Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
47, 163–194 (1979)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Fonctionnelles additives spéciales des processus récurrents au sens de Harris

Mihaï Brancovan

Universite P. & M. Curie – Paris VI, Laboratoire de calcul des probabilités,
Tour 56, 4 Place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05 France

I. Introduction et notations

Le but du présent article est de montrer comment la théorie des fonctions spéciales, édifiée par J. Neveu dans [8], peut s'étendre aux fonctionnelles additives continues.

Dans un premier temps, nous précisons les outils techniques dont nous nous servirons tout au long de ce travail.

Le chapitre III est entièrement consacré à l'étude des fonctionnelles additives spéciales: définition, propriétés de base, théorèmes ergodiques.

Au chapitre IV nous construisons des opérateurs potentiels permettant de résoudre l'équation de Poisson.

Enfin, le chapitre V reprend et précise la plupart de ces questions dans le cas de la dualité.

Pour ce qui est des exemples, nous prouverons que les temps locaux d'un processus sont, s'ils existent, des fonctionnelles additives spéciales, de même que les fonctionnelles à support relativement compact du mouvement brownien linéaire ou des processus stables sur $\mathbb{R}$, d'indice strictement compris entre 1 et 2.

Précisons les notations que nous utiliserons dans la suite. E est un espace localement compact de type dénombrable muni de sa tribu des boréliens $\mathscr{E}$. Nous désignerons par $\mathscr{E}_+$ (resp. $b\mathscr{E}$, $b\mathscr{E}_+$) l'ensemble des fonctions boréliennes positives (resp. boréliennes bornées, boréliennes bornées et positives). Lorsque $f \in b\mathscr{E}$, nous noterons $\|f\|$ la norme de f pour la topologie de la convergence uniforme sur E. Si f est une fonction et ν une mesure, l'intégrale de f par rapport à ν sera désignée (à condition qu'elle ait un sens) indifféremment par l'un des symboles $\int f\,d\nu$, $\langle \nu, f\rangle$ ou $\langle f, \nu\rangle$.

Pour $A \in \mathscr{E}$, la fonction indicatrice de A sera notée 1_A. A toute fonction $h \in b\mathscr{E}_+$ nous associerons l'opérateur M_h défini sur $b\mathscr{E}$ par la formule $M_h(f) = hf$.

X est un processus de Markov standard (voir la définition dans [2]) à valeurs dans E et vérifiant, en outre, la condition de récurrence de Harris, laquelle s'énonce ainsi: il existe une mesure positive m sur $(E, \mathscr{E})$ telle que l'on ait l'implication

0044-3719/79/0047/0163/$06.40

(1.1) $m(\mathrm{A})>0 \Rightarrow \forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}_x\left(\int_0^\infty 1_{\mathrm{A}}(X_t)\,dt=\infty\right)=1.$

On sait (cf. [8]) que cette condition implique l'existence d'une mesure invariante, σ-finie, unique à un facteur près; nous désignerons toujours par μ l'un de ses représentants. Si f et g sont deux fonctions de $\mathscr{E}_+$, nous écrirons souvent $\langle f, g\rangle$ au lieu de $\mu(fg)$.

Le lecteur trouvera dans [2] la définition des fonctionnelles additives (en abrégé FA). Une FA est dite continue (en abrégé FAC) si (presque toutes) ses trajectoires sont continues. Toutes les FA que nous considérerons par la suite seront continues et vérifieront la condition supplémentaire $A_t<\infty$ p.s. pour tout $t>0$; c'est pourquoi il nous arrivera souvent d'écrire FA lieu de FAC. L'ensemble des FA étant un cône convexe, on peut l'ordonner par la relation «$\ll$», définie de la façon suivante: $A \ll B$ si et seulement si il existe une FA C telle que $B=A+C$.

Soit A une FAC. Pour $f\in b\mathscr{E}_+$ il est clair que le processus $f\cdot A$ défini par la formule

(1.2) $(f\cdot A)_t=\int_0^t f(X_s)\,dA_s$

est encore une FAC. Plus généralement, A étant donnée, on considérera toutes les fonctions $f\in\mathscr{E}_+$ telles que $\int_0^t f(X_s)\,dA_s$ soit une FAC, que l'on désignera toujours par le symbole $f\cdot A$.

Dans le cas particulier où $h\in b\mathscr{E}_+$ et où A est la FA identique ($A_t=t$) nous écrirons, par abus de notation, h au lieu de $h\cdot A$. Ainsi, si B est une FA, $B+h$ sera la FA définie par

(1.3) $(B+h)_t=B_t+\int_0^t h(X_s)\,ds;$

cette notation se révèlera très commode surtout dans les diverses applications de l'équation résolvante.

Rappelons encore que, τ_t étant le changement de temps associé à la FA A (voir [2] ou [7]), on a, pour toute $f\in\mathscr{E}_+$:

(1.4) $\int_0^t f(X_s)\,dA_s=\int_0^{A_t} f(X_{\tau_s})\,ds;$

cette formule nous sera d'une utilité constante dans la démonstration de l'équation résolvante. Nous nous servirons aussi du fait que, A étant continue, on a pour tout $t\geqq 0$ $A_{\tau_t}=t$.

Si T est un temps d'arrêt et $\alpha\in\mathbb{R}_+$, nous désignerons par P_T^α l'opérateur défini sur $\mathscr{E}_+$ ou sur $b\mathscr{E}$ par

(1.5) $P_T^\alpha f(x)=E_x[e^{-\alpha T} f(X_T)].$

Rappelons enfin que X est dit fortement fellérien si la fonction $U^\alpha f$ est continue quels que soient $f \in b\mathscr{E}_+$ et $\alpha > 0$; dans cette définition $U^\alpha f$ est le α-potentiel de f, soit

$$(1.6) \quad U^\alpha f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)\, dt.$$

II. Opérateurs et mesures associées aux fonctionelles additives

Dans le cas d'un processus à temps continu, l'opérateur U^h associé à une fonction bornée, positive et mesurable h prend la forme (voir [3] et [8]):

$$\forall f \in \mathscr{E}_+, \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad U^h f(x) = E_x \int_0^\infty \exp\left[-\int_0^t h(X_s)\, ds\right] f(X_t)\, dt.$$

On voit que, dans cette expression, la fonction h n'intervient que par l'intermédiaire de la fonctionnelle additive $\int_0^t h(X_s)\, ds$; de même, seule compte la mesure aléatoire $f(X_t)\, dt$, induite sur $\mathbb{R}_+$ par la fonctionnelle additive $\int_0^t f(X_s)\, ds$. Cette remarque incite à associer à tout couple (H, A) de fonctionnelles additives un opérateur positif, noté U_A^H, et défini de la façon suivante:

$$\forall f \in \mathscr{E}_+, \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad U_A^H f(x) = E_x \int_0^\infty \exp(-H_t) f(X_t)\, dA_t.$$

Dans le cas particulier où $A_t \equiv t$ on écrira tout simplement U^H. Si H et A sont respectivement de la forme $\int_0^t h(X_s)\, ds$ et $\int_0^t a(X_s)\, ds$, on voit instantanément que l'opérateur U_A^H est égal à $U^h M_a$; à chaque fois que H sera obtenue à partir d'une fonction h on écrira U_A^h au lieu de U_A^H. Remarquons encore, pour finir, que l'on a la relation $U_A^H M_f = U_{f\cdot A}^H$.

Les opérateurs que nous venons de définir vérifient, à l'instar des U^h de Neveu, des relations que l'on peut baptiser, par analogie, «équations résolvantes».

(2.1) **Proposition.** *Soient H et K deux FA telles que $H \ll K$ et soit $L = K - H$. Alors, quelle que soit la FA A, on a les égalités*

$$U_A^H = \sum_{n \geq 0} (U_L^K)^n U_A^K$$

et

$$U_A^H = U_A^K + U_L^K U_A^H = U_A^K + U_L^H U_A^K.$$

Démonstration. Commençons par calculer la valeur de $U_L^K U_A^K f(x)$. On a, par définition:

$$U_L^K U_A^K f(x) = E_x \int_0^\infty \exp(-K_t)\, U_A^K f(X_t)\, dL_t$$
$$= E_x \int_0^\infty \exp(-K_t)\, dL_t\, E_{X_t} \int_0^\infty \exp(-K_s) f(X_s)\, dA_s;$$

en introduisant le changement de temps associé à L, et en appliquant successivement le théorème de Fubini et la propriété de Markov forte, on voit sans difficulté que cette dernière expression est égale à:

$$E_x \int_0^\infty \exp(-K_t)\, dL_t \int_0^\infty \exp(-K_s \circ \theta_t) f(X_{t+s})\, d(A_s \circ \theta_t),$$

laquelle, compte tenu du fait que les FAC A et K sont indistinguables de deux FA parfaites (voir [6]), peut elle-même s'écrire

$$E_x \int_0^\infty \exp(-K_t)\, dL_t \int_0^\infty \exp[-(K_{t+s} - K_t)]\, f(X_{t+s})\, d(A_{t+s} - A_t).$$

On a donc, en définitive:

$$U_L^K U_A^K f(x) = E_x \int_0^\infty dL_t \int_t^\infty \exp(-K_s) f(X_s)\, dA_s$$
$$= E_x \int_0^\infty \exp(-K_s) f(X_s)\, L_s\, dA_s.$$

En se servant de la continuité de L et en raisonnant par récurrence, on démontre aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(U_L^K)^n\, U_A^K f(x) = E_x \int_0^\infty \exp(-K_s) f(X_s) \frac{L_s^n}{n!}\, dA_s.$$

Il suffit maintenant de sommer sur tous les $n \geqq 0$ pour obtenir la première égalité de l'énoncé. La seconde s'en déduit aussitôt, en isolant le terme de la somme correspondant à $n=0$. Il ne reste plus qu'à prouver la relation

$$U_A^H = U_A^K + U_L^H U_A^K,$$

ce qui peut se faire directement, en faisant appel aux techniques déjà utilisées plus haut.

Remarque. La démonstration précédente reste valable sous des conditions beaucoup plus faibles que celles dans lesquelles nous nous sommes placés: il suffit, en effet, de supposer, d'une part, L continue, de l'autre K et A parfaites. Cette remarque ne nous servira toutefois pas par la suite, puisque nous ne considérons, dans ce travail, que des FAC.

Avant d'examiner la façon dont les opérateurs que nous venons de définir agissent sur les mesures, faisons quelques rappels. On sait (voir [9]) qu'il est possible de faire correspondre à toute FA A une mesure positive ν_A, définie par la formule

$$\forall f \in b\mathscr{E}_+, \qquad \nu_A(f) = E_\mu \int_0^1 f(X_s)\, dA_s,$$

et que l'on a, quels que soient les réels positifs t et α,

$$\nu_A(f) = \frac{1}{t} E_\mu \int_0^t f(X_s)\, dA_s = \alpha \mu U_A^\alpha f.$$

Il est clair que si A est de la forme $\int_0^t a(X_s)\, ds$, on a $\nu_A = a \cdot \mu$; plus généralement, si $A = g \cdot B$, on a $\nu_A = g \cdot \nu_B$.

Le mesure ν_A décrit de façon très précise le comportement à l'infini de la FA A:

a) si $\nu_A > 0$, alors $\forall x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{P}_x(A_\infty = \infty) = 1$;

b) si $\nu_A = 0$, alors $\mathrm{P}.(A_\infty = 0) = 1$ $\mu - p.p.$ En outre, puisque A est telle que pour tout $t \geqq 0$ $A_t < \infty$ p.s., on a $\mathrm{P}.(\mathrm{A}_\infty < \infty) = 1$.

