei $p \in R^n$ mit $p \neq 0$ liefert diese Definition die Bayeslösung zur Vorbewertung p.)

Wir suchen nun nach Verfahren zur Konstruktion A-optimaler Tests bezüglich $\mathfrak{T}$. Dazu müssen wir allerdings noch gewisse Bedingungen an unser Modell stellen (zur Bezeichnungsweise s. [3]).

Voraussetzung. Sei $S(\omega, t) = c(t) + Q(\omega, t)$ mit $c(t) \in R^n$ und $Q(\omega, t) \subset R^n$ und bezeichne $V(\omega, t) := V(Q(\omega, t))$ die vordere Hülle von $Q(\omega, t)$ sowie $h(p; \omega, t) := g(p; V(\omega, t))$ die Stützfunktion von $V(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t < \infty$, dann gelte:

(1) $Q(\omega, t)$ ist vorn beschränkt und enthält die vorderen Extremalpunkte;

---

* Hans Richter zum 60. Geburtstag gewidmet.

[1] 1_X bezeichne die Indikatorfunktion der Menge X.

[2] Die Operation $\circ$ bedeute komponentenweise Multiplikation, $\vec{P}$ sei das (vektorielle) Maß auf $\mathfrak{F}$ mit den Komponenten $P_1, \ldots, P_n$.

[3] $\geqq$ bzw. $>$ ist komponentenweise zu verstehen.

[4] Zur Definition der A-Ecke vgl. [3], (2.20).

[5] Ein Strich bezeichne die Transponierte einer Matrix bzw. eines (Spalten-)Vektors.

(2) $h(p;\omega,t)$ ist bei festem $p\geqq 0$ und $t<\infty$ eine $\mathfrak{F}_t$-meßbare Funktion in ω, wobei $\inf_t h(\pm e_\nu;\omega,t)$[6] (eigentlich) P_ν-integrabel ist für alle $\nu=1,\dots,n$;

(3) $0\leqq c(1)\leqq c(2)\leqq\cdots$ mit $c(t)\to\vec{\infty}$ für $t\to\infty$.

Nach [3], Sätze (3.4) und (5.2) gibt es dann zu jeder Matrix $A>0$ einen A-optimalen Test bezüglich ${}^k\mathfrak{T}$. Um diese Tests zu der im folgenden fest gewählten Matrix $A>0$ mit den Zeilen $a_1',\dots,a_m'$ zu bestimmen, bilden wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $P:=\frac{1}{n}\sum_1^n P_\nu$, bezüglich dessen alle P_ν totalstetig sind, schreiben $d\vec{P}=f(\omega,t)\,dP$ auf $\mathfrak{F}_t$ mit geeigneten vektorwertigen $\mathfrak{F}_t$-meßbaren Funktionen $f(\omega,t)$ $(t=1,\dots,\infty)$ und definieren die $m+n\times n$-Matrix $A(\omega,t)$ mit den Zeilen $(a_1\circ f(\omega,t))',\dots,(a_m\circ f(\omega,t))',e_1',\dots,e_n'$. Schließlich sei $v(\omega,t)$ die $A(\omega,t)$-Ecke von $S(\omega,t)$ für $t<\infty$ und $v(\omega,\infty):=\vec{\infty}$; $\omega\in\Omega$. Zu jeder Stopzeit T liefert $s(\omega):=v(\omega,T(\omega))$ eine Schadensfunktion. Ist der Test (T_0,s_0) A-optimal bezüglich ${}^k\mathfrak{T}$, so ist auch $(T_0,v(\omega,T_0(\omega)))$ ein A-optimaler Test bezüglich ${}^k\mathfrak{T}$. Die Schadensfunktion s_0 ist im wesentlichen eindeutig festgelegt ([3], (3.6) und (5.3)); unser Problem reduziert sich demnach darauf, Stopzeiten zu A-optimalen Tests zu finden, die wir kurz *A-optimale Stopzeiten* nennen.

