Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 9, 36–58 (1967)

Stationäre zufällige Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen

J. Mecke

Eingegangen am 6. März 1967

Zusammenfassung. Als ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung stationärer zufälliger Maße auf einer lokalkompakten Abelschen Gruppe G wird in Abschnitt 2 der vorliegenden Arbeit das Palmsche Maß eines stationären zufälligen Maßes eingeführt. Dieser Begriff wurde durch eine sinngemäße Verallgemeinerung des Palmschen Maßes einer stationären zufälligen Punktfolge auf der reellen Achse gewonnen ([6], [11], [13], [14]). Die in Abschnitt 2 entwickelte Theorie ist insbesondere auf den Spezialfall der stationären zufälligen Punktfolgen auf dem R^n anwendbar ($G = R^n$. Mit Wahrscheinlichkeit 1 kommen nur ganzzahlige Maße auf G vor).

In Abschnitt 5 wird eine spezielle Klasse zufälliger Maße auf G untersucht. Zu ihrer Konstruktion benötigt man den Begriff des Poissonschen Prozesses mit vorgegebener Intensitätsverteilung auf einem beliebigen meßbaren Raum, der in Abschnitt 3 eingeführt wird (vgl. [12]).

Aus der Konstruktion der zufälligen Maße, die in Abschnitt 5 untersucht werden, ist sofort zu ersehen, daß sie unbegrenzt teilbar sind. Auf die Möglichkeit, die unbegrenzt teilbaren zufälligen Maße in dieser Weise darzustellen, wurde bereits in der Dissertation [7] hingewiesen. In Abschnitt 6 wird der Nachweis geführt, daß die Klasse der in Abschnitt 5 betrachteten zufälligen Maße bereits alle stationären unbegrenzt teilbaren zufälligen Maße umfaßt.

Die stationären Poissonschen Prozesse auf G als spezielle unbegrenzt teilbare stationäre zufällige Maße werden, da sie ein besonderes Interesse verdienen, bereits in Abschnitt 4 behandelt.

Mit Hilfe des Palmschen Maßes kann eine interessante Charakterisierung der unbegrenzt teilbaren stationären zufälligen Maße auf G gegeben werden (s. Satz 6.1), die das eigentliche Anliegen der Arbeit bildet. Im Spezialfall der zufälligen Punktfolgen ohne Mehrfachpunkte auf der reellen Achse wurde der entsprechende Satz schon von Kerstan und Matthes [6] als Verallgemeinerung eines Satzes von Sliwnjak für stationäre Poissonsche Punktfolgen auf der reellen Achse gewonnen (Satz 4.1 für $G = R^1$). Unabhängig davon hat sich Ambarzumjan [1] mit dem entsprechenden Problem für zufällige Punktfolgen auf dem R^n beschäftigt.

Satz 3.1 kann als Verallgemeinerung des ursprünglichen Satzes von Sliwnjak in anderer Hinsicht aufgefaßt werden, und zwar in Richtung des Übergangs von der reellen Achse zu einem beliebigen meßbaren Raum (wo von Stationarität zufälliger Punktfolgen keine Rede mehr ist).

Die Charakterisierung der unbegrenzt teilbaren zufälligen Maße mit Hilfe des Laplaceschen Funktionals (Formel (5.5) mit (5.1)) findet sich bereits bei Lee in [7] (auf allgemeineren Räumen als G), im Spezialfall zufälliger endlicher Maße auf R^1 auch bei Jiřina [4].

1. Grundbegriffe

Es sei G eine lokalkompakte Abelsche Gruppe, bei der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist. G ist dann insbesondere σ-kompakt. Die Gruppenoperation schreiben wir als Addition. Mit $\mathfrak{G}$ werde die σ-Algebra der Borelmengen von G bezeichnet. Sie wird bereits von dem System $\mathfrak{C}$ der kompakten Teilmengen von G erzeugt. Es sei M die Menge der Maße Φ auf $[G, \mathfrak{G}]$ mit der Eigenschaft, daß $\Phi(C) < \infty$ ist für alle $C \in \mathfrak{C}$. Die Maße Φ sind dann insbesondere σ-endlich. Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir die kleinste σ-Algebra von Teilmengen aus M, bez. der alle Funktionen $z_B(\Phi) = \Phi(B)$ ($B \in \mathfrak{G}$) meßbar sind. Diese σ-Algebra ist umfassend genug, so daß alle Operationen, die in den folgenden Untersuchungen auf meßbare Funktionen angewendet werden, wieder meßbare Funktionen liefern (siehe Anhang).

Unter einem zufälligen Maß auf $[G, \mathfrak{G}]$ versteht man ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf dem meßbaren Raum $[M, \mathfrak{M}]$. Aus Gründen, die später deutlich werden, betrachten wir allgemeiner σ-endliche Maße P auf $[M, \mathfrak{M}]$.

Mit $F(G)$, $F(M)$, $F(G \times M)$, $F(G \times G \times M)$ sollen bzw. die Mengen der auf $[G, \mathfrak{G}]$, $[M, \mathfrak{M}]$, $[G, \mathfrak{G}] \times [M, \mathfrak{M}]$, $[G, \mathfrak{G}] \times [G, \mathfrak{G}] \times [M, \mathfrak{M}]$ meßbaren, nichtnegativen Funktionen bezeichnet werden ($+\infty$ wird als Funktionswert zugelassen).

Für jedes $s \in G$ definieren wir einen Automorphismus T_s des meßbaren Raumes $[M, \mathfrak{M}]$:

$$(T_s \Phi)(B) = \Phi(B + s) \quad (B \in \mathfrak{G}). \tag{1.1}$$

Daraus folgt für jede Funktion $f \in F(M)$:

$$\int f(t)\,(T_s \Phi)(dt) = \int f(t - s)\,\Phi(dt). \tag{1.1'}$$

Die Automorphismen T_s bilden eine zu G homomorphe Gruppe $\tilde{G}$: $T_{s+t} = T_s T_t$. Das σ-endliche Maß P auf $[M, \mathfrak{M}]$ heißt *stationär*, wenn es gegenüber $\tilde{G}$ invariant ist, d. h. wenn

$$P(T_s A) = P(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{M}, \quad s \in G \tag{1.2}$$

gilt. Insbesondere sprechen wir von einem *stationären zufälligen Maß auf* $[G, \mathfrak{G}]$, wenn das *Wahrscheinlichkeitsmaß* P auf $[M, \mathfrak{M}]$ stationär ist. Die Bedingung (1.2) ist gleichbedeutend damit, daß für alle $u \in F(M)$ und alle $s \in G$ gilt:

$$\int u(T_s \Phi)\,P(d\Phi) = \int u(\Phi)\,P(d\Phi). \tag{1.2'}$$

In dem Spezialfall, wenn $[G, \mathfrak{G}]$ die reelle Achse mit ihren Borelmengen bedeutet, und das Wahrscheinlichkeitsmaß P auf der Menge der ganzzahligen $\Phi \in M$ konzentriert ist, sprechen wir von einem *Punktprozeß* oder einer *zufälligen Punktfolge*. Als ein wesentliches Hilfsmittel zur Untersuchung der stationären zufälligen Punktfolgen hat sich das sogenannte *Palmsche Maß* (siehe [6], [11]) erwiesen. Insbesondere kann mit seiner Hilfe eine Charakterisierung der stationären Poissonschen zufälligen Punktfolgen gegeben werden, die den Inhalt eines Satzes von Sliwnjak [14] ausmacht. Als Verallgemeinerung dieses Satzes haben Kerstan und Matthes eine ähnliche Charakterisierung für die unbegrenzt teilbaren stationären zufälligen Punktfolgen gefunden [6]. In der vorliegenden Arbeit sollen u. a. diese Sätze auf stationäre zufällige Maße über $[G, \mathfrak{G}]$ übertragen werden.

Im folgenden Abschnitt wird jedem stationären σ-endlichen Maß P auf $[M, \mathfrak{M}]$ ein σ-endliches Maß P^0 über dem gleichen meßbaren Raum zugeordnet. Im Spezialfall der stationären zufälligen Punktfolgen P fällt P^0 mit dem Palmschen Maß [6] zusammen. Diese Bezeichnung wird daher auf den allgemeinen Fall übertragen.

2. Das Palmsche Maß

Mit μ werde ein Haarsches Maß[1] auf G bezeichnet. Bei Integrationen schreiben wir statt $\mu(dt)$ einfach dt. Als Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen dient der

[1] Die Haarschen Maße auf G unterscheiden sich nur um einen multiplikativen Faktor.

Satz 2.1. *Ein σ-endliches Maß P auf $[M, \mathfrak{M}]$ ist genau dann stationär, wenn für alle Funktionen $w \in F(G \times G \times M)$ gilt:*

$$(2.1) \quad \iiint w(t, s, T_s\Phi)\,\Phi(ds)\,P(d\Phi)\,dt = \iiint w(s, t, T_s\Phi)\,\Phi(ds)\,P(d\Phi)\,dt\,.$$

Beweis. a) P sei stationär.

Aus (1.2′) folgt

$$\iiint w(t, s, T_s\Phi)\,\Phi(ds)\,P(d\Phi)\,dt = \iiint w(t, s, T_{s+t}\Phi)\,(T_t\Phi)\,(ds)\,P(d\Phi)\,dt\,.$$

Mit (1.1′) ergibt sich dann

$$(2.2) \quad \iiint w(t, s, T_s\Phi)\,\Phi(ds)\,P(d\Phi)\,dt = \iiint w(t, s-t, T_s\Phi)\,\Phi(ds)\,P(d\Phi)\,\mathrm{dt}\,.$$

Ganz entsprechend erhält man

$$(2.3) \quad \iiint w(s, t, T_s\Phi)\,\Phi(ds)\,P(d\Phi)\,dt = \iiint w(s-t, t, T_s\Phi)\,\Phi(ds)\,P(d\Phi)\,dt\,.$$

Aus den charakteristischen Eigenschaften des Haarschen Maßes folgt aber unmittelbar:

$$\int w(t, s-t, T_s\Phi)\,dt = \int w(s-t, t, T_s\Phi)\,dt\,.$$

Es gilt also auch

$$\iiint w(t, s-t, T_s\Phi)\,dt\,\Phi(ds)\,P(d\Phi) = \iiint w(s-t, t, T_s\Phi)\,dt\,\Phi(ds)\,P(d\Phi)\,.$$

Aus dem Satz von Fubini ergibt sich nun, daß die rechten Seiten der Gleichungen (2.2) und (2.3) und somit auch ihre linken übereinstimmen.

b) Es gelte (2.1) für das σ-endliche Maß P auf $[M, \mathfrak{M}]$. Es sei $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots$ eine Zerlegung von G in punktfremde Mengen $G_n \in \mathfrak{G}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ derart, daß es zu jedem G_n eine kompakte Obermenge gibt. Dann ist für alle $\Phi \in M$ und alle n $\Phi(G_n) < \infty$. Die Funktion

$$(2.4) \qquad a(t, \Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}[\Phi(G_n)]^{-1}\,k_{G_n}(t)$$

ist somit durchweg positiv und meßbar auf $[G, \mathfrak{G}] \times [M, \mathfrak{M}]$. Dabei bedeutet k_{G_n} die Indikatorfunktion der Menge G_n:

$$k_{G_n}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \in G_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(Wir setzen $[\Phi(G_n)]^{-1} = +\infty$, falls $\Phi(G_n) = 0$, und betrachten $+\infty$ als positiven Wert.) Für alle Φ, die vom Nullmaß 0 verschieden sind, ist $\int a(s, \Phi)\,\Phi(ds)$ eine positive reelle Zahl:

$$(2.5) \qquad 0 < \int a(s, \Phi)\,\Phi(ds) \leqq 1 \quad (\Phi \neq 0)\,.$$

Die Funktion

$$(2.6) \qquad h(t, \Phi) = \left[\int a(s, \Phi)\,\Phi(ds)\right]^{-1} a(t, \Phi) \quad (\Phi \neq 0),\ h(t, 0) = 0$$

gehört somit zur Menge $F(G \times M)$ und genügt der Beziehung

$$(2.7) \qquad \int h(t, \Phi)\,\Phi(dt) = 1 \quad (\Phi \neq 0)\,.$$

Weiterhin sei g eine beliebige Funktion aus $F(G)$ mit $\int g(t)\,dt = 1$. Dann können wir für alle $r \in G$ und alle $u \in F(M)$ mit $u(0) = 0$ schreiben:

$$\int u(T_r \Phi)\, P(d\Phi) = \iiint g(t)\, u(T_{r-s}\, T_s \Phi)\, h(s, T_{-s}\, T_s \Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi)\, dt\,.$$

