Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
54, 29–40 (1980)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Über notwendige und hinreichende Bedingungen für Konvergenzgeschwindigkeitsaussagen im Falle einer stabilen Grenzverteilung

Gerd Christoph

Technische Universität Dresden, Sektion Mathematik, Mommsenstr. 13, DDR-8027 Dresden

Summary. In this paper we study necessary and sufficient conditions for the rate of convergence to a stable distribution.

1. Einleitung

Es seien X_i, $i=1, 2, \ldots$, eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen, A_n und $B_n>0$ gewisse Konstantenfolgen und

$$S_n=(X_1+X_2+\ldots+X_n-A_n)/B_n \tag{1}$$

die zentrierte und normierte Summe der ersten n Zufallsgrößen der Folge. Mit $F(x)$ bzw. $F_n(x)$ bezeichnen wir die Verteilungsfunktionen der Zufallsgrößen X_1 und S_n und mit $f(t)$ bzw. $f_n(t)$ die entsprechenden charakteristischen Funktionen.

Wir setzen voraus, daß $F(x)$ dem normalen Anziehungsbereich des stabilen Gesetzes $G_{\alpha\beta}(x)$ mit der charakteristischen Funktion $g_{\alpha\beta}(t)=\exp\{\varphi_{\alpha\beta}(t)\}$ angehört. Dabei sind $0<\alpha\leqq 2$, $-1\leqq\beta\leqq 1$ und

$$\varphi_{\alpha\beta}(t)=\begin{cases} -|t|^\alpha\left(1-i\beta\operatorname{sgn} t\tan\dfrac{\alpha}{2}\pi\right) & \text{für } 0<\alpha<2,\ \alpha\neq 1\\ -|t|\left(1+i\beta\dfrac{2}{\pi}\operatorname{sgn} t\ln|t|\right) & \text{für } \alpha=1\\ -t^2/2 & \text{für } \alpha=2.\end{cases}$$

Bei geeigneter Wahl der Konstanten A_n und $B_n>0$ gilt dann

$$F_n(x)\to G_{\alpha\beta}(x) \quad \text{für } n\to\infty \tag{2}$$

im Sinne der schwachen Konvergenz.

In dieser Arbeit werden unter gewissen Bedingungen an die Zufallsgröße X_1 Aussagen über die Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit in (2) hergeleitet und die Optimalität der gestellten Bedingungen für eine Klasse symmetrisch verteilter Zufallsgrößen nachgewiesen.

0044-3719/80/0054/0029/$02.40

Tritt in (2) als Grenzverteilung die standardisierte Normalverteilung ($\alpha=2$) auf, die wie üblich mit $\Phi(x)$ bezeichnet wird, so zeigte I. Ibragimov ([11, Satz 3.4.1]), daß

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)| = O(n^{-(r-2)/2}) \quad \text{für } n\to\infty$$

mit $2<r\leqq 3$ genau dann gilt, wenn im Falle $2<r\leqq 3$

$$z^{r-2}\int_{|x|>z} x^2\,dF(x)=O(1) \quad \text{für } z\to\infty \tag{3}$$

und für $r=3$ zusätzlich

$$\int_{-z}^{z} x^2\,dF(x)=O(1) \quad \text{für } z\to\infty$$

erfüllt sind. C.C. Heyde [9] untersuchte die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+r/2}\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)| \tag{4}$$

mit $2\leqq r<3$ und gab als notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz von (4) die Bedingungen $E|X_1|^r<\infty$ für $2<r<3$ und $EX_1^2\log(1+|X_1|)<\infty$ für $r=2$ an.

Gehört nun $F(x)$ dem normalen Anziehungsbereich eines nichtnormalen stabilen Gesetzes ($\alpha<2$) an, so existieren keine höheren Momente. Deshalb wird, aufbauend auf Arbeiten von H. Bergström [1] und V. Zolotarev [15, 17], die Existenz von Pseudo- bzw. Differenzenmomenten gefordert, um Aussagen über die Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit in (2) zu erhalten. In [3] wird als Verallgemeinerung der Pseudo- und Differenzenmomente das integrale Differenzenmoment eingeführt.

Es seien $K, K_1, K_2, \ldots$ positive Konstanten, $m\geqq 0$ eine ganze Zahl, $r\geqq 0$ eine reelle Zahl, $\delta=r-[r]$, $H_1^+(x)=H_1^-(x)=H(x)=F(x)-G_{\alpha\beta}(x)$,

$$H_m^+(x)=\int_x^{\infty} H_{m-1}^+(y)\,dy, \qquad H_m^-(x)=\int_{-\infty}^{x} H_{m-1}^-(y)\,dy \qquad \text{für } m=2,3,\ldots,$$

$$H_m(x)=-H_m^+(x)+(-1)^m H_m^-(-x), \qquad \overline{H_m}(x)=|H_m^+(x)|+|H_m^-(-x)| \qquad \text{für } m=1,2,\ldots,$$

$$T_r(x)=\int_{|y|>x} |y|^{\delta}\,|dH(y)| \qquad \text{für } r<1$$

bzw.

