Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 32, 261–276 (1975)

Marche aléatoire sur le groupe libre et frontière de Martin

Yves Derriennic

I. Introduction

La détermination de la frontière de Martin et par conséquent de l'espace des fonctions harmoniques positives pour une marche aléatoire sur le groupe libre non abélien à un nombre fini de générateurs est un problème qui a déja été envisagé par différents auteurs. Une solution complète a été donnée dans le cas où le support de la mesure de probabilité définissant la marche aléatoire est constitué des générateurs du groupe et de leurs inverses (voir [7, 8, 13] et aussi [4] où un problème analogue pour les arbres est résolu sous une hypothèse du même type). Dans le présent travail une solution est donnée à ce problème pour la classe plus large des marches aléatoires irréductibles, c'est-à-dire pouvant atteindre tous les éléments du groupe à partir de l'un d'entre eux, et définies par des mesures de probabilité à support fini. Il est remarquable que sous ces hypothèses plus générales le résultat reste essentiellement le même que dans le cas envisagé par les auteurs précédents: la frontière de Martin est encore l'espace des «bouts» ou «mots réduits infinis», compactification naturelle du groupe libre; en particulier elle ne dépend pas de la mesure de probabilité définissant la marche aléatoire.

Dans les travaux sur la frontière de Martin des processus de Markov à temps discret, plusieurs points de vue et plusieurs définitions de la frontière elle-même sont adoptés concurrement (pour les cas des marches aléatoires voir [2] qui donne une bibliographie complète). Ici le point de vue adopté est celui exposé dans [11]; la frontière de Martin est un espace compact obtenu en complétant l'espace des états de façon à pouvoir prolonger par continuité le «noyau de Martin» ou «fonction de Green normalisée». La description du cône des fonctions harmoniques positives résulte de la construction de la frontière. Mais, comme on le constate à posteriori, les différents points de vue s'accordent dans la situation envisagée ici, car tous les points de la frontière obtenue sont extrémaux, c'est-à-dire que chacun représente une génératrice extrémale du cône convexe des fonctions harmoniques positives. Pratiquement tout se ramène à la détermination des «directions» dans le groupe suivant lesquelles le noyau de Martin converge. La démonstration repose sur un argument géométrique classique qui a été utilisé, par exemple dans [3], pour prouver le théorème de Perron-Frobenius relatif aux matrices positives.

Le § II contient les notations et des rappels sur la frontière de Martin et les marches aléatoires. Le § III décrit la structure particulière des marches aléatoires sur le groupe libre. Le § IV contient les résultats fondamentaux: la construction de la frontière de Martin et ses principales propriétés. Le § V donne des résultats, du type «théorème de Fatou», sur le comportement des fonctions harmoniques à la frontière. Enfin le § VI indique les relations existant entre les harmoniques extrémales et l'unique mesure invariante sur la frontière.

II. Notations. Résultats préliminaires

Soit G le groupe libre dont les générateurs sont $a_1, \ldots, a_n$ avec $n \geqq 2$. L'inverse de a_i est noté $a_{-i} (i=1, \ldots, n)$. L'élément neutre est noté e.

Les éléments de G sont représentés par les «mots»

$$x = a_{i_1} \ldots a_{i_k}, \quad i_l \in \{\pm 1, \ldots, \pm n\}, \quad (l=1, \ldots, k)$$

réduits, c'est-à-dire tels que $i_l + i_{l+1} \neq 0$ pour tout $l=1, \ldots, (k-1)$. Tous les mots qui apparaîtront dans la suite seront supposés réduits. La longueur d'un élément x de G est le nombre de symboles a_i apparaissant dans son écriture réduite; on la note $|x|$; on pose $|e|=0$. Il est clair qu'en posant

$$d(x, y) = |x^{-1} y| \quad (x, y \in G)$$

on définit sur G une distance invariante par translations à gauche, c'est-à-dire vérifiant $d(x, y) = d(zx, zy)$. Comme dans [4] on appelle géodésique de x à y $(x, y \in G)$ la suite $z_0, \ldots, z_l$ d'éléments distincts de G satisfaisant

$$z_0 = x, \quad z_l = y, \quad d(z_i, z_{i+1}) = 1 \quad \text{pour } i = 0, \ldots, (l-1).$$

Il est clair que le nombre l satisfait $l = d(x, y)$. Par exemple, la géodésique de e à $x = a_{i_1} \ldots a_{i_l}$ est la suite $z_0, \ldots, z_l$ où $z_k = a_{i_1} \ldots a_{i_k}$.

Soit μ une mesure de probabilité sur G. La marche aléatoire droite sur G définie par μ est la chaîne de Markov canonique $(X_j)_j$ dont l'espace des états est G et dont la matrice de transition est

$$Q(x, y) = \mu(x^{-1} y) \quad (x, y \in G).$$

Une fonction f de G à valeurs réelles est dite harmonique (resp. surharmonique) si

$$\sum_{y \in G} f(xy)\, \mu(y) = f(x) \quad (\text{resp} \leqq)$$

pour tout $x \in G$.

La matrice potentiel N est définie par

$$N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} Q^i(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{*i}(x^{-1} y)$$

où μ^{*i} désigne la i-ème puissance de convolution de μ.

On note $u(x, y)$ la probabilité pour que la marche aléatoire issue de x (i.e. dont la loi initiale est la mesure de Dirac en x) atteigne y à un instant quelconque $\geqq 0$. Les relations suivantes sont alors classiques:

$$u(x, y) = u(e, x^{-1} y),$$
$$N(x, y) = u(x, y)\, N(y, y) = u(e, x^{-1} y)\, N(e, e),$$
$$u(x, y) \geqq u(x, z)\, u(z, y).$$

Le théorème suivant, qui est une consequence immédiate du résultat démontré dans [6], sert de point de départ à l'étude qui suit.

Théorème 1. *La marche aléatoire définie par μ sur G est transitoire. De plus la famille $(N(e, y))_{y \in G}$ est de carré sommable ce qui implique:*

$$\lim_{|y| \to \infty} N(e, y) = \lim_{|y| \to \infty} u(e, y) = 0.$$

Un corollaire simple de ce théorème est que $u(e, z) = 1$ implique $z = e$. En effet, on a $u(e, z^i) \geqq (u(e, z))^i$ et $|z^i| \xrightarrow[i \to \infty]{} \infty$ si $z \neq e$, donc $\lim_{i \to \infty} u(e, z^i) = 0$ implique $u(e, z) = 1$.

Pour $x \in G$ et $V \subset G$ on note $\alpha_x^V(v)$ la probabilité pour que la première visite à V de la marche aléatoire issue de x ait lieu en $v \in V$. On note α_x^V le vecteur $(\alpha_x^V(v))_{v \in V}$; α_x^V est donc la distribution de probabilité de la première visite à V de la marche aléatoire issue de x. Ce vecteur vérifie $0 < \sum_{v \in V} \alpha_x^V(v) \leqq 1$.