Le résultat suivant est alors évident:

(2.2) **Proposition.** *Soit A une FA de* X. *On a alors $U_A^A 1 \leqq 1$, l'égalité ayant lieu en un point x si et seulement si* $\mathrm{P}_x(A_\infty = \infty) = 1$. *Plus précisément, deux cas seulement sont possibles: ou bien $U_A^A 1 \equiv 1$, ou bien $U_A^A 1 = 0$ μ-p.p. et $U_A^A 1 < 1$ partout.*

Démonstration. Toutes les assertions de l'énoncé sont des conséquences immédiates du calcul suivant:

$$U_A^A 1(x) = E_x \int_0^\infty \exp(-A_t)\, dA_t = E_x \int_0^{A_\infty} e^{-t}\, dt = E_x [1 - \exp(-A_\infty)].$$

et des remarques faites précédemment sur la mesure ν_A.

Etablissons maintenant la formule fondamentale reliant entre eux les opérateurs et les mesures associés aux FA.

(2.3) **Proposition.** *Soit A une FA. Pour toute FA B telle que $\nu_B > 0$, on a l'égalité $\nu_B U_A^B = \nu_A$.*

Démonstration. Soit h une fonction quelconque de $b\mathscr{E}_+$, vérifiant $\mu(h) > 0$. Nous allons prouver successivement:

1°) $(h\mu)\, U_A^h = \nu_A$.

Choisissons un $\alpha > 0$ tel que $h \leqq \alpha$. L'équation résolvante

$$U_A^h = U_A^\alpha + U^h M_{\alpha - h} U_A^\alpha$$

permet d'écrire, compte tenu du fait que $(h \cdot \mu)\, U^h = \mu$ (voir [8]):

$$(h\mu)\, U_A^h = (h\mu)\, U_A^\alpha + [(\alpha - h)\mu]\, U_A^\alpha = \alpha \mu U_A^\alpha = \nu_A.$$

2°) $\nu_{B+h} U_A^{B+h} = \nu_A$.

De l'équation résolvante $U_A^h = U_A^{B+h} + U_B^h U_A^{B+h}$ on déduit, compte tenu du 1°):

$$\nu_A = (h\mu)\, U_A^h = (h\mu)\, U_A^{B+h} + \nu_B U_A^{B+h} = \nu_{B+h} U_A^{B+h}.$$

3°) $\nu_B U^B \leqq \mu$.

Grâce à l'équation résolvante

$$U^B = \sum_{n\geqq 1} (U^{B+1})^n$$

il suffit de montrer que

$$(2.4) \quad \forall p \geqq 1, \qquad \nu_B \sum_{n=1}^{p} (U^{B+1})^n \leqq \mu,$$

le résultat s'obtenant en faisant tendre p vers l'infini. Or, pour $p=1$, cela résulte de la relation $\nu_B U^{B+1} + \mu U^{B+1} = \mu$, laquelle n'est autre que celle prouvée au 2°), dans le cas particulier $h=1$ et $A_t = t$. En supposant (2.4) vraie pour p, on a:

$$\begin{aligned} \nu_B \sum_{n=1}^{p+1} (U^{B+1})^n &= \nu_B U^{B+1} + \nu_B \sum_{n=1}^{p} (U^{B+1})^n U^{B+1} \\ &\leqq \nu_B U^{B+1} + \mu U^{B+1} = \mu, \end{aligned}$$

et (2.4) est encore vraie pour $p+1$.

4°) $\nu_B U^B = \mu$.

Soit h une fonction de $b\mathscr{E}_+$, strictement positive sur E et telle que $\mu(h) < \infty$. L'équation résolvante permet d'écrire:

$$\nu_B U^B = \nu_B U^{B+h} + \nu_B U^B M_h U^{B+h}.$$

Or, d'après 2°), on a:

$$\mu = \nu_{B+h} U^{B+h} = \nu_B U^{B+h} + \mu M_h U^{B+h}.$$

En comparant les deux égalités précédentes, on voit que la mesure $\lambda = \mu - \nu_B U^B$, qui est positive d'après 3°), vérifie:

$$(2.5) \quad \lambda = \lambda M_h U^{B+h},$$

d'où

$$h \cdot \lambda = \lambda M_h U^{B+h} M_h = (h \cdot \lambda)\, U^{B+h} M_h \leqq (h \cdot \lambda)\, U^h M_h.$$

Comme $U^h(h) = 1$, les deux mesures $h \cdot \lambda$ et $(h \cdot \lambda) U^h M_h$ ont la même masse totale $\lambda(h) \leqq \mu(h) < \infty$; elles sont partant égales, et $(h \cdot \lambda)$ est invariante par $U^h M_h$, donc (cf. [8]) proportionnelle à $h \cdot \mu$, ce qui entraîne, puisque h est strictement positive, que l'on a $\lambda = c\mu$ pour constante $c \geqq 0$. Si l'on avait $c > 0$, alors, d'après (2.5), μ vérifierait

$$\mu = (h\mu)\, U^{B+h},$$

ce qui entraînerait, compte tenu de la suite d'égalités:

$$\mu = (h\mu)\, U^h = (h\mu)\, U^{B+h} + (h\mu)\, U_B^h\, U^{B+h}$$
$$= (h\mu)\, U^{B+h} + \nu_B\, U^{B+h},$$

$\nu_B U^{B+h} = 0$. Or cela est absurde, puisque $U^{B+h} 1 > 0$ partout, donc $\nu_B U^{B+h} 1 > 0$. La constante c est donc forcément nulle, et l'on a bien $\nu_B U^B = \mu$.

5°) $\nu_B U_A^B = \nu_A$.

L'égalité du 2°) permet d'écrire $\nu_{B+1}\, U_A^{B+1} = \nu_A$, soit encore

$$\nu_B\, U_A^{B+1} + \mu\, U_A^{B+1} = \nu_A.$$

On a alors, grâce à l'équation résolvante:

$$\nu_B\, U_A^B = \nu_B\, U_A^{B+1} + \nu_B\, U^B\, U_A^{B+1} = \nu_B\, U_A^{B+1} + \mu\, U_A^{B+1} = \nu_A.$$

Pour finir ce chapitre, considérons le processus ${}^A X$ changé de temps de X par une FA A de mesure $\nu_A > 0$: ce nouveau processus de Harris, de mesure invariante ν_A (voir [9]), permet de définir, pour toute fonction h de $b\mathscr{E}_+$, un opérateur ${}^A U^h$ qu'il est utile de savoir exprimer en fonction des opérateurs associés à X. Le lecteur n'aura aucune peine à vérifier que deux applications successives de la formule (1.4) donnent:

(2.6) $\quad {}^A U^h = U_A^{hA}$.

III. Fonctionnelles additives spéciales

Rappelons tout d'abord (voir [8, 10]) qu'une fonction $f \in \mathscr{E}_+$ est dite spéciale si et seulement si pour toute fonction $h \in b\mathscr{E}_+$ telle que $\mu(h) > 0$, la fonction $U^h f$ est bornée. Nous étendrons cette notion aux FAC en posant

(3.1) *Définition. Une FAC A est dite spéciale (en abrégé FAS) si et seulement si pour toute $h \in b\mathscr{E}_+$ telle que $\mu(h) > 0$ la fonction $U_A^h 1$ est bornée.*

Conformément à l'usage, nous écrirons u_A^h au lieu de $U_A^h 1$, et nous appellerons cette fonction le h-potentiel de A.

Remarquons que si f est une fonction positive telle que $A_t = \int_0^t f(X_s)\, ds$ soit une FAC (en particulier si f est bornée), alors A est spéciale si et seulement si f l'est; cela résulte tout simplement du fait que $u_A^h = U^h f$.

Comme dans le cas des fonctions, (voir [8] ou [10]), une FA A est spéciale dès que u_A^h est bornée pour une $h \in b\mathscr{E}_+$ convenablement choisie, à savoir $h > 0$ partout et telle que $U^h \geqq 1 \otimes m_0$ pour une mesure $m_0 \neq 0$.

Nous allons montrer maintenant que si A est spéciale, toutes les fonctions du type $u_A^B = U_A^B 1$, où B est une FA telle que $\nu_B > 0$, sont bornées.

(3.2) **Proposition.** *Soient A une FAS et B une FAC telle que $\nu_B > 0$. La fonction u_A^B est alors bornée.*

Démonstration. Pour toute fonction h appartenant à $b\mathscr{E}_+$ et chargée par μ on a:

$$u_A^{B+h} \leqq u_A^h \leqq \|u_A^h\| < \infty.$$

L'équation résolvante appliquée aux FA B et $B+h$ donne alors:

$$u_A^B = u_A^{B+h} + U^B M_h u_A^{B+h}.$$

La fonction u_A^{B+h} étant bornée, u_A^B le sera aussi s'il est possible de choisir une h telle que $U^B M_h(1) = U^B(h)$ soit bornée. Or une nouvelle application de l'équation résolvante à B et $B+1$ donne:

$$U_B^B = U_B^{B+1} + U^B U_B^{B+1},$$

et l'on voit qu'il suffit de prendre $h = u_B^{B+1}$. En effet, $h \leqq 1$ et

$$U^B(h) = U^B u_B^{B+1} \leqq u_B^B \leqq 1.$$

D'autre part, l'hypothèse $v_B > 0$ entraîne que la fonction h est strictement positive sur E, puisque l'on a, pour tout x

$$h(x) = E_x \int_0^\infty \exp(-B_t - t)\, dB_t, \quad \text{avec} \quad \mathrm{P}_x(B_\infty = \infty) = 1.$$

La proposition 3.2 va nous permettre de généraliser aux FAS un résultat bien connu dans le cas des fonctions spéciales, à savoir la stabilité de ces dernières sous l'action des opérateurs $M_h U^h$, h étant dans $b\mathscr{E}_+$ et non μ-négligeable. Cette généralisation peut s'énoncer ainsi:

(3.3) **Proposition.** *Si A est une FAS et B une FAC telle que $v_B > 0$, la FA $u_A^B \cdot B$ est spéciale.*

Démonstration. D'après la proposition précédente u_A^B est bornée, donc $C = u_A^B \cdot B$ est elle-même une FAC.

Considérons alors une fonction $h \in b\mathscr{E}_+$ telle que $\mu(h) > 0$. Il s'agit de prouver que u_C^h est bornée. Or

$$u_C^h = U_C^h 1 = U_B^h u_A^B.$$

En multipliant à gauche par U_B^h la relation $u_A^B = u_A^{B+h} + U_h^{B+h} u_A^B$ on obtient:

$$U_B^h u_A^B = U_B^h u_A^{B+h} + U_B^h U_h^{B+h} u_A^B.$$

Or deux autres applications de l'équation résolvante montrent que

$$U_B^h u_A^{B+h} \leqq u_A^h \leqq \|u_A^h\| < \infty$$

et

$$U_B^h U_h^{B+h} 1 \leqq U_h^h 1 = U^h(h) = 1.$$

En fin de compte, on peut donc écrire:

$$\|U_B^h u_A^B\| \leqq \|u_A^h\| + \|u_A^B\| < +\infty.$$

(3.4) **Proposition.** *Soit α un réel strictement positif. Une FAC A est alors spéciale si et seulement si son α-potentiel u_A^α est une fonction spéciale bornée.*

Démonstration. La proposition précédente, appliquée à $B_t = \alpha t$, entraîne immédiatement que la condition de l'énoncé est nécessaire. Pour voir qu'elle est aussi suffisante, soit $h \in b\mathscr{E}_+$, $\mu(h) > 0$; on peut toujours supposer $h \leqq \alpha$. L'équation résolvante permet alors d'écrire

$$u_A^h = u_A^\alpha + U^h[(\alpha - h)u_A^\alpha] \leqq u_A^\alpha + \alpha U^h(u_A^\alpha).$$

Or le dernier membre est borné puisque u_A^α est spéciale bornée.