Mit (2.1) ergibt sich nun:

$$\int u(T_r \Phi)\, P(d\Phi) = \iiint g(s)\, u(T_{r-t}\, T_s \Phi)\, h(t, T_{-t}\, T_s \Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi)\, dt\,.$$

Unter Berufung auf die charakteristischen Eigenschaften des Haarschen Maßes erhalten wir daraus

$$\int u(T_r \Phi)\, P(d\Phi) = \iiint g(s)\, u(T_{-t}\, T_s \Phi)\, h(t+r, T_{-t-r}\, T_s \Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi)\, dt\,.$$

Wir wenden noch einmal die Formel (2.1) an und bekommen, wenn wir außerdem (1.1′) berücksichtigen:

$$\int u(T_r \Phi)\, P(d\Phi) = \int g(t)\, dt \int u(\Phi)\, [\int h(s, T_{-r} \Phi)\, (T_{-r} \Phi)\, (ds)]\, P(d\Phi)\,.$$

Da $\int g(t)\, dt = 1$ und $\int h(s, T_{-r}\Phi)\, (T_{-r}\Phi)\, (ds) = 1$ für alle $\Phi \neq 0$ ist (siehe (2.7)), gilt

$$\int u(T_r \Phi)\, P(d\Phi) = \int u(\Phi)\, P(d\Phi)$$

für jedes $u \in F(M)$ mit $u(0) = 0$ und alle $r \in G$. Trivialerweise ist dann (1.2′) für *alle* $u \in F(M)$ erfüllt, d. h. P ist stationär. Damit ist der Beweis beendet.

P sei ein stationäres und σ-endliches Maß auf $[M, \mathfrak{M}]$. Wenn man Satz 2.1 auf die Funktion $w(t, s, \Phi) = g_1(t)\, g_2(s)\, u(\Phi)$ mit $u \in F(M)$ und g_1, $g_2 \in F(G)$, $\int g_i(t)\, dt = 1$ $(i = 1, 2)$ anwendet, erhält man

$$\iint g_2(s)\, u(T_s \Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi) = \iint g_1(s)\, u(T_s \Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi)\,.$$

Das Funktional $I_P(u) = \iint g(s)\, u(T_s\Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi)$ liefert also für alle $g \in F(G)$ mit $\int g(t)\, dt = 1$ denselben Wert. Mit k_A werde die Indikatorfunktion des Ereignisses $A \in \mathfrak{M}$ bezeichnet. Es ist sofort zu sehen, daß die auf $\mathfrak{M}$ definierte Mengenfunktion $I_P(k_A)$ $(A \in \mathfrak{M})$ ein Maß ist. Wir nennen es das zu P gehörende Palmsche Maß P^0. Somit gilt:

$$P^0(A) = \iint g(s)\, k_A(T_s \Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi) \qquad (2.8)$$
$$(A \in \mathfrak{M}\,,\; g \in F(G) \quad \text{mit} \quad \int g(t)\, dt = 1)\,.$$

oder allgemeiner

$$\int u(\Phi)\, P^0(d\Phi) = \iint g(s)\, u(T_s \Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi) \qquad (2.8')$$
$$(u \in F(M),\; g \in F(G) \quad \text{mit} \quad \int g(t)\, dt = 1)\,.$$

Man nennt $P^0(M)$ die Intensität von P. $P^0(M)$ kann zwar gleich ∞ sein, aber es gilt der

Satz 2.2. *P^0 ist σ-endlich.*

Beweis. Da P als σ-endlich vorausgesetzt wurde, gibt es eine Funktion $u_1 \in F(M)$ mit $u_1(\Phi) > 0$ für alle $\Phi \in M$ und $\int u_1(\Phi)\, P(d\Phi) < \infty$. Aus (2.8′) und Satz 1 folgt:

$$\begin{aligned}
&\int [\int u_1(T_{-t}\Phi)\, a(t, T_{-t}\Phi)\, dt]\, P^0(d\Phi) = \\
&= \iiint g(s)\, u_1(T_{-t}\, T_s \Phi)\, a(t, T_{-t}\, T_s \Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi)\, dt = \\
&= \int g(t)\, dt \cdot \int u_1(\Phi)\, [\int a(s, \Phi)\, \Phi(ds)]\, P(d\Phi)\,.
\end{aligned}$$

Dabei soll a die Funktion aus (2.4) sein. Mit (2.5) erhalten wir also für die durchweg positive Funktion

$$u_2(\Phi) = \int u_1(T_{-t}\Phi)\, a(t, T_{-t}\Phi)\, dt$$

die Abschätzung

$$\int u_2(\Phi)\, P^0(d\Phi) \leqq \int u_1(\Phi)\, P(d\Phi) < \infty\,.$$

Daraus folgt die σ-Endlichkeit von P^0.

Eine wichtige Eigenschaft des Palmschen Maßes wird in dem folgenden Satz ausgedrückt.

Satz 2.3. *Für σ-endliche Maße P und Q auf $[M, \mathfrak{M}]$ sind die folgenden beiden Aussagen gleichbedeutend:*

1) *P ist stationär und $Q = P^0$.*

2) *Für alle Funktionen $v \in F(G \times M)$ gilt*

$$\iint v(s, \Phi)\, ds\, Q(d\Phi) = \iint v(s, T_s\Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi)\,.$$

Beweis. a) P sei stationär.

Dann ist nach (2.8′)

$$\iint v(t, \Phi)\, dt\, P^0(d\Phi) = \iiint v(t, T_s\Phi)\, g(s)\, dt\, \Phi(ds)\, P(d\Phi)\,.$$

Aus Satz 2.1 ergibt sich nun

$$\iint v(s, \Phi)\, ds\, P^0(d\Phi) = \iint v(s, T_s\Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi)\,. \tag{2.9}$$

Damit ist gezeigt, daß aus 1) die Aussage 2) folgt.

b) Es sei 2) erfüllt.

Dann gilt für alle $w \in F(G \times G \times M)$:

$$\iint \left[\int w(t, s, T_s\Phi)\, dt\right] \Phi(ds)\, P(d\Phi) = \iint \left[\int w(t, s, \Phi)\, dt\right] ds\, Q(d\Phi)$$

und

$$\iint \left[\int w(s, t, T_s\Phi)\, dt\right] \Phi(ds)\, P(d\Phi) = \iint \left[\int w(s, t, \Phi)\, dt\right] ds\, Q(d\Phi)\,.$$

Man sieht sofort, daß die rechten Seiten der beiden Gleichungen übereinstimmen. Also sind auch die linken Seiten gleich. Daraus folgt aber nach Satz 2.1, daß P stationär ist. Für alle $u \in F(M)$ gilt nun nach (2.8′) und 2):

$$\begin{aligned}\int u(\Phi)\, P^0(d\Phi) &= \int\int g(s) u(T_s\Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi)\\ &= \int\int g(s) u(\Phi)\, ds\, Q(d\Phi)\\ &= \int u(\Phi)\, Q(d\Phi)\,.\end{aligned}$$

Also ist $Q = P^0$. Aus 2) folgt somit 1), und der Beweis des Satzes ist beendet.

Mit Hilfe einer Funktion h, die (2.7) erfüllt, kann man die Einschränkung von P auf $M - \{0\}$ aus P^0 zurückgewinnen:

Satz 2.4. *Das Maß P auf $[M, \mathfrak{M}]$ sei σ-endlich und stationär. Dann gilt für alle $u \in F(M)$ mit $u(0) = 0$:*

$$\int u(\Phi)\, P(d\Phi) = \iint h(t, T_{-t}\Phi)\, u(T_{-t}\Phi)\, dt\, P^0(d\Phi)\,. \tag{2.10}$$

Beweis. Die Funktion $v(t, \Phi) = h(t, T_{-t}\Phi)\, u(T_{-t}\Phi)$ gehört zur Menge $F(G \times M)$. Nach Satz 2.3 gilt daher

$$\iint h(t, T_{-t}\Phi)\, u(T_{-t}\Phi)\, dt\, P^0(d\Phi) = \int u(\Phi)\, [\int h(t, \Phi)\, \Phi(dt)\,] P(\Phi) .$$

Daß das Integral auf der rechten Seite gleich $\int u(\Phi)\, P(d\Phi)$ ist, folgt aus (2.7) und der Voraussetzung $u(0) = 0$.

Im folgenden Satz wird eine Charakterisierung der Klasse der Palmschen Maße gegeben.

Satz 2.5. *Ein Maß Q auf $[M, \mathfrak{M}]$ ist genau dann Palmsches Maß zu einem gewissen σ-endlichen stationären Maß auf $[M, \mathfrak{M}]$, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

1) *Q ist* σ-endlich,
2) $Q(\{0\}) = 0$,
3) *Für alle $v \in F(G \times M)$ gilt*

$$\iint v(-t, T_t\Phi)\, \Phi(dt)\, Q(d\Phi) = \iint v(t, \Phi)\, \Phi(dt)\, Q(d\Phi) . \tag{2.11}$$

Beweis. a) P sei stationär, σ-endlich und $Q = P^0$.

Die Behauptung 1) folgt aus Satz 2.2. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} P^0(\{0\}) &= \int k_{\{0\}}(\Phi)\, P^0(d\Phi) \\ &= \iint g(t)\, k_{\{0\}}(T_t\Phi)\, \Phi(dt)\, P(d\Phi) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Dabei wurde (2.8′) benutzt und die Tatsache, daß $T_t\Phi = \mathbf{0}$ gleichbedeutend ist mit $\Phi = \mathbf{0}$. Somit ist auch 2) bewiesen.

Mit (2.8′) und (1.1′) erhalten wir

$$\iint v(-t, T_t\Phi)\, \Phi(dt)\, P^0(d\Phi) = \iiint g(s)\, v(s-t, T_t\Phi)\, \Phi(dt)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi) .$$

Wegen $\int g(t)\, dt = 1$ ist

$$\iint v(s, \Phi)\, \Phi(ds)\, P^0(d\Phi) = \iiint g(s+t)\, v(s, \Phi)\, \Phi(ds)\, dt\, P^0(d\Phi) .$$

Aus (2.9) und (1.1′) folgt aber, daß die rechten Seiten und somit auch die linken Seiten der beiden obigen Gleichungen übereinstimmen, d. h. 3) gilt.

b) Q erfülle 1), 2) und 3).