Pour V et $W \subset G$ on note A_V^W la matrice dont les lignes sont indexées par V, les colonnes par W, les lignes étant formées des vecteurs α_v^W, $v \in V$, définis ci-dessus;

$$A_V^W = (\alpha_v^W(w))_{v \in V,\, w \in W}.$$

Les matrices de ce type sont sous-stochastiques (i.e. la somme des termes d'une même ligne est $\leqq 1$).

Pour $y \in G$, $V \subset G$ on note aussi u_V^y le vecteur, indexé par V, $(u(v, y))_{v \in V}$.

Hypothèse 1. *Désormais on supposera que la marche aléatoire définie par μ sur G est irréductible, c'est-à-dire que*

$$u(x, y) > 0 \qquad \textit{pour tout } x, y \in G.$$

Cette hypothèse permet de définir le noyau de Martin de la marche aléatoire issue de e:

$$K(x, y) = \frac{N(x, y)}{N(e, y)} \qquad (x, y \in G).$$

On a évidemment

$$K(x, y) = \frac{u(x, y)}{u(e, y)}.$$

La relation $u(e, y) \geqq u(e, x)\, u(x, y)$ implique que $K(x, y)$ est borné en y par $\dfrac{1}{u(e, x)}$. D'autre part, pour y fixé, $K(x, y)$ est une fonction de x surharmonique, harmonique sur le complémentaire de $\{y\}$.

La compactifié de Martin de G (relatif à la marche aléatoire définie par μ, issue de e) est un espace compact métrisable $\hat{G}$ contenant G, satisfaisant les conditions suivantes:

1. G est ouvert dans $\hat{G}$; la restriction de la topologie de $\hat{G}$ à G est la topologie discrète,
2. pour tout $x \in G$ la fonction $K(x, \cdot)$ se prolonge par continuité à $\hat{G}$; ces fonctions prolongées séparent les points de $\hat{G}$.

La frontière de Martin est l'espace $M = \hat{G} - G$. Ces deux espaces $\hat{G}$ et M sont définis de façon unique à un isomorphisme près. On note encore $K(x, s)$, $x \in G$, $s \in \hat{G}$ le prolongement à $G \times \hat{G}$ du noyau de Martin.

Un point $s \in M$ est dit extrémal si la fonction $K(\cdot, s)$ est harmonique et extrémale dans le convexe compact des harmoniques positives h telles que $h(e) \leqq 1$. L'ensemble des points extrémaux forme un ensemble borélien E de M. Pour toute harmonique positive h il existe sur M une mesure positive λ^h unique satisfaisant

$$h(x) = \int_M K(x, s)\, \lambda^h(ds) \qquad \text{pour tout } x \in G$$

et $\lambda^h(M - E) = 0$.

Enfin, il existe une variable aléatoire X_∞ à valeurs dans M telle que, presque surement, les trajectoires ω de la marche aléatoire issue de e satisfont

$$\lim_{j \to \infty} X_j(\omega) = X_\infty(\omega)$$

(la limite étant entendue au sens de la topologie de $\hat{G}$).

Pour les démonstrations on renvoit à [14] pour les résultats relatifs aux marches aléatoires et à [11] pour les résultats relatifs à la frontière de Martin.

III. Structure des marches aléatoires à support fini

En plus de l'hypothèse 1 on utilisera aussi:

Hypothèse 2. *Désormais on supposera que le support de μ est fini. On note alors* $r(\mu) = \sup\{|z|; z \in G \text{ et } \mu(z) > 0\}$.

Le cas traité dans [7] (voir aussi [8, 13] et [4]) est le cas $r(\mu) = 1$.

Définition 1. On dit qu'un ensemble V est intermédiaire entre x et $y \in G$ satisfaisant $d(x, y) \geqq r(\mu) + 1$, s'il existe deux points z et z' de la géodésique de x à y, différents de x et y, satisfaisant $d(z, z') = r(\mu) - 1$, et tels que V soit l'intersection des deux boules centrées en z et z' de rayon $r(\mu) - 1$. (Autrement dit V est le plus grand ensemble de diamètre $r(\mu) - 1$ contenant z et z'.)

Dans le cas $r(\mu) = 1$ les ensembles intermédiaires entre x et y sont formés des points de la géodésique de x à y. Le nom d'ensemble intermédiaire est justifié par le résultat suivant.

Lemme 1. *Soient $x, y \in G$ admettant un ensemble intermédiaire V. La marche aléatoire issue de x ne peut atteindre y avec une probabilité positive qu'après au moins une visite à V.*

Démonstration. Presque surement les trajectoires ω de la marche aléatoire issue de x satisfont $d(X_j(\omega), X_{j+1}(\omega)) \leqq r(\mu)$. Si ω est une telle trajectoire atteignant y à l'instant l, on peut considérer le plus petit entier k tel que z_1 soit un point de la géodésique de x à $X_k(\omega)$, où z_1 est le point de la géodésique de x à y vérifiant

$$d(z_1, y) \leqq d(z_1, x)$$

et

$$d(z_1, V^c) = \inf_{v \notin V} d(z_1, v) \geqq \frac{r(\mu) - 1}{2}.$$

Comme $d(X_{k-1}(\omega), X_k(\omega)) \leqq r(\mu)$, un raisonnement élémentaire montre alors que soit $X_k(\omega) \in V$, soit $X_{k-1}(\omega) \in V$. Le lemme est démontré car $k < l$.

Une conséquence immédiate de ce lemme et de la propriété forte de Markov est que:

$$u(x, y) = \sum_{v \in V} \alpha_x^V(v)\, u(v, y) = \langle \alpha_x^V, u_V^y \rangle$$

en notant $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs. (Voir les notations introduites au § II.) Plus généralement supposons que $V_1 \dots V_k$ soient k ensembles intermédiaires disjoints entre x et y, placés dans l'ordre naturel de la géodésique de x à y, c'est-à-dire satisfaisant $d(x, V_{i+1}) > d(x, V_i)$ et $d(V_i, V_{i+1}) = 1$. Alors V_{i+1} est intermédiaire entre chaque point de V_i et y. En posant

$$A_i = A_{V_i}^{V_{i+1}} \qquad i = 1, \dots, (k-1)$$

on a la formule générale:

$$u(x, y) = \langle \alpha_x^{V_1}, A_1\, A_2 \dots A_{k-1}\, u_{V_k}^y \rangle.$$

Dans le cas $r(\mu) = 1$ cette formule se réduit à

$$u(x, y) = u(x, v_1)\, u(v_1, v_2) \dots u(v_{k-1}, v_k)\, u(v_k, y)$$

où $v_1, \dots, v_k$ sont des points consécutifs de la géodésique de x à y.