$$T_r(x)=\int_x^{\infty} y^{\delta}\,\overline{H_{[r]}}(y)\,dy \qquad \text{für } r\geqq 1,$$

$$\rho_m=\begin{cases} 0 & \text{für } m=0\\ m!\displaystyle\int_0^{\infty} H_m(x)\,dx & \text{für } m=1,2,\ldots\end{cases}$$

und

$$\tau_r = \begin{cases} T_r(0) & \text{für } r<1 \\ \prod_{m=0}^{[r]-1} (r-m)\, T_r(0) & \text{für } r \geqq 1. \end{cases}$$

Die Größe τ_r heißt absolutes integrales Differenzenmoment der Ordnung r und ρ_m integrales Differenzenmoment der Ordnung m, wenn $\tau_m < \infty$ ist (s. [3]). Im weiteren benötigen wir auch die Größe

$$\gamma_r = \begin{cases} \sup\limits_{z>0} z^{\delta}\, T_{[r]}(z) & \text{für } r \neq [r] \\ \sup\limits_{z>0} \left\{ \left| \int\limits_0^z H_r(x)\, dx \right| + z\, T_{r-1}(z) \right\} & \text{für } r=1,2,\ldots \end{cases},$$

die als abgeschnittenes integrales Differenzenmoment bezeichnet wird.

Im Falle $r \neq [r]$ gilt $\gamma_r \leqq \tau_r$. Ist $r=[r]$, so lassen sich γ_r und τ_r nicht vergleichen. Für $\alpha=2$ und $r=3$ verallgemeinert γ_3 die von C.-G. Esseen [6], M. Gafurov [8] und S. Steišunas [14] eingeführten abgeschnittenen Momente und abgeschnittenen Pseudomomente.

2. Aussagen über die Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit

In (1) wählen wir nun $A_n=0$ für $\alpha \neq 1$ bzw. $A_n = n\beta \frac{2}{\pi} \ln n$ für $\alpha=1$ und $B_n = n^{1/\alpha}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $EX_1=0$ für $\alpha>1$ und $EX_1^2=1$ für $\alpha=2$ voraussetzen. Weiterhin sei

$$s = \begin{cases} [r] & \text{für } r \neq [r] \\ r-1 & \text{für } r=[r] \end{cases}. \tag{5}$$

Satz 1. *Es sei $\alpha < r \leqq \alpha+1$. Sind für die Zufallsgröße X_1 die Bedingungen $\gamma_r < \infty$ und $\rho_0 = \ldots = \rho_s = 0$ erfüllt, dann gilt für $n \geqq 1$*

$$\sup_x |F_n(x) - G_{\alpha\beta}(x)| \leqq K \max\left(\gamma_r, \gamma_r^{\frac{1}{r+1}} n^{-\frac{(\alpha+1-r)r}{(r+1)\alpha}}\right) n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}.$$

Die Konstante K hängt dabei nur von r und α ab.

Dieser Satz ist im Falle $r \neq [r]$ eine Verallgemeinerung des Satzes 1 aus [3]. Für $\alpha=2$ und $r=3$ folgen aus Satz 1 die Ergebnisse der Arbeiten [6, 8, 14] (für identisch verteilte Zufallsgrößen im eindimensionalen Fall).

Satz 2. *Es sei $\alpha \leqq r < \alpha+1$. Sind für die Zufallsgröße X_1 die Bedingungen $\tau_r < \infty$, $\rho_0 = \ldots = \rho_{[r]} = 0$ und im Falle $r=[r]$ zusätzlich*

$$\int\limits_A^\infty x^{-1} \int\limits_x^\infty \overline{H_r(y)}\, dy\, dx < \infty \tag{6}$$

bzw.

$$-\int_0^\infty x\,dT_{r-1}(x)<\infty \quad \textit{und} \quad \int_A^\infty x^{-1}\left|\int_x^\infty H_r(y)\,dy\right|dx<\infty \tag{7}$$

für ein gewisses $A>0$ erfüllt, so konvergiert die Summe

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-2+r/\alpha}\sup_x |F_n(x)-G_{\alpha\beta}(x)|. \tag{8}$$

Ist $\int_0^\infty \log(1+x)\,\overline{H_r}(x)\,dx<\infty$, so gilt (6).

Der Satz 2 stellt eine Verallgemeinerung des Satzes 5 aus [4] dar. Im Falle $\alpha=2$ folgt aus Satz 2 die Konvergenz der Reihe (4).

3. Über die Notwendigkeit der gestellten Bedingungen

In [11, Seite 390] wird die Aufgabe gestellt, notwendige Kriterien für eine gewisse Konvergenzgeschwindigkeit in (2) anzugeben. Dieser Problematik sind bisher nur sehr wenig Arbeiten gewidmet. Für eine spezielle Klasse von Verteilungsfunktionen werden in [12] und [4] Bedingungen an das Verhalten der charakteristischen Funktion $f(t)$ in einer gewissen Nullpunktumgebung angegeben, die notwendig und hinreichend für eine bestimmte Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit in (2) und die Konvergenz der Summe (8) sind. Wir wollen nun untersuchen, inwieweit die Bedingungen $\gamma_r<\infty$ bzw. $\tau_r<\infty$ in den Sätzen 1 und 2 notwendig sind.

