Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 13, 9–24 (1969)

Zur Überlagerung von Erneuerungsprozessen *

HORAND STÖRMER **

Summary. If a finite sequence of independent (not necessarily stationary) renewal processes is given, a superposition process can easily be defined as the union of all point sequences represented by the given processes. The properties of such superposition processes are investigated. First, a necessary and sufficient condition for a superposition process to be a renewal process is given. Essentially, this condition reads thus: the given processes must be Poisson processes. The main result given in this paper is a limit theorem for superposition processes which shows that, even with largely arbitrary renewal processes superimposed, the superposition process has local properties which approach the properties of the Poisson process as the number of given processes increases. The theorem contains some well-known special theorems of this type [e.g. Khintchine, 1960; Franken, 1963].

1. Charakterisierung eines Überlagerungsprozesses

Zunächst definieren wir die Begriffe *Punktprozeß*, *Erneuerungsprozeß* und *Überlagerungsprozeß*.

1.1. Punktprozeß, Erneuerungsprozeß

Sind $X_1, X_2, X_3, \ldots$ zufällige Größen mit

$$P\{X_n \leqq 0\} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

so stellt die Folge

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

einen *Punktprozeß* dar. Sind $X_1, X_2, \ldots$ voneinander unabhängig und für $n \geqq 2$ identisch verteilt mit

$$P\{X_n \leqq x\} = F(x), \tag{3}$$

so heißt der Prozeß *Erneuerungsprozeß*. Die zufälligen Größen S_n kann man als die Zeitpunkte von *Erneuerungen* auf der Zeitachse deuten.

Für $t \geqq 0$ heißt

$$N(t) = \max(n \colon S_n \leqq t) \tag{4}$$

die *Anzahl der Erneuerungen bis zur Zeit t* und

$$H(t) = E[N(t)] \tag{5}$$

* Von der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der T. H. München angenommene Habilitationsschrift (Auszug).

** Zentrallaboratorium für Nachrichtentechnik der Siemens AG, München.

die *Erneuerungsfunktion.* Aus (4) folgt

$$S_n = \min\bigl(t\colon N(t) = n\bigr) \tag{6}$$

und umgekehrt. Ein Erneuerungsprozeß heißt *gewöhnlich*, wenn

$$P\{X_1 \leqq x\} = F_1(x) = F(x) \tag{7}$$

gilt. Er heißt *stationär*, wenn

$$F_1(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1 - F(y)]\, dy, \qquad \mu = \int_0^\infty [1 - F(y)]\, dy \tag{8}$$

gilt. Für stationäre Erneuerungsprozesse ist

$$H(t) = t/\mu. \tag{9}$$

1.2. Überlagerungsprozeß

Sind M Erneuerungsprozesse gegeben, und ist $N^{(m)}(t)$ die Anzahl der Erneuerungen des m-ten Prozesses ($m = 1, \dots, M$) bis zur Zeit t, so definieren wir die Anzahl $N_M(t)$ der *Ereignisse* des Überlagerungsprozesses durch

$$N_M(t) = \sum_{m=1}^{M} N^{(m)}(t). \tag{10}$$

Die zugehörigen Zeitpunkte $S_{n,M}$ der Ereignisse des Überlagerungsprozesses definieren wir durch

$$S_{n,M} = \min\bigl(t\colon N_M(t) = n\bigr), \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

und die Abstände $X_{n,M}$ der Ereignisse des Überlagerungsprozesses sind definiert durch

$$X_{n,M} = S_{n,M} - S_{n-1,M}, \qquad n = 1, 2, \dots; \qquad S_{0,M} = 0. \tag{12}$$

Für den Erwartungswert $E[N_M(t)]$ der Anzahl der Ereignisse des Überlagerungsprozesses folgt aus (10)

$$E[N_M(t)] = \sum_{m=1}^{M} H^{(m)}(t) \quad \text{mit} \quad H^{(m)}(t) = E[N^{(m)}(t)]. \tag{13}$$

1.3. Markierter Überlagerungsprozeß

Man kann die Erneuerungen eines Überlagerungsprozesses noch mit einer Markierung versehen, die angibt, zu welchem Einzelprozeß die Erneuerung gehört. Die Markierungen sind zufällige Größen, die die Werte $1, 2, \dots, M$ annehmen können. Der Überlagerungsprozeß wird dann durch die $S_{n,M}$ und die zugehörigen Markierungen vollständig beschrieben. Einen solchen Prozeß wollen wir einen markierten Überlagerungsprozeß nennen.

1.4. Poissonprozeß

Bei dem Problem der Überlagerung von Erneuerungsprozessen spielt der durch

$$F_1(x)=F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{für } x\geqq 0\\ 0 & \text{für } x\leqq 0\end{cases}$$

($\lambda>0$) definierte (stationäre) Poissonprozeß eine zentrale Rolle. Für den Poissonprozeß gilt

$$P\{N(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,e^{-\lambda t},\qquad n=0,1,\ldots;\qquad H(t)=\lambda t. \tag{14}$$

Ein Erneuerungsprozeß ist, wie man leicht zeigt, genau dann ein Poissonprozeß, wenn er gewöhnlich und stationär ist. Ein Punktprozeß ist bekanntlich [1] genau dann ein Poissonprozeß, wenn für jede endliche Menge von punktfremden Intervallen $(u_i, t_i]$, $i=1,\ldots,k$ gilt:

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{k}[N(t_i)-N(u_i)=n_i]\right\}=\prod_{i=1}^{k}\frac{[\lambda(t_i-u_i)]^{n_i}}{n_i!}\,e^{-\lambda(t_i-u_i)},$$
$$n_i=0,1,\ldots;\qquad \lambda>0.$$

Dagegen braucht, wie der Satz 1 des folgenden Abschnittes zeigt, ein Punktprozeß mit der Eigenschaft (14) kein Erneuerungsprozeß, also auch kein Poissonprozeß zu sein.