Durch die Festsetzung

$$P(A) = \iint h(t, T_{-t}\Phi)\, k_A(T_{-t}\Phi)\, dt\, Q(d\Phi) \quad (A \in \mathfrak{M})$$

wird ein Maß P auf $[M, \mathfrak{M}]$ definiert. Für alle $u \in F(M)$ gilt also

$$\int u(\Phi)\, P(d\Phi) = \iint h(t, T_{-t}\Phi)\, u(T_{-t}\Phi)\, dt\, Q(d\Phi) . \tag{2.12}$$

Deshalb ergibt sich gemäß (1.1′) für alle $v \in F(G \times M)$:

$$\iint v(s, T_s\Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi) = \iiint h(t, T_{-t}\Phi)\, v(s+t, T_s\Phi)\, dt\, \Phi(ds)\, Q(d\Phi) .$$

Da μ invariant ist gegenüber den Gruppenoperationen, ist das rechte Integral gleich
$$\iiint h(t-s, T_{-t}T_s\Phi)\, v(t, T_s\Phi)\, dt\, \Phi(ds)\, Q(d\Phi) .$$
Wegen der Voraussetzung 3) erhalten wir (siehe (1.1′)):

$$\iint v(s, T_s\Phi)\, \Phi(ds)\, P(d\Phi) = \iint v(t, \Phi)\, [\int h(s, T_{-t}\Phi)\, (T_{-t}\Phi)\, (ds)]\, dt\, Q(d\Phi) .$$

Mit (2.7) und 2) folgt schließlich:

(2.13) $\iint v(s, T_s\Phi)\,\Phi(ds)\,P(d\Phi) = \iint v(t,\Phi)\,dt\,Q(d\Phi) \quad (v \in F(G\times M))\,.$

Da Q und μ σ-endlich sind, besitzt auch das Produktmaß $\mu \times Q$ auf $[G, \mathfrak{G}]\times[M,\mathfrak{M}]$ diese Eigenschaft. Es existiert somit eine positive Funktion $b \in F(G\times M)$ mit $\iint b(t,\Phi)\,dt\,Q(d\Phi) < \infty$. Das bedeutet nach (2.13), daß

$$\int\left[\int b(t, T_t\Phi)\,\Phi(dt)\right]P(d\Phi)$$

endlich ist. Aus $b > 0$ folgt aber auch für alle $\Phi \neq 0$:

$$c(\Phi) = \int b(t, T_t\Phi)\,\Phi(dt) > 0\,.$$

Somit ist

$$\int_{\Phi\neq 0} c(\Phi)\,P(d\Phi) < \infty \quad (c(\Phi) > 0 \text{ für alle } \Phi \neq 0)\,.$$

Daran kann man ablesen, daß die Einschränkung von P auf $M-\{0\}$ σ-endlich ist. Nach (2.12) und 2) ist $P(\{0\}) = 0$. Damit ist die σ-Endlichkeit von P nachgewiesen. Aus (2.13) folgt jetzt in Verbindung mit Satz 2.3, daß P stationär und $Q = P^0$ ist.

Später wird noch der Begriff der Faltung $P_1 * P_2$ zweier σ-endlicher Maße P_1, P_2 auf $[M, \mathfrak{M}]$ benötigt:

(2.14) $(P_1 * P_2)(A) = \iint k_A(\Phi + \Phi')\,P_1(d\Phi)\,P_2(d\Phi') \quad (A \in \mathfrak{M})\,.$

Dann gilt für alle $u \in F(M)$

(2.14') $\int u(\Phi)\,(P_1 * P_2)(d\Phi) = \iint u(\Phi + \Phi')\,P_1(d\Phi)\,P_2(d\Phi')\,.$

Satz 2.6. *Es seien P_1, P_2 zwei stationäre endliche Maße auf $[M, \mathfrak{M}]$. Dann ist auch $P_1 * P_2$ ein stationäres endliches Maß, und es gilt*

$$(P_1 * P_2)^0 = P_1^0 * P_2 + P_1 * P_2^0\,.$$

Beweis. Wegen $(P_1 * P_2)(M) = P_1(M)\,P_2(M)$ ist $P_1 * P_2$ endlich. Aus (2.14') und (2.9) folgt für alle $v \in F(G\times M)$:

$$\iint v(s,\Phi)\,ds\,(P_1^0 * P_2)(d\Phi) = \iiint v(s, T_s\Phi + \Phi')\,P_2(d\Phi')\,\Phi(ds)\,P_1(d\Phi)\,.$$

Wegen der Stationarität von P_2 ist das letzte Integral gleich

$$\iiint v(s, T_s\Phi + T_s\Phi')\,P_2(d\Phi')\,\Phi(ds)\,P_1(d\Phi)\,.$$

Ganz analog erhält man

$$\iint v(s,\Phi)\,ds\,(P_1 * P_2^0)(d\Phi) = \iiint v(s, T_s\Phi + T_s\Phi')\,P_1(d\Phi)\,\Phi'(ds)\,P_2(d\Phi')\,,$$

also insgesamt

$$\begin{aligned} &\iint v(s,\Phi)\,ds\,(P_1^0 * P_2 + P_1 * P_2^0)(d\Phi)\\ &= \iiint v(s, T_s(\Phi+\Phi'))\,(\Phi+\Phi')(ds)\,P_1(d\Phi)\,P_2(d\Phi')\\ &= \iint v(s, T_s\Phi)\,\Phi(ds)\,(P_1 * P_2)(d\Phi)\,. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.3 ist somit $P_1 * P_2$ stationär und $P_1^0 * P_2 + P_1 * P_2^0 = (P_1 * P_2)^0$, was zu beweisen war.

Im nächsten Abschnitt werden Hilfsmittel für den letzten Teil der Arbeit, in dem spezielle zufällige Maße auf $[G, \mathfrak{G}]$ behandelt werden, bereitgestellt.

3. Allgemeine Poissonsche Prozesse

Es sei $\mathfrak{X}$ eine σ-Algebra von Teilmengen der Menge X und Λ ein σ-endliches Maß auf dem meßbaren Raum $[X, \mathfrak{X}]$. Mit S werde die Menge aller σ-endlichen Maße Ψ auf $[X, \mathfrak{X}]$ bezeichnet mit der Eigenschaft, daß für alle $A \in \mathfrak{X}$ $\Psi(A)$ nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, \infty$ annimmt. Zu S gehören speziell die Maße δ_x $(x \in X)$, die durch

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (A \in \mathfrak{X})$$

definiert sind. $\mathfrak{S}$ sei die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von S. bez. der alle Funktionen $z_A(\Psi) = \Psi(A)$ $(A \in \mathfrak{X})$ meßbar sind. Mit $F(X)$, $F(S)$, $F(X \times S)$ werden bzw. die Mengen der meßbaren, nichtnegativen Funktionen auf $[X, \mathfrak{X}]$, $[S, \mathfrak{S}]$, $[X, \mathfrak{X}] \times [S, \mathfrak{S}]$ bezeichnet.

Satz 3.1. *Es gibt genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $[S, \mathfrak{S}]$ mit der Eigenschaft, daß für alle Funktionen $v \in F(X \times S)$ gilt*

$$\iint v(x, \Psi)\, \Psi(dx)\, P(d\Psi) = \iint v(x, \Psi + \delta_x)\, P(d\Psi)\, \Lambda(dx). \tag{3.1}$$

P wird als der Poissonsche Prozeß mit der Intensitätsverteilung Λ bezeichnet.

Der *Beweis* dieses Satzes bildet den Inhalt des vorliegenden Abschnitts.

Wir setzen zunächst voraus, daß ein Maß P mit $P(S) = 1$ auf $[S, \mathfrak{S}]$ existiert, das (3.1) für alle $v \in F(X \times S)$ erfüllt.

Für alle $f \in F(X)$ sei

$$D(f) = \int \exp[-\int f(x)\, \Psi(dx)]\, P(d\Psi).$$

(Anstelle $e^{-\infty}$ ist 0 einzusetzen.)
Falls $\int f(x)\, \Lambda(dx) < \infty$ ist, erhalten wir nach (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varkappa} D(\varkappa f) &= -\iint \exp[-\int \varkappa f(y)\, \Psi(dy)]\, f(x)\, \Psi(dx)\, P(d\Psi) \\ &= -D(\varkappa f) \int f(x) \exp[-\varkappa f(x)]\, \Lambda(dx) \qquad (\varkappa \geqq 0). \end{aligned}$$

Für $f \equiv 0$ muß $D(f) = 1$ sein. Es ergibt sich als einzige Lösung der Differentialgleichung:

$$D(\varkappa f) = \exp\{-\int (1 - \exp[-\varkappa f(x)])\, \Lambda(dx)\}.$$

Daraus folgt für alle $f \in F(X)$:

$$\int \exp[-\int f(x)\, \Psi(dx)]\, P(d\Psi) = \exp\{-\int (1 - \exp[-f(x)])\, \Lambda(dx)\}. \tag{3.2}$$

Wir setzen

$$f(x) = \eta_1 k_{A_1}(x) + \cdots + \eta_n k_{A_n}(x),$$

wobei die k_{A_1} die Indikatorfunktionen zu den Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{X}$ mit $\Lambda(A_i) < \infty$ und die y_i reelle, nichtnegative Zahlen bedeuten. Dann ist

$$\begin{aligned} \int \exp[-\int f(x)\, \Psi(dx)]\, P(d\Psi) &= \int \exp[-\eta_1 \Psi(A_1)] \cdots \exp[-\eta_n \Psi(A_n)]\, P(d\Psi) \\ &= V_{A_1, \ldots, A_n(\exp[-\eta_1], \ldots, \exp[-\eta_n])} \end{aligned}$$

wenn $V_{A_1, \ldots, A_n}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ die erzeugende Funktion für die Verteilung des Vektors $[\Psi(A_1), \ldots, \Psi(A_n)]$ bez. *P bezeichnet.* Durch (3.2) sind also die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse der Form

$$\{\Psi\colon \Psi(A_1) = m_1, \ldots, \Psi(A_n) = m_n\} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ m_i = 0, 1, 2, \ldots;\ A_i \in \mathfrak{X} \text{ mit } \Lambda(A_i) < \infty)$$

festgelegt. Da diese Ereignisse ein bez. der endlichen Durchschnittsbildung abgeschlossenes erzeugendes System für $\mathfrak{S}$ bilden, kann also höchstens ein Wahrscheinlichkeitsmaß P existieren, das (3.1) erfüllt.

Die Bezeichnung „Poissonscher Prozeß" rührt daher, daß für alle $A \in \mathfrak{X}$ mit $\Lambda(A) < \infty$ $\Psi(A)$ bez. P Poissonsch verteilt ist. Aus den obigen Rechnungen folgt nämlich

$$\begin{aligned} V_A(\xi) &= \int \xi^{\Psi(A)}\, P(d\Psi) \\ &= \exp[-(1-\xi)\,\Lambda(A)]. \end{aligned}$$

Es wird jetzt ein P angegeben, das der Beziehung (3.1) genügt.

1. Fall: $\Lambda(X) = \lambda < \infty$.

Wir definieren P durch die Festsetzung

$$P(B) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \cdots \int k_B(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n})\, \Lambda(dx_1) \cdots \Lambda(dx_n) \quad (B \in \mathfrak{S}). \tag{3.3}$$

Dabei verabreden wir, daß für $n = 0$ $\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n} = \mathbf{0}$ zu setzen ist, und die Integration Multiplikation mit 1 bedeuten soll. Dann gilt für alle $u \in F(S)$

$$\int u(\Psi)\, P(d\Psi) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \cdots \int u(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n})\, \Lambda(dx_1) \cdots \Lambda(dx_n). \tag{3.3'}$$

Man erhält daher für alle $v \in F(X \times S)$:

$$\begin{aligned} &\iint v(x, \Psi + \delta_x)\, P(d\Psi)\, \Lambda(dx) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \cdots \int v(x, \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n} + \delta_x)\, \Lambda(dx_1) \cdots \Lambda(dx_n)\, \Lambda(dx) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \cdots \int [\textstyle\int v(y, \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n})\, (\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n})(dy)]\, \Lambda(dx_1) \cdots \Lambda(dx_n). \end{aligned}$$

Nach (3.3′) ist aber der letzte Ausdruck gleich

$$\iint v(y, \Psi)\, \Psi(dy)\, P(d\Psi).$$

Damit ist (3.1) für den Fall $\Lambda(X) < \infty$ bewiesen.

2. Fall: $\Lambda(X) = \infty$.

Da Λ als σ-endlich vorausgesetzt wurde, gibt es eine Zerlegung von X in abzählbar viele Mengen $X_n \in \mathfrak{X}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit $\Lambda(X_n) < \infty$. Es sei $\mathfrak{X}_n = \mathfrak{X} \cap X_n$. Λ_n bezeichne die Einschränkung von Λ auf $[X_n, \mathfrak{X}_n]$. Jedem meßbaren Raum $[X_n, \mathfrak{X}_n]$ ordnen wir die Menge S_n der σ-endlichen ganzzahligen (∞ wird in diesem Zusammenhang als ganze Zahl angesehen) Maße Ψ_n auf $[X_n, \mathfrak{X}_n]$ zu. Mit $\mathfrak{S}_n$ werde die kleinste σ-Algebra von Untermengen aus S_n bezeichnet, bez. der alle Funktionen $z_A(\Psi_n) = \Psi_n(A)$ $(A \in \mathfrak{X}_n)$ meßbar sind. P_n sei der Poissonsche Prozeß mit der Intensitätsverteilung Λ_n auf $[S_n, \mathfrak{S}_n]$ (s. (3.3)).

