Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 13, 39–59 (1969)

Zur mathematischen Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien. II

Herrn Josef Meixner zum 60. Geburtstag gewidmet

WILHELM von WALDENFELS

Summary. This paper continues the discussion of the line profile on the wings. It differs from [2] mainly insofar as it is now not assumed that skalar additivity of the single perturbations yields. Anderson's formula ceases to be valid and no analogous closed formula seems to exist. Nevertheless, the discussion is possible and yields the result predicted in [2].

Chapter I considers the convolution of tight measures on topological Abelian semi-groups. Chapter II treats Poisson measures, a new concept for the statistical model of an infinite gas in [2]. To every positive Radon measure ρ on a locally compact set $\mathfrak{X}$ one associates a positive measure $P(\rho)$ on the space of all positive Radon measures on $\mathfrak{X}$ with the vague topology. The map $\rho \mapsto P(\rho)$ is continuous in various ways and has the property $P(\rho+\sigma)=P(\rho)*P(\sigma)$, $P(0)=\mathfrak{d}_0$ (Dirac measure at the measure 0). In III and IV the discussion of the line profile is carried out. The most important tool is a homogeneity relation established at the beginning of IV.

Einleitung

In der Arbeit „Zur mathematischen Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien", die in Zukunft als I zitiert werden soll (die einzelnen Kapitel von I, z.B. das III. Kapitel, werden in der Form I.III angeführt), wurde das Profil einer druckverbreiterten Spektrallinie berechnet und diskutiert unter den folgenden Voraussetzungen:

(i) Das leuchtende Teilchen ruht inmitten eines Gases, das aus gleichartigen Teilchen besteht, die sich unabhängig voneinander auf geraden Linien mit einer Geschwindigkeit vom Betrage v bewegen. Diese Störteilchen sind gleichmäßig im Raum mit einer mittleren Dichte n verteilt[1]. Die Richtungen ihrer Geschwindigkeiten verteilen sich gleichmäßig über die Oberfläche der Einheitskugel.

(ii) Das einzelne Störteilchen verursacht eine momentane Frequenzänderung des Leuchtteilchens, die proportional zum Quadrat der elektrischen Feldstärke ist, die das Störteilchen am Ort des Leuchtteilchens hervorruft (*quadratischer Starkeffekt*). Die von den einzelnen Störteilchen hervorgerufenen momentanen Frequenzänderungen werden aufaddiert, um die totale momentane Frequenzänderung zu erhalten (*skalare Additivität der Einzelstörungen*).

1. In I bezeichneten wir die Teilchendichte mit N.

Sei also zur Zeit t der Ort des ι-ten Störteilchens durch den Vektor $\mathfrak{x}_\iota(t)$ gegeben, der von dem ruhenden Leuchtteilchen im Nullpunkt ausgeht. Das Störteilchen sei eine Punktladung. Dann ist die elektrische Feldstärke am Ort des Leuchtteilchens proportional zu $|\mathfrak{x}_\iota|^{-2}$, die dadurch verursachte momentane Frequenzänderung proportional zu $|\mathfrak{x}_\iota|^{-4}$ und die totale momentane Frequenzverschiebung

$$X(t) = 2\pi\, C \sum_\iota |\mathfrak{x}_\iota|^{-4}. \tag{1}$$

Wie schon in der Einleitung von I ausgeführt, gilt die skalare Additivität der Einzelstörungen nicht exakt. Wohl aber addieren sich in Strenge die elektrischen Feldstärken, die von den verschiedenen Störteilchen herrühren. Es müßte besser heißen

$$X(t) = 2\pi\, C \,\Big|\sum_\iota \mathfrak{x}_\iota |\mathfrak{x}_\iota|^{-3}\Big|^2. \tag{2}$$

Die skalare Additivität bedeutet also die Vernachlässigung der Terme der Form

$$2\pi\, C \frac{\mathfrak{x}_\iota\, \mathfrak{x}_\kappa}{|\mathfrak{x}_\iota|^3 |\mathfrak{x}_\kappa|^3} \qquad (\iota \neq \kappa).$$

In I wurde vermutet, daß diese Vernachlässigung auf den Linienflügeln zulässig sein könnte. Das soll in der vorliegenden Arbeit bewiesen werden. Wir nehmen an, $X(t)$ sei von der Form (2) und zeigen, daß das hieraus resultierende Linienprofil auf den Linienflügeln ebenso wie unter Annahme von (1) in erster Näherung durch die quasistatische Approximation gegeben ist.

Als Voraussetzung dieser Überlegungen dienen weiterhin (i) und die modifizierte Annahme (ii):

(ii)′ Die momentane Frequenzänderung des Leuchtteilchens ist proportional zum Quadrat der von allen Störteilchen verursachten elektrischen Feldstärke am Ort des Leuchtteilchens.

Wir müssen jedoch unsern Ansatz (2) nochmals leicht verändern. Es ergibt sich nämlich[2], daß die Summe $\sum_\iota \mathfrak{x}_\iota |\mathfrak{x}_\iota|^{-3}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht absolut konvergiert. Diese Divergenz, die von den weit entfernten Störteilchen herrührt, ist ein in der physikalischen Literatur geläufiges Phänomen. Man erzwingt die Konvergenz, indem man die Feldstärke des ι-ten Störteilchens nicht mit $\mathfrak{x}_\iota |\mathfrak{x}_\iota|^{-3}$ sondern mit $\mathfrak{x}_\iota |\mathfrak{x}_\iota|^{-3} e^{-\beta|\mathfrak{x}|}$ annimmt. In der Physik setzt man β meist gleich dem Kehrwert des sog. Debye-Radius. In unserm Fall interessiert der numerische Wert von β nicht, da er bei der asymptotischen Diskussion des Linienprofils herausfällt. Wir ersetzen also (2) durch

$$X(t) = 2\pi\, C \,\Big|\sum_\iota \mathfrak{x}_\iota |\mathfrak{x}_\iota|^{-3} e^{-\beta|\mathfrak{x}_\iota|}\Big|^2. \tag{3}$$

2. Im Rahmen des statistischen Modells eines unendlich ausgedehnten Gases I.IV und I.V hat man $\sum \mathfrak{x}_\iota |\mathfrak{x}_\iota|^{-3} = \langle \mu, \mathfrak{x}|\mathfrak{x}|^{-3}\rangle$ zu setzen. Betrachtet man die Summe der Absolutbeträge $\sum |\mathfrak{x}_\iota|^{-2} = \langle \mu, |\mathfrak{x}|^{-2}\rangle$, so ergibt sich nach einer Gleichung in I S. 95

$$\begin{aligned} E \exp - \alpha \langle \mu, |\mathfrak{x}|^{-2}\rangle &= \exp - n \int d^3\mathfrak{x}\,(1 - \exp - \alpha |\mathfrak{x}|^{-2}) \\ &= \exp - n \int_0^\infty 4\pi r^2\, dr\, (1 - e^{-\alpha/r^2}) = 0. \end{aligned}$$

Geht man mit $\alpha \downarrow 0$, so folgt $P\{\langle \mu, |\mathfrak{x}|^{-2}\rangle < \infty\} = 0$ oder $\sum_\iota |\mathfrak{x}_\iota|^{-2} = \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

In I wurden als Störteilchen neben Punktladungen auch Dipole betrachtet. Um die ohnehin schon langen Formeln nicht noch weiter zu komplizieren, wollen wir das in dieser Arbeit nicht tun. Wir hätten bei Dipolen die Richtung des Dipolmoments und seine Geschwindigkeit als zusätzliche Parameter. Wir glauben jedoch, daß die hier entwickelten Methoden sich ohne Schwierigkeiten übertragen lassen.

Wir geben nun einen kurzen Überblick über den Gang der Überlegungen und über die verwendeten mathematischen Methoden. In I.IV und I.V wurde das statistische Modell eines unendlich ausgedehnten Gases aufgestellt und einige seiner Eigenschaften aufgedeckt. Es diente dazu, in I.VI die Anderson-Formel abzuleiten, wurde aber nicht mehr bei der Diskussion dieser Formel in I.VII und I.VIII verwendet. Das ist hier anders. Das dem Modell entsprechende Wahrscheinlichkeitsmaß, wir nennen es Poisson-Maß steht im Mittelpunkt der Betrachtungen.