2. Die unzureichende Charakterisierung eines Punktprozesses durch die Verteilung von $N(t)$

Aus der Definition (4) von $N(t)$ ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen der Verteilungsfunktion von $N(t)$ und den Verteilungsfunktionen der S_n:

$$P\{N(t)\leqq n\}=P\{S_{n+1}>t\},\qquad n=0,1,\ldots. \tag{15}$$

Bei einem vorgegebenen Erneuerungsprozeß ist nun die Verteilung der S_n und damit nach (15) auch die Verteilung von $N(t)$ (für $0\leqq t<\infty$) eindeutig bestimmt. Umgekehrt folgt nach (15) auch die Verteilung der S_n eindeutig aus der Verteilung von $N(t)$ für $t\geqq 0$. Dagegen folgt aus der Vorgabe der Verteilung von $N(t)$ nicht, daß der Prozeß ein Erneuerungsprozeß ist. Hier gilt der

Satz 1. *Zu einem Erneuerungsprozeß mit der Anzahl $N(t)$ von Erneuerungen gibt es stets einen Punktprozeß, der nicht Erneuerungsprozeß ist und dessen Anzahl $N^*(t)$ von Ereignissen für $t\geqq 0$ dieselbe Verteilung wie $N(t)$ besitzt.*

Diesen Satz beweist man, indem man zeigt, daß sich eine von X_2 abhängige zufällige Größe X_3^* so angeben läßt, daß der durch $X_1, X_2, X_3^*, X_4, \ldots$ definierte Punktprozeß (der kein Erneuerungsprozeß ist) gerade die geforderte Eigenschaft hat.

Aus Satz 1 folgt speziell, daß ein Punktprozeß mit der Verteilung (14) für $N(t)$ kein Poissonprozeß zu sein braucht.

3. Hinreichende und notwendige Bedingungen für die Erneuerungseigenschaften eines Überlagerungsprozesses

3.1. Hinreichende Bedingung

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein Überlagerungsprozeß wieder Erneuerungsprozeß ist, läßt sich leicht angeben. Sind nämlich M unabhängige Poissonprozesse mit den Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$ gegeben, so ist der zugehörige Überlagerungsprozeß wieder ein Poissonprozeß mit dem Parameter $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_M$. Dies folgt leicht aus der Charakterisierung der Poissonprozesse durch die Verteilung der Anzahl der Erneuerungen in punktfremden Intervallen, die wir in 1.4 zitiert haben. Wir wollen zeigen, daß unter vernünftigen Bedingungen auch die Umkehrung gilt.

3.2. Notwendige Bedingungen

3.2.1. Überlagerung identischer Prozesse

Verhältnismäßig leicht ist die Umkehrung für einen Spezialfall zu beweisen. Es gilt

Satz 2. *Sind M unabhängige identische Erneuerungsprozesse gegeben mit $F_1(x) > 0$ für $x > 0$, so ist der zugehörige Überlagerungsprozeß nur dann ein Erneuerungsprozeß, wenn die Einzelprozesse (und damit auch der Überlagerungsprozeß) Poissonprozesse sind.*

(*Anmerkung:* Wird $F_1(x) > 0$ für $x > 0$ nicht gefordert, so liefert $F_1(x) = 1 - e^{-(x-1)}$ für $x \geqq 1$ und $F(x) = 1 - e^{-x}$ für $x \geqq 0$ ein Beispiel für einen Überlagerungsprozeß, der zwar Erneuerungsprozeß, aber kein Poissonprozeß ist.)

Beweis. Es sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ der Zeitpunkt der n-ten Erneuerung des Überlagerungsprozesses. Wegen der Unabhängigkeit der Einzelprozesse gilt

$$P\{X_1 \leqq y\} = 1 - [1 - F_1(y)]^M = M F_1(y) + o(F_1(y)) \tag{16}$$

und

$$P\{(X_1 \leqq y) \cap (X_2 > x)\} = M \int_0^y [1 - F(x)]\,[1 - F_1(z + x)]^{M-1}\, dF_1(z), \tag{17}$$

woraus

$$\frac{[1 - F_1(y + x)]^{M-1} F_1(y)}{F_1(y) + o(F_1(y))} \leqq \frac{P\{X_2 > x \mid X_1 \leqq y\}}{1 - F(x)} \leqq \frac{[1 - F_1(x)]^{M-1} F_1(y)}{F_1(y) + o(F_1(y))}$$

folgt. Mit $y \to 0$ streben beide Schranken gegen

$$[1 - F_1(x)]^{M-1}.$$

Da die X_n nach Voraussetzung unabhängig und für $n \geqq 2$ identisch verteilt sind, gilt also für alle $n \geqq 2$

$$P\{X_n > x\} = P\{X_2 > x \mid X_1 \leqq y\} = [1 - F(x)]\,[1 - F_1(x)]^{M-1}. \tag{18}$$

Nach (16) und (18) ist $P\{S_{M+1} \leqq x\} > 0$ für $x > 0$. Aus $S_{M+1} \leqq x$ folgt, daß für mindestens einen der Einzelprozesse der zweite Erneuerungsabstand $\leqq x$ sein muß. Also gilt $F(x) > 0$ für $x > 0$. Dann ist $F(x)$ nicht arithmetisch, d.h. keine Treppenfunktion, die nur bei ganzzahligen Vielfachen einer Größe $\beta > 0$ Sprungstellen hat. Aus dem Fundamentalsatz der Erneuerungstheorie folgt jetzt

$$\lim_{n \to \infty} P\{X_n > x\} = [1 - F(x)] \left[\frac{1}{\mu} \int_x^\infty [1 - F(y)]\, dy \right]^{M-1}$$

mit

$$\mu = \int_0^\infty [1 - F(y)]\, dy,$$

was zusammen mit der vorigen Gleichung

$$1 - F_1(x) = \frac{1}{\mu} \int_x^\infty [1 - F(y)]\, dy \tag{19}$$

liefert.