Ein Maß $\Psi \in S$ ist durch seine Einschränkungen Ψ_n auf $[X_n, \mathfrak{X}_n]$ eindeutig bestimmt. Wir können daher im folgenden Ψ mit der Folge $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots)$ und dementsprechend $[S, \mathfrak{S}]$ mit dem Produktraum $\prod_{n=1}^{\infty} [S_n, \mathfrak{S}_n]$ identifizieren.

Das aus den P_n gebildete Produktmaß P auf diesem Raum bezeichnen wir als den Poissonschen Prozeß mit der Intensitätsverteilung Λ. Zu zeigen ist, daß P (3.1) erfüllt.

Daneben betrachten wir auch noch die Poissonschen Prozesse P^n mit den Intensitätsverteilungen Λ^n auf den Räumen $[X^n, \mathfrak{X}^n]$, wobei

$$X^n = X_1 \cup X_2 \cdots \cup X_n, \quad \mathfrak{X}^n = \mathfrak{X} \cap X^n$$

und Λ^n die Einschränkung von Λ auf $[X^n, \mathfrak{X}^n]$ sein soll. Die P^n sind Wahrscheinlichkeitsmaße auf $[S^n, \mathfrak{S}^n]$; dabei bedeutet S^n die Menge aller σ-endlichen ganzzahligen Maße Ψ^n auf $[X^n, \mathfrak{X}^n]$, und $\mathfrak{S}^n$ ist die kleinste σ-Algebra, bez. der alle Funktionen $z_A(\Psi^n) = \Psi^n(A)$ $(A \in \mathfrak{X}^n)$ auf S^n meßbar sind.

Wir können die Ψ^n wieder mit der Folge $(\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ ihrer Einschränkungen auf die Räume $[X_1, \mathfrak{X}_1], \ldots, [X_n, \mathfrak{X}_n]$ und somit $[S^n, \mathfrak{S}^n]$ mit dem Produktraum $\prod_{i=1}^{n} [S_i, \mathfrak{S}_i]$ identifizieren. An der Formel (3.2) läßt sich nun leicht ablesen, daß

$$P^n = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n \tag{3.4}$$

ist. Daraus folgt die Gültigkeit der Formel (3.1) für alle $v \in (X \times S)$, die außerhalb X_n verschwinden und meßbar bez. $\mathfrak{X} \times \mathfrak{T}_n$[2] sind, wenn $\mathfrak{T}_n$ die kleinste σ-Algebra bedeutet, bez. der die Abbildung $\Psi \to \Psi^n$ (Einschränkung von Ψ auf $[X^n, \mathfrak{X}^n]$) meßbar ist $(n = 1, 2, \ldots)$.

Insbesondere gilt im Falle $n \geqq m$, für alle $H \in \mathfrak{X}_m \times \mathfrak{T}_n$

$$\iint k_H([x, \Psi])\, \Psi(dx)\, P(d\Psi) = \iint k_H([x, \Psi + \delta_x])\, P(d\Psi)\, \Lambda(dx) < \infty\,. \tag{3.5}$$

Die kleinste σ-Algebra, die die Mengenalgebra $\mathfrak{E}_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} \mathfrak{X}_m \times \mathfrak{T}_n$ umfaßt, ist $\mathfrak{X}_m \times \mathfrak{S}$. Somit enthält die Klasse $\mathfrak{H}$ aller Mengen $H \subset X_m \times S$, die (3.5) erfüllen, eine erzeugende Algebra $\mathfrak{E}_m$ für $\mathfrak{X}_m \times \mathfrak{S}$. Andererseits ist $\mathfrak{H}$ monoton abgeschlossen gegenüber den Operationen der Vereinigung monoton aufsteigender bzw. des Durchschnitts monoton absteigender Mengenfolgen. Die kleinste monotone Klasse über $\mathfrak{E}_m$ ist aber $\mathfrak{X}_m \times \mathfrak{S}$. Somit gilt (3.5) für alle $H \in \mathfrak{X}_m \times \mathfrak{S}$. Daraus folgt sofort, daß (3.1) für alle $v(x, \Psi) = k_B([x, \Psi])$ $(B \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{S})$ richtig ist. Dann gilt (3.1) aber auch für alle $v \in F(X \times S)$.

4. Stationäre Poissonsche Prozesse auf G

Die Poissonschen Prozesse auf $[G, \mathfrak{G}]$ mit der Intensitätsverteilung $\Lambda \in M$ sollen jetzt näher untersucht werden. Als Grundraum $[X, \mathfrak{X}]$ dient also nun die lokalkompakte Abelsche Gruppe G, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, mit dem System ihrer Borelmengen $\mathfrak{G}$.

[2] Wenn $[A_1, \mathfrak{A}_1]$, $[A_2, \mathfrak{A}_2]$ zwei meßbare Räume sind, dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ die σ-Algebra der meßbaren Mengen des Produktraumes $[A_1, \mathfrak{A}_1] \times [A_2, \mathfrak{A}_2]$.

Nicht alle Realisierungen $\Psi \in S$ gehören zu M. Man kann aber zeigen, daß $M' = M \cap S$ in $\mathfrak{M}$ enthalten ist, und für alle Poissonschen Prozesse P mit einer Intensitätsverteilung $\Lambda \in M$ gilt $P(M') = 1$.

Für die Zwecke des Beweises setzen wir voraus, daß G Hausdorffsch sei. Andernfalls ist G/H Hausdorffsch, wenn H den Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen bezeichnet, die das Element 0 enthalten, und der Beweis läßt sich leicht auf den allgemeinen Fall übertragen.

Es sei $\{O_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eine Basis für die Topologie von G derart, daß die abgeschlossenen Hüllen $\bar{O}_i$ kompakt sind. Wir setzen

$$N_i = \{\Phi\colon\ \Phi \in M,\ \Phi(O_i) \text{ ganzzahlig}\}$$

und

$$N = \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i .$$

Es sei

$$D_\Phi = \bigcup \{O_i\colon\ \Phi(O_i) = 0\} \qquad (\Phi \in N).$$

Jeder Punkt $t \in G$ ist darstellbar in der Form

$$t = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_{i_n} \quad \text{mit} \quad O_{i_1} \supset O_{i_2} \supset O_{i_3} \supset \cdots$$

Deshalb gilt für alle $t \in G - D_\Phi$: $\Phi(\{t\}) \geqq 1$ $(\Phi \in N)$. Da $\Phi \in N$ σ-endlich ist, kann $G - D_\Phi$ höchstens abzählbar viele Punkte enthalten. Somit ist jedes $\Phi \in N$ darstellbar als $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{t_n}$, wobei die a_n nur Werte aus $\{1, 2, \ldots\}$ annehmen. Damit ist klar, daß Φ ein ganzzahliges Maß ist. Andererseits gehört jedes ganzzahlige $\Phi \in M$ trivialerweise zu N. Wir haben erkannt, daß $M' = N \in \mathfrak{M}$ ist.

Auf Grund der Voraussetzung $\Lambda \in M$ ist $\Lambda(O_i) < \infty$. Die Zufallsgröße $\Psi(O_i)$ ist bez. P poissonsch verteilt mit dem Parameter $\Lambda(O_i) < \infty$. Daraus folgt $P(S_i) = 1$, wenn $S_i = \{\Psi\colon\ \Psi \in S,\ \Psi(O_i) < \infty\}$ gesetzt wird. Für $S' = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ ergibt sich also $P(S') = 1$.

Eine kompakte Menge $C \in \mathfrak{G}$ wird von endlich vielen O_i überdeckt; daher gilt $\Psi(C) < \infty$ für $\Psi \in S'$. Somit ist $S' \subset M'$. Trivialerweise gilt $M' \subset S'$. Also ist $M' = S'$ und schärfer sogar $[M', \mathfrak{M} \cap M'] = [S', \mathfrak{S} \cap S']$. Insbesondere gilt $P(M') = 1$.

P kann also von jetzt ab als Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[M, \mathfrak{M}]$ aufgefaßt werden, das auf M' konzentriert ist. Dann ist der Poissonsche Prozeß P mit der Intensitätsverteilung $\Lambda \in M$ ein spezielles zufälliges Maß auf $[G, \mathfrak{G}]$, und wir können darauf die in Abschnitt 2 entwickelte Theorie anwenden.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß Δ auf $[M, \mathfrak{M}]$ sei gegeben durch

$$\Delta(B) = \begin{cases} 1 & \text{für } \delta_0 \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (B \in \mathfrak{M}).$$

Satz 4.1. *Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[M, \mathfrak{M}]$. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

1) *P ist ein stationärer Poissonscher Prozeß der Intensität $P^0(M) = \lambda$.*

2) *P ist ein Poissonscher Prozeß mit der Intensitätsverteilung $\Lambda = \lambda\mu$.*

3) *P ist ein stationäres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[M, \mathfrak{M}]$ mit $P(M') = 1$ und*

$$P^0 = P * \lambda\Delta. \tag{4.1}$$

Beweis. a) Es gelte 1).

Gemäß 3.1 gilt für alle $f \in F(G)$

$$\int f(t)\,\Phi(dt)\,P(d\Phi) = \int f(t)\,\Lambda(dt).$$

Nach (2.9) ist das gleichbedeutend mit $\lambda \int f(t)\,dt = \int f(t)\,\Lambda(dt)$. Aus 1) folgt somit 2).

b) Es gelte 2).

Wir definieren ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß P_r durch die Festsetzung

$$\int u(\Phi)\,P_r(d\Phi) = \int u(T_r\Phi)\,P(d\Phi) \qquad (u \in F(M)).$$

Für alle $f \in F(G)$ ist nach (3.2) die Beziehung

$$D_P(f) = \int \exp[-\int f(t)\,\Phi(dt)]\,P(d\Phi) = \exp\{-\lambda \int (1 - \exp[-f(t)])\,dt\}$$

erfüllt. Gemäß (1.1') erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\int \exp[-\int f(t)\,\Phi(dt)]\,P_r(d\Phi) &= \exp\{-\lambda \int (1 - \exp[-f(t-r)])\,dt\}\\ &= \exp\{-\lambda \int (1 - \exp[-f(t)])\,dt\}\end{aligned}$$

und somit $D_{P_r}(f) = D_P(f)$.

Im Abschnitt 3 war gezeigt worden, daß durch das Funktional D_P das Wahrscheinlichkeitsmaß P eindeutig bestimmt wird. Daher gilt $P = P_r$, d.h. P ist stationär.

Die Beziehung (3.1) ist genau dann für alle $v \in F(G \times M)$ erfüllt, wenn für die gleiche Menge von Funktionen immer gilt

$$\iint v(t, T_t\Phi)\,\Phi(dt)\,P(d\Phi) = \lambda \iint v(t, T_t\Phi + \delta_0)\,P(d\Phi)\,dt.$$

Gemäß (2.9) können wir unter Berücksichtigung der Stationarität von P dafür schreiben:

$$\iint v(t, \Phi)\,dt\,P^0(d\Phi) = \lambda \iint v(t, \Phi + \delta_0)\,P(d\Phi)\,dt. \tag{4.2}$$

Für $v(t, \Phi) = g(t)\,u(\Phi)$ mit $\int g(t)\,dt = 1$ erhält man daraus

$$\int u(\Phi)\,P^0(d\Phi) = \lambda \int u(\Phi)\,(P * \Delta)(d\Phi) \qquad (u \in F(M)),$$

d.h. es gilt (4.1). Damit ist gezeigt, daß aus 2) die Aussage 3) folgt.

c) Es gelte 3).