Sei $\mathfrak{X}=\mathbb{R}^3\times S^2$ das kartesische Produkt des dreidimensionalen Ortsraums mit der Oberfläche der dreidimensionalen Einheitskugel, die die verschiedenen möglichen Geschwindigkeitsrichtungen beschreibt, sei $\rho=\rho'\otimes\rho''$ das Produkt des Lebesgue-Maßes auf dem $\mathbb{R}^3$ und des auf 1 normierten Oberflächenmaßes auf S^2. Sei $n>0$ die mittlere Dichte des Gases der Störteilchen und $P(n\rho)$ das zugehörige Poisson-Maß auf dem Raum $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ aller positiven Radon-Maße auf $\mathfrak{X}$. Das Linienprofil ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $I(v)$ auf der Geraden mit der Fouriertransformierten

$$R(t,n,v,\beta)=\int P(n\rho)(\mu)\exp i\int_0^t X(\tau,\mu)\,d\tau, \tag{4}$$

wo nach (3) zu setzen ist

$$X(t,\mu)=2\pi\,C\left|\int \mu(\mathfrak{x},\mathfrak{e})\,\mathfrak{q}_\beta(\mathfrak{x}+v\,t\,\mathfrak{e},\mathfrak{e})\right|^2 \tag{5}$$

mit

$$\mathfrak{q}_\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{e})=\mathfrak{x}\,|\mathfrak{x}|^{-3}\,e^{-\beta|\mathfrak{x}|}. \tag{6}$$

Der Schlüssel für die Diskussion in I.VIII war eine Homogenitätsbeziehung, die letzten Endes von der Homogenität des Ansatzes für die Feldstärke herrührte. Auch wenn man die skalare Additivität der Einzelstörungen nicht mehr annimmt, bleibt die Homogenität erhalten. Tatsächlich gilt für $\alpha>0$ die Beziehung

$$R(t,n,v,\beta)=R(\alpha^{-4}t,\alpha^3 n,\alpha^3 v,\alpha\beta). \tag{7}$$

Versucht man die Überlegungen von I.VIII zu übertragen, so hat man den Ausdruck $u^{\frac{3}{4}}(I_u-\delta)$ für $u\to\infty$ zu betrachten, wo I_u das um den Faktor u gestauchte Linienprofil ist. Man transformiert nach Fourier und erhält

$$\begin{aligned} &u^{\frac{3}{4}}\big(R(t/u,n,v,\beta)-1\big)\\ &\quad=u^{\frac{3}{4}}\big(R(t,u^{-\frac{3}{4}}n,u^{-\frac{3}{4}}v,u^{-\frac{1}{4}}\beta)-1\big). \end{aligned} \tag{8}$$

Um über diesen Ausdruck Auskunft zu erhalten, genügt es im wesentlichen die Konvergenz

$$n^{-1}\left[R(t,n,v,\beta)-1\right]$$

für $n \downarrow 0$ zu untersuchen. Sei $\mathfrak{d}$ das Dirac-Maß im Nullpunkt von $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$, so ist der letzte Ausdruck gleich

$$\int \frac{P(n\rho)(\mu)-\mathfrak{d}(\mu)}{n} \exp i \int_0^t X(\tau,\mu)\,d\tau. \tag{9}$$

Die wesentliche Beobachtung ist nun, daß $\big(P(n\rho)\big)_{n\geqq 0}$ eine Faltungshalbgruppe auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ bildet mit dem infinitesimalen erzeugenden Operator $A(\rho)$,

$$\langle A(\rho), f\rangle = \int_{\mathfrak{X}} \rho(x)\big(f(\delta_x)-f(0)\big).$$

Es liegt darum nahe, daß (9) gegen

$$\int \rho(x)\left[\exp i \int_0^t X(\tau,\delta_x)\,d\tau - 1\right]$$

konvergiert. Daraus ergibt sich, daß (8) gegen

$$\int_0^\infty 4\pi r^2\,dr(\exp 2\pi i\,C\,t/r^4 - 1)$$

geht. Das ergibt dann schnell die endgültige Aussage am Ende von Kapitel IV.

I. Faltung straffer Maße

Einem topologischen Raum X ordnen wir den Banachraum $\mathfrak{L}(X)$ der reellwertigen, stetigen und beschränkten Funktionen auf X versehen mit der Supremumsnorm zu. Sei $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Netz in $\mathfrak{L}(X)$. Wir sagen, die f_α *konvergieren locker* gegen f, wenn die f_α gleichmäßig über jedem Kompaktum gegen f konvergieren und die Normen $\|f_\alpha\|$ beschränkt bleiben. Ein *straffes Maß* μ auf X ist ein lineares Funktional auf $\mathfrak{L}(X)$, das sowohl bezüglich Normkonvergenz als auch bezüglich lockerer Konvergenz stetig ist. Das bedeutet also, daß es eine Konstante C gibt, so daß $|\langle\mu, f\rangle| \leqq C$ für alle $f\in\mathfrak{L}(X)$, $\|f\|\leqq 1$ ist, und daß es zu jedem $\varepsilon>0$ ein Kompaktum $K\subset X$ und ein $\delta>0$ gibt, so daß $|\langle\mu, f\rangle|\leqq\varepsilon$ ist für $f\in\mathfrak{L}(X)$, $\|f\|\leqq 1$, $|f(x)|\leqq\delta$ für $x\in K$. Die Menge $\mathfrak{S}(X)$ aller straffen Maße auf X ist ein normabgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{L}'(X)$, dem Dualraum von $\mathfrak{L}(X)$. Eine Familie straffer Maße heißt gleichstraff, wenn sie gleichstetig sowohl gegenüber Normkonvergenz, als auch gegenüber lockerer Konvergenz ist, wenn sie also die beiden eben genannten Bedingungen gleichmäßig befriedigt.

Auf lokal kompakten Räumen sind die straffen Maße nichts anders als die beschränkten Radon-Maße. Auf vollständig regulären Räumen besitzen die straffen Maße alle wesentlichen Eigenschaften beschränkter Radonscher Maße (vgl. z.B. I.I).

Man bestätigt leicht die folgenden beiden Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Seien X und Y topologische Räume, sei $f\in\mathfrak{L}(X\times Y)$ und sei für festes $x\in X$ die Abbildung f_x: $Y\to R$ durch $y\mapsto f(x,y)$ gegeben. Dann ist $f_x\in\mathfrak{L}(Y)$ und $x\mapsto f_x$ locker stetig.*

Hilfssatz 2. *Seien X und Y topologische Räume, sei ν ein straffes Maß auf Y. Dann ist*

$$f \in \mathfrak{L}(X \times Y) \mapsto \int \nu(y) f(x, y) = \langle \nu, f_x \rangle$$

eine locker stetige Abbildung von $\mathfrak{L}(X \times Y)$ in $\mathfrak{L}(X)$. Das heißt also $x \mapsto \langle \nu, f_x \rangle$ liegt in $\mathfrak{L}(X)$ und einem locker konvergierendem Netz $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ in $\mathfrak{L}(X \times Y)$ ist das locker konvergierende Netz $(\langle \nu, f_{\alpha x} \rangle)_{\alpha \in A}$ zugeordnet.

Satz 1. *Seien X und Y vollständig reguläre topologische Räume. Seien μ und ν straffe Maße auf X bzw. Y. Dann existiert genau ein straffes Maß λ auf $X \times Y$ mit*

$$\int \lambda(x, y) f(x) g(y) = \int \mu(x) f(x) \int \nu(y) g(y)$$

für $f \in \mathfrak{L}(X)$, $g \in \mathfrak{L}(Y)$.

Beweis. Mittels Hilfssatz 1 und 2 zeigt man die Existenz von λ als iteriertes Integral

$$\iint \lambda(x, y) h(x, y) = \int_X \Big(\int_Y \lambda(x, y) f(x, y) \Big).$$

Um die Eindeutigkeit von λ zu beweisen betrachte man die Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{L}(X \times Y)$ der Funktionen der Form

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y), \qquad f_i \in \mathfrak{L}(X), \ g_i \in \mathfrak{L}(Y).$$

Offensichtlich liegen die Konstanten in $\mathfrak{A}$. Sei $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$; $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ und $-1 \leqq \alpha_1, \alpha_2 \leqq 1$. Wenn wir gezeigt haben, daß es eine Funktion $h \in \mathfrak{A}$ mit $\|h\| \leqq 1$, $h(x_1, y_1) = \alpha_1$, $h(x_2, y_2) = \alpha_2$ gibt, können wir aus [3] Hilfssatz 1 folgern, daß $\mathfrak{A}$ locker dicht in $\mathfrak{L}(X \times Y)$ ist. Das impliziert die Eindeutigkeit von λ. Sei z.B. $x_1 \neq x_2$, seien U_1, U_2 Umgebungen von x_1, x_2, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und sei für $i = 1, 2$; $f_i \in \mathfrak{L}(X)$, $0 \leqq f_i \leqq 1$, $f_i = 0$ außerhalb U_i und $f_i(x_i) = 1$. Sei

$$h(x, y) = \big(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\big).$$

Dann erfüllt h die gestellte Bedingung.