Wegen der Unabhängigkeit von X_1 und X_2 erhalten wir nun aus (16), (17), (18) und (19)

$$\begin{aligned} &M \int_0^y [1 - F(x)]\, [1 - F_1(z + x)]^{M-1} \frac{1}{\mu} [1 - F(z)]\, dz \\ &\quad = [1 - [1 - F_1(y)]^M]\, [1 - F(x)]\, [1 - F_1(x)]^{M-1}. \end{aligned}$$

Durch rechtsseitiges Differenzieren nach y folgt daraus, wenn wir x und y zunächst so klein wählen, daß weder $1 - F(x)$ noch $1 - F(y)$ verschwindet,

$$1 - F_1(x + y) = [1 - F_1(x)]\, [1 - F_1(y)]$$

und hieraus, wie man leicht zeigen kann, für beliebiges $x \geqq 0$

$$F_1(x) = 1 - e^{-x/\mu}.$$

Dabei ergibt sich die Konstante im Exponenten aus (vgl. (19))

$$\left. \frac{d}{dx} F_1(x) \right|_{x=0} = \frac{1}{\mu}.$$

Aus (19) folgt nun sofort durch Differenzieren

$$F(x) = 1 - \mu \frac{d}{dx} F_1(x) = 1 - e^{-x/\mu}.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

3.2.2. Überlagerung nicht identischer Prozesse

Setzt man die M Erneuerungsprozesse als *stationär* voraus, so gilt für $M = 2$, wie McFadden und Weißblum gezeigt haben [5], daß der Überlagerungsprozeß genau dann ein Erneuerungsprozeß ist, wenn beide Einzelprozesse Poissonprozesse sind. Dabei wird nur die Existenz der zweiten Momente der Erneuerungsabstände beider Prozesse vorausgesetzt. Für $M>2$ stationäre Erneuerungsprozesse erhält man das entsprechende Ergebnis, wenn man voraussetzt, daß die Verteilungsfunktionen der Erneuerungsabstände für alle M Prozesse in $[0, \infty)$ stetig differenzierbar sind (bei 0 rechtsseitig). Dies ist eine unmittelbare Konsequenz des folgenden Satzes von Mecke [6]:

Sind P_1 und P_3 stationäre Erneuerungsprozesse mit den angegebenen Differenzierbarkeitseigenschaften und P_2 ein von P_1 unabhängiger stationärer Punktprozeß der Art, daß P_3 die Überlagerung von P_1 und P_2 ist, so ist P_1 ein Poissonprozeß.

Setzt man nun für P_1 etwa den i-ten ($i=1, \ldots, M$) der gegebenen M Erneuerungsprozesse und für P_2 die Überlagerung der übrigen $M-1$ Erneuerungsprozesse ein, so sind die Voraussetzungen des Satzes von Mecke erfüllt, und der i-te Prozeß erweist sich als Poissonprozeß, was zu zeigen war.

Sieht man von der Voraussetzung der Stationarität der Prozesse und der Differenzierbarkeit der Verteilungsfunktionen ab, so kann man, wenn man den Überlagerungsprozeß als markierten Überlagerungsprozeß betrachtet, den folgenden Satz beweisen:

Satz 3. *Gegeben seien M unabhängige Erneuerungsprozesse mit den Verteilungsfunktionen $F_1^{(i)}(x)$, $F^{(i)}(x)$, $i=1, \ldots, M$. Die $F^{(i)}(x)$ seien nicht arithmetisch, und es sei $F_1^{(i)}(x) \neq 0$ für $x>0$, $i=1, \ldots, M$. Der zugehörige Überlagerungsprozeß sei ein Erneuerungsprozeß mit den Erneuerungsabständen $X_1, X_2, \ldots$. Für $n>1$ sei X_n unabhängig von den Markierungen der ersten $n-1$ Erneuerungen. Dann sind die Einzelprozesse (und damit der Überlagerungsprozeß) Poissonprozesse, d.h. es gilt*

$$F_1^{(i)}(x) = F^{(i)}(x) = 1 - e^{-x/\mu_i}.$$

Beweis. 1. Für $t>0$ sei $\tau_i(t)$ der Zeitpunkt der ersten i-Erneuerung (d.h. der ersten Erneuerung mit der Markierung i) nach t.

Für den Abstand $V_j[\tau_i(t)]$ bis zur ersten j-Erneuerung mit $j \neq i$ nach $\tau_i(t)$ gilt dann nach dem Fundamentalsatz der Erneuerungstheorie

$$\lim_{t \to \infty} P\{V_j[\tau_i(t)] > x\} = \int_x^\infty \frac{1 - F^{(j)}(y)}{\mu_j} \, dy$$

mit

$$\mu_j = \int_0^\infty [1 - F^{(j)}(y)] \, dy.$$

Für den im Punkt $\tau_i(t)$ beginnenden Erneuerungsabstand $Y[\tau_i(t)]$ gilt nach Voraussetzung, wenn wir mit $G_1(x)$ und $G(x)$ die zum Überlagerungsprozeß gehörenden Verteilungsfunktionen bezeichnen,

$$1 - G(x) = P\{Y[\tau_i(t)] > x\} = [1 - F^{(i)}(x)] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} P\{V_j[\tau_i(t)] > x\},$$

woraus durch den Grenzübergang $t \to \infty$

$$1-G(x)=[1-F^{(i)}(x)] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \int_{x}^{\infty} \frac{1-F^{(j)}(y)}{\mu_j}\, dy \tag{20}$$

folgt.

2. Es sei $\delta_j[\tau_i(t)]$, $j \neq i$ der Abstand von der letzten j-Erneuerung vor $\tau_i(t)$ bis zum Zeitpunkt $\tau_i(t)$. Dann gilt bei beliebigem $\varepsilon > 0$ für hinreichend großes t

$$P\left\{\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} (\delta_j[\tau_i(t)] \leqq \varepsilon)\right\} \neq 0.$$

Nach Voraussetzung ist $Y[\tau_i(t)]$ unabhängig von den $\delta_j[\tau_i(t)]$ nach $G(x)$ verteilt, also

$$1-G(x)=P\left\{Y[\tau_i(t)]>x \,\middle|\, \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} (\delta_j[\tau_i(t)] \leqq \varepsilon)\right\},$$

woraus die Abschätzung

$$[1-F^{(i)}(x)] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} [1-F^{(j)}(x+\varepsilon)] \leqq 1-G(x) \leqq [1-F^{(i)}(x)] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \frac{1-F^{(j)}(x)}{1-F^{(j)}(\varepsilon)}$$

und damit

$$1-G(x)=\prod_{j=1}^{M} [1-F^{(j)}(x)] \tag{21}$$

folgt.