Von den bezüglich ${}^k\mathfrak{T}$ A-optimalen Stopzeiten sind besonders die *untere* Stopzeit ${}^kT_*$ und die *obere* Stopzeit ${}^kT^*$ von Interesse; zur Definition vgl. [3]. Sie können so gewählt werden, daß ${}^1T_*\leqq{}^2T_*\leqq\cdots\leqq{}^\infty T_*$ und ${}^1T^*\leqq{}^2T^*\leqq\cdots\leqq{}^\infty T^*$ gilt. Im Fall $k<\infty$ ist die Bestimmung von ${}^kT_*$ und ${}^kT^*$ konstruktiv durch ein Rekursionsverfahren möglich ([3], (3.16) zusammen mit (3.7) und (3.8)). Dieses Verfahren versagt im unendlichstufigen Fall. Es liegt aber die Vermutung nahe, daß sich die gesuchten Stopzeiten durch einen Grenzprozeß aus den abgebrochenen Tests gewinnen lassen. Wir interessieren uns zunächst für den Spezialfall einer Zeilenmatrix.

A. Bayeslösungen. *Sei $A=p'$ mit $p\in R^n$ und $p>0$. Man nennt bekanntlich den Wert ${}^k\rho:=p'\,{}^kr$, wobei ${}^kr$ eine p'-Ecke von ${}^k\mathfrak{R}$ ist, das minimale Bayesrisiko von ${}^k\mathfrak{T}$ bezüglich der Vorbewertung p.*

Aus [3], (5.20) folgt der

Hilfssatz. *${}^k\rho\to{}^\infty\rho$ für $k\to\infty$.*

Damit zeigen wir den

Satz. *Seien ${}^kT$ p'-optimale Stopzeiten bezüglich ${}^k\mathfrak{T}$ bei $k<\infty$ und existiere $T_0:=\lim_{k\to\infty}{}^kT$, dann ist T_0 eine p'-optimale Stopzeit bezüglich ${}^\infty\mathfrak{T}$.*

Beweis. 1. Behauptung: T_0 ist eine Stopzeit.

In der Tat: (a) Offenbar ist T_0 eine Abbildung von Ω nach $\{1,\dots,\infty\}$.

(b) Es ist ${}^kT\leqq{}^kT^*$ und ${}^kT^*\leqq{}^\infty T^*$, also ${}^kT\leqq{}^\infty T^*$ für alle $k<\infty$, was $T_0\leqq{}^\infty T^*$ und, da ${}^\infty T^*$ eine Stopzeit ist, $P_\nu(T_0=\infty)\leqq P_\nu({}^\infty T^*=\infty)=0$ für alle $\nu=1,\dots,n$ nach sich zieht.

(c) Da $\{1,\dots,\infty\}$ keinen endlichen Häufungspunkt besitzt, gilt für alle $t<\infty$ die Beziehung $\lim_{k\to\infty}{}^kT(\omega)\leqq t$ genau dann, wenn ${}^kT(\omega)\leqq t$ für alle $k\geqq l$ bei passen-

[6] e_ν bedeutet den ν-ten Grundvektor.

dem $l=l(\omega)<\infty$ ist. Daraus folgt

$$\{\omega\colon T_0(\omega)\leqq t\}=\bigcup_{l\geqq 1}\bigcap_{k\geqq l}\{\omega\colon {}^kT(\omega)\leqq t\}\in\mathfrak{F}_t \qquad \text{für alle } t<\infty.$$

Aus (a) bis (c) ergibt sich die Behauptung.

2. Behauptung: T_0 ist optimal.

In der Tat: (a) Wie in 1(c) finden wir: Für alle $\omega\in\Omega$ mit $T_0(\omega)=t$ bei $t<\infty$ gilt ${}^kT(\omega)=t$ für $k\geqq l(\omega)$ bei passendem $l(\omega)$ und somit $v(\omega, T_0(\omega))=v(\omega, t)=v(\omega, {}^kT(\omega))$ für alle $k\geqq l(\omega)$, also schließlich $v(\omega, T_0(\omega))=\lim_{k\to\infty} v(\omega, {}^kT(\omega))$. Das liefert wegen $P_\nu(T_0=\infty)=0$ für alle $\nu=1,\ldots,n$ die Beziehung

$$\lim_{k\to\infty} v(\omega, {}^kT(\omega))=v(\omega, T_0(\omega)) \quad P_\nu\text{-fast überall}, \qquad \nu=1,\ldots,n.$$

(b) Wir dürfen für jede p'-Ecke ${}^kr$ von ${}^k\mathfrak{R}$ ansetzen

$$\begin{aligned}{}^k\rho=p'\,{}^kr&=\int_\Omega p'\big(v(\omega, {}^kT(\omega))\circ f(\omega, {}^kT(\omega))\big)\cdot dP(\omega)\\ &=p'\int_\Omega v(\omega, {}^kT(\omega))\circ d\vec{P}(\omega).\end{aligned}$$