Definition 1. Die Verteilungsfunktion $F(x)$ gehört der Klasse M_a für ein gewisses $a\in(0,1]$ an, wenn X_1 eine symmetrisch verteilte Zufallsgröße ist, die Differenz der charakteristischen Funktionen $f(t)-g_{\alpha 0}(t)$ in einer bestimmten Nullpunktumgebung vorzeichenkonstant ist und eine Funktion $h_1(x)$ und eine Konstante $A\geqq 0$ derart existieren, daß sich die Differenz $S(x)=F(x)-G_{\alpha 0}(x)-h_1(x)$ für $x\geqq A$ monoton verhält, $S(x)\to 0$ für $x\to\infty$ gilt und die Bedingung

$$\int_z^\infty |dh_{1+[\alpha]}(x)|=O(z^{-a}) \qquad \textit{für} \quad z\to\infty \tag{9}$$

erfüllt wird. Im Falle $a=1$ gelte außerdem

$$\int_A^z h_{1+[\alpha]}(x)\,dx=O(1) \qquad \textit{für} \quad z\to\infty. \tag{10}$$

Dabei ist

$$h_k(x)=\int_x^\infty h_{k-1}(y)\,dy \qquad \textit{für} \quad k=2,3.$$

Definition 2. Die Verteilungsfunktion $F(x)$ gehört der Klasse T_a für ein gewisses $a\in(0,1)$ an, wenn $F(x)\in M_a$ und die Bedingung

$$\int_A^\infty x^a |dh_{1+[\alpha]}(x)| < \infty \tag{11}$$

erfüllt sind. (Für $0<a<1$ *folgt* (9) *aus* (11).)

Die Vorzeichenkonstantheit von $f(t)-g_{\alpha 0}(t)$ wurde erstmals von N. Kalinauskaite in [12] gefordert. Im Falle $\alpha=2$ gehören den Klassen M_a und T_a alle Verteilungsfunktionen symmetrisch verteilter Zufallsgrößen aus dem normalen Anziehungsbereich der Normalverteilung an.

Satz 3. *Es sei* $\delta\in(\alpha-[\alpha],1]$ *und es gelte* $F(x)\in M_\delta$. *Für die Gültigkeit der Beziehung*

$$\sup_x |F_n(x)-G_{\alpha 0}(x)| = O(n^{-([\alpha]+\delta-\alpha)/\alpha}) \quad \text{für } n\to\infty \tag{12}$$

ist notwendig und hinreichend, daß $\gamma_{[\alpha]+\delta}<\infty$ *ist.*

Satz 4. *Es sei* $\delta\in(\alpha-[\alpha],1)$ *und es gelte* $F(x)\in T_\delta$. *Die Summe* (8) *mit* $\beta=0$ *und* $r=[\alpha]+\delta$ *konvergiert genau dann, wenn* $\tau_{[\alpha]+\delta}<\infty$ *ist.*

Wir können also je eine Klasse von Verteilungsfunktionen angeben, für die die Bedingungen $\gamma_r<\infty$ und $\tau_r<\infty$ optimal bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit in (12) bzw. der Konvergenz der Summe (8) sind. Im Falle $\alpha=2$ schließen die Sätze 3 und 4 an die anfangs zitierten Ergebnisse von I. Ibragimov [11, Satz 3.4.1] und C.C. Heyde [9] für symmetrisch verteilte Zufallsgrößen an.

Betrachten wir abschließend folgendes Beispiel. Die Zufallsgröße X_1 möge die Dichte $p(x)=\frac{1}{\pi}(1-\cos x)x^{-2}$ mit der entsprechenden charakteristischen Funktion

$$f(t)=\begin{cases}1-|t| & \text{für } |t|<1\\ 0 & \text{für } |t|\geqq 1\end{cases} \tag{13}$$

besitzen. Die Verteilungsfunktion dieser Zufallsgröße gehört dem normalen Anziehungsbereich der Cauchyverteilung ($\alpha=1$, $\beta=0$) an. Aus den Ergebnissen von [2] ergibt sich die Abschätzung

$$\sup_x |F_n(x)-G_{10}(x)| \leqq K_1 n^{-1/15}.$$

In [13, 16, 3] werden Kriterien angegeben, mit deren Hilfe man bezüglich n die echte Ordnung

$$\sup_x |F_n(x)-G_{10}(x)| \leqq K_2 n^{-1}$$

erhalten kann.

Beispiel 1. Die Zufallsgröße X_1 *besitze die charakteristische Funktion* (13). *Dann gelten* $\gamma_2<\infty$ *und* $F(x)\in M_1$.

Da $F(x)\in M_1$ gilt, ist somit $\gamma_2<\infty$ notwendig und hinreichend für die Erfüllung der Beziehung

$$\sup_x |F_n(x)-G_{10}(x)| = O(n^{-1}) \quad \text{für } n\to\infty.$$

4. Eine Bemerkung zur zentrierenden Folge A_n

In der Literatur wird im Falle $\alpha<1$ in (1) als zentrierende Folge A_n gewöhnlich $A_n=0$ gewählt. Nachfolgendes Beispiel demonstriert, daß die Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit in (2) von der Wahl der Folge A_n abhängen kann.