Das nach Satz 1 eindeutig festgelegte Maß λ heißt das Tensorprodukt $\mu \otimes \nu$. Man schreibt

$$\langle \mu \otimes \nu, h \rangle = \iint \mu(x) \nu(y) h(x, y) = \iint \nu(y) \mu(x) h(x, y).$$

Aus Satz 1 folgt, daß die Reihenfolge der Integrationen belanglos ist

$$\int \mu(x) \Big(\int \nu(y) h(x, y) \Big) = \int \nu(y) \Big(\int \mu(x) h(x, y) \Big).$$

Sei X eine Abelsche, additiv geschriebene Halbgruppe mit Nullelement, sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum und sei die Abbildung

$$\pi\colon\ X \times X \to X,$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

stetig. Seien μ und ν straffe Maße auf X, so ist

$$\mu * \nu = \pi(\mu \otimes \nu)$$

die *Faltung* von μ und ν. Als stetiges Bild eines straffen Maßes ist $\mu * \nu$ ein straffes Maß. Die Kommutativität von X impliziert $\mu * \nu = \nu * \mu$. Sei $f \in \mathfrak{L}(X)$ und μ ein straffes Maß auf X, so setzen wir

$$\begin{aligned} \mu \circ f\colon\ & X \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \int \mu(y) f(x+y). \end{aligned}$$

Satz 2. *Sei μ ein straffes Maß auf X. Dann ist*

$$\mu \circ\colon\ f \in \mathfrak{L}(X) \mapsto \mu \circ f$$

ein linearer Operator von $\mathfrak{L}(X)$ in $\mathfrak{L}(X)$, der Normkonvergenz in Normkonvergenz und lockere Konvergenz in lockere Konvergenz überführt. Es gilt $\|\mu \circ\| = \|\mu\|$. Sei ν ein weiteres straffes Maß auf X, so gilt $(\mu \circ)(\nu \circ) = (\mu * \nu) \circ$.

Beweis. Daß $\mu \circ f \in \mathfrak{L}(X)$ liegt und daß $f \mapsto \mu \circ f$ die lockere Konvergenz erhält, folgt aus Hilfssatz 2. Aus $(\mu \circ f)(0) = \langle \mu, f \rangle$ folgt $|\langle \mu, f \rangle| \leqq \|\mu \circ f\|$ und $\|\mu\| \leqq \|\mu \circ\|$. Andererseits folgt aus $\|f\| \leqq 1$, daß $\|f_x\| \leqq 1$, $f_x\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x+y)$ und somit $\|\mu \circ f\| = \sup_{x \in X} |\langle \mu, f_x \rangle| \leqq \|\mu\|$. Also $\|\mu \circ\| \leqq \|\mu\|$.

Folgerung. Die Faltung ist assoziativ. Es gilt $\|\mu * \nu\| \leqq \|\mu\|\,\|\nu\|$.

Sei $x \in X$, so bezeichnet man mit δ_x das straffe Maß $f \mapsto f(x)$ und nennt δ_x das *Dirac-Maß* im Punkte x. $\delta_x \circ f$ ist die Verschiebung von f um x, es gilt $\delta_{x+y} = \delta_x * \delta_y$ und $\delta_0 * \mu = \mu$. Es ist also $\delta_0 = \delta$ das Einheitselement der Faltung. Sei μ ein straffes Maß, so setzen wir

$$\exp_* \mu = \delta + \mu + \frac{1}{2!}(\mu * \mu) + \frac{1}{3!}(\mu * \mu * \mu) + \cdots.$$

Da die Menge $\mathfrak{S}(X)$ aller straffen Maße auf X normabgeschlossen ist, ist $\exp_* \mu$ ein straffes Maß.

II. Poisson-Maße

Sei $\mathfrak{X}$ ein lokal kompakter Raum, sei $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ die Menge aller positiven Radon-Maße auf $\mathfrak{X}$ versehen mit der schwachen Topologie über $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$, dem Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen mit kompaktem Träger. Der Raum $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ ist vollständig regulär, er bildet bezüglich der Addition eine kommutative Halbgruppe mit Nullelement. Die Addition ist in beiden Variablen stetig. Wir bezeichnen die Dirac-Maße auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$, um sie von den Dirac-Maßen auf $\mathfrak{X}$ abzuheben, mit $\mathfrak{d}_\mu$, $\mu \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})$, das Dirac-Maß im Nullpunkt mit $\mathfrak{d}$. Sei P ein straffes Maß auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$, so ist

$$\begin{aligned} \hat{P}\colon\ & \mathfrak{L}_0(\mathfrak{X}) \to \mathbb{C}, \\ & \varphi \mapsto \int P(\mu) \exp i \langle \mu, \varphi \rangle \end{aligned}$$

die Fouriertransformierte von P. Die Fouriertransformation ist umkehrbar eindeutig (vgl. [3] Satz 1). Es gilt

$$\hat{\mathfrak{d}} = 1,$$

$$(P * Q)^\wedge = \hat{P}\hat{Q},$$

$$(\exp_* P)^\wedge = \exp \hat{P}$$

für straffe Maße P und Q auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$ die Menge der straffen Maße auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$.

Satz 1. *Sei ρ ein positives, beschränktes Radon-Maß auf $\mathfrak{X}$, so ist*

$$A(\rho)\colon\ \langle A(\rho), f\rangle = \int_{\mathfrak{X}} \rho(x)\,[f(\delta_x) - f(0)]$$

ein straffes Maß auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$. Außerdem ist

$$P(\rho) = \exp_* A(\rho)$$

ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ und

$$\langle P(\rho), f\rangle = e^{-\langle \rho, 1\rangle}\left[f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int \cdots \int \rho(x_1) \ldots \rho(x_k) f\left(\sum_{l=1}^{k} \delta_{x_l}\right)\right]$$

für $f \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$. Es gilt

$$P(0) = \mathfrak{d},$$

$$P(\rho + \sigma) = P(\rho) * P(\sigma)$$

falls σ ein weiteres positives, beschränktes Radon-Maß auf $\mathfrak{X}$ ist. Die Abbildung $\rho \mapsto P(\rho)$ ist stetig, falls man die Menge der positiven beschränkten Radon-Maße mit der $\mathfrak{L}'(\mathfrak{X})$-Norm und $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$ mit der $\mathfrak{L}'(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$-Norm versieht.

Beweis. Schreibt man $A(\rho)$ symbolisch

$$A(\rho) = \int \rho(x)(\mathfrak{d}_{\delta_x} - \mathfrak{d}),$$

so sieht man, daß $A(\rho)$ von der beschränkten und damit relativ kompakten Menge $\{\delta_x\colon x \in \mathfrak{X}\}$ und dem Nullpunkt getragen wird. Also ist $A(\rho)$ und damit $P(\rho)$ straff. Wir zerlegen

$$A(\rho) = B(\rho) - \langle \rho, 1\rangle \mathfrak{d},$$

$$\langle B(\rho), f\rangle = \int \rho(x) f(\delta_x).$$

Es ist

$$\exp_* A(\rho) = \exp_*(-\langle \rho, 1\rangle \mathfrak{d}) * \exp_* B(\rho)$$

$$= e^{-\langle \rho, 1\rangle} \exp_* B(\rho)$$

und man erhält für $\exp_* A(\rho)$ die angegebene Formel, da

$$(B(\rho) \circ f)(\mu) = \int \rho(x) f(\mu + \delta_x)$$

ist. Diese Formel zeigt zugleich, daß $P(\rho)$ positiv ist. Da $\langle A(\rho), 1\rangle = 0$ ist, ist $\langle P(\rho), 1\rangle = 1$. Somit ist $P(\rho)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Die $\mathfrak{L}'(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$-Norm von $A(\rho)$ ist $\|A(\rho)\| \leqq 2\|\rho\|$. Also

$$\begin{aligned}\|\exp_* A(\rho) - \exp_* A(\sigma)\| &= \|\exp_* A(\sigma) * (\exp_* A(\rho-\sigma) - \mathfrak{d})\| \\ &\leqq \exp \|A(\sigma)\| (\exp \|A(\rho-\sigma)\| - 1) \\ &\leqq \exp 2\|\sigma\| (\exp 2\|\rho-\sigma\| - 1).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die behauptete Stetigkeit.

Satz 2. *Sei $\mathfrak{X}$ lokal kompakt und abzählbar im Unendlichen. Dann gibt es zu jedem positiven Radon-Maß ρ auf $\mathfrak{X}$ ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß $P(\rho)$ auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ mit der Fouriertransformierten*

$$P(\rho)^\wedge\colon\ P(\rho)^\wedge(\varphi) = \exp \textstyle\int \rho(e^{i\varphi} - 1).$$

Es gilt

$$P(0) = \mathfrak{d},$$

$$P(\rho+\sigma) = P(\rho) * P(\sigma).$$

Durchläuft ρ eine beschränkte Menge von $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$, so ist die Menge $P(\rho)$ gleichstraff. Auf jeder beschränkten Menge von $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ ist die Abbildung $\rho \mapsto P(\rho)$ stetig, falls man $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ mit der schwachen Topologie über $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$ mit der schwachen Topologie über $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$ versieht.

Beweis. Sei $0 \leqq \psi_1 \leqq \psi_2 \leqq \cdots$ eine Folge von Funktionen aus $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$, $\psi_k \uparrow 1$ und sei $A_k = A(\rho\psi_k)$, wo $\rho\psi_k$ das Maß $\varphi \mapsto \langle \rho, \psi_k \varphi\rangle$ ist. $\rho\psi_k$ ist ein beschränktes positives Maß auf $\mathfrak{X}$, folglich ist $P_k = \exp_* A_k$ nach Satz 1 ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ mit der Fouriertransformierten $P_k^\wedge(\varphi) = \exp \int \rho\psi_k(e^{i\varphi} - 1)$. Für $k \uparrow \infty$ konvergiert $P_k^\wedge(\varphi) \to \exp \int \rho(e^{i\varphi} - 1)$. Nach [3] Satz 3 konvergieren die P_k gegen ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß $P(\rho)$ auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ mit der angegebenen Fouriertransformation.