Hierin können wir die ν-te Komponente des Integranden im letzten Ausdruck wegen $v(\omega, t)\in S(\omega, t)=c(t)+Q(\omega, t)$ folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}e'_\nu\, v(\omega, {}^kT(\omega))&\geqq g(e_\nu; S(\omega, {}^kT(\omega)))=e'_\nu\, c({}^kT(\omega))+h(e_\nu;\omega, {}^kT(\omega))\\ &\geqq \inf_t h(e_\nu;\omega, t),\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung zufolge $c(t)\geqq 0$ und $h(e_\nu;\omega,t)=g(e_\nu; Q(\omega,t))$ richtig ist. Die Komponenten des Integranden sind also durch eine integrable Funktion nach unten beschränkt, und wir dürfen das Lemma von Fatou anwenden (vgl. [2], S. 131). Man findet zusammen mit dem Hilfssatz, da auch die Gewichtung mit den positiven Komponenten von p keine Rolle spielt:

$$(*) \qquad {}^\infty\rho=\lim_{k\to\infty}{}^k\rho\geqq p'\int_\Omega v(\omega, T_0(\omega))\circ d\vec{P}(\omega).$$

Dabei ist $v(\omega, T_0(\omega))$ die Schadensfunktion eines Tests aus $\mathfrak{T}$, so daß umgekehrt

$$(**) \qquad {}^\infty\rho\leqq p'\int_\Omega v(\omega, T_0(\omega))\circ d\vec{P}(\omega)$$

zutrifft. Aus $(*)$ und $(**)$ folgt jedoch die p'-Optimalität von $T_0(\omega)$ bezüglich $\mathfrak{T}$, was zu zeigen war.

Korollar 1. *$T_*:=\lim_{k\to\infty}{}^kT_*$ und $T^*:=\lim_{k\to\infty}{}^kT^*$ sind p'-optimale Stopzeiten bezüglich $\mathfrak{T}$.*

Beweis. ${}^kT_*$ und ${}^kT^*$ stellen monotone Folgen dar, deren Limiten demnach existieren; der Rest folgt aus dem Satz.

Korollar 2. *$T_*={}^\infty T_*$ P-fast überall.*

Beweis. Nach Korollar 1 ist T_* optimal bezüglich $\mathfrak{T}$, was $T_*\geqq{}^\infty T_*$ P-fast nach sich zieht. Umgekehrt folgt aus ${}^kT_*\leqq{}^\infty T_*$ für alle $k<\infty$ auch $T_*\leqq{}^\infty T_*$, was alles beweist.

Dagegen ist die analoge Beziehung $T^* = {}^{\infty}T^*$ nicht allgemein richtig, wovon wir uns durch ein Gegenbeispiel überzeugen.

Beispiel 1. Seien $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathfrak{F}_t$ der von den Mengen $\{1\}, \ldots, \{t-1\}$ und $\{t, t+1, \ldots\}$ erzeugte σ-Körper für $t < \infty$ sowie $\mathfrak{F}_\infty = \mathfrak{F}$ die Potenzmenge von Ω, ferner sei $n=2$ gewählt und $P_1 = P_2 = P$ definiert durch $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}$ für alle $\omega \in \Omega$. Als Schadensbereiche nehmen wir

$$S(\omega, t) = c(t) + Q(\omega, t) \quad \text{mit} \quad c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q(\omega, t) = \{q(\omega, t)\},$$

wobei für alle $\omega \in \Omega$:

$$q(\omega, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$q(\omega, t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -t+1 \\ -t+1 \end{pmatrix} & \text{falls } \omega = t-1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sonst} \end{cases} \quad ; \; t = 2, 3, \ldots .$$

Wir prüfen nun nach, daß unsere Voraussetzung erfüllt ist.

(1) gilt offensichtlich, weil $V(\omega, t) = Q(\omega, t)$ einpunktige Mengen sind.