Bien que le nombre d'ensembles intermédiaires disjoints entre x et y et donc aussi le nombre de matrices apparaissant dans cette formule, augmente quand $d(x, y)$ augmente, le nombre total de matrices différentes à intervenir est fini, car $\alpha_x^V = \alpha_{zx}^{zV}$ pour $z \in G$, $V \subset G$; ce nombre est plus petit que celui des mots de longueur $2r(\mu) - 1$. De plus les ensembles intermédiaires ayant tous le même nombre d'éléments ces matrices sont toutes carrées de même dimension.

Les considérations précédentes sont résumées par le résultat suivant:

Lemme 2. *Il existe ρ matrices carrées de même dimension, $A_1, \dots, A_\rho$ sous-stochastiques, attachées à la marche aléatoire définie par μ, pour lesquelles la propriété suivante est vraie: quels que soient $x, y \in G$, si $V_1, \dots, V_k$ sont des ensembles intermédiaires disjoints entre x et y tels que*

$$d(V_i, V_{i+1}) = 1 \quad \text{et} \quad d(x, V_{i+1}) > d(x, V_i) \quad (i = 1, \dots, (k-1)),$$

il existe $(k-1)$ entiers $j_1, \dots, j_{k-1}$ compris entre 1 et ρ ne dépendant que de la suite $V_1, \dots, V_k$ tels que

$$u(x, y) = \langle \alpha_x^{V_1}, A_{j_1} \dots, A_{j_{k-1}}\, u_{V_k}^y \rangle.$$

Ceci permet de préciser un peu la vitesse de convergence vers 0 du potentiel assurée par le théorème 1.

Proposition 1. *Il existe une constante c satisfaisant $0 < c < 1$ et $u(e, y) \leqq c^{|y|}$ $(y \in G)$.*

Démonstration. D'après l'étude précédente $u(e, y)$ peut se mettre sous la forme:

$$u(e, y) = \langle \alpha_e^{V_1}, A_{j_1} \dots A_{j_{k-1}}\, u_{V_k}^y \rangle$$

les matrices $A_{j_1}, \dots, A_{j_{k-1}}$ appartenant à la famille décrite dans le lemme 2. Or pour toute suite d'entiers $j_1, \dots, j_k$ compris entre 1 et ρ la matrice $A_{j_1} \dots A_{j_k}$ a pour vecteurs lignes des vecteurs du type α_x^V où V est un ensemble du type «intermédiaire» et où $d(x, V) \geqq (k-1)\, r(\mu) + 1$. Comme $\lim_{|y| \to \infty} u(e, y) = 0$ et comme le nombre d'éléments d'un ensemble intermédiaire est fini et fixé, il existe k tel que la somme des termes de chaque ligne de la matrice $A_{j_1} \dots A_{j_k}$ soit strictement inférieur à 1. Le nombre des matrices A_j données par le lemme précédent étant fini, il existe un entier l et une constante $d<1$ tels que dans tout produit de l matrices A_j la somme des termes de chaque ligne soit inférieure à d. En utilisant le fait que toutes les composantes des vecteurs $\alpha_e^{V_1}$ et $u_{V_k}^y$ sont inférieure à 1, on obtient alors

$$u(e,y) \leqq \exp\left(\left[\frac{k-1}{l}\right] \operatorname{Log} d\right) \leqq \exp\left(\left(\frac{k-1}{l}-1\right) \operatorname{Log} d\right)$$

où $[t]$ désigne la partie entière du réel t. Comme k peut-être choisi satisfaisant $k=\left[\frac{|y|-1}{r(\mu)}\right]$ on obtient:

$$u(e,y) < \exp\left(\left(\frac{|y|-(r(\mu)+1)}{l r(\mu)}-1\right) \operatorname{Log} d\right)$$

ce qui donne le résultat annoncé en prenant c satisfaisant

$$c \geqq \exp\left(\frac{1}{l r(\mu)} \operatorname{Log} d\right) \quad \text{et} \quad c \geqq u(e,y)^{(1/|y|)}$$

pour toùt y tel que

$$\exp\left(\left(\frac{|y|-(r(\mu)+1)}{l r(\mu)}-1\right) \operatorname{Log} d\right) > 1.$$

Dans la suite la forme de ces matrices A_j interviendra de façon essentielle; en particulier le nombre et la disposition des termes nuls. Aussi la fin de ce paragraphe est-elle consacrée à un résultat à ce sujet.

Lemme 3. *Soient V et W deux ensembles contenus dans deux boules disjointes. Si le support de μ contient tous les générateurs $a_1 \ldots a_n$ ainsi que leurs inverses $a_{-1} \ldots a_{-n}$ les distributions d'entrée dans W à partir des points de V satisfont:*

$$\alpha_x^W(w)=0 \Leftrightarrow \alpha_y^W(w)=0 \qquad x, y \in V \;\; w \in W.$$

En particulier si le support de μ est la boule de rayon $r(\mu)$ centrée en e et si le diamètre de W est inférieur ou égal à $r(\mu)-1$ on a $\alpha_x^W(w)>0$ pour tout $x \in V$ et $w \in W$.

Démonstration. Si le support de μ contient les générateurs et leurs inverses, si $d(z,z')=k$, la marche aléatoire issue de z admet un ensemble non négligeable de trajectoires ω telles que $(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega))$ soit la géodésique de z à z'. Etant donnés $x, y \in V$ la géodésique de y à x ne passe pas par W car V et W sont contenus dans deux boules disjointes. La propriété forte de Markov donne alors

$$\alpha_y^W(w) \geqq P_y[X_0=z_0, \ldots, X_k=z_k]\, \alpha_x^W(w)$$

où $(z_0, \ldots, z_k)$ est la géodésique de y à x et où P_y désigne la loi de probabilité de la marche aléatoire issue de y. Les points y et x jouant des rôles symétriques la première partie du lemme est démontrée.