(3.5) **Corollaire.** *Si A est spéciale, la mesure ν_A est bornée.*

Démonstration. Comme $\nu_A = \mu U_A^1$, on a $\nu_A(1) = \mu(u_A^1)$. Or la fonction u_A^1 est spéciale, donc μ-intégrable (voir [8]).

Nous allons maintenant prouver une autre proposition qui généralise une propriété bien connue des fonctions spéciales:

(3.6) **Proposition.** *Soit A une FAC vérifiant $\nu_A > 0$ et $U^A \geqq 1 \otimes m_0$ pour une mesure $m_0 > 0$; alors A est spéciale.*

Démonstration. Soit h une fonction spéciale strictement positive sur E (voir [8]). D'après la proposition 3.3, la FAC $U^A(h) \cdot A$ est alors spéciale. Or $U^A(h) \geqq m_0(h) > 0$, d'où

$$U^A(h) \cdot A \geqq m_0(h) \cdot A$$

et

$$A \leqq [m_0(h)]^{-1}\, U^A(h) \cdot A.$$

La FA A est majorée par une FAS, donc est elle-même spéciale.

Nous allons voir, grâce à la proposition suivante, que le résultat précédent admet une réciproque.

(3.7) **Proposition.** *Etant donnée une FA A telle que $\nu_A > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *A est spéciale;*

2) *toute fonction de $b\mathscr{E}_+$ est spéciale pour le processus changé de temps ^{A}X;*

3) *pour tout $\theta \in]0, 1[$, il existe une mesure ν_A^θ équivalente à ν_A telle que $U_A^{\theta A} \geqq 1 \otimes \nu_A^\theta$;*

4) *pour tout $\theta \in]0, 1[$, il existe une mesure μ^θ équivalente à μ telle que $U^{\theta A} \geqq 1 \otimes \mu^\theta$.*

Démonstration. Nous allons prouver la chaîne d'implications

$$1 \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1).$$

Pour montrer 1) $\Rightarrow$ 2) il suffit de vérifier que 1 est spéciale pour ^{A}X, donc d'établir que la fonction ${}^A U^h 1 = u_A^{hA}$ est bornée dès que $h \in b\mathscr{E}_+$ est telle que $\nu_A(h) > 0$. Or $\nu_A(h) > 0$ équivaut à $\nu_{hA} > 0$, et la bornitude de u_A^{hA} est alors une conséquence immédiate de la proposition 3.2.

La flèche 2)$\Rightarrow$3) se déduit directement d'un résultat de Neveu (proposition 4.9 de [8]) selon lequel, pour toute fonction spéciale bornée non nulle f et pour tout réel positif $\theta < \|f\|^{-1}$, il existe une mesure équivalente à la mesure invariante, soit μ^θ, telle que l'on ait $U^{\theta f} \geqq 1 \otimes \mu^\theta$. Il suffit, en effet, d'appliquer cette propriété au processus ${}^A\mathrm{X}$, de mesure invariante v_A, et à la fonction spéciale bornée 1 pour obtenir ${}^AU^\theta = U_A^{\theta A} \geqq 1 \otimes v_A^\theta$.

3)$\Rightarrow$4). Soit θ' un réel strictement compris entre θ et 1. L'équation résolvante s'écrit alors:

$$\begin{aligned} U^{\theta A} &= U^{\theta' A} + U^{\theta' A}_{(\theta'-\theta)A}\, U^{\theta A} \\ &\geqq (\theta'-\theta)\, U_A^{\theta' A}\, U^{\theta A} \geqq (\theta'-\theta)(1 \otimes v_A^{\theta'})\, U^{\theta A} \\ &= (\theta'-\theta) \otimes v_A^{\theta'}\, U^{\theta A} = 1 \otimes \mu^\theta, \end{aligned}$$

en posant $\mu^\theta = (\theta'-\theta)\, v_A^{\theta'}\, U^{\theta A}$. Or, $v_A^{\theta'}$ étant équivalente à v_A, il est clair que μ^θ est équivalente à $v_A U^{\theta A}$, donc à μ, puisque $v_{\theta A} U^{\theta A} = \mu$.

4)$\Rightarrow$1). Choisissons un θ dans $]0,1[$. La proposition 3.6 entraîne alors que la FA θA est spéciale, ce qui équivaut à 1).

On peut aisément se débarrasser du θ figurant dans les conditions 3) et 4), ce qui permet d'obtenir la réciproque déjà annoncée de la proposition 3.6:

(3.8) **Proposition.** *Soit A une FAS telle que $v_A > 0$. Il existe alors une mesure μ_0 équivalente à μ pour laquelle $U^A \geqq 1 \otimes \mu_0$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si A est spéciale il en est de même de $2A$, et d'appliquer le 4) de la proposition 3.7 avec $\theta = \frac{1}{2}$.

L'équivalence 1)$\Leftrightarrow$2) de la proposition 3.7 va nous permettre d'établir un nouveau critère de spécialité:

(3.9) **Proposition.** *Soit A une FA telle que $v_A > 0$. Alors A est spéciale si et seulement si le noyau U_A^A est quasi compact.*

Démonstration. D'après la proposition 3.7, A est spéciale si et seulement si toute fonction positive bornée est spéciale pour le processus de Harris ${}^A\mathrm{X}$. Or on sait, d'une part (cf. [3]), qu'il y a identité entre les fonctions qui sont spéciales pour le processus ${}^A\mathrm{X}$ et celles qui le sont pour le noyau U_A^A, d'autre part ([10], proposition 4.9 du chapitre 6), que toutes les fonctions positives bornées sont spéciales pour un noyau de Harris si et seulement si ce dernier est quasi compact.

Nous allons donner maintenant quelques exemples de FAS. Pour cela, prouvons d'abord la proposition suivante:

(3.10) **Proposition.** *Soit A une FA telle que $v_A > 0$. Si le support de A est finement compact, alors A est spéciale.*

Démonstration. Désignons par K le support finement compact de A et considérons une fonction spéciale f telle que $\mu(f) > 0$. On sait alors que la FA

$U^A(f) \cdot A$ est spéciale. Or, en adoptant les notations de [2], $U^A f$ est une fonction (X, e^{-A})-excessive, puisque

$$U^A f(x) = E_x \int_0^\infty \exp(-A_t) f(X_t)\, dt = \int_0^\infty Q_t f(x)\, dt,$$

Q_t étant le semi-groupe défini par $Q_t f(x) = E_x[\exp(-A_t) f(X_t)]$.

Tous les points de E étant permanents pour la fonctionnelle multiplicative $\exp(-A)$, il résulte d'une remarque de Blumenthal et Getoor ([2], page 130) que la fonction $U^A f$ est finement continue; comme elle est strictement positive sur E, il existe une constante $a>0$ telle que $U^A f \geqq a 1_K$. On en déduit que la FA $U^A(f) \cdot A$ est minorée par la FA $a 1_K \cdot A$, laquelle n'est autre que aA, d'après une propriété bien connue du support d'une FA. A est donc majorée par la FAS $a^{-1} U^A(f) \cdot A$, donc est elle-même spéciale.

La proposition précédente prend une forme particulièrement agréable dans les deux cas que voici:

(3.11) **Corollaire.** *Soit A une FA du mouvement brownien sur* $\mathbb{R}$. *Si $\nu_A > 0$ et si le support de A est compact, alors A est spéciale.*

Démonstration. En effet, la topologie fine du mouvement brownien linéaire coïncide avec la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

(3.12) **Corollaire.** *Si le processus* X *admet un temps local L^x en un point x, et si la mesure ν_{L^x} n'est pas nulle, alors L^x est une FAS.*

Démonstration. Le support de L^x est, en effet, finement compact, puisque réduit au seul point x.

L'hypothèse $\nu_{L^x} > 0$, que nous avons dû introduire dans l'énoncé précédent, est vérifiée dès que μ charge les voisinages fins de x, puisque l'on a $\nu_{L^x}(1) = \mu(u^1_{L^x})$ et que la fonction finement continue $u^1_{L^x}$ est telle que $u^1_{L^x}(x) > 0$ (voir [2]). On peut donc affirmer, en particulier, que les temps locaux du mouvement brownien linéaire ou de tout processus X admettant un processus dual $\hat{X}$ sont des FAS. Nous reviendrons plus en détail sur le cas de la dualité au chapitre V.

Nous avons vu, dans la proposition 3.7, que pour que A soit une FAS il faut et il suffit que la fonction 1 soit spéciale pour le processus changé de temps ${}^A X$. Plus généralement, on peut se demander quelles sont, pour une FA A donnée, les fonctions f telles que la FA $f \cdot A$ soit spéciale. La réponse est donnée par la proposition suivante qui, elle aussi, fait intervenir le processus changé de temps:

(3.13) **Proposition.** *Soit f une fonction de $b\mathscr{E}_+$ et A une FA telle que $\nu_A > 0$. Alors la FA $f \cdot A$ est* X-*spéciale si et seulement si f est ^{A}*X-*spéciale.*

Démonstration. Pour prouver que la condition est nécessaire, soit h une fonction de $b\mathscr{E}_+$ telle que $\nu_A(h) > 0$; on veut montrer que ${}^A U^h f = U_A^{hA} f$ est bornée. Or la fonction $U_A^{hA} f$ n'est autre que u_{fA}^{hA}, qui est bien bornée puisque $f \cdot A$ est X-spéciale et que $\nu_{hA}(1) = \nu_A(h) > 0$.

Réciproquement, soit $h \in b\mathscr{E}_+$ telle que $\mu(h) > 0$. Il s'agit maintenant de prouver que $u^h_{fA} = U^h_A f$ est bornée. Or, pour toute fonction g de $b\mathscr{E}_+$ telle que $\nu_A(g) > 0$ on a

$$U^h_A f = U^{h+gA}_A f + U^h_{gA} U^{h+gA}_A f.$$

Mais $U^{h+gA}_A f \leqq U^{gA}_A f = {}^A U^g f \leqq \|{}^A U^g f\| < \infty$, puisque f est ^{A}X-spéciale. Nous arriverons donc à nos fins s'il nous est possible de choisir une g dans $b\mathscr{E}_+$ telle que $\nu_A(g) > 0$ et $\|U^h_{gA} 1\| < \infty$. Or il suffit pour cela de poser $g = U^A h_1$, où h_1 est une fonction X-spéciale chargée par μ. En effet, g est bornée, strictement positive sur E et telle que la FA $g \cdot A = U^A(h_1) \cdot A$ soit spéciale.

Comme exemple d'application de cette proposition, supposons que A soit une FA à support relativement compact et telle que le processus changé de temps ^{A}X soit fortement fellérien. La relation $A = 1_S \cdot A$, où S désigne le support de A, montre alors que A est spéciale; en effet, la fonction bornée et à support compact 1_S est spéciale pour le processus ^{A}X. Nous verrons dans le chapitre sur la dualité des conditions suffisantes pour que tous les changés de temps d'un processus soient fortement fellériens (cf. la proposition 5.26).