Sei $\varphi \geqq 0$ fest, $\lambda \geqq 0$, so ist

$$P(\rho)^\wedge(\lambda\varphi) = \exp \textstyle\int \rho(e^{i\lambda\varphi} - 1).$$

Durchläuft ρ eine beschränkte Menge, so ist $\rho\{Tr\,\varphi\}$ beschränkt und $P(\rho)^\wedge(\lambda\varphi)$ konvergiert für $\lambda \downarrow 0$ gleichmäßig in ρ gegen 1. Daraus folgt nach [3] Satz 2 Folgerung 1, daß die $P(\rho)$ gleichstraff sind.

Offensichtlich ist ein lineares Funktional auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$ genau dann ein straffes Maß, wenn seine Einschränkung auf die Einheitskugel $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$ stetig ist in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz über jedem Kompaktum. Die Linearität impliziert die gleichmäßige Stetigkeit auf $\mathfrak{K}$ in dieser Topologie. Sei $B \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ beschränkt, dann ist die Menge $\{P(\rho)\colon \rho \in B\}$ gleichstraff. Das kann man so interpretieren, daß die Einschränkungen der $P(\rho)$ auf $\mathfrak{K}$ gleichgradig gleichmäßig stetig bezüglich der eben genannten Konvergenz sind. Auf B genügt es also, die Stetigkeit $\rho \mapsto P(\rho)$ für eine dichte Teilmenge in $\mathfrak{K}$ zu beweisen. Nach [3] Hilfssatz 2 ist die Menge der trigonometrischen Polynome der Norm $\leqq 1$ dicht in $\mathfrak{K}$. Wegen der Linearität der $P(\rho)$ muß also nur die Stetigkeit

$$\rho \in B \mapsto \langle P(\rho), e^{i\mu\varphi}\rangle = P(\rho)^\wedge(\varphi)$$

für festes $\varphi \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$ bewiesen werden. Das ist aber klar, denn

$$P(\rho)^\wedge(\varphi) = \exp \int \rho(e^{i\varphi} - 1)$$

und dieser Ausdruck ist stetig bezüglich der schwachen Topologie von $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ auf $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$.

Wir nennen das in Satz 1 bzw. Satz 2 definierte Wahrscheinlichkeitsmaß $P(\rho)$ das zu ρ gehörende *Poisson-Maß*. Den Grund für diese Namensgebung soll die folgende Überlegung liefern. Man betrachte einen Poisson-Prozeß im Intervall $[0, T]$ (vgl. [1]). Er besitzt mit Wahrscheinlichkeit 1 endlich viele Sprungpunkte x_ι. Die Wahrscheinlichkeit, daß es genau k Sprungpunkte gibt ist $e^{-cT}(c\,T)^k/k!$. Die Orte dieser k Sprungpunkte sind unabhängig und gleichverteilt mit der Dichte $1/T$. Betrachtet man das zufällige Maß $\mu = \delta_{x_\iota}$ und sei $f \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}([0, T))$, so gilt

$$\begin{aligned} Ef(\mu) &= Ef\left(\sum \delta_{x_\iota}\right) \\ &= e^{-cT} f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-cT} \frac{(c\,T)^k}{k!} \frac{1}{T^k} \int \cdots \int dt_1 \ldots dt_k\, f\left(\sum_{l=1}^{k} \delta_{x_l}\right). \end{aligned}$$

Das ist aber nach Satz 1 gleich

$$\langle P(c\,\rho), f \rangle$$

falls ρ das Lebesgue-Maß auf $[0, T]$ ist.

Ist $\mathfrak{X}$ nicht kompakt, λ ein nicht beschränktes Maß auf $\mathfrak{X}$ und $n > 0$, so ist $P(n\,\lambda)$ das in I.IV und I.V betrachtete Wahrscheinlichkeitsmaß des statistischen Modells eines unendlich ausgedehnten Gases.

Sei $\rho \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ fest, dann bilden die Maße $(P(n\,\rho))_{n \geqq 0}$ eine Halbgruppe bezüglich der Faltung. Es stellt sich die Frage nach dem infinitesimalen erzeugenden Operator. Sei $\mu \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})$, $\psi \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$, $\psi \geqq 0$, so bezeichnen wir mit $\mu\,\psi$ das Maß

$$\varphi \mapsto \langle \mu, \psi\,\varphi \rangle.$$

Sei $f \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$, so sei f_ψ die Funktion $\mu \mapsto f(\mu\,\psi)$.

Satz 3. *Sei* $\rho \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})$, $\psi \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$, $\psi \geqq 0$. *Dann konvergiert für* $n \downarrow 0$ *gleichmäßig für alle* $f \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$, $\|f\| \leqq 1$

$$\left\langle \frac{P(n\,\rho) - \mathfrak{d}}{n}, f_\psi \right\rangle \to \langle A(\rho), f_\psi \rangle = \int_{\mathfrak{X}} \rho(x)\,[f_\psi(\delta_x) - f_\psi(0)].$$

Der Raum aller Funktionen f_ψ: $f \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$, $\psi \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$, $\psi \geqq 0$, *ist locker dicht in* $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$.

Das Integral auf der rechten Seite der letzten Gleichung existiert, da $f_\psi(\delta_x) = f_\psi(0) = f(0)$ ist für $x \notin \mathit{Tr}\,\psi$. Der Operator $A(\rho)$ ist in gewisser Weise dicht definiert, wenn es auch nicht die Normtopologie von $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$ ist, in der sein Definitionsbereich dicht liegt. Das entspricht dem, daß die $P(\rho)$ straff sind, also mehr als normstetig. Es wäre interessant, diesen Überlegungen nachzugehen, doch scheint es mir im Augenblick für das zu behandelnde Problem keine großen Vorteile zu bieten.

Beweis. Wir setzen

$$A(\rho)_\psi\colon\ \mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))\to\mathbb{R}$$

$$f\mapsto\langle A(\rho)_\psi, f\rangle=\int\rho(x)\left[f(\psi(x)\delta_x)-f(0)\right]$$
$$=\langle A(\rho), f_\psi\rangle.$$

Da $A(\rho)_\psi$ ein straffes Maß auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ ist, ist $\exp_* nA(\rho)_\psi$ definiert und

$$\begin{aligned}(\exp_* nA(\rho)_\psi)^\wedge(\varphi)&=\exp n\langle A(\rho)_\psi, e^{i\langle\mu,\varphi\rangle}\rangle\\&=\exp n\int\rho(e^{i\psi\varphi}-1).\end{aligned}\tag{1}$$

Sei P irgend ein straffes Maß auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$, so bezeichnen wir mit P_ψ das Bild von P bezüglich der Abbildung $\mu\mapsto\mu\psi$. Es ist also

$$\int P_\psi f=\int P(\mu)f(\mu\psi)=\int Pf_\psi.\tag{2}$$

Daraus folgt

$$P_\psi^\wedge(\varphi)=\int P(\mu)e^{i\langle\mu\psi,\varphi\rangle}=\int P(\mu)\,e^{i\langle\mu,\psi\varphi\rangle}$$

also

$$P_\psi^\wedge(\varphi)=P(\psi\varphi).\tag{3}$$

Somit ist

$$P(n\rho)_\psi^\wedge(\varphi)=P(n\rho)^\wedge(\psi\varphi)=\exp n\int\rho(e^{i\psi\varphi}-1).$$

Aus dem Vergleich mit (1) ergibt sich

$$P(n\rho)_\psi=\exp_* nA(\rho)_\psi.\tag{4}$$

Damit ist

$$\langle P(n\rho), f_\psi\rangle=\langle P(n\rho)_\psi, f\rangle=\langle\exp_* nA(\rho)_\psi, f\rangle.$$

Die Eigenschaften der Exponentialfunktion ergeben sofort die behauptete Konvergenz. Daß die Menge $\{f_\psi\}$ dicht in $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X}))$ ist, folgert man entweder daraus, daß diese Menge die nach [3] Hilfssatz 2 dichte Menge der trigonometrischen Polynome enthält, oder direkt, indem man die Überlegungen von I.IV, Hilfsbehauptung 3 anwendet.

III. Mathematische Existenz des Linienprofils ohne Annahme skalarer Additivität

In der Einleitung von I wurde das Linienprofil als dasjenige Wahrscheinlichkeitsmaß $I(\nu)$ auf der Geraden definiert, dessen Fouriertransformierte die Funktion

$$R(t)=E\exp i\int_0^t X(\tau)\,d\tau$$

ist. Setzt man $X(t)$ nach Einleitung (3) an und verwendet man die dort aufgeschriebenen statistischen Annahmen (*i*), so stellt sich die Frage, ob im Rahmen dieser Annahmen $R(t)$ und $X(t)$ definiert sind, ob also die $R(t)$ definierenden Integrale sinnvoll sind und ob $R(t)$ die Fouriertransformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes sein kann. Eine explizite Formel, ähnlich der Anderson-Formel, ist mir nicht bekannt. Wir fassen die Frage zunächst im Hinblick auf eventuelle zukünftige Anwendungen etwas weiter und spezialisieren dann.