Pour démontrer la seconde partie considérons $x_0 \in V$ et $w_0 \in W$ tels que $d(x_0, w_0)=d(V,W)=l$. Soit $(x_0, z_1, \ldots, z_{l-1}, w_0)$ la géodésique de x_0 à w_0. Puisque le diamètre de W est plus petit que $r(\mu)-1$ et que μ charge tous les éléments de G de longueur plus petite que $r(\mu)$, il existe une probabilité positive pour que la marche aléatoire issue de z_{l-1} atteigne un point quelconque de W au premier instant; donc $\alpha_{z_{l-1}}^W(w)>0$ pour tout $w\in W$. La géodésique de x_0 à z_{l-1} ne passant pas par W il y a une probabilité positive pour que la marche aléatoire issue de x_0 atteigne z_{l-1} avant de visiter W, comme on l'a vu plus haut. Donc $\alpha_{x_0}^W(w)>0$ pour tout $w\in W$. D'après la première partie du lemme on en déduit.

$$\alpha_x^W(w)>0 \qquad \text{pour tout } x\in V \text{ et tout } w\in W.$$

Corollaire 1. *Si le support de μ contient les générateurs et leurs inverses, dans chacune des matrices A_j $(j=1,\dots,\rho)$ introduites dans le lemme 2, les zéros sont disposés en colonne.*

IV. Construction de la frontière de Martin

Ce paragraphe commence par un lemme «géométrique» qui jouera un rôle essentiel dans la suite. Ce lemme, qui constitue une version généralisée du théorème de Perron-Frobenius, est dérivé d'un résultat de [3], qui utilise la notion de distance projective. Rappelons rapidement ce dont il s'agit.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$, soit C le cône convexe défini par l'hyperquadrant contenant les k-uples dont tous les termes sont strictement positifs. Etant donnés $f,g\in C$ dont les directions sont différentes, on peut considérer les droites D et D' qui sont les intersections du plan engendré par f et g avec la frontière du cône C. On pose alors

$$\theta_k(f,g)=|\mathrm{Log}\,[f,g,D,D']|$$

où $[f,g,D,D']$ désigne le birapport des quatre directions f,g,D,D'; θ_k définit une distance sur l'espace des droites du cône C, appelée distance projective hyperbolique (voir [3] et les références qui y sont données).

Pour plus de clarté on considérera θ_k comme une distance sur $C_1=C\cap S$ où S est la sphère unité de $\mathbb{R}^k$ pour la norme euclidienne. La topologie induite par θ_k sur C_1 est identique à la topologie initiale.

Lemma 4. *Soient $M_1,\dots,M_t$, t matrices carrées non nulles d'ordre k à termes positifs ou nuls. On suppose que dans chacune de ces matrices les termes nuls sont disposés en colonne (i.e. les termes d'une même colonne sont soit tous nuls soit tous strictement positifs). Quelle que soit la suite $(i_l)_{l=1,\dots}$ d'entiers compris entre 1 et t, si $f_l=M_{i_1}M_{i_2}\dots M_{i_l}f$, la suite des vecteurs normalisés $f_l/\|f_l\|$ converge vers un vecteurs $f_0\in C_1$ uniformément en $f\in C$.*

Démonstration. Une matrice M_i du type décrit ci-dessus projette C sur un cône C' contenu dans C. L'ensemble $C'_1=C'\cap S$ est relativement compact dans C_1 et son diamètre Δ_i relativement à la distance θ_k est fini.

Soit T_i l'application de C_1 dans lui-même définie par

$$T_i f=M_i f/\|M_i f\|.$$

On a alors d'après le lemme 1 de [3]

$$\theta_k(T_i f, T_i g)\leqq\delta_i\theta_k(f,g) \qquad \text{pour tout } f,g\in C_1$$

où $\delta_i=th(\frac{1}{4}\Delta_i)$. Ceci entraîne

$$\text{diamètre}_{\theta_k}(T_{i_1}\dots T_{i_l}(C_1))\leqq(\sup_{i=1\dots t}\delta_i)^{l-1}\,\text{diamètre}_{\theta_k}(T_{i_l}(C_1)).$$

D'autre part $T_{i_l}(C_1) \subset C_1$ implique

$$T_{i_1} \dots T_{i_l}(C_1) \subset T_{i_1} \dots T_{i_{l-1}}(C_1).$$

La suite $T_{i_1} \dots T_{i_l}(C_1)$ est donc une suite décroissante d'ensembles relativement compacts dont les diamètres tendent vers 0 car $\sup\limits_{i=1 \dots t} \delta_i < 1$. Ceci entraîne l'existence d'un point $f_0 \in C_1$ tel que

$$\bigcap_l \overline{T_{i_1} \dots T_{i_l}(C_1)} = \{f_0\}$$

ce qui prouve que la suite $f_l/\|f_l\|$ définie dans l'énoncé converge vers f_0 uniformément en $f \in C$.

Remarque. En général le point limite f_0 dépend de la suite (i_l) considérée. Dans le cas où toute les matrices sont identiques ce lemme redonne le théorème classique de Perron-Frobenius.

La construction de la frontière de Martin utilise les quelques définitions suivantes.

Définition 2. Un mot réduit infini $s = a_{i_1} \dots a_{i_l} \dots$ est défini par une suite $(i_l)_{l=1,\dots}$ d'entiers non nuls compris entre $-n$ et $+n$ tels que

$$i_l + i_{l+1} \neq 0 \qquad \text{pour tout } l.$$

On appelle géodésique de e à s la suite naturelle $s_k = a_{i_1} \dots a_{i_k}$.

Etant données deux mots réduits, finis ou infinis, s_0 et s_1 on appelle confluent de s_0 et s_1 le plus long mot réduit (i.e. élément de G) commun aux géodésiques de e à s_0 et de e à s_1.

Autrement dit si $s_0 = a_{i_1} \dots a_{i_l} \dots$ et $s_1 = a_{j_1} \dots a_{j_l} \dots$, le confluent de s_0 et s_1 est le plus long mot réduit $s_2 = a_{m_1} \dots a_{m_k}$ tel que

$$m_l = i_l = j_l \qquad \text{pour } l = 1, \dots, k.$$

Si s_0 et s_1 sont dans G leur confluent est un point de la géodésique de l'un à l'autre.

Définition 3. Le compactifié naturel de G est l'espace $G \cup M$ où M désigne l'espace des mots réduits infinis, muni de la topologie caractérisée par la propriété: une suite $(s_l)_{l=1,\dots}$ dans $G \cup M$ converge vers $s \in G \cup M$ si $s_l = s$ constamment à partir d'un certain rang ou bien si la longueur du confluent de s_l et s tend vers l'infini avec l.

Cet espace topologique $G \cup M$ possède les propriétés suivantes:

$G \cup M$ est métrisable et compact.

Chaque point de G est ouvert et G est dense dans $G \cup M$.

La restriction à M de la topologie est la topologie produit canonique, M étant une partie de $\{\pm 1, \dots, \pm n\}^{\mathbb{N}}$.

Théorème 2. *La compactifié de Martin de G (relatif à la marche aléatoire définie par μ issue de e) est le compactifié naturel de G. La frontière de Martin est l'espace M des mots réduits infinis. Le noyau de Martin se prolonge à $G \times G \cup M$ et sera encore noté K.*

D'après les propriétés du compactifié de Martin rappelées au § II ce théorème admet la formulation équivalente suivante:

Pour une suite $(y_l)_l$ de G les conditions suivantes sont équivalentes:

i) *la suite $(y_l)_l$ converge dans l'espace $G \cup M$, compactifié naturel de G.*

ii) *La suite de fonctions $(K(.,y_l))_l$ converge simplement sur G (i.e. la $\lim_{l\to\infty} K(x,y_l)$ existe pour tout $x\in G$).*

Démonstration. On va commencer par prouver i)$\Rightarrow$ii). Dans un premier temps on étudie le cas où le support de la mesure contient les générateurs et leurs inverses.