Nous allons préciser maintenant la proposition 3.8 dans le cas où la FAS A est un temps local: cela nous sera utile par la suite, lorsque nous construirons des opérateurs potentiels. Nous avons vu, en effet, que si A était spéciale l'on pouvait minorer l'opérateur U^A par un opérateur du type $1 \otimes \mu_0$, où μ_0 est une mesure équivalente à μ. Ce que nous allons montrer maintenant, c'est que si A est un temps local l'on peut prendre $\mu_0 = \mu$, à condition toutefois de remplacer A par un multiple convenablement choisi; cela n'est nullement gênant, un temps local n'étant de toute façon défini qu'à une constante multiplicative près.

(3.14) **Proposition.** *Si A est un temps local tel que $\nu_A > 0$, alors il existe un réel $c > 0$ tel que l'on ait $U^{cA} \geqq 1 \otimes \mu$.*

Démonstration. Reprenons la démonstration de la proposition 3.7: A étant spéciale, nous avons vu que pour tout réel $c_1 \in)0, 1($ l'on pouvait écrire

(3.15) $$U^{c_1 A} \geqq 1 \otimes \nu U^{c_1 A},$$

ν étant une mesure équivalente à ν_A. Mais A étant un temps local, ν_A se réduit à une masse ponctuelle, et l'on a donc forcément $\nu = k_1 \nu_A$ pour une constante $k_1 > 0$. En reportant dans (3.15) on obtient:

$$U^{c_1 A} \geqq k_1 (1 \otimes \nu_A U^{c_1 A}) = k(1 \otimes \mu),$$

avec $k = k_1 c_1^{-1}$.

Il ne nous reste plus qu'à éliminer le facteur k en modifiant convenablement c_1. Posons $B = c_1 A$. On a donc $U^B \geqq k(1 \otimes \mu)$. Pour tout $\theta < 1$ l'équation résolvante s'écrit

$$U^{\theta B} = \sum_{n \geqq 0} (U^B_{(1-\theta)B})^n U^B = \sum_{n \geqq 0} (1-\theta)^n (U^B_B)^n U^B.$$

Or

$$U_B^B U^B \geqq k\, U_B^B(1 \otimes \mu) = k(U_B^B 1 \otimes \mu) = k(1 \otimes \mu)$$

d'où par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (U_B^B)^n U^B \geqq k(1 \otimes \mu).$$

On pourra alors écrire la suite d'inégalités

$$U^{cA} \geqq U^{\theta c_1 A} = U^{\theta B} \geqq k\,\theta^{-1}(1 \otimes \mu) \geqq 1 \otimes \mu$$

à condition d'avoir $k \geqq \theta$, $c \leqq \theta c_1$ et $0 < \theta < 1$, ce qui sera vérifié en choisissant d'abord $\theta < \inf(k, 1)$ et en prenant ensuite $c = \theta c_1$.

Pour conclure ce chapitre sur les FAS, nous énonçons deux théorèmes limite-quotient. Le premier généralise celui qui est établi dans [3] pour les fonctions spéciales:

(3.16) **Théorème.** *Soient A et B deux FA. Si f et g sont deux fonctions positives telles que les FA $f \cdot A$ et $g \cdot B$ soient spéciales et que $\nu_\beta(g) > 0$, et si ν_1 et ν_2 sont deux probabilités quelconques, alors*

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\nu_1 U_A^\alpha f}{\nu_2 U_B^\alpha g} = \frac{\nu_A(f)}{\nu_B(g)}.$$

Démonstration. Commençons par établir le résultat dans le cas particulier où $f = g = 1$ et où A et B sont spéciales, avec $\nu_B > 0$. Cela revient donc à prouver que

$$\text{(3.17)} \qquad \lim_{\alpha \to 0} \frac{\nu_1(u_A^\alpha)}{\nu_2(u_B^\alpha)} = \frac{\nu_A(1)}{\nu_B(1)}.$$

Or les deux fonctions u_A^1 et u_B^1 sont spéciales bornées et l'on a $\mu(u_B^1) = \nu_B(1) > 0$. On peut donc écrire, en vertu du théorème limite-quotient démontré dans [3]:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\nu_1 U^\alpha u_A^1}{\nu_2 U^\alpha u_B^1} = \frac{\mu(u_A^1)}{\mu(u_B^1)} = \frac{\nu_A(1)}{\nu_B(1)}.$$

Or il est facile de vérifier que l'on a

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\nu_1(u_A^\alpha)}{\nu_2(u_B^\alpha)} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\nu_1 U^\alpha u_A^1}{\nu_2 U^\alpha u_B^1};$$

cela résulte, en effet, d'une simple application de l'équation résolvante et du fait que $\lim_{\alpha \to 0} U^\alpha u_B^1 = \infty$.

L'égalité (3.17) se trouve ainsi démontrée. Il suffit maintenant de remplacer A par $f \cdot A$ et B par $g \cdot B$ pour obtenir le résultat du théorème.

Voici maintenant le second théorème limite-quotient:

(3.18) **Théorème.** *Soient A et B deux FAS telles que $\nu_B > 0$. Quelles que soient les probabilités ν_1 et ν_2 on a alors*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E_{\nu_1}(A_t)}{E_{\nu_2}(B_t)} = \frac{\nu_A(1)}{\nu_B(1)}.$$

Remarquons tout d'abord que les quotients qui figurent dans l'énoncé ont toujours un sens. En effet, pour tous $t>0$ et $x\in \mathrm{E}$ on a:

$$u_A^1(x)=E_x\int_0^\infty e^{-s}\,dA_s \geqq E_x\int_0^t e^{-s}\,dA_s \geqq e^{-t}E_x(A_t),$$

d'où il résulte que, pour A spéciale, la fonction $E_{\cdot}(A_t)$ est spéciale bornée, puisque majorée par $e^t u_A^1$.

Le théorème 3.18 précise, dans le cas des FAS, le résultat suivant, que l'on trouvera dans [1]: si A et B sont deux FA telles que $\nu_A(1)<\infty$ et $0<\nu_B(1)<\infty$, alors

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E_x(A_t)}{E_x(B_t)}=\frac{\nu_A(1)}{\nu_B(1)}$$

pour μ-presque tout x.

Nous ne démontrerons le théorème que lorsque $\nu_1=\nu_2=\nu$, étant donné que le cas général s'en déduit grâce à une suite de lemmes pratiquement identiques à ceux qui figurent au chapitre 6 de [10], dans la preuve du théorème 6.5: il suffit de vérifier que l'on a bien le droit de remplacer, dans l'énoncé de chacun d'entre eux, $\sum_{m=1}^{n} P_m h$ par $\int_0^t P_s h\,ds$, ce qui se fait sans aucune difficulté; nous renvoyons donc le lecteur à cet ouvrage.

Commençons par établir une proposition qui est l'analogue, pour les fonctionnelles additives, d'un résultat bien connu dans le cas des chaînes, savoir: si f est une charge (ce qui signifie $|f|$ spéciale bornée et $\mu(f)=0$), alors les sommes partielles $\sum_0^n P_m f$ sont uniformément bornées sur E (cf. [10], ch. 6, proposition 5.7).

(3.19) **Proposition.** *A et B étant deux FAS telles que $\nu_A(1)=\nu_B(1)$, on a*

$$\sup_{t>0}\sup_{x\in E}|E_x(A_t)-E_x(B_t)|<+\infty.$$

Démonstration. Un calcul classique, utilisant la propriété de Markov, permet d'écrire pour tout $\alpha>0$:

$$E_x\int_0^t e^{-\alpha s}\,dA_s=[I-e^{-\alpha t}P_t]\,u_A^\alpha(x).$$

Or, pour tout $t>0$, on a, par le théorème de convergence monotone:

$$\lim_{\alpha\to 0}E_x\int_0^t e^{-\alpha s}\,dA_s=E_x(A_t).$$

D'où

$$(3.20)\quad |E_x(A_t)-E_x(B_t)| \leqq \sup_{0<\alpha<1} \left|E_x \int_0^t e^{-\alpha s}\, dA_s - E_x \int_0^t e^{-\alpha s}\, dB_s\right|$$
$$= \sup_{0<\alpha<1} |(I-e^{-\alpha t}P_t)(u_A^\alpha - u_B^\alpha)(x)|$$
$$= \sup_{0<\alpha<1} |(I-e^{-\alpha t}P_t)[I+(1-\alpha)U^\alpha](u_A^1-u_B^1)(x)|,$$

la dernière égalité étant une conséquence de l'équation résolvante.

Posons $f=u_A^1-u_B^1$. On a alors, pour tous $x\in E$ et $\alpha\in]0,1[$:

$$|(I-e^{-\alpha t}P_t)(I+(1-\alpha)U^\alpha)f(x)| \leqq 2\,\|(I+(1-\alpha)U^\alpha)(f)\|$$
$$\leqq 2\,\|f\| + 2\,\|U^\alpha f\|.$$

Or f est une charge: en effet, $|f| \leqq u_A^1+u_B^1$ et

$$\mu(f)=\mu(u_A^1)-\mu(u_B^1)=\nu_A(1)-\nu_B(1)=0$$

par hypothèse. D'après le lemme 2.2 de [3] on a donc

$$\sup_{0<\alpha<1} \|U^\alpha f\| < \infty,$$

ce qui donne la majoration suivante

$$\sup_{t>0}\sup_{x\in E} |E_x(A_t)-E_x(B_t)| \leqq 2(\|f\| + \sup_{0<\alpha<1}\|U^\alpha f\|) < \infty.$$

Nous sommes maintenant à même de prouver le théorème limite-quotient dans le cas $\nu_1=\nu_2=\nu$.

A et B étant les deux FAS de l'enoncé du théorème 3.18, posons $A'=\nu_B(1)A$ et $B'=\nu_A(1)B$. A' et B' sont encore deux FAS, et vérifient $\nu_{A'}(1)=\nu_{B'}(1) =\nu_A(1)\,\nu_B(1)$. Il existe donc, en vertu de la proposition 3.19, une constante finie M telle que

$$\forall x\in \mathrm{E}, \qquad \forall t>0, \qquad |E_x(A'_t-B'_t)| \leqq M.$$

En intégrant par rapport à ν on obtient, pour tout $t>0$:

$$|E_\nu(A'_t-B'_t)| \leqq \int \nu(dx)\,|E_x(A'_t-B'_t)| \leqq M,$$

soit encore

$$|\nu_B(1)\,E_\nu(A_t)-\nu_A(1)\,E_\nu(B_t)| \leqq M,$$

ce qui donne, en divisant par $\nu_B(1)\,E_\nu(B_t)$:

$$\left|\frac{E_\nu(A_t)}{E_\nu(B_t)} - \frac{\nu_A(1)}{\nu_B(1)}\right| \leqq \frac{M}{\nu_B(1)\,E_\nu(B_t)}.$$

Or l'hypothèse $\nu_B>0$ entraîne que $E_\nu(B_t)$ croît vers l'infini avec t, ce qui achève la démonstration.

IV. Opérateurs potentiels

J. Neveu a montré dans [8] comment l'on pouvait associer à toute fonction h de $b\mathscr{E}_+$ vérifiant $U^h > 1 \otimes \mu$ un opérateur W^h transformant les fonctions spéciales en fonctions bornées et permettant de résoudre l'équation de Poisson lorsque le second membre est une charge. Nous allons montrer que la même construction peut être faite à partir de toute FA A vérifiant $U^A > 1 \otimes \mu$.