Sei $\mathfrak{X}$ ein lokal kompakter Raum und sei $(T_s)_{s\in\mathbb{R}}$ eine Gruppe topologischer Abbildungen $\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$, $T_0=\text{Identität}$, $T_s\circ T_t=T_{s+t}$. Sei außerdem die Abbildung $(s,x)\mapsto T_s x$ von $\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}$ stetig. Sei $\mu\in\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$, so bezeichnen wir mit $T_s\mu$ das Bild von μ bezüglich der Abbildung $x\mapsto T_s x$.

Hilfssatz 1. *Die Abbildung $(s,\mu)\mapsto T_s\mu$ von $\mathbb{R}\times\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ in $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ ist stetig.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß für festes $\varphi\in\mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$ die Funktion

$$(s,\mu)\mapsto\langle T_s\mu,\varphi\rangle=\langle\mu,\varphi\circ T_s\rangle$$

stetig ist. Man sieht leicht, daß es zu $\delta>0$ und $s_0\in\mathbb{R}$ ein Kompaktum $K\subset\mathfrak{X}$ gibt mit

$$Tr(\varphi\circ T_s)\subset K \qquad \text{für } |s-s_0|\leqq\delta.$$

Sei $\psi\in\mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$, $\psi\geqq 0$, $\psi=1$ auf K. Sei $\mu_0\in\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ fest und $\langle\mu_0,\psi\rangle<C$. Wir betrachten die Umgebung $U_0=\{\mu\colon\langle\mu,\psi\rangle<C\}$ von μ_0. Dann gilt für $\mu\in U_0$ und $|s-s_0|\leqq\delta$

$$\begin{aligned}|\langle\mu,\varphi\circ T_s\rangle-\langle\mu_0,\varphi\circ T_{s_0}\rangle|&\leqq|\langle\mu-\mu_0,\varphi\circ T_{s_0}\rangle|+|\langle\mu,\varphi\circ T_s-\varphi\circ T_{s_0}\rangle|\\&\leqq|\langle\mu-\mu_0,\varphi\circ T_{s_0}\rangle|+C\,\|\varphi\circ T_s-\varphi\circ T_{s_0}\|.\end{aligned}$$

Da für $s\to s_0$ die Funktionen $\varphi\circ T_s$ gleichmäßig gegen $\varphi\circ T_{s_0}$ streben, ergibt sich aus der letzten Abschätzung die Stetigkeit von $(s,u)\mapsto T_s u$.

Sei P irgend ein straffes Maß auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$, so bezeichnen wir mit $T_s P$ das Bild von P bezüglich der Abbildung $\mu\mapsto T_s\mu$. Insbesondere heißt P invariant bezüglich der Gruppe $(T_s)_{s\in\mathbb{R}}$ wenn $T_s P=P$ ist für alle $s\in\mathbb{R}$.

Satz 1. *Sei P ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ und sei $Y\colon\mathfrak{M}(\mathfrak{X})\to\mathbb{R}$ eine P-meßbare Funktion. Dann ist die Funktion*

$$(s,\mu)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{M}(\mathfrak{X})\mapsto Y(T_s\mu)$$

meßbar bezüglich des Produktes vom Lebesgue-Maß auf der Geraden und dem Maß P. Sei überdies $S\mapsto Y(T_s\mu)$ für P-fast alle μ lokal integrierbar und P invariant bezüglich der Gruppe $(T_s)_{s\in\mathbb{R}}$, so existiert

$$R(t)=\int P(\mu)\exp i\int_0^t Y(T_s\mu)\,ds$$

und ist die Fouriertransformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf der Geraden.

Beweis. Für jedes ganze n ist

$$Y^{(n)}(\mu)=\begin{cases}n & \text{für } Y\geqq n\\ Y & \text{für } -n\leqq Y\leqq n\\ -n & \text{für } Y\leqq -n\end{cases}$$

meßbar und beschränkt und somit integrierbar. Jede integrierbare Funktion ist aber der Grenzwert einer fast überall konvergierenden Folge stetiger, beschränkter Funktionen. Also ist Y selbst der Grenzwert einer fast überall konvergierenden Folge stetiger, beschränkter Funktionen Y_k. Nach Hilfssatz 1 ist

$$(s,\mu)\mapsto Y_k(T_s\mu)$$

stetig. Daraus folgt, daß

$$(s, \mu) \mapsto Y(T_s \mu)$$

Grenzwert einer Folge fast überall konvergierender stetiger Funktionen ist und darum produktmeßbar.

Sei $S \mapsto Y(T_s \mu)$ lokal integrierbar für fast alle μ. Dann ist für jedes t die Funktion

$$\mu \mapsto \int_0^t Y(T_s \mu)\, ds$$

meßbar, also

$$\mu \mapsto \exp i \int_0^t Y(T_s \mu)\, ds$$

integrierbar und $R(t)$ ist definiert.

Wegen der Invarianz von P gilt für reelles h

$$\begin{aligned}\int P(\mu) \exp i \int_h^{t+h} Y(T_s \mu)\, ds &= \int P(\mu) \exp i \int_0^t Y(T_{s+h} \mu)\, ds \\ &= \int P(\mu) \exp i \int_0^t Y(T_s T_h \mu)\, ds \\ &= \int P(\mu) \exp i \int_0^t Y(T_s \mu)\, ds.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}R(t-u) &= \int P(\mu) \exp i \int_0^{t-u} Y(T_s \mu)\, ds \\ &= \int P(\mu) \exp i \int_u^t Y(T_s \mu)\, ds \\ &= \int P(\mu) \left[\exp i \int_0^t Y(T_s \mu)\, ds\right] \left[\exp i \int_0^u Y(T_s \mu)\, ds\right]^*\end{aligned}$$

und daraus wiederum

$$\sum \sum R(t_i - t_k)\, z_i z_k^* \geqq 0$$

für $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$; $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, wo $*$ die konjugiert komplexe Zahl andeutet. Also ist R positiv definit.

Für diejenigen μ, für die $s \mapsto Y(T_s \mu)$ lokal integrierbar ist, gilt

$$\int_0^t Y(T_s \mu)\, ds \to 0 \qquad \text{für } s \to 0.$$

Aus dem Satz von Lebesgue ergibt sich

$$R(t) \to 1 = R(0)$$

für $t \to 0$. Aus dem Satz von Bochner folgt somit, daß R die Fouriertransformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf der Geraden ist.

Wir spezialisieren und setzen $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^3 \times S^2$, wo S^2 die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ darstellt. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^3$ das Lebesgue-Maß ρ' und auf S^2 das auf 1 normierte Oberflächenmaß ρ'' und setzen $\rho = \rho' \otimes \rho''$. Das ist ein nicht beschränktes positives Radon-Maß auf $\mathfrak{X}$. Die Punkte von $\mathfrak{X}$ bezeichnen wir oft durch $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$, wo $\mathfrak{x}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^3$ und $\mathfrak{e}$ ein dreidimensionaler Einheitsvektor ist. Integration nach ρ' wird dann durch $d^3 \mathfrak{x}$, Integration nach ρ'' durch $d^2 \mathfrak{e}$ angedeutet. Physikalisch gesehen ist $\mathfrak{X}$ der Phasenraum des zu betrachtenden Gases. Wir fixieren ein $n \geqq 0$ und betrachten das straffe Wahrscheinlichkeitsmaß $P(n\rho)$ auf $\mathfrak{X}$. Die Zahl n ist die mittlere Dichte des Gases.

Wir betrachten die Gruppe der Abbildungen $(T_s)_{s \in \mathbb{R}}$

$$T_s \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$$
$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) \mapsto (\mathfrak{x} + s\,\mathfrak{e}, \mathfrak{e}).$$

Da $T_s \rho = \rho$ ist für $s \in \mathbb{R}$, ist nach [3] Satz 5 das Maß ρ bezüglich dieser Gruppe invariant.

Wir setzen

$$Y(\mu) = 2\pi\, C\, |\langle \mu, \mathfrak{q}_\beta \rangle|^2,$$

wo $C \geqq 0$ und

$$\mathfrak{q}_\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) = \frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|^3}\, e^{-\beta |\mathfrak{x}|}, \qquad \beta > 0$$

ist. Da $\mathfrak{q}_\beta$ fast überall endlich ist und für die Komponenten $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3$ von $\mathfrak{q}_\beta$ gilt, daß $\min(1, |\mathfrak{q}_i|)$ bezüglich ρ integrierbar ist, ist nach I.V Satz 2 die Funktion $\mathfrak{q}_\beta$ für fast alle μ integrierbar und $\mu \mapsto \langle \mu, \mathfrak{q}_\beta \rangle$ meßbar. Somit ist auch Y meßbar. Um Satz 1 anwenden zu können, müssen wir im wesentlichen zeigen, daß $s \mapsto Y(T_s \mu)$ für fast alle μ lokal integrierbar ist. Dazu benötigen wir einige Hilfsbetrachtungen.