3. Es ist $F^{(j)}(x)<1$ für alle x, $j=1, \ldots, M$. Aus der gegenteiligen Annahme folgt nämlich, daß es ein $x_1>0$ gibt mit $x_1=\min\left(x: F^{(j)}(x)=1\right)$. Wir betrachten die Intervalle

$$(t, t+\varepsilon), \qquad (t+\varepsilon, t+x_1), \qquad (t+x_1-\varepsilon, t+x_1) \quad \text{mit} \quad t>0,\ \varepsilon>0.$$

Aus dem Satz von Blackwell folgt, daß bei hinreichend großem t und fest vorgegebenem beliebig kleinem ε mit von Null verschiedener Wahrscheinlichkeit gilt: In $(t, t+\varepsilon)$ liegt mindestens eine, in $(t+\varepsilon, t+x_1)$ liegt keine j-Erneuerung; in $(t+x_1-\varepsilon, t+x_1)$ liegt mindestens eine i-Erneuerung mit $i \neq j$. Der auf diese i-Erneuerung folgende Erneuerungsabstand des Überlagerungsprozesses ist dann mit Wahrscheinlichkeit 1 kleiner als 2ε. Dann ist auch der Erwartungswert des Erneuerungsabstandes des Überlagerungsprozesses kleiner als 2ε für beliebiges $\varepsilon>0$, was nicht sein kann.

4. Zur Abkürzung führen wir jetzt die Bezeichnungen

$$\phi_i(x)=\frac{1-F^{(i)}(x)}{\int_{x}^{\infty} \frac{1-F^{(i)}(y)}{\mu_i}\, dy}, \qquad i=1, \ldots, M$$

ein. Nach (20) und (21) gilt dann

$$\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M} \phi_j(x)=1, \qquad \phi_i(x)>0, \qquad i=1,\dots,M$$

mit der eindeutigen Lösung

$$\phi_i(x)\equiv 1, \qquad i=1,\dots,M.$$

Also genügt $1-F^{(i)}(x)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}[1-F^{(i)}(x)]=-\frac{1}{\mu_i}[1-F^{(i)}(x)]$$

mit der Anfangsbedingung $1-F^{(i)}(x)=1$, woraus

$$F^{(i)}(x)=1-e^{-x/\mu_i} \tag{22}$$

folgt.

5. Wir betrachten die Verteilung von X_2 unter der Bedingung, daß $X_1<\varepsilon$ ist und die erste Erneuerung die Markierung i hat. Nach Voraussetzung gilt (mit (21) und (22))

$$P\{X_2>x|(X_1<\varepsilon)\cap(X_1=X_1^{(i)})\}=1-G(x)=e^{-x\sum_{j=1}^{M}1/\mu_j}$$

mit der Abschätzung

$$e^{-x/\mu_i}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M}[1-F_1^{(j)}(x+\varepsilon)]\leqq e^{-x\sum_{j=1}^{M}1/\mu_j}\leqq e^{-x/\mu_i}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M}\frac{1-F_1^{(j)}(x)}{1-F_1^{(j)}(\varepsilon)},$$

woraus

$$\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M}[1-F_1^{(j)}(x)]=\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M}e^{-x/\mu_j}, \qquad i=1,\dots,M$$

und damit

$$F_1^{(i)}(x)=1-e^{-x/\mu_i}, \qquad i=1,\dots,M$$

folgt. Damit ist Satz 3 bewiesen.

4. Ein Grenzwertsatz für Überlagerungsprozesse

Bei der Überlagerung unabhängiger Erneuerungsprozesse entsteht im allgemeinen kein Erneuerungsprozeß. Der Satz 3 sagt sogar aus, daß aus der Forderung der Erneuerungseigenschaft für den Überlagerungsprozeß unter ziemlich weiten Voraussetzungen folgt, daß die Einzelprozesse Poissonprozesse, also Prozesse sehr spezieller Natur sein müssen.

Nun kann man aber zeigen, daß bei der Überlagerung sehr vieler Einzelprozesse sich für den Überlagerungsprozeß Eigenschaften ergeben können, die denen des Poissonprozesses nahe kommen. Wir müssen uns dazu nur darauf beschränken, das Verhalten des Überlagerungsprozesses in geeigneter Weise als zeitlich lokales Verhalten zu beschreiben. Anschaulich bedeutet das, daß man einen Zeitraum bzw. eine Folge von Zeiträumen betrachtet, in denen die mittlere Anzahl der Erneuerungen des Überlagerungsprozesses bzw. der entsprechenden Folge von Überlagerungsprozessen beschränkt bleibt.

4.1. Der Grenzwertsatz

Wir betrachten eine Doppelfolge $P_{11}, \ldots, P_{1r_1}; P_{21}, \ldots, P_{2r_2}; \ldots$ von Erneuerungsprozessen mit unabhängigen $P_{n1}, \ldots, P_{nr_n}$, $n=1, 2, \ldots$.

Der Prozeß P_{nm} werde repräsentiert durch die unabhängigen zufälligen Größen $X_1^{(nm)}, X_2^{(nm)}, \ldots$. Die Verteilungsfunktion von $X_1^{(nm)}$ sei $F_1^{(nm)}(x)$, während $X_2^{(nm)}$, $X_3^{(nm)}, \ldots$ identisch nach der Verteilungsfunktion $F^{(nm)}(x)$ verteilt sind. Die zugehörige Erneuerungsfunktion sei $H^{(nm)}(x)$, während $\tilde{H}^{(nm)}(x)$ die zu dem gewöhnlichen Erneuerungsprozeß mit der Verteilungsfunktion $F^{(nm)}(x)$ gehörige Erneuerungsfunktion bezeichne.