Lorsque l'on part d'une fonction h telle que $U^h > 1 \otimes \mu$, le noyau W^h est défini par la formule

$$W^h = \sum_{n \geqq 0} (V^h M_h)^n V^h,$$

où V^h est l'opérateur positif $U^h - 1 \otimes \mu$. Soit maintenant A une FA vérifiant $U^A > 1 \otimes \mu$. Nous avons vu, d'une part, qu'une telle fonctionnelle était forcément spéciale, d'autre part que les temps locaux (multipliés éventuellement par une constante suffisamment petite) satisfaisaient à cette inégalité.

L'opérateur V^h de tout à l'heure sera évidemment remplacé par

$$V^A = U^A - 1 \otimes \mu;$$

ce qui est par contre moins immédiat, c'est de trouver un équivalent à $V^h M_h$, autrement dit de définir un opérateur qui soit en quelque sorte le transformé de V^A par «multiplication à droite par A». Le lemme suivant va nous permettre de donner un sens précis à cette expression:

(4.1) **Lemme.** *Si A est une FAS telle que $U^A \geqq 1 \otimes \mu$, alors quelle que soit la FA B on a $U_B^A \geqq 1 \otimes \nu_B$.*

Dans ces conditions, le «multiplié à droite par B de V^A» sera tout simplement l'opérateur V_B^A défini par

$$V_B^A = U_B^A - 1 \otimes \nu_B.$$

Cela est compatible avec les définitions précédentes puisque l'on vérifie aisément que, dans le cas où B est de la forme $B_t = \int_0^t h(X_s)\, ds$, l'on a $V_B^A = V^A M_h$. Donnons maintenant la démonstration du lemme.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'on a $U_B^A(f) \geqq \nu_B(f)$ pour toute fonction f continue positive. Or on sait que pour tout $\alpha > 0$

$$\nu_B(f) = \frac{1}{\alpha} E_\mu \int_0^\alpha f(X_s)\, dB_s.$$

Alors l'inégalité $U^A \geqq 1 \otimes \mu$, qui peut encore s'écrire $U^A(x, \cdot) \geqq \mu$ pour tout $x \in E$, entraîne

$$\begin{aligned}
\forall \alpha > 0, \quad \nu_B(f) &= \frac{1}{\alpha} E_\mu \int_0^\alpha f(X_s)\, dB_s = \left\langle \mu, E_. \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(X_s)\, dB_s\right]\right\rangle \\
&\leqq U^A \left\{E_. \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(X_s)\, dB_s\right]\right\}(x) \\
&= E_x \int_0^\infty \exp(-A_t)\, dt\, E_{X_t} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(X_s)\, dB_s \\
&= E_x \int_0^\infty \exp(-A_t)\, dt\, \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} f(X_s)\, dB_s.
\end{aligned}$$

On obtient alors, grâce au lemme de Fatou

$$\begin{aligned} \nu_B(f) &\leqq \limsup_{\alpha\to 0} E_x \int_0^\infty \exp(-A_t)\,dt \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} f(X_s)\,dB_s \\ &\leqq E_x \int_0^\infty \exp(-A_t)\,dt \limsup_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} f(X_s)\,dB_s. \end{aligned}$$

Or, en désignant par $B'_t(\omega)$ la dérivée (définie pour presque tout t, en vertu du théorème de Lebesgue) de la fonction monotone $t \to B_t(\omega)$, il est facile de vérifier que l'on a

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} f(X_s)\,dB_s = B'_t f(X_t) \quad \text{p.p.}$$

Il en résulte que

$$\nu_B(f) \leqq E_x \int_0^\infty \exp(-A_t) f(X_t)\, B'_t\,dt.$$

Or on sait (voir par exemple [11], p. 166) que $dB_t \geqq B'_t\,dt$, ce qui permet d'écrire

$$\nu_B(f) \leqq E_x \int_0^\infty \exp(-A_t) f(X_t)\,dB_t = U_B^A f(x).$$

On a donc bien $U_B^A \geqq 1 \otimes \nu_B$.

Définissons maintenant les opérateurs potentiels associés à une FA.

(4.2) *Définition. Soit A une FAS telle que $\nu_A > 0$ et $U^A > 1 \otimes \mu$. On pose alors, B étant une autre FA:*

$$(4.3)\qquad W^A = \sum_{n\geqq 0} (V_A^A)^n V^A = \sum_{n\geqq 0} (U_A^A - 1\otimes \nu_A)^n (U^A - 1\otimes \mu)$$

et

$$(4.4)\qquad W_B^A = \sum_{n\geqq 0} (V_A^A)^n V_B^A = \sum_{n\geqq 0} (U_A^A - 1\otimes \nu_A)^n (U_B^A - 1\otimes \nu_B).$$

Le lecteur vérifiera aisément que ces opérateurs satisfont aux relations suivantes:

$$(4.5)\qquad W_A^A 1 = \frac{1-\nu_A(1)}{\nu_A(1)};$$

$$(4.6)\qquad \nu_A W_B^A = \frac{1-\nu_A(1)}{\nu_A(1)} \cdot \nu_B; \text{ en particulier } \nu_A W^A = \frac{1-\nu_A(1)}{\nu_A(1)} \cdot \mu;$$

$$(4.7)\qquad U_A^A W_B^A = W_A^A U_B^A.$$

On sait que les opérateurs W^h transforment les fonctions spéciales en fonctions bornées. Il nous sera utile par la suite de savoir que ce résultat reste vrai pour les fonctionnelles additives:

(4.8) **Proposition.** *Soit A une FA telle que $\nu_A > 0$ et $U^A > 1 \otimes \mu$. Pour toute FAS B la fonction $W_B^A 1$ est bornée.*

Démonstration. La fonction $U_B^A 1$ étant bornée (d'après la proposition 3.2), on a

$$\begin{aligned} W_B^A 1 &= \sum_{n \geqq 0} (U_A^A - 1 \otimes \nu_A)^n (U_B^A 1 - \nu_B(1)) \\ &\leqq \| U_B^A 1 \| \sum_{n \geqq 0} (U_A^A - 1 \otimes \nu_A)^n (1) = \frac{\| U_B^A 1 \|}{\nu_A(1)} < +\infty. \end{aligned}$$

Nous allons prouver maintenant un certain nombre de formules faisant intervenir à la fois les opérateurs U et W.

(4.9) **Proposition.** *Soit A une FA telle que $\nu_A > 0$ et $U^A > 1 \otimes \mu$. Alors, quelles que soient les FA B et C telles que $\nu_B > 0$ et $\nu_C > 0$, on a les relations:*

(4.10) $$U_C^B + U_B^B W_C^A = W_C^A + \frac{1}{\nu_A(1)} U_A^B 1 \otimes \nu_C$$

et

(4.11) $$U_C^B + W_B^A U_C^B = W_C^A + \frac{1}{\nu_A(1)} \cdot 1 \otimes \nu_A U_C^B.$$

Démonstration. Nous nous contenterons de prouver la première identité, la seconde s'obtenant par un raisonnement tout à fait similaire.

De la définition de W_C^A il résulte que

$$\begin{aligned} W_C^A &= U_C^A - 1 \otimes \nu_C + (U_A^A - 1 \otimes \nu_A) W_C^A \\ &= U_C^A + U_A^A W_C^A - \frac{1}{\nu_A(1)} 1 \otimes \nu_C; \end{aligned}$$

la formule (4.10) est donc démontrée dans le cas $B = A$:

(4.12) $$U_C^A + U_A^A W_C^A = W_C^A + \frac{1}{\nu_A(1)} 1 \otimes \nu_C.$$

Dans le cas général, l'équation résolvante permet d'écrire:

$$U_C^A = U_C^{A+B} + U_B^{A+B} U_C^A$$

et

$$U_A^A = U_A^{A+B} + U_B^{A+B} U_A^A.$$

En reportant ces expressions dans (4.12), on obtient:

$$W_C^A + \frac{1}{\nu_A(1)} 1 \otimes \nu_C = U_C^{A+B} + U_A^{A+B} W_C^A + U_B^{A+B} (U_C^A + U_A^A W_C^A),$$

soit encore, grâce à (4.12):

$$W_C^A + \frac{1}{v_A(1)} 1 \otimes v_C = U_C^{A+B} + U_A^{A+B} W_C^A + U_B^{A+B}\left(W_C^A + \frac{1}{v_A(1)} 1 \otimes v_C\right)$$
$$= U_C^{A+B} + U_{A+B}^{A+B} W_C^A + \frac{1}{v_A(1)} U_B^{A+B}(1) \otimes v_C.$$

Enfin, en remplaçant $U_B^{A+B}(1)$ par $1 - U_A^{A+B}(1)$ on trouve

$$(4.13)\qquad U_C^{A+B} + U_{A+B}^{A+B} W_C^A = W_C^A + \frac{1}{v_A(1)} U_A^{A+B}(1) \otimes v_C,$$

ce qui est la formule (4.10) avec $A+B$ à la place de B. On passe de $A+B$ à B grâce à la relation suivante, vraie pour tout $p \geqq 0$:

$$(4.14)\qquad \sum_{n=0}^{p} (U_A^{A+B})^n U_C^{A+B} + \sum_{n=0}^{p} (U_A^{A+B})^n U_B^{A+B} W_C^A + (U_A^{A+B})^{p+1} W_C^A$$
$$= W_C^A + \frac{1}{v_A(1)} \left(\sum_{n=0}^{p} (U_A^{A+B})^n U_A^{A+B}\right)(1 \otimes v_C),$$

qui se démontre aisément par récurrence. En effet, pour $p=0$, (4.14) se réduit à (4.13), et l'on passe de p à $p+1$ en multipliant à gauche (4.14) par U_A^{A+B} et en ajoutant au résultat (4.13). En passant à la limite dans (4.14) sans tenir compte du terme $(U_A^{A+B})^{p+1} W_C^A$ on obtient

$$(4.15)\qquad U_C^B + U_B^B W_C^A \leqq W_C^A + \frac{1}{v_A(1)} U_A^B 1 \otimes v_C.$$

Désignons par P et Q les deux membres de cette inégalité. On aura $P=Q$ s'il existe une fonction strictement positive f telle que les deux fonctions Pf et Qf soient finies et égales en tout point. Posons $f = U^C h$, h étant une fonction spéciale telle que $\mu(h) > 0$: f est strictement positive partout et, la FA $f \cdot C$ étant spéciale, Pf et Qf sont toutes deux bornées (d'après la proposition 4.8). La relation (4.15) se déduisant de (4.14) par passage à la limite, il est clair que l'on aura $Pf = Qf$ si et seulement si

$$\lim_{p \to \infty} (U_A^{A+B})^{p+1} W_C^A f = 0,$$

ce qui est une conséquence du fait que

$$\sum_{p \geqq 0} (U_A^{A+B})^{p+1} W_C^A f = U_A^B W_C^A f,$$

la fonction $U_A^B W_C^A f = U_A^B W_{f \cdot C}^A 1$ étant bornée.

Les propositions précédentes ont plusieurs conséquences intéressantes:

(4.16) **Corollaire.** *Soit A une FA telle que $v_A > 0$ et $U^A > 1 \otimes \mu$. Une FA C est alors spéciale si et seulement si sa mesure associée v_C est bornée et si la fonction $W_C^A 1$ est bornée.*

Démonstration. La condition nécessaire résulte du corollaire 3.5 et de la proposition 4.8. Réciproquement, pour toute fonction $h \in b\mathscr{E}_+$ telle que $\mu(h) > 0$ on a, grâce à la formule (4.10):

$$U_C^h \leqq W_C^A + \frac{1}{v_A(1)} U_A^h 1 \otimes v_C,$$

d'ou

$$u_C^h \leqq W_C^A 1 + \frac{1}{v_A(1)} u_A^h \cdot v_C(1)$$

et u_C^h est une fonction bornée.