Beispiel 2. Die Zufallsgröße X_1 besitze die charakteristische Funktion

$$f(t)=\exp\left\{-|t|^{1/2}-|t|-it\frac{2}{\pi}\ln|t|\right\}^{1}. \tag{14}$$

Dann gelten für $n\to\infty$ die Beziehungen

$$\sup_x |P(n^{-2}(X_1+\ldots+X_n)<x)-G_{1/2,\,0}(x)| \overset{\cup}{\underset{\cap}{}} \frac{\ln n}{n}^{2}$$

und

$$\sup_x \left|P\left(n^{-2}\left(X_1+\ldots+X_n-\frac{4n}{\pi}\ln n\right)<x\right)-G_{1/2,\,0}(x)\right|=O(n^{-1}).$$

5. Hilfssätze über das Verhalten der charakteristischen Funktion

Lemma 1. *Es sei $\gamma_r<\infty$ für $r>\alpha$. Dann gilt für $|t|<1$*

$$f(t)-g_{\alpha\beta}(t)=\sum_{k=0}^{s}\frac{(it)^k}{k!}\rho_k+\Theta\gamma_r|t|^r$$

mit $|\Theta|\leqq 2+(1-\delta)^{-1}$. Dabei werden s und δ durch (5) *und $\delta=r-[r]$ bestimmt.*

Beweis des Lemma 1. Es sei $m=s$. M-faches partielles Integrieren führt zu der Darstellung

$$f(t)-g_{\alpha\beta}(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(it)^k}{k!}\rho_k+(it)^m\{I_1+I_2+(-1)^m(I_3+I_4)\} \tag{15}$$

mit

$$I_1=\int_0^{1/|t|}(e^{itx}-1)\,dH_{m+1}^{+}(x),\qquad I_2=\int_{1/|t|}^{\infty}(e^{itx}-1)\,dH_{m+1}^{+}(x),$$

$$I_3=\int_{-1/|t|}^{0}(e^{itx}-1)\,dH_{m+1}^{-}(x)\quad\text{und}\quad I_4=\int_{-\infty}^{-1/|t|}(e^{itx}-1)\,dH_{m+1}^{-}(x).$$

Die partielle Integration ist zulässig, da analog zum Beweis des Lemma 1 aus [3] $\tau_k<\infty$ für $k=0,1,\ldots,s$ gezeigt werden kann, wenn $\gamma_r<\infty$ ist.

Im Falle $r\neq[r]$ verwenden wir zum Abschätzen der Integrale I_1 und I_3 die Ungleichung $|e^{itx}-1|\leqq|tx|$ für $|tx|\leqq 1$, integrieren danach partiell und erhalten

$$|I_1|+|I_3|\leqq -|t|\int_0^{1/|t|}x\,dT_m(x)\leqq|t|\int_0^{1/|t|}T_m(x)\,dx\leqq\frac{|t|^\delta}{1-\delta}\gamma_r.$$

[1] Es seien Y und Z unabhängige Zufallsgrößen mit $G_{1/2,\,0}(x)$ und $G_{11}(x)$ als Verteilungsfunktionen. Die Zufallsgröße $X_1=Y+Z$ besitzt dann die angegebene charakteristische Funktion

[2] $a_n \overset{\cup}{\underset{\cap}{}} b_n$ bedeutet: $0<\liminf_{n\to\infty} a_n/b_n\leqq\limsup_{n\to\infty} a_n/b_n<\infty$

Weiterhin gilt $|I_2|+|I_4|\leqq 2T_m\left(\frac{1}{|t|}\right)\leqq 2|t|^\delta \gamma_r$. Ist $r=[r]$, so ergibt sich die Aussage des Lemmas, nachdem in den Integralen I_1 und I_3 der Gleichung (15) partiell integriert wird und dann analoge Abschätzungen durchgeführt werden.

Lemma 2. *Es sei $\tau_r<\infty$ für $r\geqq\alpha$. Dann gilt*

$$f(t)-g_{\alpha\beta}(t)=\sum_{k=0}^{[r]}\frac{(it)^k}{k!}\rho_k+u(t) \tag{16}$$

mit $u(t)=o(|t|^r)$ für $|t|\to 0$.

Beweis des Lemma 2. Aus der Beziehung (15) mit $m=[r]$ ergibt sich

$$\begin{aligned}|u(t)|&\leqq -|t|^{[r]+1}\int_0^{1/|t|} x^{1-\delta}\,dT_r(x)+2|t|^r T_r\left(\frac{1}{|t|}\right)\\&=(1-\delta)\,|t|^{[r]+1}\int_0^{1/|t|} x^{-\delta}\,T_r(x)\,dx+|t|^r T_r\left(\frac{1}{|t|}\right)=o(|t|^r).\end{aligned}$$

Lemma 3. *Es seien $\tau_r<\infty$ für $r\geqq\alpha$ und im Falle $r=[r]$ ebenfalls eine der Bedingungen* (6) *oder* (7) *erfüllt. Dann gilt*

$$\int_0^\varepsilon (|u(t)|+|u(-t)|)\,t^{-r-1}\,dt<\infty$$

für ein gewisses $\varepsilon>0$. Die Funktion $u(t)$ wird durch (16) *bestimmt.*