Weiter betrachten wir bei festem k eine Folge von Intervalleinteilungen

$$0 \leqq u_1^{(n)} < t_1^{(n)} \leqq \cdots \leqq u_k^{(n)} < t_k^{(n)}; \qquad n=1, 2, \ldots.$$

Mit $H_n(x)$ bezeichnen wir die „Erneuerungsfunktion" des aus $P_{n1}, \ldots, P_{nr_n}$ durch Überlagerung entstehenden Prozesses P_n:

$$H_n(x) = \sum_{m=1}^{r_n} H^{(nm)}(x).$$

Mit $M_i^{(n)}$ bezeichnen wir die Anzahl der Punkte des Überlagerungsprozesses P_n im Intervall $(u_i^{(n)}, t_i^{(n)}]$. Dann gilt für die gemeinsame Verteilung der $M_i^{(n)}$ der folgende

Satz 4 (Grenzwertsatz). *Aus den Bedingungen*

I. $\lim\limits_{n\to\infty} [H_n(t_i^{(n)}) - H_n(u_i^{(n)})] = \lambda_i, \; i=1, \ldots, k;$

II. $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leqq m\leqq r_n} [H^{(nm)}(t_i^{(n)}) - H^{(nm)}(u_i^{(n)})] = 0, \; i=1, \ldots, k;$

III. $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leqq m\leqq r_n} \sup\limits_{u_j < t \leqq t_j} [\tilde{H}^{(nm)}(t_i^{(n)} - t) - \tilde{H}^{(nm)}(u_i^{(n)} - t)] = 0, \; i, j = 1, \ldots, k \, (j \leqq i)$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\bigcap_{i=1}^{k} [M_i^{(n)} = m_i]\right\} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i^{m_i}}{m_i!} e^{-\lambda_i}.$$

Für die Allgemeinheit des Satzes ist wesentlich, daß Bedingung I keine Vorschrift über die Art des Grenzüberganges macht. Der Grenzübergang kann sich also sowohl auf das Verhalten der Einzelprozesse als auch auf das Verhalten der Intervalle beziehen. Durch Spezialisierung ergeben sich verschiedene, auch für die Anwendung interessante Fälle.

Die Bedingungen II und III sorgen dafür, daß jeweils die Anteile, die die Einzelprozesse zur Überlagerung beitragen, hinreichend klein werden.

4.2. Folgerungen aus Satz 4

Aus dem Satz 4 ergeben sich, wie man ohne große Mühe zeigen kann, die folgenden vier Sätze.

4.2.1. Stationäre Erneuerungsprozesse

4.2.1.1. Feste Intervalleinteilung. Die Intervalle $(u_i^{(n)}, t_i^{(n)})$, $i=1, \dots, k$; $n=1, 2, \dots$ seien jetzt unabhängig vom Index n der Prozeßfolge:

$$u_i^{(n)}=u_i, \qquad t_i^{(n)}=t_i, \qquad i=1, \dots, k \qquad \text{für alle } n \geqq 1.$$

Alle Erneuerungsprozesse P_{nm} seien weiter stationär:

$$H^{(nm)}(x)=h^{(nm)}\, x$$

mit positiven Konstanten $h^{(n.n)}$ (Erneuerungsdichten).

Dann gilt der folgende

Satz 4.1 (Khintchine, 1960 [4]). *Aus den Bedingungen*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{r_n} h^{(nm)}=h.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leqq m\leqq r_n} h^{(nm)}=0.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leqq m\leqq r_n} F^{(nm)}(x)=0$ *für beliebiges festes x folgt*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\bigcap_{i=1}^{k} (M_i^{(n)}=m_i)\right\}=\prod_{i=1}^{k} \frac{h(t_i-u_i)^{m_i}}{m_i!}\, e^{-h(t_i-u_i)}.$$

Dieser Satz folgt aus einem allgemeineren Satz von Khintchine durch Spezialisierung auf Erneuerungsprozesse.

4.2.1.2. Intervalleinteilung von n abhängig. Wir können die Bedingung, daß die Erneuerungsdichten der Einzelprozesse mit wachsendem n gegen 0 streben müssen, fallen lassen, wenn wir die Intervalle geeignet von den Erneuerungsdichten

$$h_n=\sum_{m=1}^{r_n} h^{(nm)}$$

der Überlagerungsprozesse P_n abhängen lassen. Wir bekommen dann eine Aussage über das lokale Poissonsche Verhalten der Überlagerungsprozesse.

Einen für die praktische Anwendung wichtigen Spezialfall erhalten wir durch die Festsetzung

$$u_i^{(n)}=u_i,\ t_i^{(n)}=u_i+\frac{\lambda_i}{h_n}.$$

Wir erhalten

Satz 4.2. *Die folgenden Bedingungen seien erfüllt:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} h_n=\infty.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leqq m\leqq r_n} \dfrac{h^{(nm)}}{h_n}=0.$
3. *Für ein beliebiges festes $\varepsilon>0$ existieren im Intervall $0\leqq t\leqq u_k+\varepsilon-u_1$ die Erneuerungsdichten $\tilde{h}_{nm}(t)=\tilde{H}'_{nm}(t)$ und sind dort beschränkt:*

$$\sup_{0\leqq t\leqq u_k+\varepsilon-u_1} \tilde{h}_{nm}(t)\leqq C \qquad \textit{für } m=1, \dots, n; \qquad n=1, 2, \dots.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\bigcap_{i=1}^{k} (M_i^{(n)}=m_i)\right\} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i^{m_i}}{m_i!} e^{-\lambda_i}.$$

Der Satz 4.2 gewinnt praktische Bedeutung, wenn man die Erneuerungen des Überlagerungsprozesses als Ausfälle von Bauelementen einer großen technischen Anlage deutet. Jedes ausgefallene Bauelement wird sofort durch ein neues ersetzt. Ein Einzelprozeß ist durch die Ausfälle eines Bauelementes und aller seiner Nachfolger bestimmt.