(2) ergibt sich so: $h(p; \omega, t)$ bestimmt sich bei $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ für alle $\omega \in \Omega$ zu

$$h(p; \omega, 1) = \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2)$$

$$h(p; \omega, t) = \begin{cases} (p_1 + p_2)(-t+1) & \text{für } t-1 = \omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ; \; t = 2, 3, \ldots .$$

Wegen $\{t-1\} \in \mathfrak{F}_t$ ist $h(p; \omega, t)$ für festes p also $\mathfrak{F}_t$-meßbar für alle $t < \infty$. Außerdem ist $\inf\limits_t h(e_1; \omega, t) = \inf\limits_t h(e_2; \omega, t) = -\omega$ wegen $0 \geqq -\sum\limits_{\omega=1}^{\infty} \omega\, 2^{-\omega} > -\infty$ eigentlich integrabel bezüglich P_1 und P_2, während

$$\inf_t h(-e_1; \omega, t) = -\tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \inf_t h(-e_2; \omega, t) = 0$$

offensichtlich P_1- bzw. P_2-integrabel sind.

(3) ist trivialerweise gültig.

Wir wählen nun speziell $p' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Das zugehörige $v(\omega, t)$ ist gleich $c(t) + q(\omega, t)$, so daß für alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$p'\, v(\omega, 1) = \; 1$$

$$p'\, v(\omega, t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t-1 = \omega \\ t & \text{falls } t-1 \neq \omega \end{cases} ; \; t = 2, 3, \ldots .$$

Das bedeutet: $p'\, v(\omega, t) \geqq 1$ mit „$=$" genau dann, wenn entweder $t=1$ oder $t = 1 + \omega$ ist. Das Bayesrisiko $\int\limits_{\Omega} p'\, v(\omega, T(\omega)) \cdot dP$ der einzig möglichen Tests $(T(\omega), v(\omega, T(\omega)))$

aus $\mathfrak{T}$ nimmt deshalb genau dann ein Minimum an, wenn

$$T(\omega)\equiv 1 \quad \text{oder} \quad T(\omega)=\omega+1>1 \quad \text{für alle} \quad \omega\in\Omega$$

gilt. Zufolge der Meßbarkeitsbedingung für Stopzeiten muß insbesondere $\{T(\omega)=1\}\in\mathfrak{F}_1=\{\emptyset,\Omega)$ sein; es ist also entweder $T(\omega)=1$ für alle $\omega\in\Omega$ oder $T(\omega)>1$ für alle $\omega\in\Omega$. Als p'-optimale Stopzeiten kommen deshalb nur in Betracht

$$\begin{aligned}&\text{entweder} \quad T_1(\omega)\equiv 1\\ &\text{oder} \qquad T_2(\omega)=\omega+1 \quad \text{für alle } \omega\in\Omega.\end{aligned}$$

Hierbei ist $T_1(\omega)$ eine Stopzeit zu Tests aus ${}^k\mathfrak{T}$ für alle $k\leqq\infty$, während $T_2(\omega)$ vermöge der Bedingung $\{T_2(\omega)=t\}=\{\omega\colon \omega=t-1\}\in\mathfrak{F}_t$ für alle $t=1,2,\ldots$ zwar Stopzeit zu Tests aus ${}^\infty\mathfrak{T}$, nicht aber zu Tests aus ${}^k\mathfrak{T}$ mit $k<\infty$ ist. Damit haben wir

$$\begin{aligned}&{}^kT_*(\omega)={}^kT^*(\omega)=1 \qquad \text{für alle } k<\infty,\\ &{}^\infty T_*(\omega)\equiv 1<{}^\infty T^*(\omega)=\omega+1;\end{aligned}$$

also ${}^kT^*(\omega)\nrightarrow{}^\infty T^*(\omega)$ bei $k\to\infty$, wie behauptet.

Wir haben das Beispiel etwas komplizierter gewählt, als es für die Zwecke dieses Abschnitts nötig gewesen wäre, vgl. [1], um es später nochmals benutzen zu können.

B. A-optimale Lösungen. *Sei nun $A>0$ eine beliebige $m\times n$-Matrix mit $m>1$. In diesem Fall läßt sich weder die Konvergenzaussage unseres Satzes noch die etwas schwächere von Korollar 1 aufrechterhalten.*

Beispiel 2. Wir wählen Ω, $\mathfrak{F}_t$, $\mathfrak{F}$ und $P_\nu=P$, sowie die $S(\omega,t)$ wie im Beispiel 1, wofür die Voraussetzung zutrifft. Ferner setzen wir

$$A=\begin{pmatrix}a'_1\\ a'_2\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a'_1=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \quad \text{und} \quad a'_2=(2,1).$$