Aus (4.1) ergibt sich sofort $P^0(M) = \lambda$ und die Relation (4.2) für alle $v \in F(G \times M)$. Unter b) hatten wir erkannt, daß diese mit (3.1) gleichbedeutend ist. Nach Satz 3.1 ist P somit ein Poissonscher Prozeß. Aus 3) hat sich somit 1) ergeben.

Der Beweis von Satz 4.1 ist beendet.

Im Abschnitt 5 der Arbeit wird gezeigt, daß der Satz sich insofern verschärfen läßt, als man in 3) auf die Voraussetzung $P(M') = 1$ verzichten kann.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die stationären Poissonschen Prozesse auf $[G, \mathfrak{G}]$ stets endliche Intensität besitzen. Das folgt aus dem Teil a) des Beweises, wenn man $f(t) = k_C(t)$ $(C \in \mathfrak{C})$ setzt und berücksichtigt, daß Λ in M liegt.

Satz 4.1 enthält speziell die Aussage, daß ein stationäres zufälliges Maß auf $[G, \mathfrak{G}]$ mit $P(M') = 1$ genau dann ein Poissonscher Prozeß ist, wenn es für ein $\lambda \geqq 0$ die Beziehung (4.1) erfüllt. In dem Spezialfall, daß G die reelle Achse bedeutet, ist diese Aussage als Satz von SLIWNJAK [14] bekannt.

Wir können somit Satz 3.1 als Verallgemeinerung des Satzes von SLIWNJAK für allgemeine Poissonsche Prozesse auf beliebigen meßbaren Räumen auffassen.

5. Eine spezielle Klasse stationärer zufälliger Maße

Q_L sei der Poissonsche Prozeß mit der Intensitätsverteilung L auf $[M, \mathfrak{M}]$. Als Grundraum $[X, \mathfrak{X}]$ dient also jetzt $[M, \mathfrak{M}]$. Die Elemente von S sind die σ-endlichen ganzzahligen Maße Ψ auf $[M, \mathfrak{M}]$. Von L setzen wir voraus, daß $L(\{0\}) = 0$ ist, und daß für alle kompakten $C \in \mathfrak{G}$ gilt:

$$\int (1 - \exp[-\Phi(C)])\, L(d\Phi) < \infty . \tag{5.1}$$

Daraus folgt insbesondere, daß L σ-endlich ist. Jedem $\Psi \in S$ ordnen wir ein Maß E_Ψ auf $[G, \mathfrak{G}]$ zu:

$$E_\Psi(B) = \int \Phi(B)\, \Psi(d\Phi) \qquad (B \in \mathfrak{G}) . \tag{5.2}$$

Das bedeutet für alle $f \in F(G)$:

$$\int f(t)\, E_\Psi(dt) = \iint f(t)\, \Phi(dt)\, \Psi(d\Phi) . \tag{5.2'}$$

Es sei $\{O_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eine Basis für die Topologie von G derart, daß die abgeschlossenen Hüllen $\bar{O}_i$ kompakt sind. Wir setzen $\hat{S}_i = \{\Psi\colon E_\Psi(O_i) < \infty\}$. Nach (3.2) gilt für jede kompakte Menge $C \subset G$ und jedes $\sigma > 0$:

$$\int \exp[-\sigma \int \Phi(C)\, \Psi(d\Phi)]\, Q_L(d\Psi) = \exp\{-\int (1 - \exp[-\sigma \Phi(C)])\, L(d\Phi)\}$$

oder anders ausgedrückt

$$\int \exp[-\sigma E_\Psi(C)]\, Q_L(d\Psi) = \exp\{-\int (1 - \exp[-\sigma \Phi(C)])\, L(d\Phi)\} .$$

Wegen (5.1) ist nun

$$\lim_{\sigma \to 0+0} \int \exp[-\sigma E_\Psi(C)]\, Q_L(d\Psi) = 1 .$$

Daraus folgt aber $Q_L\{\Psi\colon E_\Psi(C) < \infty\} = 1$ für alle $C \in \mathfrak{C}$. Mithin gilt für alle $i = 1, 2, \ldots$ $Q_L(\hat{S}_i) = 1$ und daher auch $Q_L(\hat{S}) = 1$ mit $\hat{S} = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$. Wir setzen $\hat{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \cap S$ und können nun Q_L als Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[\hat{S}, \hat{\mathfrak{S}}]$ auffassen.

Es sei C eine beliebige Menge aus $\mathfrak{C}$. Sie wird von endlich vielen O_i überdeckt. Daher gilt für jedes $\Psi \in \hat{S}$: $E_\Psi(C) < \infty$. Wir haben somit erkannt, daß durch die Zuordnung $\Psi \to E_\Psi$ eine meßbare Abbildung von $[\hat{S}, \hat{\mathfrak{S}}]$ auf $[M, \mathfrak{M}]$ gegeben ist.

Wir untersuchen nun das Wahrscheinlichkeitsmaß P_L:

$$P_L(A) = Q_L\{\Psi\colon E_\Psi \in A\} \qquad (A \in \mathfrak{M}) . \tag{5.3}$$

Für alle $u \in F(M)$ gilt

(5.3′) $$\int u(\Phi)\, P_L(d\Phi) = \int u(E_\Psi)\, Q_L(d\Psi)\,.$$

Wir setzen

$$\delta_\Phi(A) = \begin{cases} 1 & \text{für } \Phi \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\Phi \in M,\, A \in \mathfrak{M})\,.$$

Die δ_Φ repräsentieren also spezielle zufällige Maße.

Hilfssatz 5.1. *Das Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $[M, \mathfrak{M}]$ ist genau dann gleich $P_L * \delta_\Gamma$ ($\Gamma \in M$), wenn alle Funktionen*

(5.4) $$f(t) = \sigma_1 k_{C_1}(t) + \cdots + \sigma_n k_{C_n}(t) \qquad (\sigma_1, \ldots, \sigma_n > 0;\ C_1, \ldots, C_n \in \mathfrak{C})$$

der Gleichung

(5.5) $$\begin{aligned} &\int \exp[-\int f(t)\, \Phi(dt)]\, P(d\Phi) \\ &= \exp[-\int f(t)\, \Gamma(dt)] \exp\{-\int (1 - \exp[-\int f(t)\, \Phi(dt)])\, L(d\Phi)\} \end{aligned}$$

genügen. Dann gilt (5.5) *für alle $f \in F(G)$.*

Beweis. a) Es sei $P = P_L * \delta_\Gamma$.

Nach (5.3′), (5.2′) und (2.14′) ist für jedes $f \in F(G)$

$$\begin{aligned} &\int \exp[-\int f(t)\, \Phi(dt)]\, (P_L * \delta_\Gamma)(d\Phi) \\ &= \exp[-\int f(t)\, \Gamma(dt)] \int \exp[-\iint f(t)\, \Phi(dt)\, \Psi(d\Phi)]\, Q_L(d\Psi)\,. \end{aligned}$$

Mit (3.2) erhält man daraus schließlich (5.5).

b) Es gelte (5.5)

Da

$$l(C_1, \ldots, C_n;\ \sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \int \exp\left[-\int \sum_{i=1}^{n} \sigma_i k_{C_i}(t)\, \Phi(dt)\right] P(d\Phi)$$

die Laplace-Stieltjes-Transformierte der Verteilung des Vektors $[\Phi(C_1), \ldots, \Phi(C_n)]$ bez. P ist, sind durch (5.5) die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse der Form $\{\Phi\colon \Phi \in M,\ [\Phi(C_1), \ldots, \Phi(C_n)] \in J\}$ ($J \in \mathfrak{B}_n$, wobei wir $\mathfrak{B}_n$ als Bezeichnung für das System der Borelmengen des n-dimensionalen reellen Vektorraumes R^n wählen) festgelegt. Das System dieser Ereignisse (n durchläuft alle natürlichen Zahlen) erzeugt $\mathfrak{M}$ (s. Anhang A) und ist abgeschlossen gegenüber endlicher Durchschnittsbildung. Deshalb ist P eindeutig bestimmt und muß also mit $P_L * \delta_\Gamma$ übereinstimmen.

Satz 5.1. *Wenn L stationär ist, dann ist auch P_L stationär, und es gilt*

(5.6) $$P_L^0 = P_L * L^0\,.$$

Beweis. Durch

$$P_L^r(A) = P_L(T_{-r} A) \qquad (A \in \mathfrak{M},\, r \in G)$$

wird ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß P_L definiert. Für alle $u \in F(M)$ gilt

$$\int u(\Phi)\, P_L^r(d\Phi) = \int u(T_r \Phi)\, P_L(d\Phi)\,.$$

Gemäß (5.5) und (1.1′) erhalten wir unter Berücksichtigung der Stationarität von L für alle $f \in F(G)$:

$$\begin{aligned}\int \exp[-\textstyle\int f(t)\,\Phi(dt)]\,P_L^r(d\Phi) &= \exp[-\textstyle\int f(t-r)\,\Phi(dt)]\,P_L(d\Phi)\\ &= \exp\{-\textstyle\int (1-\exp[-\int f(t)\,(T_{+r}\Phi)(dt)])\,L(d\Phi)\}\\ &= \exp\{-\textstyle\int (1-\exp[-\int f(t)\,\Phi(dt)])\,L(d\Phi)\}\,.\end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 5.1 muß also $P_L^r = P_L$ sein, d.h. P_L ist stationär. Aus (5.3′) und (5.2′) folgt für $v \in F(G \times M)$:

$$\iint v(t,\, T_t\Phi)\,\Phi(dt)\,P_L(d\Phi) = \iiint v(t,\, T_t E_\Psi)\,\Phi(dt)\,\Psi(d\Phi)\,Q_L(d\Psi)\,.$$

Nach (3.1) ergibt sich weiterhin, da $E_{\Psi+\delta_\Phi} = E_\Psi + \Phi$ ist:

$$\iiint v(t,\, T_t E_\Psi)\,\Phi(dt)\,\Psi(d\Phi)\,Q_L(d\Psi) = \iiint v(t,\, T_t E_\Psi + T_t\Phi)\,\Phi(dt)\,L(d\Phi)\,Q_L\,(d\Psi)$$

Wegen (2.9) und (5.3′) ist das letzte Integral gleich

$$\begin{aligned}\iiint v(t,\, T_t E_\Psi + \Phi)\,dt\,L^0(d\Phi)\,Q_L(d\Psi) &= \iiint v(t,\, T_t\Phi' + \Phi)\,dt\,L^0(d\Phi)\,P_L(d\Phi')\\ &= \iiint v(t,\, \Phi' + \Phi)\,dt\,L^0(d\Phi)\,P_L(d\Phi')\,.\end{aligned}$$

Beim Schluß auf die letzte Zeile wurde benutzt, daß P_L stationär ist. Wir haben insgesamt erhalten (s. (2.9)):

$$\iint v(t,\, \Phi)\,dt\,P_L^0(d\Phi) = \iiint v(t,\, \Phi + \Phi')\,dt\,L^0(d\Phi)\,P_L(d\Phi') \qquad (v \in F(G \times M))\,.$$

Daraus folgt die Gleichung (5.6). Damit ist der Beweis beendet.

Es erhebt sich die Frage, ob überhaupt stationäre Maße L existieren, die der Forderung (5.1) genügen. Solche L lassen sich aber in der Tat leicht konstruieren: Es sei z.B. C_0 eine fest gewählte Menge aus $\mathfrak{C}$ und K ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[M, \mathfrak{M}]$ mit $K(\{0\}) = 0$ und $K\{\Phi\colon \Phi \in M,\ \Phi(G - C_0) \neq 0\} = 0$. Dann können wir ein L definieren durch

$$\int f(\Phi)\,L(d\Phi) = \iint f(T_t\Phi)\,dt\,K(d\Phi) \qquad (f \in F(M))\,.$$

Die folgenden Untersuchungen haben das Ziel, gewisse Umkehrungen von Satz 5.1 zu beweisen.