Beweis des Lemma 3. Unter Berücksichtigung der Beziehung (15) mit $m=[r]$ ergibt sich

$$I_5=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u(t)|\,|t|^{-r-1}\,dt\leqq -2\int_0^\varepsilon t^{-\delta}\int_0^{1/t} x\,dT_{[r]}(x)\,dt-4\int_0^\varepsilon t^{-1-\delta}\int_{1/t}^\infty dT_{[r]}(x)\,dt.$$

Da $T_{[r]}(x)$ eine monoton fallende Funktion ist, kann aufgrund des Satzes von Fubini ([10, S. 339]) die Integrationsreihenfolge in den Doppelintegralen vertauscht werden und es ergibt sich $I_5\leqq(1+1/\delta)\,\tau_r<\infty$ für $r\neq[r]$. Sind im Falle $r=[r]$ die Bedingung (6) und $\tau_r<\infty$ erfüllt, so gilt ebenfalls $I_5<\infty$. Analog läßt sich mit Hilfe der partiellen Integration die Aussage des Lemmas zeigen, wenn die beiden Bedingungen (7) und $\tau_r<\infty$ gelten.

6. Beweis der Sätze 1 und 2

Der Beweis des Satzes 1 folgt unmittelbar aus dem Beweis des Satzes 1 aus [13], wenn anstelle der in [13] verwendeten Abschätzung für $|f(t)-g_{\alpha\beta}(t)|$ die Beziehung aus Lemma 1 verwendet wird.

Für den Beweis des Satzes 2 gehen wir von der bekannten Ungleichung von C.-G. Esseen [5, S. 32] aus:

$$\sup_x |F_n(x)-G_{\alpha\beta}(x)|\leqq\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqq\varepsilon n^{1/\alpha}} |f_n(t)-g_{\alpha\beta}(t)|\,\frac{1}{|t|}\,dt+\frac{24A}{\pi\varepsilon}n^{-1/\alpha}.$$

Dabei wird die Konstante A durch $\sup_x G'_{\alpha\beta}(x) \leqq A$ bestimmt. Den Wert der Größe $\varepsilon > 0$ legen wir später fest. Wir betrachten nun

$$I_n = \int_{|t| \leqq \varepsilon n^{1/\alpha}} |f_n(t) - g_{\alpha\beta}(t)| \frac{1}{|t|} dt = \int_{|t| \leqq \varepsilon} |f_n(tn^{1/\alpha}) - g_{\alpha\beta}(tn^{1/\alpha})| \frac{1}{|t|} dt.$$

Aus Lemma 2 folgt $f(t) = g_{\alpha\beta}(t) + u(t)$ mit $u(t) = o(|t|^r)$ für $|t| \to 0$. Unter Beachtung von $1 + |z| \leqq e^{|z|}$ gilt somit für $|t| \leqq \varepsilon$

$$\begin{aligned} |f_n(tn^{1/\alpha}) - g_{\alpha\beta}(tn^{1/\alpha})| &\leqq |f^n(t) - g^n_{\alpha\beta}(t)| \\ &\leqq |u(t)| \sum_{r=0}^{n-1} |f(t)|^r |g_{\alpha\beta}(t)|^{n-1-r} \\ &\leqq n |u(t)| e^{\varepsilon^\alpha} \exp\{n(-|t|^\alpha + |u(t)| e^{|t|^\alpha})\}. \end{aligned}$$

Wir wählen nun $0 < \varepsilon < 1$ derart, daß $|u(t)| e^{|t|^\alpha} \leqq \frac{1}{2} |t|^\alpha$ für $|t| \leqq \varepsilon$ ist und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+r/\alpha} I_n \leqq K_1 \int_{|t| \leqq \varepsilon} |t|^{-1} |u(t)| S_n(t) dt$$

mit

$$S_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(r-\alpha)/\alpha} e^{-n|t|^\alpha/2}.$$

Der Satz von Abel ([7, S. 421]) erlaubt für $|t| \leqq \varepsilon$ die Abschätzung $S_n(t) \leqq K_2(1 - e^{-|t|^\alpha/2})^{-r/\alpha}$. Weiterhin wenden wir die Ungleichungen $1 - e^{-z} \geqq z(1 - z/2)$ und $1 - z^\alpha/4 \geqq 1/2$ für $0 \leqq z \leqq 1$ an und erhalten $S_n(t) \leqq K_3 |t|^{-r}$. Daraus ergibt sich nach Lemma 3 die Aussage des Satzes.

7. Beweis der Sätze 3 und 4

Die Hinlänglichkeit der Bedingungen $\gamma_{[\alpha]+\delta} < \infty$ und $\tau_{[\alpha]+\delta} < \infty$ folgt sofort aus den Sätzen 1 und 2, wenn in diesen $r = [\alpha] + \delta$ gesetzt wird. Wir müssen also nur noch die Notwendigkeit der genannten Bedingungen nachweisen.