Hilfssatz 2. *Sei φ eine Funktion auf $\mathfrak{X}$, die bezüglich ρ sowohl integrierbar, als auch quadratintegrierbar ist. Dann ist für $P(n\rho)$-fast alle μ die Funktion φ integrierbar, die Funktion $\mu \mapsto \langle \mu, \varphi \rangle$ ist integrierbar und quadratintegrierbar und*

$$\int P(n\rho)(\mu) \langle \mu, \varphi \rangle = n \int \rho\, \varphi,$$
$$\int P(n\rho)(\mu) \langle \mu, \varphi \rangle^2 = n \int \rho\, \varphi^2 + n^2 \left(\int \rho\, \varphi\right)^2.$$

Beweis. Nach Satz I.V.2 ist φ für fast alle μ integrierbar und für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\int P(n\rho)\, e^{i\lambda \langle \mu, \varphi \rangle} = \exp n \int \rho\, (e^{i\lambda\varphi} - 1).$$

Da

$$\lambda \mapsto \int \rho\, (e^{i\lambda\varphi} - 1)$$

zweimal stetig differenzierbar ist und der Wert der ersten Ableitung im Nullpunkt gleich $i n \langle \rho, \varphi \rangle$, der der zweiten Ableitung gleich $-n \langle \rho, \varphi^2 \rangle$ ist, ergibt sich die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Sei $s_0 \leqq s_1$, sei $\varepsilon > 0$ und $\psi \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$, $0 \leqq \psi \leqq 1$ und $\psi = 1$ auf*

$$\{|\mathfrak{x}| \leqq \varepsilon/2\} \times S^2$$

und $\psi = 0$ außerhalb $\{|\mathfrak{x}| \leqq \varepsilon\} \times S^2$. Dann ist die Menge

$$U = \{\mu \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X}) \colon \langle \mu, \psi \circ T_s \rangle > 0 \text{ für ein } s \colon s_0 \leqq s \leqq s_1\}$$

offen in $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ und

$$P(n\rho)\{U\} \leqq n\pi\varepsilon^2\big((s_1 - s_0) + 2\varepsilon\big).$$

Beweis. Als Vereinigungsmenge offener Mengen ist U offen. Sei

$$V = \{(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) \colon |\mathfrak{x} + s\,\mathfrak{e}| \leqq \varepsilon \text{ für ein } s \colon s_0 \leqq s \leqq s_1\}.$$

Dann liegt $Tr(\psi \circ T_s) \subset V$ für $s_0 \leqq s \leqq s_1$ und $\langle \mu, \psi \circ T_s \rangle > 0$ impliziert $\mu\{V\} > 0$. Also ist nach Satz I.V.3

$$\begin{aligned} P(n\rho)\{U\} &\leqq P(n\rho)\{\mu \colon \mu\{V\} > 0\} \\ &= 1 - \exp(-n\rho\{V\}) \leqq n\rho\{V\} \\ &\leqq n\pi\varepsilon^2\big((s_1 - s_0) + 2\varepsilon\big). \end{aligned}$$

Satz 2. *Sei $v \geqq 0$, so ist $\tau \to Y(T_{v\tau}\mu)$ für fast alle μ lokal integrierbar.*

Beweis. Wir wählen ein ψ wie im Hilfssatz 2, wollen jedoch annehmen, daß $\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$ nur von $|\mathfrak{x}|$ abhängt. Sei U die Menge

$$\{\mu \colon \langle \mu, \psi \circ T_{v\tau} \rangle > 0 \text{ für ein } \tau \colon s \leqq \tau \leqq t\},$$

χ die charakteristische Funktion ihres Komplements, so ist

$$\begin{aligned} &\int P(n\rho)(\mu)\,\chi(\mu) \int_s^t Y(T_{v\tau}\mu)\,d\tau \\ &\quad = \int P(n\rho)(\mu)\,\chi(\mu)\,2\pi\,C \int_s^t |\langle \mu, \mathfrak{q}_\beta \circ T_{v\tau} \rangle|^2\,d\tau \\ &\quad = \int P(n\rho)(\mu)\,\chi(\mu)\,2\pi\,C \int_s^t |\langle \mu, [(1-\psi)\,\mathfrak{q}_\beta] \circ T_{v\tau} \rangle|^2\,d\tau. \end{aligned}$$

Denn für alle $\mu \notin U$ ist $\langle \mu, \psi \circ T_{v\tau} \rangle$ und somit auch $\langle \mu, (\psi\,\mathfrak{q}_\beta) \circ T_{v\tau} \rangle = 0$. Schätzt man χ durch 1 ab, vertauscht die Integrationen und verwendet man Hilfssatz 2, so ergibt sich wegen der Radialsymmetrie von ψ

$$\begin{aligned} &\leqq 2\pi\,C \int_s^t d\tau \int \rho\,|[(1-\psi)\,\mathfrak{q}_\beta] \circ T_{v\tau}|^2 \\ &= 2\pi\,C(t-s) \int \rho\,|(1-\psi)\,\mathfrak{q}_\beta|^2 \\ &\leqq 2\pi\,C(t-s) \int_{|\mathfrak{x}| \geqq \varepsilon/2} d^3\mathfrak{x}\,|\mathfrak{x}|^{-4} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Sei

$$W = \left\{ \mu \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X}) \colon \int_s^t d\tau\, Y(T_{v\tau}\mu) = \infty \right\}$$

so ist also

$$P(n\rho)\{W \cap \operatorname{compl} U\} = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} P(n\rho)\{W\} &= P(n\rho)\{W \cap U\} + P(n\rho)\{W \cap \operatorname{compl} U\} \\ &\leqq P(n\rho)\{U\} \leqq n\pi\varepsilon^2\big((t-s)v + 2\varepsilon\big). \end{aligned}$$

Da ε beliebig war, folgt $P(n\rho)\{W\} = 0$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Folgerung. Die Funktion

$$R(t) = \int P(n\rho)(\mu) \exp i \int_0^t d\tau\, 2\pi C \left| \int \mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})\, \mathfrak{q}_\beta(\mathfrak{x} + v\tau\mathfrak{e}, \mathfrak{e}) \right|^2$$

mit

$$\mathfrak{q}_\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) = \mathfrak{x} \cdot |\mathfrak{x}|^{-3} e^{-\beta|\mathfrak{x}|}$$

ist definiert und die Fouriertransformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.

IV. Diskussion des Linienprofils auf den Linienflügeln ohne Annahme skalarer Additivität

Der Beweisgang dieses Kapitels ist in der Einleitung skizziert. Wir beweisen zunächst den dort angekündigten Homogenitätssatz, der den Schlüssel für die ganze Diskussion bildet. Wir verwenden die Bezeichnungen der zweiten Hälfte des letzten Kapitels.

Satz 1. *Sei*

$$R(t, n, v, \beta) = \int P(n\rho)(\mu) \exp i \int_0^t Y_\beta(T_{v\tau}\mu)\, d\tau$$

mit

$$Y_\beta(\mu) = 2\pi C |\langle \mu, \mathfrak{q}_\beta \rangle|^2,$$

$$\mathfrak{q}_\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) = \mathfrak{x} \cdot |\mathfrak{x}|^{-3} e^{-\beta|\mathfrak{x}|},$$

so gilt für $\alpha > 0$

$$R(t, n, v, \beta) = R(\alpha^{-4} t, \alpha^3 n, \alpha^3 v, \alpha\beta).$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$S_\alpha \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$$

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) \mapsto (\alpha\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$$

und die entsprechenden induzierten Abbildungen

$$S_\alpha \colon \mathfrak{M}(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{X}) \quad \text{und} \quad S_\alpha \colon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X})) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{M}(\mathfrak{X})).$$

Dann gilt

$$S_\alpha P(n\rho) = P(\alpha^{-3} n\rho). \tag{1}$$

Denn gemäß [3] Satz 5 ist $S_\alpha P(n\rho)=P(n S_\alpha \rho)$. Man rechnet unmittelbar aus $S_\alpha \rho=\alpha^{-3}\rho$. Außerdem gilt

$$T_{vt} S_\alpha = S_\alpha T_{vt/\alpha}. \tag{2}$$

Endlich erhält man

$$Y_\beta \circ S_\alpha = \alpha^{-4} Y_{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Es ist nämlich

$$Y_\beta(S_\alpha \mu)=2\pi C|\langle \mu, \mathfrak{q}_\beta \circ S_\alpha\rangle|^2$$

und

$$\mathfrak{q}_\beta\big(S_\alpha(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})\big)=\alpha^{-2}\mathfrak{q}_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}).$$

Somit ergibt sich mit Hilfe von (1), (2) und (3)

$$\begin{aligned}
R(t, n, v, \beta) &= \int [S_\alpha S_{1/\alpha} P(n\rho)](\mu) \exp i \int_0^t Y_\beta(T_{v\tau}\mu)\, d\tau \\
&= \int [S_{1/\alpha} P(n\rho)](\mu) \exp i \int_0^t Y_\beta(T_{v\tau} S_\alpha \mu)\, d\tau \\
&= \int P(\alpha^3 n\rho)(\mu) \exp i \int_0^t Y_\beta(S_\alpha T_{v\tau/\alpha}\mu)\, d\tau \\
&= \int P(\alpha^3 n\rho)(\mu) \exp i \int_0^t \alpha^{-4} Y_{\alpha\beta}(T_{v\tau/\alpha}\mu)\, d\tau .
\end{aligned}$$

Die Variablentransformation $\tau'=\tau/\alpha^4$ ergibt endlich

$$\begin{aligned}
&= \int P(\alpha^3 n\rho)(\mu) \exp i \int_0^{t/\alpha^4} Y_{\alpha\beta}(T_{v\alpha^3\tau}\mu)\, d\tau \\
&= R(\alpha^{-4} t, \alpha^3 n, \alpha^3 v, \alpha\beta),
\end{aligned}$$

q.e.d.