4.2.2. Nicht stationäre Erneuerungsprozesse

4.2.2.1. Feste Intervalleinteilung.

Satz 4.3 (Franken, 1963 [2]). *Es sei die gleiche feste Intervalleinteilung vorgegeben wie in 4.2.1.1. Weiter seien für beliebiges $t>0$ folgende Bedingungen erfüllt:*

1. $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq m\leq r_n} F_1^{(nm)}(t)=0.$
2. $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq m\leq r_n} F^{(nm)}(t)=0.$
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{r_n} F_1^{(nm)}(t)=\lambda(t).$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\bigcap_{i=1}^{k} (M_i^{(n)}=m_i)\right\} = \prod_{i=1}^{k} \frac{[\lambda(t_i)-\lambda(u_i)]^{m_i}}{m_i!} e^{-[\lambda(t_i)-\lambda(u_i)]}.$$

Wir bemerken, daß die in der Behauptung von Satz 4.3 auftretende Funktion $\lambda(t)$ nur von den Verteilungsfunktionen $F_1^{(nm)}(t)$, dagegen nicht von den Funktionen $F^{(nm)}(t)$ bestimmt wird.

Im folgenden betrachten wir einen Fall, bei dem die Funktionen $F^{(nm)}(t)$ bzw. $\tilde{H}^{(nm)}(t)$ die Aussage wesentlich mitbestimmen.

4.2.2.2. Intervalleinteilung von n abhängig. Statt der Intervallfolge $(u_i^{(n)}, t_i^{(n)}]$ betrachten wir jetzt eine Doppelfolge $(u_{\rho\sigma}^{(n)}, t_{\rho\sigma}^{(n)}]$,

$$\rho=1,\dots,r; \qquad \sigma=1,\dots,k_\rho \left(\text{also } k=\sum_{\rho=1}^{r} k_\rho\right).$$

Weiter nehmen wir an, daß die Erneuerungsdichten

$$h^{(nm)}(t)=\frac{dH^{(nm)}(t)}{dt} \quad \text{und} \quad \tilde{h}^{(nm)}(t)=\frac{d\tilde{H}^{(nm)}(t)}{dt}$$

existieren. Bei fest vorgegebenen Werten $0<u_1<\cdots<u_r$ und $x_{\rho 1}<x_{\rho 2}<\cdots<x_{\rho k_\rho}$, $\rho=1,\dots,r$ definieren wir jetzt die $u_{\rho\sigma}^{(n)}$ und $t_{\rho\sigma}^{(n)}$ durch

$$u_{\rho\sigma}^{(n)}=u_\rho+\frac{x_{\rho\sigma}}{h_n(u_\rho)}, \qquad t_{\rho\sigma}^{(n)}=u_{\rho\sigma}^{(n)}+\frac{\lambda_{\rho\sigma}}{h_n(u_\rho)} \quad (h_n(u_\rho)\neq 0)$$

mit festem $\lambda_{\rho\sigma}>0$ und $h_n(t)=\sum_{m=1}^{r_n} h^{(nm)}(t)$.

Für hinreichend großes n mögen alle Intervalle $(u_{\rho\sigma}^{(n)}, t_{\rho\sigma}^{(n)}]$ disjunkt sein. Dann gilt der folgende

Satz 4.4. *Aus den Bedingungen*

$$1.\ \lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqq x\leqq y_\rho} \left| \frac{h_n\left(u_\rho + \frac{x}{h_n(u_\rho)}\right)}{h_n(u_\rho)} - 1 \right| = 0, \qquad \rho = 1, \ldots, r$$

mit $y_\rho = x_{\rho k_\rho} + \lambda_{\rho k_\rho}$.

$$2.\ \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq m\leqq r_n} \sup_{0\leqq x\leqq y_\rho} \frac{h^{(nm)}\left(u_\rho + \frac{x}{h_n(u_\rho)}\right)}{h_n(u_\rho)} = 0, \qquad \rho = 1, \ldots, r.$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq m\leqq r_n} \sup_{\substack{0\leqq x\leqq y_\rho\\ 0\leqq y\leqq y_{\rho'}}} \frac{\tilde{h}^{(nm)}\left(u_\rho - u_{\rho'} + \frac{x}{h_n(u_\rho)} - \frac{y}{h_n(u_{\rho'})}\right)}{h_n(u_\rho)} = 0,$$
$$\rho, \rho' = 1, \ldots, r;\ \rho' < \rho.$$

$$4.\ \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq m\leqq r_n} \tilde{H}^{(nm)}\left(\frac{y_\rho}{h_n(u_\rho)}\right) = 0, \qquad \rho = 1, \ldots, r$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} P\{\bigcap_{\substack{\rho=1,\ldots,r\\ \sigma=1,\ldots,k_\rho}} (M_{\rho\sigma}^{(n)} = m_{\rho\sigma})\} = \prod_{\substack{\rho=1,\ldots,r\\ \sigma=1,\ldots,k_\rho}} \frac{\lambda_{\rho\sigma}^{m_{\rho\sigma}}}{m_{\rho\sigma}!} e^{-\lambda_{\rho\sigma}}.$$

Die Bedingungen 1. bis 4. sind z.B. für den praktisch wichtigen Fall erfüllt, daß unter den Prozessen $P^{(nm)}$ nur endlich viele verschiedene Prozesse $P^{(1)}, \ldots, P^{(N)}$ mit $h^{(i)}(t) = \tilde{h}^{(i)}(t)$ vorkommen und wenn die $h^{(i)}(t)$ für $x > 0$ positiv und stetig sind. Die Erneuerungen lassen sich dann z.B. deuten als die Bauelemente-Ausfälle einer großen Anlage (mit N Bauelemente-Arten). Jedes Bauelement wird sofort ersetzt. Der Satz 4.4 besagt in diesem Fall, daß der Ausfallprozeß sich lokal, nämlich in den Umgebungen von $u_1, \ldots, u_r$, wie ein Poissonprozeß verhält. Man kann also die lokale Ausfallhäufigkeit (Erneuerungsdichte) der Anlage mit einem Test für den Parameter einer Poissonverteilung prüfen.

4.3. Beweis des Grenzwertsatzes

4.3.1.