Im Beweis von Satz 3 aus [4] wird unter Verwendung der Vorzeichenkonstantheit von $f(t) - g_{\alpha 0}(t)$ in einer gewissen Nullpunktumgebung gezeigt, daß für hinreichend großes n

$$\int_0^1 t^{1+\alpha} |\gamma(tn^{-1/\alpha})| dt \leqq K \sup_x |F_n(x) - G_{\alpha 0}(x)|$$

ist. Dabei wird die Funktion $\gamma(t)$ durch $f(t) = \exp\{\varphi_{\alpha 0}(t)(1 + \gamma(t))\}$ bestimmt. Wegen $\gamma(t) \to 0$ für $|t| \to 0$ können wir $|\gamma(t)| \leqq 1/2$ für $|t| \leqq n^{-1/\alpha}$ voraussetzen. Zusammen mit der Ungleichung

$$|f(t) - g_{\alpha 0}(t)| \leqq e^{-|t|^\alpha} |e^{-|t|^\alpha \gamma(t)} - 1| \leqq |t|^\alpha |\gamma(t)|$$

ergibt sich nach einer Substitution

$$\int_0^{n^{-1/\alpha}} t|f(t)-g_{\alpha 0}(t)|\,dt \leqq K n^{-1-2/\alpha} \sup_x |F_n(x)-G_{\alpha 0}(x)|. \tag{17}$$

Führen wir nun den Beweis des Satzes 3 zu Ende. Es sei $0<\alpha<2$. Aus (12) und (17) erhalten wir nun

$$\int_0^{n^{-1/\alpha}} t|f(t)-g_{\alpha 0}(t)|\,dt = O(n^{-(2+[\alpha]+\delta)/\alpha}) \qquad \text{für } n\to\infty.$$

Indem wir $(n+1)^{-1/\alpha} \leqq x < n^{-1/\alpha}$ wählen, ergibt sich aufgrund der Vorzeichenkonstantheit von $f(t)-g_{\alpha 0}(t)$ für $x\to 0$

$$\int_0^x t(f(t)-g_{\alpha 0}(t))\,dt = 2\int_0^x t \int_0^\infty (\cos tu-1)\,dH(u)\,dt = O(x^{2+[\alpha]+\delta}). \tag{18}$$

Wir betrachten nun die Integrale

$$J_1 = \int_0^x t\left\{\int_A^{1/t} (\cos tu-1)\,dh_1(u) + \int_{1/t}^\infty (\cos tu-1)\,dh_1(u)\right\} dt$$

und

$$J_2 = \int_0^x t^2\left\{\int_A^{1/t} \sin tu\, h_1(u)\,du + \int_{1/t}^\infty \sin tu\, h_1(u)\,du\right\} dt.$$

Nach partieller Integration in den jeweils ersten inneren Integralen erhalten wir im Falle $[\alpha]=0$ aufgrund von (9) $J_1 = O(x^{2+\delta})$ und für $[\alpha]=1$ wegen (9) und (10) $J_2 = O(x^{3+\delta})$ für $x\to 0$. Im inneren Integral von J_2 integrieren wir nun partiell, es ergibt sich $J_2 = J_1 + O(x^4)$. Somit ist $J_1 = O(x^{2+[\alpha]+\delta})$ für $x\to 0$ und $0<\alpha<2$. Zusammen mit (18) erhält man

$$\int_0^x t \int_A^\infty (\cos tu-1)\,dS(u)\,dt = O(x^{2+[\alpha]+\delta}) \qquad \text{für } x\to 0$$

mit $S(u)=H(u)-h_1(u)$. Nach dem Vertauschen der Integrationsreihenfolge gilt für $x\to 0$

$$\int_A^\infty g(ux)\,dS(u) = O(x^{[\alpha]+\delta}) \qquad \text{mit } g(a)=a^{-2}\int_0^a s(\cos s-1)\,ds.$$

Aus $g(ux)\leqq 0$ und der Monotonie von $S(u)$ für $u\geqq A$ ergibt sich

$$\int_A^{1/x} g(ux)\,dS(u) = O(x^{[\alpha]+\delta}) \quad \text{und} \quad \int_{1/x}^\infty g(ux)\,dS(u) = O(x^{[\alpha]+\delta}) \tag{19}$$

für $x\to 0$. Aus der letzten Beziehung folgt wegen $-g(a)\geqq 0{,}02$ für $a\geqq 1$

$$\int_{1/x}^\infty dS(u) = O(x^{[\alpha]+\delta}) \qquad \text{für } x\to 0.$$

Somit gilt im Falle $[\alpha]=0$ unter Beachtung von (9) $\gamma_\delta<\infty$ für $\delta\in(\alpha,1]$. Ist $[\alpha]=1$, so ergibt sich

$$S(z)=O(z^{-1-\delta}) \quad \text{und} \quad \int_z^\infty S(u)\,du=O(z^{-\delta}) \qquad \text{für } z\to\infty.$$

Aus (9) erhält man nun

$$\int_z^\infty |H(u)|\,du=O(z^{-\delta}) \qquad \text{für } z\to\infty \quad \text{mit } \delta\in(\alpha-1,1].$$