Hilfssatz 1. *Für festes $t_0>0$ konvergiert für $n\downarrow 0$ gleichmäßig in $0\leqq v\leqq v_0$, $\beta>0$ und $0\leqq t\leqq t_0$*

$$\frac{R(t, n, v, \beta)-1}{n} \to F(t, v, \beta)=\iint d^3\mathfrak{x}\, d^2\mathfrak{e}\left[\exp\left(2\pi i C\int_0^t |\mathfrak{q}_\beta(\mathfrak{x}+v\tau\mathfrak{e}, \mathfrak{e})|^2\, d\tau\right)-1\right].$$

Beweis. Um die Beweisidee herauszustellen, formulieren wir um:

$$\frac{R(t, n, v, \beta)-1}{n} = \left\langle \frac{P(n\rho)-\mathfrak{d}}{n}, f\right\rangle$$

mit

$$f(\mu)=\exp i\int_0^t Y_\beta(T_{v\tau}\mu)\, d\tau .$$

Behauptet wird, daß dieser Ausdruck gegen

$$\begin{aligned}
\langle A(\rho), f\rangle &= \int \rho(x)[f(\delta_x)-f(0)] \\
&= \int \rho(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) \exp\left[2\pi i C\int_0^t |\mathfrak{q}_\beta(T_{v\tau}(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}))|^2\, d\tau - 1\right] = F(t, v, \beta)
\end{aligned}$$

konvergiert. Dabei ist $A(\rho)$ die naheliegende Ausdehnung des in Satz II.3 definierten Operators. Der Beweis würde sich unmittelbar aus Satz II.3 ergeben, wenn f stetig, beschränkt und von der Form $f=f_\psi$ wäre. Das ist jedoch leider nicht der Fall. Störend wirkt die Singularität von $\mathfrak{q}_\beta$ im Nullpunkt und daß $\mathfrak{q}_\beta$ sich bis ins Unendliche erstreckt, d.h. keinen kompakten Träger besitzt. Wir werden deshalb $\mathfrak{q}_\beta$ abschneiden. Die Abschätzung der Reste bildet die Hauptaufgabe dieses Hilfssatzes.

Da $R(-t)^*=R(t)$ ist, genügt es bezüglich t die gleichmäßige Konvergenz in einem Intervall der Form $0\leqq t\leqq t_0$ zu untersuchen. Wir nehmen also $0\leqq t\leqq t_0$ an. Wir wählen r und ε, $0<\varepsilon<r<\infty$ und stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ auf $\mathbb{R}_+$ mit $0\leqq\varphi_i\leqq 1$, $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=1$ und

$$\varphi_1(u)=\begin{cases}1 & \text{für } u\leqq\varepsilon/2,\\ 0 & \text{für } u\geqq\varepsilon,\end{cases}$$

$$\varphi_2(u)=\begin{cases}1 & \text{für } \varepsilon\leqq u\leqq r,\\ 0 & \text{für } u\leqq\varepsilon/2,\ u\geqq 2r,\end{cases}$$

$$\varphi_0(u)=\begin{cases}1 & \text{für } u\geqq 2r,\\ 0 & \text{für } u\leqq r,\end{cases}$$

und setzen

$$\psi_i(\mathfrak{x},\mathfrak{e})=\varphi_i(|\mathfrak{x}|) \qquad (i=1,2,3)$$

und

$$g(\mu)=\exp i\int_0^t 2\pi\, C|\langle T_{v\tau}\mu, \psi_2\,\mathfrak{q}_\beta\rangle|^2\, d\tau.$$

Da jede Komponente von $\psi_2\,\mathfrak{q}_\beta$ eine Funktion aus $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$ ist, folgt aus Hilfssatz III.1, daß $(\tau,\mu)\to\langle T_{v\tau}\mu, \psi_2\,\mathfrak{q}_\beta\rangle$ und damit g stetig ist. Der Träger von $\psi_2\,\mathfrak{q}_\beta\circ T_{v\tau}$ ist für $0\leqq v\leqq v_0$, alle β und $0\leqq\tau\leqq t$ enthalten in $\{\mathfrak{x}\in\mathbb{R}^3\colon |\mathfrak{x}|\leqq 2r+v_0\,t_0\}\times S^2$. Sei $0\leqq\psi\leqq 1$ eine Funktion aus $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{X})$, die auf dieser Menge gleich 1 ist, so gilt $g(\mu)=g(\mu\,\psi)=g_\psi(\mu)$. Aus Satz II.3 folgt darum

$$\left\langle \frac{P(n\,\rho)-\mathfrak{d}}{n}, g\right\rangle\to\langle A(\rho), g\rangle \tag{1}$$

gleichmäßig in β, $0\leqq v\leqq v_0$ und $0\leqq t\leqq t_0$.

Da $f(0)=g(0)=1$ ist, müssen noch $\langle n^{-1}P(n\,\rho), f-g\rangle$ und $\langle A(\rho), f-g\rangle$ abgeschätzt werden. Wir setzen

$$h(\mu)=\exp i\int_0^t 2\pi\, C|\langle T_{v\tau}\mu, (\psi_2+\psi_3)\,\mathfrak{q}_\beta\rangle|^2\, d\tau.$$

Sei

$$U=\{\mu\in\mathfrak{M}(\mathfrak{X})\colon \langle\mu, \psi\circ T_{v\tau}\rangle>0 \text{ für ein } v\,\tau\colon 0\leqq\tau\leqq t_0,\ 0\leqq v\leqq v_0\}.$$

Dann ist für $\mu\in U$ die Funktion $\psi_1\,\mathfrak{q}\circ T_{v\tau}$ eine Nullfunktion und somit $f(\mu)=h(\mu)$. Da $\|f\|=\|h\|=1$ ist, ist

$$|\langle n^{-1}P(n\,\rho), f-h\rangle|\leqq 2n^{-1}P(n\,\rho)\{U\}$$

und nach Hilfssatz III.3

$$|\langle n^{-1} P(n\rho), f-h\rangle| \leqq 2\pi\varepsilon^2 (v_0 t_0 + 2\varepsilon) \tag{2}$$

für alle $\beta > 0$, $0 \leqq v_0 \leqq v$, $0 \leqq t \leqq t_0$.

Da $f(\delta_{(\mathfrak{x},\mathfrak{e})})$ und $h(\delta_{(\mathfrak{x},\mathfrak{e})})$ übereinstimmen, falls nicht $T_{v\tau}(\mathfrak{x},\mathfrak{e}) \in Tr\,\psi_1$ liegt für ein v oder τ, falls also nicht

$$(\mathfrak{x},\mathfrak{e}) \in V = \{(\mathfrak{x},\mathfrak{e}) : |\mathfrak{x} + v\tau\mathfrak{e}| \leqq \varepsilon \text{ für ein } v: 0 \leqq v \leqq v_0 \text{ und ein } \tau: 0 \leqq \tau \leqq t_0\},$$

so gilt nach dem Beweis von Hilfssatz III.3

$$\begin{aligned} |\langle A(\rho), f-h\rangle| &= \left|\int \rho(\mathfrak{x},\mathfrak{e})\,[f(\delta_{(\mathfrak{x},\mathfrak{e})}) - h(\delta_{(\mathfrak{x},\mathfrak{e})})]\right| \\ &\leqq 2\rho\,\{V\} = 2\pi\varepsilon^2 (v_0 t_0 + 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Also ist

$$|\langle A(\rho), f-h\rangle| \leqq 2\pi\varepsilon^2 (v_0 t_0 + 2\varepsilon) \tag{3}$$

für alle $\beta > 0$ und $0 \leqq v \leqq v_0$, $0 \leqq t \leqq t_0$.