Hilfssatz 5.2. *Wenn das σ-endliche Maß W und das stationäre Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $[M, \mathfrak{M}]$ in der Beziehung*

$$P^0 = P * W \tag{5.7}$$

zueinander stehen, dann gilt für alle Funktionen aus (5.4):

$$\begin{aligned}\alpha(f) = \iint f(s)\,(1-\exp[-\textstyle\int f(s+t)\,\Phi(dt)])\,(\int f(s+t)\,\Phi(dt))^{-1} \times\\ \times\, ds\,W(d\Phi) < \infty\,.\end{aligned}\tag{5.8}$$

(*Die Funktion* $(1-e^{-\xi})\xi^{-1}$ *wird für* $\xi = 0$ *gleich* 1 *gesetzt.*)
und

$$\int \exp[-\textstyle\int f(t)\,\Phi(dt)]\,P(d\Phi) = \exp[-\alpha(f)]\,. \tag{5.9}$$

Beweis. Nach (2.9), (1.1′) erhält man, ausgehend von der Identität

$$\begin{aligned}\chi(x) &= \int (1-\exp[-x\textstyle\int f(t)\,\Phi(dt)])\,P(d\Phi)\\ &= \displaystyle\iint\int_0^x f(s)\exp[-y\textstyle\int f(t)\,\Phi(dt)]\,dy\,\Phi(ds)\,P(d\Phi) \quad (x \geqq 0)\end{aligned}$$

die Beziehung

$$\chi(x) = \iint\int_0^x f(s) \exp[-y \int f(s+t)\, \Phi(dt)]\, dy\, ds\, P^0(d\Phi),$$

oder nach (5.7), (2.14′)

$$\chi(x) = \iiint_0^x\int f(s) \exp[-y \int f(s+t)\, \Phi'(dt)] \exp[-y \int f(s+t)\, \Phi(dt)] \times \\ \times P(d\Phi')\, dy\, ds\, W(d\Phi),$$

und schließlich infolge der Stationarität von P

$$\chi(x) = \iint\int_0^x \{\int \exp[-y \int f(t)\, \Phi'(dt)]\, P(d\Phi')\} \exp[-y \int f(s+t)\, \Phi(dt)] \times \\ \times f(s)\, dy\, ds\, W(d\Phi).$$

Das bedeutet für

$$\psi(x) = \int \exp[-x \int f(t)\, \Phi\, (dt)]\, P(d\Phi) \quad \text{mit} \quad x \geqq 0:$$

(5.10) $$1 - \psi(x) = \iint\int_0^x \psi(y) f(s) \exp[-y \int f(s+t)\, \Phi(dt)]\, ds\, W(d\Phi)\, dy.$$

Die positive Funktion $\psi(x) \leqq 1$ ist monoton nicht wachsend, daher erhalten wir aus der letzten Beziehung für alle $x \geqq 0$:

(5.11) $$\psi(x) \iint\int_0^x \exp[-y \int f(s+t)\, \Phi(dt)] f(s)\, dy\, ds\, W(d\Phi) \leqq 1 - \psi(x) < \infty.$$

Der Integralausdruck auf der linken Seite ist aber gleich $\alpha(xf)$. Damit ist die Behauptung (5.8) bewiesen. Aus (5.11) folgt außerdem für alle $y > 0$:

(5.12) $$\iint \exp[-y \int f(s+t)\, \Phi(dt)] f(s)\, ds\, W(d\Phi) < \infty.$$

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß dieser Integralausdruck stetig von y abhängt. Da auch $\psi(y)$ stetig in y ist, folgt aus (5.10), daß $\psi(x)$ sogar differenzierbar und

(5.13) $$\frac{d}{dx}\psi(x) = -\psi(x)\frac{d}{dx}\alpha(xf) \quad (x > 0)$$

ist. Mit der Anfangsbedingung $\psi(0) = 1$ ergibt sich dann

$$\psi(x) = \exp[-\alpha(xf)]$$

und für $x = 1$ die Gleichung (5.9), die bewiesen werden sollte.

Wir kommen nun zu einer Umkehrung von Satz 5.1:

Satz 5.2. *Das σ-endliche Maß L auf $[M, \mathfrak{M}]$ sei stationär, ebenso das Wahrscheinlichkeitsmaß P. Es gelte*

(5.14) $$P^0 = P * L^0.$$

Dann genügt L der Bedingung (5.1), *und es ist $P = P_L$.*

Beweis. Nach (2.9) gilt für die in (5.4) angegebenen Funktionen $f \in F(G)$:

$$\iint f(s)\,(1 - \exp[-\int f(s+t)\, \Phi(dt)])\,(\int f(s+t)\, \Phi(dt))^{-1}\, ds\, L^0(d\Phi) \\ = \int (1 - \exp[-\int f(t)\, \Phi(dt)])\, L(d\Phi).$$

Die Behauptung des Satzes folgt nun aus den Hilfssätzen 5.2 und 5.1.

Hilfssatz 5.3. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz* 5.2 *gilt für die in* (5.4) *angegebenen Funktionen* $f \in F(G)$ *und für alle* $B \in \mathfrak{G}$, $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$:

$$\iint k_B(s) \exp[-\textstyle\int f(s+t)\, \Phi(dt)]\, ds\, W(d\Phi) < \infty\,, \tag{5.15}$$

und, wenn C_1 *das Element* 0 *im Innern enthält,*

$$\int \exp[-\textstyle\int f(t)\, \Phi(dt)]\, W(d\Phi) < \infty\,, \tag{5.16}$$

$$\int \Phi(B) \exp[-\textstyle\int f(t)\, \Phi(dt)]\, W(d\Phi) < \infty\,. \tag{5.17}$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus (5.12). Wenn C_1 in seinem Innern das Element 0 enthält, dann existiert eine kompakte Umgebung C' von 0 mit der Eigenschaft

$$\{t : t = t_1 - t_2;\, t_1, t_2 \in C'\} \subset C_1\,.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\mu(C') \int \exp[-\textstyle\int f(t)\, \Phi(dt)]\, W(d\Phi) &\leqq \mu(C') \int \exp[-\sigma_1 \Phi(C_1)]\, W(d\Phi)\\ &\leqq \iint k_{C'}(s) \exp[-\sigma_1 \textstyle\int k_{C'}(s+t)\, \Phi(dt)]\, ds\, W(d\Phi)\,.\end{aligned}$$

Der letzte Integralausdruck ist nach (5.12) endlich. Außerdem gilt $\mu(C') > 0$. Damit ist (5.16) bewiesen. Was die letzte Behauptung anbetrifft, so setzen wir $\sigma = \min\, (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ und erhalten:

$$\begin{aligned}\sigma \int \Phi(B) \exp[-\textstyle\int f(t)\, \Phi(dt)]\, W(d\Phi) &\leqq \int [\textstyle\int f(t)\, \Phi(dt)] \exp[-\textstyle\int f(t)\, \Phi(dt)]\, W(d\Phi)\\ &\leqq 2 \int \exp[-\tfrac{1}{2} \textstyle\int f(t)\, \Phi(dt)]\, W(d\Phi)\,.\end{aligned}$$

Dabei wurde die Ungleichung $x e^{-x} \leqq 2 e^{-x/2}$ $(-\infty < x < \infty)$ benutzt. Die Behauptung (5.17) folgt jetzt aus (5.16), wenn man dort f durch die neue Funktion $\frac{1}{2} f$ ersetzt, die auch den Voraussetzungen des Hilfssatzes entspricht.

Satz 5.3. *Wenn das* σ*-endliche Maß* W *und das stationäre Wahrscheinlichkeitsmaß* P *auf* $[M, \mathfrak{M}]$ *der Beziehung* $P^0 = P * W$ *genügen, und* $W(\{0\}) = q$ *ist, dann existiert genau ein stationäres Maß* L *mit* $L(\{0\}) = 0$ *auf* $[M, \mathfrak{M}]$, *das* (5.1) *erfüllt, so daß* $W - q\,\delta_0 = L^0$ *und* $P = P_L * \delta_{q\mu}$ *ist.*

Beweis. Wir setzen

$$v(t, \Phi) = k_B(t) \exp[-\textstyle\int f(s)\, \Phi(ds)]$$

mit

$$f(t) = \sigma_1 k_{C_1}(t) + \cdots + \sigma_n k_{C_n}(t) \quad (C_1, \ldots, C_n \in \mathfrak{C};\ \sigma_1, \ldots, \sigma_n > 0)$$

und $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. C_1 soll eine Nullumgebung sein. Nach Satz 2.5 gilt

$$\iint v(t, \Phi)\, \Phi(dt)\, P^0(d\Phi) = \iint v(-t, T_t\Phi)\, \Phi(dt)\, P^0(d\Phi)$$

oder unter Berücksichtigung der Voraussetzung $P^0 = P * W$

$$\begin{aligned}&\iiint v(t, \Phi + \Phi')\, \Phi'(dt)\, W(d\Phi)\, P(d\Phi') + \iiint v(t, \Phi + \Phi')\, \Phi(dt)\, W(d\Phi)\, P(d\Phi')\\ &\quad = \iiint v(-t, T_t\Phi + T_t\Phi')\, \Phi'(dt)\, W(d\Phi)\, P(d\Phi')\\ &\quad + \iiint v(-t, T_t\Phi + T_t\Phi')\, \Phi(dt)\, W(d\Phi)\, P(d\Phi')\,.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Mit (2.9) und (5.7) erhalten wir, wenn wir außerdem die Stationarität von P

berücksichtigen

$$\begin{aligned}
&\iiint v(t, \Phi + \Phi')\, \Phi'(dt)\, W(d\Phi)\, P(d\Phi') \\
&= \iiint v(t, T_{-t}\Phi' + \Phi)\, dt\, W(d\Phi)\, P^0(d\Phi') \\
&= \iiiint v(t, T_{-t}\Phi'' + \Phi' + \Phi)\, dt\, W(d\Phi)\, W(d\Phi'')\, P(d\Phi'). \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\iiint v(-t, T_t\Phi + T_t\Phi')\, \Phi'(dt)\, W(d\Phi)\, P(d\Phi') \\
&= \iiint v(-t, T_t\Phi + \Phi')\, dt\, W(d\Phi)\, P^0(d\Phi') \\
&= \iiiint v(-t, T_t\Phi + \Phi'' + \Phi')\, dt\, W(d\Phi)\, W(d\Phi'')\, P(d\Phi'). \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

Die beiden Integralausdrücke (5.19) und (5.20) sind gleich und nach Hilfssatz 5.3 endlich. Somit folgt aus (5.18):

$$\begin{aligned}
&\iiint v(t, \Phi + \Phi')\, \Phi(dt)\, W(d\Phi)\, P(d\Phi') = \\
&= \iiint v(-t, T_t\Phi + T_t\Phi')\, \Phi(dt)\, W(d\Phi)\, P(d\Phi').
\end{aligned}$$

Da

$$\int \exp[-\int f(s)\, \Phi'(ds)]\, P(d\Phi') = \int \exp[-\int f(s)\, (T_t\Phi')\, (ds)]\, P(d\Phi') > 0$$

gilt, erhalten wir schließlich

$$\iint v(t, \Phi)\, \Phi(dt)\, W(d\Phi) = \iint v(-t, T_t\Phi)\, \Phi(dt)\, W(d\Phi)$$

oder mit $\tilde{W} = W - q\,\delta_0$:

$$\iint v(t, \Phi)\, \Phi(dt)\, \tilde{W}(d\Phi) = \iint v(-t, T_t\Phi)\, \Phi(dt)\, \tilde{W}(d\Phi). \qquad (5.21)$$

Es kommt nun darauf an, nachzuweisen, daß die letzte Gleichung für *alle* $v \in F(G \times M)$ richtig ist. Aus Satz 2.5 folgt dann, daß $\tilde{W}$ Palmsches Maß zu einem stationären σ-endlichen Maß L ist: $W = L^0 + q\,\delta_0$. Gemäß Satz 2.4 ist L eindeutig bestimmt. Aus Hilfssatz 5.2 erhält man schließlich unter Benutzung der Formel (2.9):

$$\begin{aligned}
&\int \exp[-\int f(t)\, \Phi(dt)]\, P(d\Phi) \\
&\quad = \exp[-q \int f(t)\, dt] \exp\{-\int (1 - \exp[-\int f(t)\, \Phi(dt)])\, L(d\Phi).
\end{aligned}$$