(4.17) **Corollaire.** *Soit B une FAS telle que $v_B > 0$. Si C est une FA telle que u_C^B soit une fonction bornée, alors C est spéciale.*

Démonstration. $v_C(1) = v_B U_C^B 1 \leqq \|u_C^B\| \, v_B(1) < \infty$, donc la mesure v_C est bornée. D'autre part, A étant une FA telle que $v_A > 0$ et $U^A > 1 \otimes \mu$, la formule (4.11) entraîne que

$$W_C^A 1 \leqq u_C^B + W_B^A u_C^B,$$

et $W_C^A 1$ est une fonction bornée puisque les fonctions u_C^B et $W_B^A 1$ le sont. Le corollaire 4.16 prouve alors que C est spéciale.

Remarque. Nous avons ainsi un nouveau critère de spécialité: A est spéciale dès que u_A^h est bornée pour une fonction h spéciale et telle que $\mu(h) > 0$.

Le corollaire suivant généralise le lemme 2.2 de [3]:

(4.18) **Corollaire.** *Si f est une charge, la famille des fonctions $U^B f$ est uniformément bornée lorsque B parcourt les FA telles que $v_B > 0$.*

Démonstration. En appliquant la formule (4.10) avec $C_t = t$ on obtient, puisque $\mu(f) = 0$:

$$U^B f + U_B^B W^A f = W^A f.$$

Mais $W^A f$ est une fonction bornée puisque $|f|$ est spéciale et que l'on a, W^A étant un opérateur positif:

$$|W^A f| \leqq W^A |f| \leqq \|W^A |f|\| < +\infty.$$

Ainsi, U_B^B étant une contraction,

$$\|U^B f\| = \|W^A f - U_B^B W^A f\| \leqq 2 \, \|W^A f\|$$

pour toute FA B telle que $v_B > 0$.

Nous allons nous intéresser maintenant à la résolution de l'équation de Poisson dont le second membre est une charge.

(4.19) **Proposition.** *Soit B une FA telle que $v_B > 0$ et $U^B > 1 \otimes \mu$. Quelle que soit la FA A telle que $v_A > 0$, le noyau $\Gamma_A^B = I + W_A^B$ résoud l'équation de Poisson pour le processus changé de temps ${}^A X$; autrement dit, si f est une charge pour ${}^A X$, la* *fonction $\Gamma_A^B f$ est telle que*

(4.20) $(I-U_A^A)\Gamma_A^B f=f.$

Démonstration. D'après la formule (4.10) on a

$$U_A^A+U_A^A W_A^B=W_A^B+\frac{1}{v_B(1)}u_B^A\otimes v_A.$$

Si f est une charge pour ${}^A\mathrm{X}$, $v_A(f)=0$ et la relation précédente devient

$$U_A^A f+U_A^A W_A^B f=W_A^B f,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(I-U_A^A)\Gamma_A^B f=f.$$

En particulier, tout noyau de la forme Γ^B résoud l'équation de Poisson pour le processus X.

La proposition 4.19 va nous permettre de trouver une relation entre les opérateurs W^A et W^B construits à partir de deux FA différentes A et B. Mais il nous faut d'abord démontrer la proposition que voici:

(4.21) **Proposition.** *Soient A et B deux FA telles que $v_A>0$, $U^A>1\otimes\mu$ et $v_B>0$, $U^B>1\otimes\mu$. Les opérateurs W_A^A et W_A^B sont alors liés par la relation*

(4.22) $$W_A^A+\frac{1}{v_A(1)}W_A^B 1\otimes v_A=W_A^B+\frac{1}{v_B(1)}1\otimes v_B W_A^A.$$

Démonstration. Γ_A^A et Γ_A^B étant deux noyaux vérifiant l'équation (4.20), on sait (voir [10]) qu'il existe une fonction finie ψ et une mesure bornée ρ telles que l'on ait

$$\Gamma_A^A+\psi\otimes v_A=\Gamma_A^B+1\otimes\rho.$$

On en déduit

(4.23) $$W_A^A+\psi\otimes v_A=W_A^B+1\otimes\rho.$$

En prenant la valeur des deux membres sur la fonction 1 on obtient

$$c_A+\psi v_A(1)=W_A^B 1+\rho(1),$$

c_A étant la constante $\dfrac{1-v_A(1)}{v_A(1)}$; ψ est donc de la forme

$$\psi=\frac{1}{v_A(1)}(W_A^B 1+a),$$

où a est une constante.

Pour trouver ρ multiplions à gauche les deux membres de (4.23) par v_B; cela donne

$$v_B W_A^A+v_B(\psi)v_A=c_B v_A+v_B(1)\rho,$$

où $c_B = \frac{1-\nu_B(1)}{\nu_B(1)}$. Il en résulte

$$\rho = \frac{1}{\nu_B(1)} (\nu_B W_A^A + b\nu_A),$$

b étant une constante. En reportant les valeurs de ψ et de ρ dans (4.23) on obtient

$$(4.24) \quad W_A^A + \frac{1}{\nu_A(1)} W_A^B 1 \otimes \nu_A = W_A^B + \frac{1}{\nu_B(1)} 1 \otimes \nu_B W_A^A + k(1 \otimes \nu_A),$$

pour une nouvelle constante k. En écrivant (4.24) pour la fonction 1 on obtient

$$c_A + W_A^B 1 = W_A^B 1 + c_A + k\nu_A(1),$$

ce qui prouve que $k=0$: (4.24) se réduit alors à la relation (4.22) qu'il fallait démontrer.

(4.25) **Proposition.** *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente, les opérateurs W^A et W^B sont liés par la formule*

$$(4.26) \quad W^A + \frac{1}{\nu_A(1)} W_A^B 1 \otimes \mu = W^B + \frac{1}{\nu_B(1)} 1 \otimes \nu_B W^A.$$

Démonstration. Multiplions à droite par U^A l'identité (4.22) et ajoutons ensuite U^A aux deux membres; cela donne

$$(4.27) \quad U^A + W_A^A U^A + \frac{1}{\nu_A(1)} W_A^B 1 \otimes \mu = U^A + W_A^B U^A + \frac{1}{\nu_B(1)} 1 \otimes \nu_B W_A^A U^A.$$

Mais d'après la formule (4.11) on a

$$U^A + W_A^B U^A = W^B + \frac{1}{\nu_B(1)} 1 \otimes \nu_B U^A$$

et

$$U^A + W_A^A U^A = W^A + \frac{1}{\nu_A(1)} 1 \otimes \mu.$$

L'identité (4.27) devient alors

$$W^A + \frac{1}{\nu_A(1)} 1 \otimes \mu + \frac{1}{\nu_A(1)} W_A^B 1 \otimes \mu$$
$$= W^B + \frac{1}{\nu_B(1)} 1 \otimes \nu_B U^A + \frac{1}{\nu_B(1)} 1 \otimes \nu_B \left(W^A - U^A + \frac{1}{\nu_A(1)} 1 \otimes \mu \right),$$

qui se réduit, après simplification, à (4.26).

Précisons, enfin, que les opérateurs $\Gamma^A = I + W^A$ vérifient les trois principes fondamentaux de la théorie du potentiel: le principe de l'équilibre, le principe du balayage et le principe du maximum. Les démonstrations de [10] (chapitre 8, paragraphe 2) sont en effet valables pour tout noyau Γ permettant de résoudre l'équation de Poisson.

V. Processus de Harris en dualité

Nous supposons dans tout ce chapitre que le processus de Harris X est en dualité avec un processus $\hat{X}$. Nous prenons comme définition de la dualité celle qui figure au chapitre VI du livre de Blumenthal et Getoor [2]. Rappelons que les résolvantes U^α et $\hat{U}^\alpha$ sont alors données par les formules

$$U^\alpha f(x) = \int u^\alpha(x,y) f(y)\,\xi(dy)$$

et

$$f\hat{U}^\alpha(y) = \int \xi(dx) f(x) u^\alpha(x,y),$$

ξ étant une mesure σ-finie sur $(\mathrm{E}, \mathscr{E})$. En fait, on a forcément $\xi = \mu$, car ξ est excessive et σ-finie et il est bien connu que pour un processus de Harris une telle mesure est égale à sa mesure invariante. Pour alléger, nous écrirons dans toute la suite dx au lieu de $\mu(dx)$.

Soit h une fonction de $b\mathscr{E}_+$ et α un réel tel que $h \leqq \alpha$. Les opérateurs U^α et $\hat{U}^\alpha$ étant en dualité, au sens où

$$\forall f \in \mathscr{E}_+, \quad \forall g \in \mathscr{E}_+, \quad \langle f, U^\alpha g\rangle = \langle f\hat{U}^\alpha, g\rangle,$$

il résulte immédiatement des équations résolvantes

$$U^h = \sum_{n \geqq 0} (U^\alpha M_{\alpha-h})^n U^\alpha$$

et

$$\hat{U}^h = \sum_{n \geqq 0} (\hat{U}^\alpha M_{\alpha-h})^n \hat{U}^\alpha$$

qu'il en est de même des opérateurs U^h et $\hat{U}^h$:

$$\langle f, U^h g\rangle = \langle f\hat{U}^h, g\rangle.$$

On a alors la proposition suivante:

(5.1) **Proposition.** *Pour toute $h \in b\mathscr{E}_+$ il existe une et une seule fonction u^h définie sur $E \times E$ et telle que*

1) *pour tout $x \in \mathrm{E}$ la fonction $y \to u^h(x,y)$ est α-coexcessive et pour tout $y \in \mathrm{E}$ la fonction $x \to u^h(x,y)$ est α-excessive, où $\alpha = \|h\|$;*

2) *pour toute fonction $f \in \mathscr{E}_+$ on a, quels que soient $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{E}$:*

$$U^h f(x) = \int u^h(x,y) f(y)\,dy \quad \text{et} \quad f\hat{U}^h(y) = \int dx\, f(x) u^h(x,y).$$

De plus, si k est une fonction de $b\mathscr{E}_+$ majorant h, on a les relations:

$$\begin{aligned}(5.2)\quad u^h(x,y) &= u^k(x,y) + \int u^k(x,z)\,dz\,[k(z)-h(z)]\,u^h(z,y)\\ &= u^k(x,y) + \int u^h(x,z)\,dz\,[k(z)-h(z)]\,u^k(z,y).\end{aligned}$$

Démonstration. Choisissons un réel α majorant h et posons

$$u^h(x,y)=u^\alpha(x,y)+\int U^h(x,dz)[\alpha-h(z)]u^\alpha(z,y). \tag{5.3}$$

En se servant de l'équation résolvante et du fait que les opérateurs U^h et $\hat{U}^h$ sont en dualité, on vérifie sans peine que la fonction u^h ainsi définie satisfait aux conditions 1) et 2) de l'énoncé.

L'unicité ainsi que les égalités (5.2) résultent du fait que deux fonctions β-coexcessive égales μ-presque partout sont identiques.

Remarquons que nous n'avons fait jusqu'à présent aucune hypothèse quant à la nature du processus $\hat{X}$. En fait, comme nous allons le voir, le dual d'un processus de Harris est forcément de Harris.