Im Falle $\delta=1$ gilt unter Beachtung von $1-\cos a\geqq a^2/3$ mit $0\leqq a\leqq 1$ und (19)

$$\int_A^{1/x} u^2\,dS(u)=O(1) \qquad \text{für } x\to 0.$$

Nach zweifacher partieller Integration ergibt sich aufgrund von (10) die Beziehung

$$\int_0^z\int_y^\infty H(u)\,du\,dy=O(1) \qquad \text{für } z\to\infty.$$

Somit gilt ebenfalls $\gamma_{1+\delta}<\infty$ für $[\alpha]=1$ und $\delta\in(\alpha-1,1]$. Es sei jetzt $\alpha=2$. Nach [11, Satz 3.4.1] folgt aus (12) die Beziehung (3). Nach zweifacher partieller Integration ergibt sich $\gamma_{2+\delta}<\infty$ für $\delta\in(0,1]$.

Beweisen wir nun Satz 4. Es sei $0<\alpha<2$. Aus der Konvergenz der Summe (8) ergibt sich wegen (17) für hinreichend großes N

$$\sum_{n=N}^\infty n^{-1+(2+[\alpha]+\delta)/\alpha}\int_0^{n^{-1/\alpha}} t\,|f(t)-g_{\alpha 0}(t)|\,dt<\infty.$$

Hieraus kann mit der Methode aus [9, S. 14] die Beziehung

$$\int_0^\varepsilon |f(t)-g_{\alpha 0}(t)|\,t^{-([\alpha]+\delta+1)}\,dt<\infty \qquad \text{für } \varepsilon<N^{-1/\alpha}$$

hergeleitet werden. Beachtet man die Vorzeichenkonstantheit von $f(t)-g_{\alpha 0}(t)$ für $|t|<\varepsilon$, so gilt

$$\left|\int_0^\varepsilon\int_0^\infty (\cos tu-1)\,dH(u)\,t^{-([\alpha]+\delta+1)}\,dt\right|<\infty.$$

Analog zum Beweis von $J_1=O(x^{2+[\alpha]+\delta})$ für $x\to 0$ läßt sich aus (11) die Gültigkeit von

$$\left|\int_0^\varepsilon\int_A^\infty (\cos tu-1)\,dh_1(u)\,t^{-([\alpha]+\delta+1)}\,dt\right|<\infty$$

zeigen. Somit folgt

$$\left|\int_0^\varepsilon\int_A^\infty (\cos tu-1)\,t^{-([\alpha]+\delta+1)}\,dS(u)\,dt\right|<\infty \qquad \text{mit } S(u)=H(u)-h_1(u).$$

Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhält man unter Beachtung von

$$\int_0^{\varepsilon u} \frac{1-\cos v}{v^{[\alpha]+\delta+1}}\, dv \geqq \int_0^1 \frac{1-\cos v}{v^{[\alpha]+\delta+1}}\, dv \geqq \frac{1}{3(2-[\alpha]-\delta)} \qquad \text{für } u \geqq A \geqq 1/\varepsilon$$

die Ungleichungen

$$\left|\int_A^\infty u^{[\alpha]+\delta} dS(u)\right| \leqq 3(2-[\alpha]-\delta) \left|\int_A^\infty u^{[\alpha]+\delta} \int_0^{\varepsilon u} \frac{1-\cos v}{v^{[\alpha]+\delta+1}}\, dv\, dS(u)\right| < \infty.$$

Nach $[\alpha]$-facher partieller Integration ergibt sich unter Beachtung von (11) $\tau_{[\alpha]+\delta} < \infty$.

Im Falle $\alpha = 2$ folgt aus [9], daß $E|X_1|^{2+\delta} < \infty$ für $0 < \delta < 1$ ist, wenn die Reihe (8) mit $\alpha = 2$ und $r = 2+\delta$ konvergiert. Hieraus ergibt sich nach zweifacher partieller Integration $\tau_{2+\delta} < \infty$.

8. Beweis der Beispiele

Die Zufallsgröße X_1 möge die charakteristische Funktion (13) besitzen (Beispiel 1). Dann gilt

$$\gamma_2 = \sup_{z>0} \left\{ \left| \frac{2}{\pi} \int_0^z \int_x^\infty \int_y^\infty u(v)\, dv\, dy\, dx \right| + \frac{2z}{\pi} \int_z^\infty \left| \int_x^\infty u(y)\, dy \right| dx \right\}$$

mit

$$u(v) = \frac{1-\cos v}{v^2} - \frac{1}{v^2+1} = \frac{1}{v^2(v^2+1)} - \frac{\cos v}{v^2}.$$

Nach mehrfacher partieller Integration gelten für $x \geqq 1$ die Ungleichungen

$$\left| \int_x^\infty v^{-2} \cos v\, dv \right| \leqq K_1 x^{-2} \quad \text{und} \quad \left| \int_x^\infty \int_y^\infty v^{-2} \cos v\, dv\, dy \right| \leqq K_2 x^{-2}.$$

Mit Hilfe einiger einfacher Rechnungen ergibt sich $\gamma_2 < \infty$. Wählen wir nun $A = 1$ und $h_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^\infty y^{-2} \cos y\, dy$, so gilt $F(x) \in M_1$, weil auch $1 - |t| - e^{-|t|} \leqq 0$ für $|t| \leqq 1$ ist.