Wir schätzen ab

$$\begin{aligned} &|\langle n^{-1} P(n\rho), h-g\rangle| \\ &\quad \leqq \int n^{-1} P(n\rho)(\mu)\, 2\pi C \left| \int_0^t |\langle T_{v\tau}\mu, (\psi_2+\psi_3)\mathfrak{q}_\beta\rangle|^2\, d\tau - \int_0^t |\langle T_{v\tau}\mu, \psi_2\mathfrak{q}_\beta\rangle|^2\, d\tau \right| \\ &\quad \leqq 2\pi C \int n^{-1} P(n\rho)(\mu) \int_0^t |\langle T_{v\tau}\mu, \psi_3\mathfrak{q}_\beta\rangle|^2\, d\tau \\ &\qquad + 4\pi C \int n^{-1} P(n\rho)(\mu) \int_0^t |\langle T_{v\tau}\mu, \psi_3\mathfrak{q}_\beta\rangle|\,|\langle T_{v\tau}\mu, \psi_2\mathfrak{q}_\beta\rangle|\, d\tau. \end{aligned}$$

Man vertauscht die Reihenfolge der Integrationen und erhält wegen der Invarianz von $P(n\rho)$ bezüglich $T_{v\tau}$:

$$= 2\pi C t \cdot \mathrm{I} + 4\pi C t \cdot \mathrm{II}.$$

Dabei ist nach Hilfssatz III.2, weil $\langle \rho, \psi_3\mathfrak{q}\rangle = 0$ ist,

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int n^{-1} P(n\rho)(\mu)\, |\langle \mu, \psi_3\mathfrak{q}_\beta\rangle|^2 \\ &= \int \rho\, |\psi_3\mathfrak{q}_\beta|^2 \leqq 4\pi/r. \end{aligned}$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &= \int n^{-1} P(n\rho)\, |\langle \mu, \psi_2\mathfrak{q}\rangle|\, |\langle \mu, \psi_3\mathfrak{q}\rangle| \\ &\leqq n^{-1} \left(\int P(n\rho)\, |\langle \mu, \psi_2\mathfrak{q}\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int P(n\rho)\, |\langle \mu, \psi_3\mathfrak{q}\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int \rho\, |\psi_2\mathfrak{q}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \rho\, |\psi_3\mathfrak{q}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq \frac{8\pi}{\sqrt{\varepsilon r}}. \end{aligned}$$

Also ist

$$|\langle n^{-1} P(n\rho), h-g\rangle| \leqq 8\pi^2 C t_0 \left(1/r + 2/\sqrt{\varepsilon r}\right) \tag{4}$$

für alle $0 \leqq v \leqq v_0$, $0 \leqq t \leqq t_0$, $\beta > 0$.

Mit Hilfe einer ähnlichen Rechnung erhält man ebenfalls

$$|\langle A(\rho), h-g\rangle| \leqq 8\pi^2 C t_0 \left(1/r + 2/\sqrt{\varepsilon r}\right). \tag{5}$$

Aus (1) bis (5) erhält man die Behauptung, indem man beachtet, daß ε und r willkürlich gewählte Größen sind.

Hilfssatz 2. *Für $v \downarrow 0$ und $\beta \downarrow 0$ konvergiert $F(t, v, \beta)$ lokal gleichmäßig in t gegen*

$$F(t) = F(t, 0, 0) = \int d^3\mathfrak{x} \,(\exp 2\pi i C t/|\mathfrak{x}|^4 - 1).$$

Beweis. Da $F(-t, v, \beta)^* = F(t, v, \beta)$ ist, genügt es Intervalle der Form $0 \leqq t \leqq t_0$ zu betrachten. Man beobachtet, daß das Resultat der $d^3\mathfrak{x}$-Integration in $F(t, v, \beta)$ nicht von $\mathfrak{e}$ abhängt. Die $d^2\mathfrak{e}$-Integration ist also überflüssig. Somit ist für beliebiges, festes $\mathfrak{e} \in S^2$

$$F(t, v, \beta) = \int d^3\mathfrak{x} \left[\exp 2\pi i C \int_0^t |\mathfrak{x} + v\tau\mathfrak{e}|^{-4} e^{-\beta|\mathfrak{x}+v\tau\mathfrak{e}|} - 1\right]$$

und für $\varepsilon > 0$

$$F(t, v, \beta) - F(t) = \int d^3\mathfrak{x} \left[\exp 2\pi i C \int_0^t |\mathfrak{x} + v\tau\mathfrak{e}|^{-4} e^{-\beta|\mathfrak{x}+v\tau\mathfrak{e}|} - \exp 2\pi i C t |\mathfrak{x}|^{-4}\right]$$

$$= \int_{|\mathfrak{x}| \leqq \varepsilon} + \int_{|\mathfrak{x}| \geqq \varepsilon}.$$

Man schätzt ab

$$\Big|\int_{|\mathfrak{x}| \leqq \varepsilon}\Big| \leqq 2\,\frac{4\pi}{3}\,\varepsilon^3$$

und

$$\Big|\int_{|\mathfrak{x}| \geqq \varepsilon}\Big| \leqq 2\pi C \int_{|\mathfrak{x}| \geqq \varepsilon} d^3\mathfrak{x} \int_0^t \left||\mathfrak{x} + v\tau\mathfrak{e}|^{-4} e^{-\beta|\mathfrak{x}+v\tau\mathfrak{e}|} - |\mathfrak{x}|^{-4}\right|$$

$$\leqq 2\pi C \int_{|\mathfrak{x}| \geqq \varepsilon} d^3\mathfrak{x} \int_0^t \left[\left||\mathfrak{x} + v\tau\mathfrak{e}|^{-4} - |\mathfrak{x}|^{-4}\right| e^{-\beta|\mathfrak{x}+v\tau\mathfrak{e}|} + \left(1 - e^{-\beta|\mathfrak{x}+v\tau\mathfrak{e}|}\right)|\mathfrak{x}|^{-4}\right]$$

$$\leqq 2\pi C \int_{|\mathfrak{x}| \geqq \varepsilon} \int_0^t |\mathfrak{x}|^{-4} \left[\left||\mathfrak{x}/|\mathfrak{x}| + v\tau\mathfrak{e}/|\mathfrak{x}||^{-4} - 1\right| + \min(1, \beta|\mathfrak{x} + v\tau\mathfrak{e}|)\right]$$

$$\leqq 2\pi C t_0 \int_{|\mathfrak{x}| \geqq \varepsilon} d^3\mathfrak{x} \left[128\, v t_0 |\mathfrak{x}|^{-5} + |\mathfrak{x}|^{-4} \min(1, \beta|\mathfrak{x}| + \beta v t_0)\right]$$

für

$$v t_0 \leqq \varepsilon/2.$$

Das ergibt sofort die Behauptung.

Satz 2. *Sei $n > 0$, $\beta > 0$, $v > 0$ fest. Sei I das Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Geraden mit der Fouriertransformierten $t \mapsto R(t, n, v, \beta)$. Sei I_u das um den Faktor u gestauchte Maß I:*

$$\int I_u(v) f(v) = \int I(v) f(v/u).$$

Dann konvergieren für $u\to\infty$ die fast positiven straffen Funktionale

$$u^{\frac{3}{4}}(I_u-\delta)$$

schwach auf $\mathfrak{T}$ gegen das fast positive, straffe Funktional L, wo

$$\langle L, f\rangle=\pi n(2\pi C)^{\frac{3}{4}}\int_0^\infty dx\cdot x^{-\frac{7}{4}}(f(x)-f(0))$$

für $f\in\mathfrak{T}$ gesetzt ist.

Aus Satz 2 folgt ebenfalls wie in I.VIII Satz 6

Folgerung. Für $v\to\infty$ konvergiert

$$v^{\frac{3}{4}}I\{u\colon u\geqq v\}\to\frac{4\pi}{3}n(2\pi C)^{\frac{3}{4}},$$

$$v^{\frac{3}{4}}I\{u\colon u\leqq -v\}\to 0.$$

Das sind die gewünschten asymptotischen Aussagen für die Linienflügel. Da wir $C\geqq 0$ angenommen haben, fehlt die zur ersten symmetrischen Hälfte von Satz I.VIII.6.

Beweis. Es gilt

$$I_u^\wedge(t)=\int I_u(v)e^{ivt}=\int I(v)e^{iv/ut},$$

also

$$I_u^\wedge(t)=R(t/u, v, n, \beta).$$

Die Fouriertransformierte von

$$u^{\frac{3}{4}}(I_u-\delta)$$

ist somit nach Satz 1

$$u^{\frac{3}{4}}\left(R(t, u^{-\frac{3}{4}}n, u^{-\frac{3}{4}}v, u^{-\frac{1}{4}}\beta)-1\right).$$

Nach Hilfssatz 1 und 2 konvergiert dieser Ausdruck für $u\to\infty$ lokal gleichmäßig in t gegen

$$n\int d^3\mathfrak{x}(\exp 2\pi i\,C\,t/|\mathfrak{x}|^4-1).$$

Man führt Polarkoordinaten ein

$$=n\int_0^\infty 4\pi r^2\,dr(\exp 2\pi i\,C\,t/r^4-1)$$

und formt das Integral um, indem man

$$x=2\pi C\cdot r^{-4}$$

setzt. Also ist das Integral

$$=n\pi(2\pi C)^{\frac{3}{4}}\int_0^\infty dx\cdot x^{-\frac{7}{4}}(e^{ixt}-1)$$

und das ist offensichtlich gleich $L^\wedge(t)$. Aus [4] Satz 2 folgt die Behauptung des Satzes.

Literatur

1. Doob, J. L.: Stochastic Processes. New York: Wiley 1953.
2. Waldenfels, W. v.: Zur mathematischen Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **6**, 65–112 (1966).
3. – Charakteristische Funktionale zufälliger Maße. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **10**, 279–283 (1968).
4. – Die Sätze von Bochner und Lévy für fast positive Funktionale. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. (im Druck).

Professor Dr. W. v. Waldenfels
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität
6900 Heidelberg, Berliner Straße 17
z. Z. in:
Department of Mathematics
University of California
Berkeley, California 94720 (USA)

(Eingegangen am 19. Juli 1968)