Soient $s\in M$, $x\in G$, z le confluent de s et x. Soit $(y_l)_l$ une suite de G convergeant vers s dans $G\cup M$. Si z_l est le confluent de y_l et s, on a $|z_l| \xrightarrow[l\to\infty]{} +\infty$. Soit alors $\varphi(l)$ le plus grand entier tel que $|z_l|>|z|+(\varphi(l)+1)\,r(\mu)+1$ (défini pour l assez grand seulement). Les géodésiques de x à y_l et de e à y_l passent par z et z_l; comme il y a $\varphi(l)+1$ ensembles intermédiaires disjoints $V_1,\ldots,V_{\varphi(l)+1}$ entre z et z_l, satisfaisant

$$d(z,V_1)=1,$$
$$d(V_{i+1},V_i)=1 \qquad \text{pour } i=1,\ldots,\varphi(l),$$

on peut écrire d'après le lemme 2

$$u(x,y_l)=\langle \alpha_x^{V_1}, A_{j_1}\ldots A_{j_{\varphi(l)}} u^{y_l}_{V_{\varphi(l)+1}}\rangle$$

et

$$u(e,y_l)=\langle \alpha_{e1}^{V}, A_{j_1}\ldots A_{j_{\varphi(l)}} u^{y_l}_{V_{\varphi(l)+1}}\rangle$$

où $j_1,\ldots,j_{\varphi(l)}$ sont des entiers compris entre 1 et ρ. Comme $\varphi(l)\xrightarrow[l\to\infty]{}+\infty$ on a ainsi construit une suite infinie $(j_m)_{m=1\ldots}$ d'entiers compris entre 1 et ρ ne dépendant que de s et z. Les hypothèses du lemme 4 étant satisfaites d'après le corollaire 1, les vecteurs $A_{j_1}\ldots A_{j_{\varphi(l)}} u^{y_l}_{V_{\varphi(l)+1}}$ convergent en direction vers un vecteur f dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

Donc la suite $K(x,y_l)$ est convergente car

$$\lim_l K(x,y_l)=\lim_l \frac{u(x,y_l)}{u(e,y_l)}=\frac{\langle\alpha_x^{V_1},f\rangle}{\langle\alpha_e^{V_1},f\rangle},$$

ce qui était le but recherché. On peut observer que cette limite est strictement positive.

Eliminons maintenant la restriction faite sur le support de la mesure μ. D'après l'hypothèse 1 d'irréductibilité il existe dans tous les cas un entier m tel que $\sum_{i=0}^m \mu^{*i}$ charge les générateurs et leurs inverses. Soit $v=\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^m \mu^{*i}$; v est une mesure de probabilité sur G vérifiant la restriction faite au début de la démonstration. Soient Q_v la matrice de transition associée à v, N_v son potentiel, K_v le noyau de Martin. Si I est la matrice identité

$$(I-Q_v)=(I-Q)\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i Q^i\right) \qquad \text{où } a_i=\frac{m-i}{m+1}$$

d'où

$$(I-Q^{k+1})\left(\sum_{i=0}^{l} Q_v^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i Q^i\right)=(I-Q_v^{l+1})\left(\sum_{i=0}^{k} Q^k\right).$$

Il est clair que $\lim_{k\to\infty} Q^{k+1}(\sum_{i=0}^{l} Q_v^i)=0$; d'autre part le théorème 1 implique que les familles $(N_v(x,z))_{z\in G}$ et $(N(z,y))_{z\in G}$ sont de carrés sommables, donc que la famille $(N_v(x,z)\,N(z,y))_{z\in G}$ est sommable et donc que $\lim_{l\to\infty} Q_v^{l+1} N=0$. Ceci prouve

$$N_v\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i Q^i\right)=\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i Q^i\right) N_v=N.$$

Soit alors L le support de la mesure $\beta=\sum_{i=0}^{m-1} a_i \mu^{*i}$, qui est contenu dans la boule de rayon $r(\mu)^{m-1}$ centrée en e. On a

$$N(x,y)=\sum_{z\in L}\beta(x z)\,N_v(z,y)$$

et

$$K(x,y)=\Big[\sum_{z\in L}\beta(z)\,K_v(x z,y)/\sum_{z\in L}\beta(z)\,K_v(z,y)\Big].$$

En appliquant la première partie de la démonstration à v on voit alors que $(K(x,y_l))_l$ converge si $(y_l)_l$ est une suite de G convergeant vers un point de M.

Démontrons maintenant que ii) $\Rightarrow$ i). Supposons que la suite $(y_l)_l$ ne converge pas dans $G\cup M$. Elle admet alors deux points d'accumulation distincts. Si ces deux points sont $x, x'\in G$, les suites $K(x,y_l)$ et $K(x',y_l)$ ne peuvent converger que si

$$K(x,x)=\frac{1}{u(e,x)}=K(x,x')=\frac{u(x,x')}{u(e,x')}$$

et

$$K(x',x')=\frac{1}{u(e,x')}=K(x',x)=\frac{u(x',x)}{u(e,x)}.$$

Or ceci n'est pas possible car sinon on aurait

$$u(x,x')\,u(x',x)=1$$

et la marche aléatoire ne serait pas transitoire.

Si les points d'accumulation sont $z\in G\cup M$ et $s\in M$ il suffit, pour achever la démonstration du théorème, de montrer qu'il existe $x\in G$ tel que $K(x,z)<1$ et $K(x,s)>2$. Ceci résulte du lemme suivant, intéressant en lui-même.

Lemme 5. *Soient $s\in M$ et $(s_k)_{k=1\ldots}$ la géodésique de e à s. Le noyau de Martin $K(x,s)$ vérifie:*

1) $\lim_{x\to s'} K(x,s)=0$ *pour* $s'\in M$, $s'\neq s$.

2) $\lim_{k\to\infty} K(s_k,s)=+\infty$.

Démonstration. Assertion 1). Commençons par supposer que le support de μ contient les générateurs et leurs inverses. Soit $(x_q)_q$ une suite de G convergeant vers $s'\in M$. Pour q assez grand le confluent de x_q et s est le confluent de s et s' et donc ne dépend plus de q. En reprenant le début de la démonstration du théorème on voit qu'il existe alors un vecteur f et un ensemble V ne dépendant que de s et de son confluent avec s' tels que

$$K(x_q,s)=\frac{\langle \alpha_{x_q}^V, f\rangle}{\langle \alpha_e^V, f\rangle}.$$

Or quand $q \to +\infty$, $x_q \to s'$ et $d(x_q, V) \to +\infty$; d'après le théorème 1, $\alpha_{x_q}^V \to 0$. Donc $\lim_{q\to\infty} K(x_q, s) = 0$.