Wir betrachten den Prozeß $P^{(nm)}$ und lassen in diesem Abschnitt zur Vereinfachung der Schreibweise die Indizes n und m fort. Zunächst beweisen wir folgende

Ungleichungen:

$$1-P\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i=0\right\} \leqq \sum_{i=1}^{k}[H(t_i)-H(u_i)]+P\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \geqq 2\right\}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}[1-F(t_i-u_i)][H(t_i)-H(u_i)]-P\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \geqq 2\right\} \\ \leqq P\left\{(M_i=1) \cap \bigcap_{j \neq i}(M_j=0)\right\} \leqq H(t_i)-H(u_i),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}P\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \geqq 2\right\} \leqq \sum_{i=1}^{k} F(t_i-u_i)[H(t_i)-H(u_i)] \\ +\sum_{\substack{j=1 \\ i>j}}^{k-1}[H(t_j)-H(u_j)] \sup_{u_j \leqq t \leqq t_j}[\tilde{H}(t_i-t)-\tilde{H}(u_i-t)].\end{aligned} \tag{25}$$

4.3.1.1. Beweis von (25). Wegen

$$\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \geqq 2\right\}=\bigcup_{i=1}^{k}\{M_i \geqq 2\} \cup \bigcup_{i>j}\{(M_i \geqq 1) \cap(M_j \geqq 1)\}$$

ist

$$P\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \geqq 2\right\} \leqq \sum_{i=1}^{k} P\{M_i \geqq 2\}+\sum_{\substack{j=1 \\ i>j}}^{k-1} P\{(M_i \geqq 1) \cap(M_j \geqq 1)\}. \tag{26}$$

Für die Wahrscheinlichkeit $P\{M_i \geqq m\}$ gilt die Beziehung [2]

$$P\{M_i \geqq m\}=\int_{u_i}^{t_i}[F^{(m-1)}(t_i-x)-F^{(m)}(t_i-x)]\, dH(x)$$

mit

$$F^{(m-1)}(x)=\int_0^x F^{(m)}(x-y)\, dF(y), \qquad F^{(0)}(x) \equiv 1.$$

Hieraus folgt sofort

$$P\{M_i \geqq 2\}=\int_{u_i}^{t_i} F(t_i-x)\, dH(x) \leqq F(t_i-u_i)[H(t_i)-H(u_i)]. \tag{27}$$

Weiter gilt

$$P\{(M_i \geqq 1) \cap(M_j \geqq 1)\}=P\{M_j \geqq 1\}\, P\{M_i \geqq 1 \mid M_j \geqq 1\}.$$

Aus

$$P\{M_j \geqq 1\}=\int_{u_j}^{t_j}[1-F(t_j-x)]\, dH(x)$$

folgt

$$[1-F(t_j-u_j)][H(t_j)-H(u_j)] \leqq P\{M_j \geqq 1\} \leqq H(t_j)-H(u_j), \tag{28}$$

und für $P\{M_i \geqq 1 \mid M_j \geqq 1\}$ gilt

$$\begin{aligned}P\{M_i \geqq 1 \mid M_j \geqq 1\} &\leqq \sup_{u_j \leqq t \leqq t_j} \int_{u_i-t}^{t_i-t}[1-F(t_i-t-x)]\, d\tilde{H}(x) \\ &\leqq \sup_{u_j \leqq t \leqq t_j}[\tilde{H}(t_i-t)-\tilde{H}(u_i-t)].\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$P\{(M_i \geqq 1) \cap (M_j \geqq 1)\} \leqq [H(t_j) - H(u_j)] \sup_{u_j \leqq t \leqq t_j} [\tilde{H}(t_i - t) - \tilde{H}(u_i - t)]. \tag{29}$$

Aus (26), (27) und (29) folgt (25).

4.3.1.2. Beweis von (24). Aus

$$\{M_i \geqq 1\} = \Big\{(M_i = 1) \cap \bigcap_{j \neq i} (M_j = 0)\Big\} \cup \Big\{(M_i \geqq 1) \cap \Big(\sum_{j=1}^{k} M_j \geqq 2\Big)\Big\}$$

und

$$\Big\{(M_i \geqq 1) \cap \Big(\sum_{j=1}^{k} M_j \geqq 2\Big)\Big\} \subset \Big\{\sum_{j=1}^{k} M_j \geqq 2\Big\}$$

folgt

$$P\{M_i \geqq 1\} \leqq P\Big\{(M_i \geqq 1) \cap \bigcap_{j \neq i} (M_j = 0)\Big\} + P\Big\{\sum_{j=1}^{k} M_j \geqq 2\Big\}. \tag{30}$$

Ferner ist

$$\Big\{(M_i = 1) \cap \bigcap_{j \neq i} (M_j = 0)\Big\} \subset \{M_i \geqq 1\},$$

also

$$P\Big\{(M_i = 1) \cap \bigcap_{j \neq i} (M_j = 0)\Big\} \leqq P\{M_i \geqq 1\}. \tag{31}$$

Aus (28) (mit $j = i$), (30) und (31) folgt (24).

4.3.1.3. Beweis von (23). Aus

$$P\Big\{\sum_{i=1}^{k} M_i = 0\Big\} + \sum_{i=1}^{k} P\Big\{(M_i = 1) \cap \bigcap_{j \neq i} (M_j = 0)\Big\} + P\Big\{\sum_{i=1}^{k} M_i \geqq 2\Big\} = 1$$

folgt mit (24) sofort (23).

4.3.2.

Zum Beweis von Satz 4 mit Hilfe der Ungleichungen (23) bis (25) benutzen wir den folgenden *Satz*, der aus einem allgemeinen *Satz von* Rwatschowa [3] folgt:

Für die Gültigkeit der Behauptung von Satz 4 *sind unter der Voraussetzung*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{m} \Big[1 - P\Big\{\sum_{i=1}^{k} M_i^{(nm)} = 0\Big\}\Big] = 0 \tag{32}$$

folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{r_n} P\Big\{(M_i^{(nm)} = 1) \cap \bigcap_{j \neq i} (M_j^{(nm)} = 0)\Big\} = \lambda_i, \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{33}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{r_n} P\Big\{\sum_{i=1}^{k} M_i^{(nm)} \geqq 2\Big\} = 0. \tag{34}$$

Wir haben also noch zu zeigen, daß aus den Bedingungen I–III des Satzes 4 die Beziehungen (32), (33) und (34) folgen.