Die Zufallsgröße X_1 möge nun die charakteristische Funktion (14) besitzen (Beispiel 2). Wir betrachten $f_n(t)$, wobei in (1) $A_n = 0$ und $B_n = n^2$ gewählt werden. Weiterhin sei $\varepsilon \in (0, 1)$ so klein, daß $\sqrt{\varepsilon}\left(1 - \frac{2}{\pi} \ln \varepsilon\right) \leqq 1/2$ ist. Für $|t| \leqq \varepsilon n^2$ gilt dann

$$\left| f_n(t) - e^{-|t|^{1/2}} \left(1 + \frac{4it \ln n}{\pi n}\right) \right| \leqq \frac{K}{n} (|t \ln |t|| + |t|^{3/2})\, e^{-|t|^{1/2}/2}.$$

Aus dem Satz von C.-G. Esseen [5, S. 32] ergibt sich nun für $n \to \infty$

$$P(n^{-2}(X_1 + \ldots + X_n) < x) - G_{1/2,0}(x) + \frac{4 \ln n}{\pi n} G'_{1/2,0}(x) = O(n^{-1}).$$

Wählen wir in (1) nun $A_n = \frac{4}{\pi} n \ln n$ und $B_n = n^2$, dann gilt für $|t| \leqq \varepsilon n$ mit obigem $\varepsilon > 0$

$$|f_n(t) - g_{1/2,0}(t)| \leqq \frac{1}{n} |\varphi_{11}(t)| e^{-|t|^{1/2}/2}.$$

Die zweite Beziehung für das Beispiel 2 folgt nun ebenfalls aus dem Satz von C.-G. Esseen.

Literatur

1. Bergström, H.: On distribution functions with a limiting stable distribution function. Ark. Math. **2**, 463–476 (1952)
2. Boonyasombut, V., Shapiro, J.M.: The accuracy of infinitely dinisible approxiamtion to sums of independent variables with application to stable laws. Ann. Math. Statist. **41**, 237–250 (1970)
3. Christoph, G.: Über die Konvergenzgeschwindigkeit im integralen Grenzwertsatz im Falle eines stabilen Grenzgesetzes (Russisch). Litovsk. mat. Sb. **19** Nr. 1, 129–141 (1979)
4. Christoph, G.: Über die Konvergenzgeschwindigkeit im Falle einer stabilen Grenzverteilung. Math. Nach. **90**, 21–30 (1979)
5. Esseen, C.-G.: Fourier analysis of distribution function. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. Acta Math. **77**, 1–125 (1945)
6. Esseen, C.-G.: The remainder term in the central limit theorem. Ark. Mat. **8**, 7–15 (1969)
7. Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications, Vol. II. New York-London-Sydney: John Wiley 1966
8. Gafurov, M.: Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit im zentralen Grenzwertsatz mittels Pseudomomente (Russisch). Zufällige Prozesse und statistische Schlußfolgerungen. Nr. 3, Taschkent, FAN, 1973, 39–48
9. Heyde, C.C.: On the influence of moments on the rate of convergence to the normal distribution. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **8**, 12–18 (1967)
10. Hildebrandt, T.H.: Introduction to the theory of integration. New York-London: Academic Press 1963
11. Ibragimov, I.A., Linnik, Yu.V.: Independent and stationary sequences of random variables. Gröningen: Noordhoff 1971
12. Kalinauskaite, N.: Über die Genauigkeit der Approximation der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen durch stabile Verteilungen (Russisch). Litovsk. mat. Sb. **14** Nr. 2, 41–51 (1974)
13. Paulauskas, V.: Abschätzung des Restgliedes im Grenzwertsatz im Falle einer stabilen Grenzverteilung (Russisch). Litovsk. mat. Sb. **14** Nr. 1, 165–188 (1974)
14. Steišunas, S.: Über die Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit im mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz (Russisch). Litovsk. mat. Sb. **14** Nr. 1, 127–135 (1974)
15. Zolotarev, V.: Analogon für eine Edgworth-Cramérsche Entwicklung im Falle der Approximation durch eine stabile Verteilung. Thesen der VI. Allunionskonferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik (Russisch), Vilnius, 1962, 49–50
16. Zolotarev, V.: Abschätzung der Nähe zweier Faltungen von Verteilungen. Internationale Konferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik (Russisch), Vilnius, 1973, 257–259
17. Zolotarev, V.: Einige neue wahrscheinlichkeitstheoretische Ungleichungen, verbunden mit der Lévy-Metrik (Russisch). Dokl. Akad. Nauk SSSR, **190** Nr. 5, 1019–1021 (1970)

Eingegangen am 4. September 1979; in revidierter Form am 8. April 1980

Nachtrag bei der Korrektur. In einer neuen Arbeit von V. Egorov „Über die Konvergenzgeschwindigkeit zum stabilen Gesetz", Teorija Verojatn. primen., **XXV**, No. 1, 183–190 (1980) wird die Konvergenz der Reihe (8) für $r = \alpha$ $(0 < \alpha < 2, \alpha \neq 1)$ untersucht.