(5.4) **Proposition.** *Pour toute fonction $h\in b\mathscr{E}_+$ telle que $\mu(h)>0$, on a $\hat{U}^h(h\cdot\mu)=\mu$ et $h\hat{U}^h=1$.*

Démonstration. L'on sait, en effet, que $(h\cdot\mu)U^h=\mu$ et $U^h(h)=1$. Pour toute fonction $f\in\mathscr{E}_+$ on a, par dualité

$$\begin{aligned}\langle f,\hat{U}^h(h\cdot\mu)\rangle&=\langle f\hat{U}^h,h\cdot\mu\rangle=\langle f\hat{U}^h,h\rangle=\langle f,U^h h\rangle\\&=\langle f,1\rangle=\langle f,\mu\rangle,\end{aligned}$$

d'où $\hat{U}^h(h\mu)=\mu$. En particulier, la mesure μ est co-invariante. De même,

$$\langle h\hat{U}^h,f\rangle=\langle h,U^h f\rangle=\langle h\mu,U^h f\rangle=(h\mu)U^h f=\mu(f)=\langle 1,f\rangle,$$

d'où $h\hat{U}^h=1$ μ-p.p. En fait, cette égalité a lieu partout, puisque la mesure μ charge tous les ouverts cofins non vides et que la fonction $h\hat{U}^h$, qui est $\|h\|$-coexcessive (comme on peut le voir aisément grâce à l'équation résolvante), est cofinement continue.

(5.5) **Proposition.** *Le dual d'un processus de Harris est lui-même de Harris.*

Démonstration. On sait (cf. [8]) qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus soit de Harris est qu'il existe une fonction $h\in b\mathscr{E}_+$ qui soit strictement positive sur E et telle que $U^h h=1$ et $U^h\geqq 1\otimes\mu$. X étant, par hypothèse, de Harris, choisissons une h satisfaisant à ces conditions. Comme elle est strictement positive, la proposition précédente entraîne que l'on a $h\hat{U}^h=1$. Par ailleurs, l'inégalité $U^h\geqq 1\otimes\mu$ se traduit par le fait que pour tout $x\in E$

$$u^h(x,\cdot)\geqq 1\ \mu\text{-p.p.},$$

donc partout, la fonction $u^h(x,\cdot)$ étant cofinement continue. On en déduit que $u^h\geqq 1$ sur $E\times E$ et que

$$\forall f\in\mathscr{E}_+\ \ \forall y\in E,\qquad f\hat{U}^h(y)=\int dx\,f(x)\,u^h(x,y)\geqq\mu(f),$$

autrement dit $\hat{U}^h\geqq\mu\otimes 1$. Le processus $\hat{X}$ est donc de Harris.

Un raisonnement analogue permet de démontrer le résultat suivant:

(5.6) **Proposition.** *Une fonction bornée h est spéciale et co-spéciale si et seulement si il existe un réel $c>0$ tel que $U^{ch}\geqq 1\otimes\mu$.*

Démonstration. En effet, il est prouvé dans [5] que h est spéciale et co-spéciale si et seulement si

$$\exists\, c>0, \quad U^{ch} \geqq 1 \otimes \mu \quad \text{et} \quad \hat{U}^{ch} \geqq \mu \otimes 1.$$

Or on voit, en considérant la fonction u^{ch}, que la première de ces conditions implique la seconde.

Soit maintenant h une fonction de $b\mathscr{E}_+$ vérifiant $U^h > 1 \otimes \mu$.

Nous nous proposons de construire une fonction w^h qui soit une densité de l'opérateur W^h par rapport à μ. Pour cela, choisissons un réel $\alpha>0$ et posons, pour tout couple $(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E}$:

(5.7) $$w^h(x, y) = u^\alpha(x, y) + \alpha \int W^h(x, dz)\, u^\alpha(z, y) - \frac{1}{\mu(h)} \int dz\, h(z)\, u^\alpha(z, y).$$

Cette expression a toujours un sens puisque le dernier terme, égal à $h\hat{U}^\alpha(y)$, est majoré par la constante $\frac{\|h\|}{\alpha}$, et l'identité (4.11) montre que l'on a bien $W^h(x, dy) = w^h(x, y)\, \mu(dy)$ pour tout x de E. Par ailleurs, quel que soit x, la fonction $w^h(x, \cdot)$, égale à la différence de deux fonctions α-coexcessives, est cofinement continue; en particulier, on a $w^h \geqq 0$ partout, et la fonction w^h obtenue par (5.7) est indépendante du réel α choisi.

Comme nous l'avons déjà vu, l'inégalité $U^h > 1 \otimes \mu$ entraîne $\hat{U}^h > \mu \otimes 1$, ce qui permet de définir un opérateur $\hat{W}^h$, en dualité avec W^h. On vérifie alors qu'on a $\hat{W}^h(dx, y) = \mu(dx)\, w^h(x, y)$ pour tout $y \in \mathrm{E}$.

On peut également définir, par des méthodes analogues, des densités u^A (resp. w^A) pour les opérateurs U^A (resp. W^A) lorsque A est une FA (resp. une FA telle que $v_A > 0$ et $U^A > 1 \otimes \mu$), mais cela n'a d'intérêt réel que dans le cas des FA en dualité, sur lequel nous reviendrons plus loin.

Les densités que nous venons de construire nous permettent de poser la définition suivante:

(5.8) *Définition. Soit v une mesure positive. Pour toute fonction $h \in b\mathscr{E}_+$ on pose*

$$U^h v(x) = \int u^h(x, y)\, v(dy).$$

Si, de plus, h est telle que $\mu(h) > 0$ et $U^h > 1 \otimes \mu$, on définit

$$W^h v(x) = \int w^h(x, y)\, v(dy).$$

Remarques. 1) Il n'est pas difficile de vérifier que la fonction $U^h v$ (resp. $W^h v$) n'est autre que la densité par rapport à μ de la mesure $\hat{U}^h v$ (resp. $\hat{W}^h v$).

2) Soit A une FA. Dans [9] il est démontré que l'on a, pour tout $\alpha > 0$:

$$\forall f \in \mathscr{E}_+, \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad U_A^\alpha(f) = \int u^\alpha(x, y)\, f(y)\, v_A(dy).$$

Il en résulte, grâce à la relation (5.3) et à l'équation résolvante, que

$$U_A^h f(x) = \int u^h(x, y)\, f(y)\, v_A(dy).$$

En particulier, la fonction $U^h v_A$ est égale à u_A^h.

Ce qui précède va nous permettre de définir la notion de mesure spéciale[1]:

(5.9) *Définition. Une mesure positive* ν *est dite spéciale si et seulement si pour toute fonction* $h \in b\mathscr{E}_+$ *telle que* $\mu(h)>0$, *la fonction* $U^h \nu$ *est bornée.*

Comme pour les fonctions spéciales, il est évident qu'il suffit que cette condition soit vérifiée pour une $h>0$ et telle que $U^h \geqq 1 \otimes m_0$ $(m_0 \neq 0)$. On voit, par ailleurs, qu'une fonction f est spéciale si et seulement si la mesure $f \cdot \mu$ l'est et, plus généralement, qu'une FA A est spéciale si et seulement si sa mesure associée ν_A l'est.

(5.10) **Proposition.** *Toute mesure spéciale est bornée.*

Démonstration. Soient ν une mesure spéciale et h une fonction de $b\mathscr{E}_+$ telle que $0<\mu(h)<\infty$. On a alors $\hat{U}^h \nu = (U^h \nu) \cdot \mu \leqq k \cdot \mu$, la fonction $U^h \nu$ étant bornée. On peut donc écrire:

$$+\infty > k\,\mu(h) \geqq \langle h, \hat{U}^h \nu \rangle = \langle h\,\hat{U}^h, \nu \rangle = \langle 1, \nu \rangle = \nu(1).$$

On sait que les fonctions spéciales sont stables par les opérateurs $M_h U^h$. On démontre pareillement que si ν est une mesure spéciale, il en est de même de la mesure $M_h \hat{U}^h \nu = (h \cdot U^h \nu)\mu$, où $h \in b\mathscr{E}_+$, $\mu(h)>0$ (la preuve de ce résultat est, *mutatis mutandis*, la même que celle du corollaire 4.5 du chapitre 6 de [10]: nous ne la donnerons donc pas). Il en résulte immédiament que, pour tout $\alpha>0$, une mesure ν est spéciale si et seulement si la fonction $U^\alpha \nu$ est spéciale bornée. D'où l'on déduit, grâce au principe d'unicité des masses, que l'application $\nu \to U^1 \nu$ est une injection isométrique du cône des mesures spéciales muni de la norme $\|\nu\| = \nu(1)$ dans celui des fonctions spéciales bornées, considéré comme sous-ensemble de $L^1(\mu)$.

La proposition suivante est à rapprocher du corollaire 4.16:

(5.11) **Proposition.** *Soit* W^h *le noyau construit à partir d'une fonction* $h \in b\mathscr{E}_+$ *telle que* $\mu(h)>0$ *et* $U^h > 1 \otimes \mu$. *Une mesure* ν *est alors spéciale si et seulement si elle a une masse totale finie et la fonction* $W^h \nu$ *est bornée.*

Démonstration. Nous avons déjà vu que ν spéciale entraînait ν bornée. Par ailleurs, en passant aux densités, la relation (4.11) se traduit de la façon suivante:

$$u^h(x,y) + \int W_h^h(x,dz)\, u^h(z,y) = w^h(x,y) + \frac{1}{\mu(h)}.$$

On en déduit, par intégration:

$$W^h \nu \leqq U^h \nu + W^h M_h U^h \nu \leqq \|U^h \nu\| (1 + W^h h) = \frac{\|U^h \nu\|}{\mu(h)} < +\infty.$$

Réciproquement, supposons $\nu(1)<\infty$ et $W^h \nu$ bornée. Soit k une fonction de $b\mathscr{E}_+$ telle que $\mu(k)>0$. Par un raisonnement analogue à celui que nous venons

[1] Surtout ne pas confondre ces mesures spéciales-ci avec celles qui sont définies dans [8] et [10], et qui sont utiles dans la résolution de l'équation de Poisson

de faire, on déduit de la relation (4.10) l'inégalité suivante:

$$U^k v \leqq W^h v + \frac{1}{\mu(h)} U^k(h)\, v(1),$$

qui prouve bien que $U^k v$ est une fonction bornée.

W^h étant toujours le noyau construit à partir d'une fonction de $b\mathscr{E}_+$ vérifiant $\mu(h)>0$ et $U^h > 1 \otimes \mu$, on peut énoncer le principe d'unicité des masses que voici:

(5.12) **Proposition.** *Soit v une mesure bornée. Si la fonction $W^h v$ est finie, elle détermine v.*

Démonstration. Soient v_1 et v_2 deux mesures bornées telles que
$W^h v_1 = W^h v_2 < +\infty$
sur E. $W^h v_i$ étant la densité par rapport à μ de la mesure $\hat{W}^h v_i$, on peut écrire

$$\langle h, W^h v_i\rangle = \langle h, \hat{W}^h v_i\rangle = \langle h \hat{W}^h, v_i\rangle = \frac{1-\mu(h)}{\mu(h)} v_i(1) \qquad (i=1,2),$$

d'où l'on déduit que v_1 et v_2 ont la même masse totale. D'autre part, l'identité (4.10) donne, pour un $\alpha>0$:

$$U^\alpha v_i + \alpha U^\alpha W^h v_i = W^h v_i + \frac{v_i(1)}{\mu(h)} U^\alpha h \qquad (i=1,2),$$

d'où il résulte que l'on a $U^\alpha v_1 = U^\alpha v_2 < +\infty$, ce qui implique (cf. [2]) $v_1 = v_2$.