Dann folgt aus Hilfssatz 5.1 $P = P_L * \delta_{q\mu}$.
Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß (5.21) für alle $v \in F(G \times M)$ gilt. Wir definieren zwei Maße ω_1 und ω_2 auf $[G, \mathfrak{G}] \times [M, \mathfrak{M}]$:

$$\begin{aligned}
\omega_1(A) &= \iint k_A([t, \Phi])\, \Phi(dt)\, \tilde{W}(d\Phi) \qquad (A \in \mathfrak{G} \times \mathfrak{M}) \\
\omega_2(A) &= \iint k_A([-t, T_t\Phi])\, \Phi(dt)\, \tilde{W}(d\Phi).
\end{aligned}$$

Weiterhin sei

$$U(C_1, \ldots, C_n; J) = \{\Phi : \Phi \in M, [\Phi(C_1), \ldots, \Phi(C_n)] \in J\} \quad (J \in \mathfrak{B}_n).$$

Wenn wir

$$\begin{aligned}
\nu_1(J) &= \omega_1(B \times U(C_1, \ldots, C_n; J)) \qquad (J \in \mathfrak{B}_n) \\
\nu_2(J) &= \omega_2(B \times U(C_1, \ldots, C_n; J))
\end{aligned}$$

setzen, dann geht (5.21) über in

$$\int \exp[-\sigma_1 x_1 - \cdots - \sigma_n x_n]\, \nu_1(dx_1, \ldots, dx_n) = \int \exp[-\sigma_1 x_1 - \cdots - \sigma_n x_n]\, \nu_2(dx_1, \ldots, dx_n)\,.$$

Beide Seiten sind endlich, da nach Hilfssatz 5.3, (5.17) die linke Seite der Gleichung (5.21) endlich ist. Die Laplace-Stieltjes-Transformierten der Maße ν_1, ν_2 auf $[R_n, \mathfrak{B}_n]$ stimmen also überein und sind für alle $\sigma_i > 0$ endlich. Daraus folgt $\nu_1 = \nu_2$. Die Maße ω_1, ω_2 sind somit σ-finit und nehmen auf den Mengen der Gestalt $B \times U(C_1, \ldots, C_n; J)$ mit $J \in \mathfrak{B}_n$; $C_1, \ldots, C_n \in \mathfrak{C}$; $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ gleiche Werte an. Die letzte Forderung kann abgeschwächt werden zu $B \subset C$, wobei C irgendein Kompaktum ist; denn es gilt

$$U(C_1, \ldots, C_n; J) = U(C_1, \ldots, C_n, C; J \times R_1)\,.$$

Diese $B \times U$ bilden einen erzeugenden Halbring für $\mathfrak{G} \times \mathfrak{M}$. Daher sind die Maße ω_1 und ω_2 gleich. Daraus folgt schließlich, daß (5.21) für jedes $v \in F(G \times M)$ richtig ist. Der Beweis ist beendet.

Wenn L auf der Menge der Maße $\delta_t (t \in G)$ konzentriert ist — die Meßbarkeit dieser Untermenge von M folgt aus den Betrachtungen in Abschnitt 4 —, dann ist P_L ein Poissonscher Prozeß auf G. Die Poissonschen Prozesse wurden wegen ihrer vergleichsweisen Einfachheit schon gesondert in Abschnitt 4 behandelt. Satz 4.1 kann jetzt aus den Sätzen 5.1 und 5.2 gefolgert werden. Dabei zeigt sich, daß auf die Forderung $P(M') = 1$ in Satz 4.1 c) verzichtet werden kann. Denn $\lambda\Delta$ ist das Palmsche Maß zu einem stationären Maß V, das ausgehend vom Haarschen Maß $\lambda\mu$ bei der Abbildung $t \to \delta_t$ von $[G, \mathfrak{G}]$ in $[M, \mathfrak{M}]$ auf dem meßbaren Raum $[M, \mathfrak{M}]$ induziert wird. Nach Satz 5.2 folgt deshalb aus $P^0 = P * \lambda\Delta$, daß $P = P_V$ ist. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß P der stationäre Poissonsche Prozeß mit der Intensität λ ist.

6. Unbegrenzt teilbare stationäre zufällige Maße

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $[M, \mathfrak{M}]$ heißt unbegrenzt teilbar, wenn für jedes $n = 2, 3, \ldots$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_n existiert, derart daß $P = \underbrace{P_n * P_n * \cdots * P_n}_{n\text{-mal}}$ gilt. Wir schreiben dafür kürzer

$$P = P_n{}^n. \tag{6.1}$$

Beispiele für stationäre unbegrenzt teilbare Wahrscheinlichkeitsmaße auf $[M, \mathfrak{M}]$ sind die $P_L * \delta_{q\mu}$ (L stationär, $q \geqq 0$) aus Abschnitt 5; denn aus (5.5) folgt

$$P_L * \delta_{q\mu} = (P_{1/nL} * \delta_{q/n\,\mu})^n.$$

Die folgenden Untersuchungen werden zeigen, daß damit bereits alle stationären unbegrenzt teilbaren zufälligen Maße auf G erfaßt sind. Die Eigenschaft, unbegrenzt teilbar zu sein, ist somit charakteristisch für die in Abschnitt 5 behandelten stationären $P_L * \delta_{q\mu}$.

Aus (6.1) folgt nach Satz 2.6: $P^0 = n\,P_n^{n-1} * P_n^0$ oder

$$P^0 * P_n = P * n\,P_n^0\,. \tag{6.2}$$

Es wird gezeigt, daß man daraus auf die Existenz eines σ-endlichen Maßes W

schließen kann, das mit P in der Beziehung (5.7) steht. (Für $P_L * \delta_{q\mu}$ folgt diese Relation bereits aus Satz 5.1.)

Hilfssatz 6.1. *P sei ein stationäres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[M, \mathfrak{M}]$ und C eine kompakte Nullumgebung. Dann ist $\int \exp[-\Phi(C)]\, P^0(d\Phi)$ endlich.*

Beweis. Es existiert eine kompakte Umgebung C' des Nullelementes der Gruppe mit $\{t : t = t_1 - t_2;\ t_1,\ t_2 \in C'\} \subset C$.

Nach (2.9) gilt nun

$$\begin{aligned}\mu(C') \int \exp[-\Phi(C)]\, P^0(d\Phi) &= \int\int k_{C'}(t) \exp[-\Phi(C+t)]\, \Phi(dt)\, P(d\Phi)\\ &\leqq \int \Phi(C') \exp[-\Phi(C')]\, P(d\Phi)\,.\end{aligned}$$

Das letzte Integral ist endlich, da der Integrand beschränkt ist.

Wir setzen für alle Maße Q, die in der Gleichung (6.2) vorkommen,

$$\hat{Q}(d\Phi) = \exp[-\Phi(C)]\, Q(d\Phi);$$

dabei soll C eine beliebige kompakte Nullumgebung sein, die aber in den folgenden Untersuchungen fest bleibt. Dann geht (6.2) über in

$$\hat{P}^0 * \hat{P}_n = \hat{P} * n\, \hat{P}_n^0. \tag{6.3}$$

Nach Hilfssatz 6.1 ist $\hat{P}^0(M) < \infty$. (Bei Beschränkung auf den Spezialfall $P^0(M) < \infty$ ist der Kunstgriff des Übergangs von Q zu $\hat{Q}$ unnötig.) Der Fall $P(\{0\}) = 1$ ist trivial und braucht nicht näher erörtert zu werden. Wenn $P(\{0\}) < 1$ gilt, dann folgt $\hat{P}^0(M) > 0$. Das Haarsche Maß läßt sich dann so normieren, daß

$$\hat{P}^0(M) = \hat{P}(M) \tag{6.4}$$

wird.

Es sei $\{O_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ wieder eine abzählbare Basis für die Topologie von G mit der Eigenschaft, daß die abgeschlossenen Hüllen $\bar{O}_i$ kompakt sind. Das Mengensystem der $\bar{O}_i$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}_0$. $\mathfrak{C}_1$ sei das kleinste Mengensystem, das $\mathfrak{C}_0$ umfaßt und abgeschlossen ist gegenüber der Bildung endlicher Durchschnitte und Vereinigungen. $\mathfrak{C}_1$ besteht aus sämtlichen endlichen Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathfrak{C}_0$, umfaßt also abzählbar viele kompakte Mengen. Mit $\mathfrak{D}$ werde das System aller endlichen Vereinigungen elementfremder Mengen der Gestalt $C_1 - C_2$ mit $C_1, C_2 \in \mathfrak{C}_1$ bezeichnet. Dann ist $\mathfrak{D}$ ein erzeugender Ring für $\mathfrak{G}$, der abzählbar viele Elemente $B_1, B_2, \ldots$ enthält.

Wir setzen

$$u(\Phi) = \begin{cases} 1 & \text{für}\quad \Phi(B_1) < x_1, \ldots, \Phi(B_k) < x_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \ldots;\ B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{D})\,.$$

Aus $P_n = P_{2n} * P_{2n}$ folgt (Satz 2.6) $P_n^0 = 2\, P_{2n}^0 * P_{2n}$ und weiter $\hat{P}_n^0 = 2\, \hat{P}_{2n}^0 * \hat{P}_{2n}$. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}\int u(\Phi)\, \hat{P}_n^0(d\Phi) &= 2 \int\int u(\Phi + \Phi')\, \hat{P}_{2n}^0(d\Phi)\, \hat{P}_{2n}(d\Phi')\\ &\leqq 2 \int\int u(\Phi)\, \hat{P}_{2n}^0(d\Phi)\,.\end{aligned}$$

Somit bilden die monotonen von links stetigen Funktionen

$$\Omega_{B_1, \ldots, B_k}^{(m)}(x_1, \ldots, x_k) = 2^m\, \hat{P}_{2^m}^0\{\Phi : \Phi(B_1) < x_1, \ldots, \Phi(B_k) < x_k\}$$

eine monoton aufsteigende Folge. Aus (6.3) und (6.4) folgt

$$\Omega^{(m)}_{B_1,\ldots,B_k}(\infty,\ldots,\infty) = \hat{P}_{2^m}(M) = [\hat{P}(M)]^{1/2^m} \leqq 1.$$

Daran läßt sich leicht ablesen, daß die $\Omega^{(m)}_{B_1,\ldots,B_k}(x_1,\ldots,x_k)$ gegen eine Verteilungsfunktion $\Omega_{B_1,\ldots,B_k}(x_1,\ldots,x_k)$ streben.

Es bezeichne $\tilde{M}$ das System aller nichtnegativen Mengenfunktionen $\tilde{\Phi}$ auf dem System $\mathfrak{D}$. $\tilde{\mathfrak{M}}$ sei die kleinste σ-Algebra, bez. der alle Funktionen $z_B(\tilde{\Phi}) = \tilde{\Phi}(B)$ $(B \in \mathfrak{D})$ meßbar sind. Im Anhang wird gezeigt, daß M in $\tilde{\mathfrak{M}}$ enthalten[3] und somit $\mathfrak{M} \subset \tilde{\mathfrak{M}}$ ist. Indem wir nun $\Omega_{B_1,\ldots,B_k}(x_1,\ldots,x_k)$ als Verteilungsfunktion des Vektors $[\tilde{\Phi}(B_1),\ldots,\tilde{\Phi}(B_k)]$ auffassen, gewinnen wir ein Verteilungsgesetz $\hat{W}_{B_1,\ldots B_k}$ auf der σ-Unteralgebra $\tilde{\mathfrak{M}}_{B_1,\ldots,B_k}$ von $\tilde{\mathfrak{M}}$, die aus den Mengen der Gestalt

$$\{\tilde{\Phi} : [\tilde{\Phi}(B_1),\ldots,\tilde{\Phi}(B_k)] \in J\} \quad (J \in \mathfrak{B}_n) \tag{6.5}$$

besteht. Da

$$\Omega^{(m)}_{B_1,\ldots,B_k,B_{k+1},\ldots,B_{k+l}}(x_1,\ldots,x_k,\infty,\ldots,\infty) = \Omega^{(m)}_{B_1,\ldots,B_k}(x_1,\ldots,x_k)$$

gilt, sind auch die Ω miteinander verträglich, und aus dem Konsistenztheorem von Kolmogoroff ([8], 4.3 A.) folgt, daß ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\hat{W}$ auf $[\tilde{M}, \tilde{\mathfrak{M}}]$ existiert, das auf $\tilde{\mathfrak{M}}_{B_1,\ldots,B_k}$ mit $\hat{W}_{B_1,\ldots,B_k}$ zusammenfällt.