4.3.2.1. Aus I und III folgt mit der Ungleichung (25) – wir führen jetzt die Indizes n und m wieder ein – die Beziehung (34):

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{r_n} P\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i^{(nm)} \geqq 2\right\} \\
&\leqq \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{r_n} F^{(nm)}(t_i^{(n)}-u_i^{(n)})[H^{(nm)}(t_i)-H^{(nm)}(u_i)] \\
&\quad + \sum_{\substack{j=1\\ i>j}}^{k-1} \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{r_n} [H^{(nm)}(t_j^{(n)})-H^{(nm)}(u_j^{(n)})] \sup_{u_j^{(n)}\leqq t\leqq t_j^{(n)}} [\tilde{H}^{(nm)}(t_i^{(n)}-t)-\tilde{H}^{(nm)}(u_i^{(n)}-t)] \\
&\leqq \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \left\{\max_{1\leqq m\leqq r_n} F^{(nm)}(t_i^{(n)}-u_i^{(n)})[H_n(t_i^{(n)})-H_n(u_i^{(r)})]\right\} \\
&\quad + \sum_{\substack{j=1\\ i>j}}^{k-1} \lim_{n\to\infty} \left\{\max_{1\leqq m\leqq r_n} \sup_{u_j^{(n)}\leqq t\leqq t_j^{(n)}} [\tilde{H}^{(nm)}(t_i^{(n)}-t)-\tilde{H}^{(nm)}(u_i^{(n)}-t)][H_n(t_j^{(n)})-H_n(u_j^{(n)})]\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left\{\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq m\leqq r_n} F^{(nm)}(t_i^{(n)}-u_i^{(n)})\right\} \left\{\lim_{n\to\infty} [H_n(t_i^{(n)})-H_n(u_i^{(n)})]\right\} \\
&\quad + \sum_{\substack{j=1\\ i>j}}^{k-1} \left\{\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq m\leqq r_n} \sup_{u_j^{(n)}\leqq t\leqq t_j^{(n)}} [\tilde{H}^{(nm)}(t_i^{(n)}-t)-\tilde{H}^{(nm)}(u_i^{(n)}-t)]\right. \\
&\quad \cdot \left.\left\{\lim_{n\to\infty} [H_n(t_j^{(n)})-H_n(u_j^{(n)})]\right\}=0.\right.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir von der Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq m\leqq r_n} F^{(nm)}(t_i^{(n)}-u_i^{(n)})=0 \tag{35}$$

Gebrauch gemacht, die wegen $F^{(nm)}(x)\leqq\tilde{H}^{(nm)}(x)$ aus III mit $j=i$ folgt.

4.3.2.2. Die Beziehung (32) folgt nun aus II und (34) mit der Ungleichung (23):

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq m\leqq r_n} \left[1-P\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i^{(nm)}=0\right\}\right] \\
&\leqq \lim_{n\to\infty} \left\{\max_{1\leqq m\leqq r_n} \sum_{i=1}^{k} [H^{(nm)}(t_i^{(n)})-H^{(nm)}(u_i^{(n)})] + \max_{1\leqq m\leqq r_n} P\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i^{(nm)}\geqq 2\right\}\right\} \\
&\leqq \lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{i=1}^{k} \max_{1\leqq m\leqq r_n} [H^{(nm)}(t_i^{(n)})-H^{(nm)}(u_i^{(n)})] + \sum_{m=1}^{r_n} P\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i^{(nm)}\geqq 2\right\}\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq m\leqq r_n} [H^{(nm)}(t_i^{(n)})-H^{(nm)}(u_i^{(n)})] + \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{r_n} P\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i^{(nm)}\geqq 2\right\}=0.
\end{aligned}$$

4.3.2.3. Die Beziehung (33) folgt aus I, II und (34) mit der Ungleichung (24): Aus der rechten Seite von (24) folgt mit II

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{r_n} P\left\{(M_i^{(nm)}=1)\cap \bigcap_{j\neq i} (M_j^{(nm)}=0)\right\} \\
&\leqq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{r_n} [H^{(nm)}(t_i^{(n)})-H^{(nm)}(u_i^{(n)})] = \lim_{n\to\infty} [H_n(t_i^{(n)})-H_n(u_i^{(n)})]=\lambda_i.
\end{aligned}$$

Aus der linken Seite von (24) folgt mit I, (34) und (35)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{r_n} P\{(M_i^{(nm)}=1)\cap \bigcap_{j\neq i}(M_j^{(nm)}=0)\}\\
&\geqq \lambda_i - \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{r_n} F^{(nm)}(t_i^{(n)}-u_i^{(n)})\,[H^{(nm)}(t_i^{(n)})-H^{(nm)}(u_i^{(n)})]\\
&\quad - \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{r_n} P\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i^{(nm)} \geqq 2\right\} \geqq \lambda_i - \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq m\leqq r_n} F^{(nm)}(t_i^{(n)}-u_i^{(n)})\,\lambda_i = \lambda_i .
\end{aligned}$$

Aus beiden Abschätzungen folgt (33).

Literatur

1. Doob, J. L.: Stochastic processes. New York: Wiley 1953.
2. Franken, P.: Approximation durch Poissonsche Prozesse. Math. Nachr. **26**, 101–114 (1963).
3. Gnedenko, B. W., u. A. N. Kolmogoroff: Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Berlin: Akademie-Verlag 1959.
4. Khintchine, A. Y.: Mathematical methods in the theory of queuing. London: Griffin 1960.
5. McFadden, J. A., and W. Weißblum: Higher-order properties of a stationary point process. J. roy. statist. Soc. Ser. B **25**, 413–431 (1963).
6. Mecke, J.: Zum Problem der Zerlegbarkeit stationärer rekurrenter zufälliger Punktfolgen. Math. Nachr. **35**, 311–321 (1967).

Dr. Horand Störmer
8035 Buchendorf
Post Gauting 2
Münchener Str. 41

(Eingegangen am 14. Juni 1968)