Da A-optimale Stopzeiten insbesondere a'_1-optimal sein müssen, finden wir sofort aus Beispiel 1

$${}^kT_*=T_1\equiv 1 \qquad \text{für alle } k<\infty \quad \text{und} \quad T_*:=\lim_{k\to\infty}{}^kT_*\equiv 1.$$

Für ${}^\infty T_*$ kommen zunächst T_1 und $T_2:=\omega+1$ in Betracht. Nun sind aber die Risikovektoren r_1 bzw. r_2 der zu T_1 bzw. T_2 gehörigen Tests gleich

$$r_1=\int_\Omega v(\omega,1)\circ d\vec{P}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad r_2=\int_\Omega v(\omega,\omega+1)\circ d\vec{P}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Dies ergibt $a'_2 r_1=\frac{7}{2}$ und $a'_2 r_2=3$, so daß T_1 als A-optimale Stopzeit ausscheidet und ${}^\infty T_*=\omega+1>T_*$ gilt. T_* ist nicht A-optimal.

Man erkennt weiter, daß r_1 die A-Ecke von ${}^k\mathfrak{R}$ für alle $k<\infty$ ist, während $r_2\neq r_1$ die A-Ecke von ${}^\infty\mathfrak{R}$ ist. Wir sehen daraus, daß wir den bezüglich ${}^\infty\mathfrak{T}$ A-optimalen Risikovektor ${}^\infty r$ nicht allgemein als Limes der bezüglich ${}^k\mathfrak{T}$ A-optimalen Risikovektoren ${}^kr$ erhalten. Es gibt aber eine andere Bestimmungsmöglichkeit.

Bemerkung. Die $m \times n$-Matrix A mit den Zeilen $a'_1, \ldots, a'_m$ habe den Rang n, dann berechnet sich die ν-te Komponente ${}^{\infty}r_\nu$ des Risikovektors der A-optimalen Tests bezüglich $\mathfrak{T}$ nach folgendem Rekursionsschema:

$$^{\infty}r_\nu = g_m(e_\nu), \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei

$$g_0(p) := \lim_{k \to \infty} g(p;\, {}^k\mathfrak{R}) \qquad \text{für } p > 0$$

und

$$g_i(p) := \lim_{l \to \infty} \left(g_{i-1}(p + l\, a_i) - l\, g_{i-1}(a_i)\right) \qquad \text{für alle } p \in R^n,$$

$(i = 1, \ldots, m)$. Hierbei bedeutet $g(.;\, X)$ die Stützfunktion der Menge $X \subset R^n$.

Beweis. (a) Aus dem Hilfssatz und der Definition der Stützfunktion ergibt sich bei $p > 0$ sofort $g(p;\, \mathfrak{R}) = \lim_{k \to \infty} g(p;\, {}^k\mathfrak{R})$.

(b) Man erhält die A-Ecke von $\mathfrak{R}$, indem man die a_1-Randmenge K_1 der abgeschlossenen konvexen Hülle von $\mathfrak{R}$ und dann sukzessive die a_i-Randmengen K_i von K_{i-1} bildet (zur Definition der Randmenge s. [3]); K_m besteht dann gerade aus der A-Ecke von $\mathfrak{R}$.

(c) Aus (a) und (b) folgt mittels (2.9) aus [3] die Behauptung.

Die Stützfunktion von ${}^k\mathfrak{R}$ läßt sich bei $k < \infty$ konstruktiv gewinnen; unsere Bemerkung liefert deshalb ein Konstruktionsverfahren für den Risikovektor der A-optimalen Tests bezüglich $\mathfrak{T}$.

Literatur

1. Fuchs, H.-W.: Zur Konvergenz optimaler Stopzeiten bei mehrstufigen Tests. Diplomarbeit, München (1971)
2. Henze, E.: Einführung in die Maßtheorie. Mannheim-Wien-Zürich: Bibl. Institut (1971)
3. Mammitzsch, V.: Bayeslösungen bei mehrstufigen Tests. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **19**, 123 – 166 (1971)
4. Richter, H.: Endlichstufige Tests mit abhängigen Beobachtungen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **2**, 22 – 33 (1963)

Volker Mammitzsch
Mathematisches Institut der Universität
D-8000 München 2, Theresienstraße 39
Bundesrepublik Deutschland

Hans-Werner Fuchs
D-7750 Konstanz
Haidelmoosweg Nr. 29 b
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 24. Mai 1972; in revidierter Fassung am 13. Juli 1973)