Dans le cas général, en utilisant les mêmes notations que dans la démonstration du théorème 2, on a

$$K(x_q, s) = \left[\sum_{z\in L} \beta(z)\, K_v(x_q z, s) / \sum_{z\in L} \beta(z)\, K_v(z, s)\right].$$

Comme L est fini, la convergence de la suite (x_q) vers s' entraîne celle de la suite $(x_q z)$, quel que soit $z \in L$. Donc $\lim_{q\to\infty} K_v(x_q, s) = 0$ implique $\lim_{q\to\infty} K(x_q, s) = 0$.

Assertion 2). Encore une fois en supposant que μ charge tous les générateurs et leurs inverses on voit que pour tout k il existe un vecteur f_k, qu'on peut supposer normé, tel que

$$K(s_k, s) = [\langle \alpha_{s_k}^{W_k}, f_k\rangle / \langle \alpha_e^{W_k}, f_k\rangle]$$

où W_k est l'ensemble intermédiaire entre s_k et $s_{k+r(\mu)+1}$. Les vecteurs $(\alpha_{s_k}^{W_k})$ sont en nombre fini puisque $d(s_k, W_k) = 1$ pour tout k. Les vecteurs f_k forment un ensemble relativement compact dans le cône ouvert C des vecteurs ayant toutes leurs coordonnées strictement positives, car ils sont du type des limites obtenues dans le lemme 4. Donc

$$0 < \inf_k \langle \alpha_{s_k}^{W_k}, f_k\rangle.$$

Comme $d(e, W_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$ on a $\alpha_e^{W_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ et donc $K(s_k, s) \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$.

Un raisonnement analogue montre que

$$K(s_k z, s) = [\langle \alpha_{s_k z}^{W_{k'}}, f_{k'}\rangle / \langle \alpha_e^{W_{k'}}, f_{k'}\rangle] \qquad \text{avec } k' = k + r(\mu)^{m-1}$$

si $d(e, z) \leqq r(\mu)^{m-1}$, car alors la géodésique de $s_k z$ à s_l passe par $s_{k'}$ pour l assez grand.

Alors en supprimant l'hypothèse additionnelle sur μ on *a*

$$\lim_{k\to\infty} K_v(s_k z, s) = +\infty \qquad \text{pour tout } z \in L$$

comme

$$K(s_k, s) = \left[\sum_{z\in L} \beta(z)\, K_v(s_k z, s) / \sum_{z\in L} \beta(z)\, K_v(z, s)\right]$$

on obtient $\lim_{k\to\infty} K(s_k, s) = +\infty$.

Théorème 3. *Quel que soit $s \in M$, la fonction $K(x, s)$ de x, est une fonction harmonique, extrémale dans le convexe H des fonctions harmoniques positives vérifiant $h(e) = 1$; autrement dit, tous les points de la frontière M sont extrémaux.*

Démonstration. Le support de μ étant fini la fonction $K(., s)$ est harmonique (cf. [8] p. 138).

Supposons qu'il existe $h_1, h_2 \in H$ tels que

$$K(x, s) = t\, h_1(x) + (1-t)\, h_2(x) \qquad \text{avec } t \in]0, 1[.$$

Soit $(s_l)_l$ la géodésique de e à s. Si V est un ensemble intermédiaire entre x et s_l, l étant choisi assez grand, on a, d'après la construction de $K(x, s)$:

$$K(x, s) = \sum_{v\in V} \alpha_x^V(v)\, K(v, s)$$

et d'après l'harmonicité de h_1 et h_2:

$$h_i(x) \geqq \sum_{v \in V} \alpha_x^V(v)\, h_i(v) \qquad (i=1,2).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} K(x,s) &= t h_1(x) + (1-t) h_2(x) \\ &\geqq \sum_{v \in V} \alpha_x^V(v)\,[t h_1(x) + (1-t) h_2(x)] \\ &= \sum_{v \in V} \alpha_x^V(v)\, K(v,s) = K(x,s) \end{aligned}$$

d'où

$$h_i(x) = \sum_{v \in V} \alpha_x^V(v)\, h_i(v) \qquad (i=1,2).$$

Plus généralement si $V_1, \ldots, V_k$ sont des ensembles intermédiaires disjoints entre x et s_l on a

$$h_i(x) = \langle \alpha_x^{V_1}, A_1 \ldots A_{k-1}(h_i|_{V_k}) \rangle$$

où $A_j = A_{V_j}^{V_{j+1}}$ $(j=1, \ldots, (k-1))$ et où $(h_i|_{V_k})$ est la restriction de h_i à V_k. Or ces relations caractérisent $K(x,s)$ d'après sa construction même (voir la démonstration du théorème 2). Donc $h_i(x) = K(x,s)$ et ceci pour tout $x \in G$.

Remarque. Dans le cas où $r(\mu)=1$ les démonstrations précédentes se simplifient considérablement; en effet si z est le confluent de x et y on a $K(x,y) = \dfrac{u(x,z)}{u(e,z)}$. Aussi $(y_l)_l$ étant une suite de G convergeant vers $s \in M$, z étant le confluent de x et s, la suite $K(x,y_l)_l$ est constante égale à $\dfrac{u(x,z)}{u(e,z)}$ à partir d'un certain rang.

V. Comportement des harmoniques à la frontière

Comme on l'a indiqué dans le § II, et d'après le théorème 3, pour toute fonction harmonique positive h il existe une mesure borélienne positive unique λ^h sur M pour laquelle

$$h(x) = \int_M K(x,s)\, \lambda^h(ds), \qquad x \in G.$$

On notera simplement λ la mesure λ^1 qui vérifie donc

$$1 = \int_M K(x,s)\, \lambda(ds), \qquad x \in G.$$

On se propose maintenant de retrouver dans ce contexte les résultats relatifs au comportement des fonctions harmoniques à la frontière connus dans le cas classique (par exemple pour les fonctions harmoniques dans une boule d'un espace euclidien).