Gemäß (6.3) gilt:

$$\begin{aligned} &\int \hat{P}_{2^m}\{\Phi' : \Phi'(B_1) < x_1 - \Phi(B_1),\ldots,\Phi'(B_k) < x_k - \Phi(B_k)\}\, \hat{P^0}(d\Phi) \\ &\quad = \int \Omega^{(m)}_{B_1,\ldots,B_k}(x_1 - \Phi(B_1),\ldots,x_k - \Phi(B_k))\, \hat{P}(d\Phi)\,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Der Integrand auf der linken Seite der Gleichung strebt gegen 1, falls

$$\Phi(B_1) < x_1,\ldots,\Phi(B_k) < x_k\,.$$

(Wenn der Integrand mit ϱ_m bezeichnet wird, dann gilt für alle k: $\varrho_m \leqq \varrho^{2^k}_{m+k}$ und $\varrho_m > 0$ für genügend großes m.) Durch den Grenzübergang $m \to \infty$ erhalten wir somit aus (6.6), wenn wir alle Maße auf $[M, \mathfrak{M}]$ als solche über $[\tilde{M}, \tilde{\mathfrak{M}}]$ auffassen:

$$\begin{aligned} &\hat{P^0}\{\tilde{\Phi} : \tilde{\Phi}(B_1) < x_1,\ldots,\tilde{\Phi}(B_k) < x_k\} \\ &\quad = \int \hat{W}\{\tilde{\Phi} : \tilde{\Phi}(B_1) < x_1 - \tilde{\Phi}'(B_1),\ldots,\tilde{\Phi}(B_k) < x_k - \tilde{\Phi}'(B_k)\}\, \hat{P}(d\tilde{\Phi}')\,. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Die Faltungsoperation „$*$" erklären wir für Maße auf $[\tilde{M}, \tilde{\mathfrak{M}}]$ in genau der gleichen Weise wie im Falle $[M, \mathfrak{M}]$. Aus (6.7) folgt, daß $\hat{P^0}$ und $\hat{P} * \hat{W}$ auf den Mengen der Gestalt (6.5) (B_i und k beliebig) übereinstimmen. Dieses Mengensystem erzeugt aber $\tilde{\mathfrak{M}}$ und ist abgeschlossen gegenüber der Bildung endlicher Durchschnitte. Daher muß gelten

$$\hat{P^0} = \hat{P} * \hat{W}\,. \tag{6.8}$$

Aus (6.8) und der Tatsache, daß $\hat{P^0}$ und $\hat{P}$ auf M konzentriert sind, folgt, daß

[3] Wenn man die $\Phi \in M$ als Mengenfunktionen auf $\mathfrak{D}$ auffaßt.

auch $\hat{W}(\tilde{M} - M) = 0$ sein muß. Wir können also von jetzt ab $\hat{W}$ als Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[M, \mathfrak{M}]$ auffassen. Aus (6.8) folgt für alle $u \in F(M)$

$$\int \exp[\Phi(C)]\, u(\Phi)\, \hat{P^0}(d\Phi) = \\ = \iint u(\Phi + \Phi') \exp[\Phi(C)] \exp[\Phi'(C)]\, \hat{P}(d\Phi')\, \hat{W}(d\Phi)$$

oder mit $W(d\Phi) = \exp[\Phi(C)]\, \hat{W}(d\Phi)$

$$P^0 = P * W\,. \tag{6.9}$$

Nach Satz 5.3 existiert dann also ein stationäres Maß L, derart, daß $P = P_L * \delta_{q\mu}$ ist, was gezeigt werden sollte.

Die Ergebnisse der Abschnitte 5 und 6 können wir in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 6.1. *Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $[M, \mathfrak{M}]$ sind folgende vier Aussagen äquivalent:*

1) *P ist stationär und unbegrenzt teilbar,*

2) *P ist stationär und es existiert ein σ-endliches Maß W auf $[M, \mathfrak{M}]$, so daß $P^0 = P * W$ gilt.*

3) *Es existieren eine Zahl $q \geqq 0$ und ein stationäres Maß L auf $[M, \mathfrak{M}]$, das der Forderung* (5.1) *genügt, so daß $P = P_L * \delta_{q\mu}$ ist.*

4) *Es existieren ein q und L wie in* 3), *so daß für alle $f \in F(G)$*

$$\int \exp[-\int f(t)\, \Phi(dt)]\, P(d\Phi) = \\ = \exp\{-q \int f(t)\, dt - \int (1 - \exp[-\int f(t)\, \Phi(dt)])\, L(d\Phi)\}$$

gilt.

Zwischen W und L besteht der Zusammenhang $L^0 = W - W(\{0\})\, \delta_{\mathbf{0}}$.

Die Aussagen, die man aus diesem Satz (ohne 3)) bei Spezialisierung auf die zufälligen Punktfolgen ohne Mehrfachpunkte ($G = R_1$, mit Wahrscheinlichkeit 1 ist Φ eine abzählbar unendliche Summe von paarweise verschiedenen δ-Maßen) erhält, wurden mit anderen Methoden bereits in den Arbeiten [5], [6] von Kerstan und Matthes bewiesen.

Anhang: Meßbarkeitsfragen

A. Mit $\mathfrak{G}_0$ werde das System derjenigen Mengen aus G bezeichnet, die sich als endliche Vereinigungen paarweise elementfremder Mengen der Gestalt $C_1 - C_2$ ($C_1, C_2 \in \mathfrak{C}$) darstellen lassen. $\mathfrak{G}_0$ ist ein erzeugender Ring für $\mathfrak{G}$. Somit ist $\mathfrak{G}$ die kleinste Mengenklasse über $\mathfrak{G}_0$, die abgeschlossen ist gegenüber der Bildung der Vereinigung monoton aufsteigender und des Durchschnitts monoton fallender Mengenfolgen.

$\hat{\mathfrak{M}}$ sei die kleinste σ-Algebra von Teilmengen aus M, bez. der alle Funktionen $z_C(\Phi) = \Phi(C)$ ($C \in \mathfrak{C}$) meßbar sind. Dann sind auch alle Funktionen z_A ($A \in \mathfrak{G}_0$) meßbar auf $[M, \hat{\mathfrak{M}}]$. Da $\mathfrak{G}$, wie wir eben gesehen hatten, das kleinste monotone Mengensystem über $\mathfrak{G}_0$ ist, sind schließlich auch alle z_B ($B \in \mathfrak{G}$) meßbar bez. $\hat{\mathfrak{M}}$. Damit ist nachgewiesen, daß $\hat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$ ist, oder mit anderen Worten: $\mathfrak{M}$ wird bereits von den Funktionen z_C ($C \in \mathfrak{C}$) erzeugt.

B. Um nachzuweisen, daß in allen in der Arbeit auftretenden Fällen die Operation T_t meßbare Funktionen immer wieder in meßbare Funktionen überführt, stützt man sich auf die Tatsache, daß $[t, \Phi] \to T_t\Phi$ eine meßbare Abbildung von $[G, \mathfrak{G}] \times [M, \mathfrak{M}]$ auf $[M, \mathfrak{M}]$ ist. Das sieht man folgendermaßen ein: Es genügt nachzuweisen, daß für alle Borelmengen J der reellen Achse und alle $B \in \mathfrak{G}$ die Menge $\{[t, \Phi] : (T_t\Phi)(B) \in J\}$ meßbar ist. Es gilt

$$(T_t\Phi)(B) = \int k_B(s - t)\, \Phi(ds)\,.$$

Da $[s, t] \to s - t$ eine stetige und damit meßbare Abbildung von $[G, \mathfrak{G}] \times [G, \mathfrak{G}]$ auf $[G, \mathfrak{G}]$ darstellt, ist auch $k_B(s - t)$ meßbar über $[G, \mathfrak{G}] \times [G, \mathfrak{G}]$ und somit $\int k_B(s - t)\, \Phi(ds)$ meßbar über $[G, \mathfrak{G}] \times [M, \mathfrak{M}]$.

C. Mit $\tilde{M}_m^n$ bezeichnen wir die Menge derjenigen $\tilde{\Phi} \in \tilde{M}$, die die Bedingung $\tilde{\Phi}(B_m) - \tilde{\Phi}(B) < 1/n$ für mindestens eine Menge $B \in \mathfrak{D}$ mit $\bar{B} \subset B_m$ erfüllen ($\bar{B}$ abgeschlossene Hülle von B; $\bar{B}$ ist kompakt). Weiterhin sei $\tilde{M}'$ die Menge aller endlichadditiven Mengenfunktionen $\tilde{\Phi} \in \tilde{M}$ auf $\mathfrak{D}$. Die Menge

$$M'' = \bigcap_{m,n} M_m^n \cap \tilde{M}'$$

gehört zu $\tilde{\mathfrak{M}}$; ihre Elemente $\tilde{\Phi}$ sind kompakt im Sinne von MARCZEWSKI [10]. Infolgedessen gilt $M = \tilde{M}''$, wenn wir die $\Phi \in M$ als Mengenfunktionen auf $\mathfrak{D}$ auffassen, und somit $M \in \tilde{\mathfrak{M}}$, was gezeigt werden sollte.

Literatur

1. AMBARZUMJAN, R. W.: Über eine Gleichung für stationäre Punktprozesse (Russisch). Doklady Akad. Nauk Armjanskoi SSR XLII, 141—147 (1966).
2. CHINTSCHIN, A. J.: Arbeiten zur mathematischen Theorie der Massenbedienung (Russisch). Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1963.
3. HALMOS, P. R.: Measure theory. New York: Van Nostrand 1951.
4. JIŘINA, M.: Branching processes with measure-valued states. Trans. 3th Prague Conf. Information Theory, Statist., Decision Functions, 333—357 (1964).
5. KERSTAN, J., u. K. MATTHES: Stationäre zufällige Punktfolgen II. J.-ber. Deutsch. Math. Verein. **66**, 106—118 (1964).
6. — — Verallgemeinerung eines Satzes von SLIWNJAK. Rev. Roumaine math. pures appl. IX, 811—829 (1964).
7. LEE, P. M.: On the axioms of information theory and infinitely divisible random measures. Diss. Cambridge 1965 (Churchill College).
8. LOÈVE, M.: Probability theory. New York: Van Nostrand 1955.
9. LOOMIS, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York: Van Nostrand 1953.
10. MARCZEWSKI, E.: On compact measures. Fundamenta Math. **40**, 113—124 (1953).
11. MATTHES, K.: Stationäre zufällige Punktfolgen I. J.-ber. Deutsch. Math. Verein. **66**, 66—79 (1963).
12. PRÉKOPA, A.: On Poisson and composed Poisson stochastic set functions. Studia Math. **16**, 142—155 (1957).
13. RYLL-NARDZEWSKI, C.: Remarks on processes of calls. Proc. 4th Berkely Sympos. math. Statist. Probability II, 455—465 (1961).
14. SLIWNJAK, J. M.: Einige Eigenschaften stationärer Folgen gleichartiger zufälliger Ereignisse (Russisch). Teor. Verojatn. Primen, 347—352 (1962).

Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität
69 Jena, Helmholtzweg 1