Théorème 4 *(solution du problème de Dirichlet). Si φ est une fonction réelle continue sur M il existe une fonction harmonique h unique telle que*

$$\lim_{\substack{x \to s \\ x \in G}} h(x) = \varphi(s)$$

pour tout $s \in M$. *Cette fonction est donnée par:*

$$h(x) = \int_M \varphi(s)\, K(x, s)\, \lambda(ds).$$

Démonstration. La formule donnée ci-dessus définit bien une fonction harmonique h. Pour démontrer $\lim_{x \to s} h(x) = \varphi(s)$ il suffit de démontrer que la mesure $K(x, s)\, \lambda(ds)$ sur M converge vaguement vers la mesure de Dirac en s_0 quand $x \to s_0$. Soit $(s_k)_{k=1,\ldots}$ la géodésique de e à s_0; les ensembles $U_k = \{z \in M \cup G;\ s_k$ est le confluent de z et $s_0\}$ forment une base fondamentale de voisinages de s_0 dans $G \cup M$. Si $x \in U_{k+r(\mu)+1}$ et si $s \notin U_k$ l'ensemble V intermédiaire entre s_k et $s_{k+r(\mu)+1}$ l'est aussi entre s et x d'où

$$K(x, s) = \sum_{v \in V} \alpha_x^V(v)\, K(v, s),$$

et donc

$$0 \leqq \int_{M - U_k} K(x, s)\, \lambda(ds) = \sum_{v \in V} \alpha_x^V(v) \Big(\int_{M - U_k} K(v, s)\, \lambda(ds) \Big) \leqq \sum_{v \in V} \alpha_x^V(v).$$

Quand $x \to s_0$, x reste dans $U_{k+r(\mu)+1}$ et $d(x, V) \to +\infty$. D'après le théorème 1 on a $\alpha_x^V \to 0$ et donc

$$\lim_{x \to s_0} \int_{M - U_k} K(x, s)\, \lambda(ds) = 0.$$

La convergence vague cherchée en résulte aussitôt. L'unicité de la fonction h se démontre comme dans le cas classique en s'appuyant sur le fait qu'une fonction harmonique ne peut avoir d'extremum strict dans G.

Remarque. Ceci implique que λ charge chaque ouvert de M.

Théorème 5 *(théorème de Fatou). Si h est une fonction harmonique positive et si $\lambda^h = \varphi\, \lambda + \lambda_0$ est la décomposition de Lebesgue de λ^h par rapport à λ, avec $\varphi \in L^1_+(M, \lambda)$ et λ_0 finie, singulière par rapport à λ, alors*

$$\lim_{k \to \infty} h(s_k) = \varphi(s) \qquad \textit{pour } \lambda \textit{ presque tout } s \in M,$$

$(s_k)_k$ *désignant la géodésique de e à s.*

Démonstration. On adapte un argument donné dans [4] (p. 244). On sait que, presque surement, les trajectoires ω de la marche aléatoire issue de e satisfont

$$\lim_{j \to \infty} h\big(X_j(\omega)\big) = \varphi\big(X_\infty(\omega)\big) \qquad (\text{cf. [11]}).$$

D'autre part comme on l'a déjà vu ces trajectoires vérifient aussi presque surement

$$d\big(X_j(\omega), X_{j+1}(\omega)\big) \leqq r(\mu).$$

Soit alors B l'ensemble des $s = X_\infty(\omega)$ pour ω satisfaisant ces deux propriétés; B est une partie borélienne de M et $\lambda(B) = 1$. Pour $s \in B$, soit $(V_l)_l$ la suite des ensembles intermédiaires entre $s_{l r(\mu)}$ et $s_{(l+1) r(\mu)+1}$; d'après ce qu'on a vu plus haut il existe une trajectoire ω pour laquelle $\lim_{j \to \infty} h\big(X_j(\omega)\big) = \varphi(s)$ et une suite croissante d'entiers $(j_l)_l$ telle que $X_{j_l}(\omega) \in V_l$ pour tout l.

Posons alors $a_l = \inf\{u(x, y);\ x, y \in V_l\}$ et $a = \inf_l a_l$. Le nombre des a_l distincts étant fini, a est strictement positif. Comme h est harmonique on a pour tout

$x, y \in G$.

$$h(x) \geqq u(x, y)\, h(y)$$

et en particulier

$$h(X_{j_l}(\omega)) \geqq a\, h(s_k) \qquad \text{pour } l\, r(\mu) < k \leqq (l+1)\, r(\mu).$$

Dans le cas $0 = \varphi(s) = \lim_{l \to \infty} h(X_{j_l}(\omega))$ cette inégalité implique $\lim_{k \to \infty} h(s_k) = 0$. En particulier si λ^h est singulière avec λ, c'est-à-dire si $\varphi = 0$ λ p.p. le théorème est complètement démontré. Aussi on n'aura plus à considérer que le cas où $\lambda_0 = 0$.

De la même façon si φ est l'indicatrice d'un borélien D de M on a $\lim_{k \to \infty} h(s_k) = 0$ pour λ presque tout $s \notin D$; comme $\lambda^{(1-h)} = (1-\varphi)\,\lambda = 1_{D^c}\lambda$ on obtient $\lim_{k \to \infty} h(s_k) = \varphi(s)$ pour λ presque tout $s \in M$. Le théorème est ainsi démontré pour les fonctions φ qui sont des indicatrices d'ensembles.

Il est facile de vérifier alors qu'il est vrai pour toutes les fonctions φ qui sont limites uniformes de fonctions étagées sur M.

Pour φ quelconque dans $L^1_+(M, \lambda)$ soit $(\varphi_l)_l$ une suite croissante de fonctions étagées convergeant λ p.p. vers φ. D'après le théorème d'Egorov on peut construire un borélien D_m de M, pour tout entier m, tel que $\lambda(D_m) > 1 - \dfrac{1}{m}$ et sur lequel $(\varphi_l)_l$ converge vers φ uniformément. Alors si h_m est la fonction harmonique telle que $\lambda^{h_m} = (\varphi \cdot 1_{D_m})\lambda$ on a $\lim_{k \to \infty} h_m(s_k) = (1_{D_m}\varphi)(s)$ pour λ presque tout $s \in M$. Comme $h - h_m$ est une fonction harmonique positive telle que $\lambda^{h-h_m} = (1_{D_m^c}\varphi)$, ce qu'on a vu au début montre que pour λ presque tout $s \in D_m$

$$\lim_{k \to \infty} (h - h_m)(s_k) = 0.$$

Ce qui prouve $\lim_{k \to \infty} h(s_k) = \varphi(s)$ pour λ presque tout $s \in M$.

VI. Frontière et multiplicateurs

Le groupe G opère de façon canonique sur la frontière M. En effet, étant donnés $x \in G$, $s \in M$, si l'on note $x s$ l'élément de M obtenu en juxtaposant l'écriture réduite de x et s et en opérant les réductions possibles, alors l'application $(x, s) \to x s$ de $G \times M$ dans M est continue. La frontière M est ainsi munie d'une structure de G-espace. Notons que l'action de G sur M n'est pas transitive mais que néanmoins l'orbite $G s$ de tout point $s \in M$ est dense dans M. Cette action se prolonge de façon naturelle aux mesures: étant données ρ et ν deux mesures de probabilité sur G et sur M, on note $\rho * \nu$ la mesure de probabilité sur M satisfaisant

$$\int_M \varphi\, d(\rho * \nu) = \int_G \rho(dx) \int_M \varphi(x s)\, \nu(ds)$$

pour toute fonction réelle, positive, mesurable φ sur M.

La définition suivante est empruntée à [9].

Définition 4. Une fonction réelle continue m définie sur $G \times M$ est appellée un multiplicateur si elle satisfait la relation

$$m(x y, s) = m(x, s)\, m(y, x^{-1} s)$$

pour tout $x, y \in G$ et tout $s \in M$.

(La relation utilisée est apparemment différente de celle donnée dans [9]; ceci vient du fait que la marche aléatoire considérée est droite au lieu d'être gauche.) Ceci nous permet d'énoncer maintenant le résultat suivant qui éclaire la signification des résultats fondamentaux du § IV.

Théorème 6. *La mesure de probabilité λ sur M donnant la représentation intégrale de l'harmonique 1, est l'unique solution de l'équation $\mu * \lambda = \lambda$. Le noyau de Martin K sur $G \times M$ est un multiplicateur; il satisfait*

$$K(x, s) = \frac{d(x\lambda)}{d\lambda}(s)$$

(par $(x\lambda)$ on désigne la mesure image de λ par l'action de x).

Démonstration. La probabilité λ est la loi de la variable aléatoire X_∞ (voir § II). Comme $\lim_{j\to\infty} X_j = X_\infty$ presque surement et que la loi de X_j est μ^{*j}, la probabilité λ est la limite vague sur $G \cup M$ de la suite μ^{*j}. Donc λ vérifie $\mu * \lambda = \lambda$.

Si $(z_k)_k$ est une suite de G convergeant vers $s \in M$ on a

$$\begin{aligned} K(xy, s) &= \lim_{k\to\infty} \frac{u(xy, z_k)}{u(e, z_k)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{u(y, x^{-1} z_k)}{u(e, x^{-1} z_k)} \frac{u(e, x^{-1} z_k)}{u(e, z_k)}\right] \\ &= K(y, x^{-1} s)\, K(x, s) \end{aligned}$$

donc K est un multiplicateur.

Soit ν une mesure de probabilité sur M vérifiant $\mu * \nu = \nu$. Il résulte du théorème des martingales que

$$X_j(\omega)\, \nu \xrightarrow[j\to\infty]{} \delta_{X_\infty(\omega)} \quad \text{p.s.}$$

où δ_s désigne la mesure de Dirac en s (voir, par exemple, [10]). Etant donnée φ une fonction continue sur M, l'égalité $\mu * \nu = \nu$ implique aussi que

$$f(x) = \int_M \varphi(xs)\, \nu(ds)$$

est une fonction harmonique bornée sur G. On obtient alors:

$$\lim_{j\to\infty} f(X_j) = \lim_{j\to\infty} \int_M \varphi(X_j s)\, \nu(ds) = \lim_{j\to\infty} \int_M \varphi(s)(X_j \nu)\, ds = \varphi(X_\infty) \quad \text{p.s.}$$

De la même façon si $g(x) = \int_M \varphi(xs)\, \lambda(ds)$ on a $\lim_{j\to\infty} g(X_j) = \varphi(X_\infty)$ p.s. Or l'égalité $\lim_{j\to\infty} f(X_j) = \lim_{j\to\infty} g(X_j)$ p.s. implique $f = g$. Donc $\nu = \lambda$, et l'unicité est démontrée.

Enfin, d'après le théorème de Fatou probabiliste (cf. [11]) l'égalité

$$\lim_{j\to\infty} f(X_j) = \varphi(X_\infty) \quad \text{p.s.}$$

implique

$$f(x) = \int_M \varphi(s)\, K(x, s)\, \lambda(ds)$$

donc

$$\int_M \varphi(xs)\, \lambda(ds) = \int_M \varphi(s)\, (x\lambda)(ds) = \int_M \varphi(s)\, K(x, s)\, \lambda(ds).$$

Comme ceci est vrai pour toute fonction φ continue sur M on obtient

$$\frac{d(x\lambda)}{d\lambda}(s) = K(x, s).$$

Remarques. Le théorème précédent peut aussi être obtenu comme un corollaire d'un résultat de [2] car la partie active de la frontière (aussi appellée partie atteinte dans [5]), c'est-à-dire le support de λ, est égale à la frontière toute entière. Dans [10] l'espace M considéré ici est appellé espace de Poisson de G. Ceci ne doit pas laisser penser que toutes les harmoniques bornées sont représentées par les fonctions continues sur M; seules les fonctions harmoniques prolongeables par continuité à $G \cup M$ tout entier sont représentées par des fonctions continues (cf. [1]).

Durant la préparation de ce travail j'ai bénéficié des suggestions et remarques du professeur Y. Guivarc'h. Je l'en remercie vivement.

Bibliographie

1. Azencott, R.: Espaces de Poisson des groupes localement compact. Lect. Notes Math. **148**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
2. Azencott, R., Cartier, P.: Martin boundaries of Randow walk on locally compact groups. 6th Berkeley Sympos. Proc. Math. Statist. Probab. **3**, 87–123. Univ. Calif. Press: 1972
3. Birkhoff, G.: Extension of Jentzsch's theorem. Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 219–227 (1957)
4. Cartier, P.: Fonctions Harmoniques sur un arbre. Istituto Nazionale di Alta Mathematica. Symposia Mathematica **9**, 203–270 (1972)
5. Derriennic, Y.: Sur la frontière de Martin des processus de Markov à temps discret. Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B, **9**, 233–258 (1973)
6. Derriennic, Y., Guivarc'h, Y.: Théorème de Renouvellement pour les groupes non moyennables. C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, **277**, 613–615 (1973)
7. Dynkin, E.B., Malyutov, M.B.: Random walks on groups with a finite number of generators. Soviet Math. Dokl. **2**, 399-402 (1961)
8. Dynkin, E.B., Yushkevich, A.A.: Markov Processes; theorems and problems. New York: Plenum Press 1969
9. Furstenberg, H.: Translation-invariant cones of functions ou semi-simple Lie groups. Bull. Amer. Math. Soc. **71**, 271–326 (1965)
10. Furstenberg, H.: Random walks and discrete subgroups of Lie groups. Advanc. Probab. Related Topics **1**, 3-63 (1971)
11. Kemeny, J., Snell, J., Knapp, A.: Denumerable Markov chains. Amsterdam: Van Nostrand 1966
12. Kesten, H.: Symmetric random walks on groups. Trans. Amer. Math. Soc. **92**, 336-354 (1959)
13. Levit, B.Y., Molchanov, S.A.: Chaînes de Markov invariantes sur un groupe libre à un nombre fini de générateurs. Vestnik Moscou Univ. **4**, 80–88 (1971) (en Russe)
14. Spitzer, F.: Principles of random walk. Amsterdam: Van Nostrand 1964

Yves Derriennic
Laboratoire de Probabilités
E.R.A. 250 du C.N.R.S.
Université de Rennes
B.P. 25A
F-35031 Rennes Cedex
France

(Reçu le 19 Décembre 1974)