Nous allons commencer maintenant l'étude des FA en dualité.

(5.13) *Définition. Une FA A de* X *et une FA $\hat{A}$ de* $\hat{\mathrm{X}}$ *sont dites en dualité si les opérateurs U^A et $\hat{U}^{\hat{A}}$ le sont, autrement dit si pour tout couple (f,g) de fonctions de $\mathscr{E}_+$ l'on a*

$$\langle f, U^A g\rangle = \langle f \hat{U}^{\hat{A}}, g\rangle.$$

A chaque fois que cela ne prêtera pas à confusion, nous écrirons, pour alléger les notations, $\hat{U}^A$ au lieu de $\hat{U}^{\hat{A}}$.

(5.14) **Proposition.** *Supposons que A, FA de* X, *et $\hat{A}$, FA de* $\hat{\mathrm{X}}$, *soient telles que $v_A = v_{\hat{A}} > 0$. Alors les FA A et $\hat{A}$ sont en dualité, et il en est de même des processus changés de temps ${}^A\mathrm{X}$ et ${}^{\hat{A}}\hat{\mathrm{X}}$.*

Démonstration. Nous suivons de près le paragraphe VII.2 de [9]. Posons $v = v_A = v_{\hat{A}}$ et supposons, dans un premier temps, que pour tout $\alpha>0$ les fonctions $U^\alpha v$ et $v\hat{U}^\alpha$ sont bornées. Un tel α étant fixé, nous associons à tout $\beta>0$ la fonction $g^{\alpha,\beta}$ définie comme suit:

(5.15) $$\forall (x,y)\in \mathrm{E}\times\mathrm{E},\quad g^{\alpha,\beta}(x,y) = u^\alpha(x,y) - \beta \int U_A^{\beta A+\alpha}(x,dz)\, u^\alpha(z,y) \quad \text{si } u^\alpha(x,y)<\infty$$
$$= \infty \quad \text{si } u^\alpha(x,y) = \infty.$$

La fonction $u^\alpha(\cdot, y)$ étant α-excessive pour tout $y \in \mathrm{E}$, il n'est pas difficile de vérifier que l'on a, pour tout couple (x, y) de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$,

$$\beta \int U_A^{\beta A+\alpha}(x, dz)\, u^\alpha(z, y) \leqq u^\alpha(x, y),$$

ce qui entraîne $g^{\alpha,\beta} \geqq 0$ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathrm{E}$ la fonction $u^\alpha(x, \cdot)$ est telle que $u^\alpha(x, \cdot) < \infty$ μ-p.p. (puisque $\alpha U^\alpha 1 = 1$) et ν-p.p. (puisque $U^\alpha \nu$ est bornée); dans ces conditions, la formule (5.15) et l'équation résolvante entraînent que l'on a

$$U^{\beta A+\alpha}(x, dy) = g^{\alpha,\beta}(x, y)\, \mu(dy) \tag{5.16}$$

et

$$U_A^{\beta A+\alpha}(x, dy) = g^{\alpha,\beta}(x, y)\, \nu(dy).$$

De la même façon, en définissant $\hat{g}^{\alpha,\beta}$ par

$$\begin{aligned} \hat{g}^{\alpha,\beta}(x, y) &= u^\alpha(x, y) - \beta \int u^\alpha(x, z)\, \hat{U}_A^{\beta A+\alpha}(dz, y) \qquad \text{si } u^\alpha(x, y) < \infty \\ &= \infty \qquad \text{si } u^\alpha(x, y) = \infty \end{aligned}$$

on a

$$\hat{U}^{\beta A+\alpha}(dx, y) = \mu(dx)\, \hat{g}^{\alpha,\beta}(x, y)$$

et

$$\hat{U}_A^{\beta A+\alpha}(dx, y) = \nu(dx)\, \hat{g}^{\alpha,\beta}(x, y).$$

Soit maintenant $f \in b\mathscr{E}_+$. En intégrant (5.15) par rapport à $f(x)\,\mu(dx)$ et compte tenu de (5.16) on peut écrire:

$$\int \mu(dx)\, f(x)\, g^{\alpha,\beta}(x, y) = f\hat{U}^\alpha(y) - \beta \iint \mu(dx)\, f(x)\, g^{\alpha,\beta}(x, z)\, \nu(dz)\, u^\alpha(z, y). \tag{5.17}$$

D'autre part, la relation $f\hat{U}^{\beta A+\alpha}(y) = f\hat{U}^\alpha(y) - \beta f \hat{U}^{\beta A+\alpha}\, \hat{U}_A^\alpha(y)$ s'écrit

$$\int \mu(dx)\, f(x)\, \hat{g}^{\alpha,\beta}(x, y) = f\hat{U}^\alpha(y) - \beta \iint \mu(dx)\, f(x)\, \hat{g}^{\alpha,\beta}(x, z)\, \nu(dz)\, u^\alpha(z, y). \tag{5.18}$$

En soustrayant (5.18) de (5.17) on obtient

$$\begin{aligned} &\int \mu(dx)\, f(x)\, [g^{\alpha,\beta}(x, y) - \hat{g}^{\alpha,\beta}(x, y)] \\ &\qquad = -\beta \iint \mu(dx)\, f(x)\, [g^{\alpha,\beta}(x, z) - \hat{g}^{\alpha,\beta}(x, z)]\, \nu(dz)\, u^\alpha(z, y), \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$h^{\alpha,\beta}(y) = -\beta \int \nu(dz)\, h^{\alpha,\beta}(z)\, u^\alpha(z, y) \tag{5.19}$$

en posant

$$\begin{aligned} h^{\alpha,\beta}(y) &= \int \mu(dx)\, f(x)\, [g^{\alpha,\beta}(x, y) - \hat{g}^{\alpha,\beta}(x, y)] \\ &= \int \mu(dx)\, f(x)\, g^{\alpha,\beta}(x, y) - f\hat{U}^{\beta A+\alpha}(y). \end{aligned}$$

La fonction $h^{\alpha,\beta}$ est bornée, puisque

$$0 \leqq \int \mu(dx)\, f(x)\, g^{\alpha,\beta}(x, y) \leqq \int \mu(dx)\, f(x)\, u^\alpha(x, y) = f\hat{U}^\alpha(y) \leqq \frac{\|f\|}{\alpha} < +\infty$$

et

$$0 \leqq f \hat{U}^{\beta A+\alpha}(y) \leqq f \hat{U}^{\alpha}(y) \leqq \frac{\|f\|}{\alpha} < +\infty.$$

La relation (5.19) donne alors

$$|h^{\alpha,\beta}(y)| \leqq \beta \int v(dz)\, |h^{\alpha,\beta}(z)|\, u^{\alpha}(z,y) \leqq \beta\, \|h^{\alpha,\beta}\|\, \|v\hat{U}^{\alpha}\|.$$

Or l'hypothèse $v>0$ entraîne que $\|v\hat{U}^{\alpha}\|>0$. Il résulte que $\beta<\|v\hat{U}^{\alpha}\|^{-1}$ entraîne $h^{\alpha,\beta}\equiv 0$, soit encore

$$\forall y \in \mathrm{E}, \qquad \int \mu(dx)\, f(x)\, g^{\alpha,\beta}(x,y) = f\hat{U}^{\beta A+\alpha}(y).$$

En intégrant les deux membres par rapport à $g(y)\,\mu(dy)$ on obtient

$$(5.20) \qquad \langle f, U^{\beta A+\alpha} g\rangle = \langle f\hat{U}^{\beta A+\alpha}, g\rangle,$$

relation qui est donc valable quels que soient $f \in b\mathscr{E}_+$, $g \in \mathscr{E}_+$ et $\beta \in)0, \beta_0)$, pour un $\beta_0 < \|v\hat{U}^{\alpha}\|^{-1}$.

Le même raisonnement peut être refait en remplaçant partout la mesure μ par la mesure v. On obtient alors, en désignant par $\langle f, g\rangle_v$ l'intégrale $\int f g\, dv$,

$$(5.21) \qquad \langle f, U_A^{\beta A+\alpha} g\rangle_v = \langle f\hat{U}_A^{\beta A+\alpha}, g\rangle_v$$

pour tout $\beta \in]0, \beta_0]$, β_0 étant le même réel que précédemment.

Reprenons la construction précédente en partant, cette fois-ci, de la fonction g^{α,β_0}. Pour cela, posons, pour $\beta>\beta_0$:

$$\begin{aligned} g^{\alpha,\beta}(x,y) &= g^{\alpha,\beta_0}(x,y) - (\beta-\beta_0)\int U_A^{\beta A+\alpha}(x,dz)\, g^{\alpha,\beta_0}(z,y) \qquad \text{si } g^{\alpha,\beta_0}(x,y)<\infty \\ &= \infty \qquad \text{si } g^{\alpha,\beta_0}(x,y)=\infty. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que la fonction $g^{\alpha,\beta}$ est une densité de $U^{\beta A+\alpha}$ par rapport à μ et de $U_A^{\beta A+\alpha}$ par rapport à v et l'on voit, par des arguments de continuité cofine, que $g^{\alpha,\beta} \geqq 0$ partout. En raisonnant comme précédemment, on arrive à démontrer que

$$\langle f, U^{\beta A+\alpha} g\rangle = \langle f\hat{U}^{\beta A+\alpha}, g\rangle \quad \text{et} \quad \langle f, U_A^{\beta A+\alpha} g\rangle_v = \langle f\hat{U}_A^{\beta A+\alpha}, g\rangle_v$$

dès que $\beta-\beta_0 \leqq \beta_0$, c'est-à-dire pour $\beta \in]\beta_0, 2\beta_0]$, β_0 étant toujours le même réel $<\|v\hat{U}^{\alpha}\|^{-1}$.

On arrive ainsi, de proche en proche, à construire des fonctions $g^{\alpha,\beta}$ pour toutes les valeurs positives de β; en faisant ensuite varier α dans $\mathbb{R}_+^*$ on voit que les égalités (5.20) et (5.21) sont valables quels que soient les réels strictement positifs α et β.

Dans le cas où les fonctions $U^{\alpha}v$ et $v\hat{U}^{\alpha}$ ne seraient pas bornées, on applique ce qui précède aux FA $1_{\mathrm{E}_n} \cdot A$ et $1_{\mathrm{E}_n} \cdot \hat{A}$ et aux mesures $v_n = 1_{\mathrm{E}_n} \cdot v$ qui leurs sont associées, $\{\mathrm{E}_n\}$ étant une suite croissante d'ensembles de réunion E et tels que pour tout n et pour tout $\alpha>0$ la mesure v_n soit de α-potentiel et α-copotentiel bornés; une telle suite existe grâce au théorème III.1 de [9]. Un passage à la limite évident montre alors que (5.20) et (5.21) sont toujours vraies.

En écrivant (5.20) avec $\beta=1$ et en faisant $\alpha\to 0$ on voit que A et $\hat{A}$ sont en dualité. De même, en faisant tendre α vers zéro dans (5.21) on obtient que $\langle f, U_A^{\beta A} g\rangle_v = \langle f\hat{U}_A^{\beta A}, g\rangle_v$; comme les mesures $U_A^{\beta A}(x,\cdot)$ et $\hat{U}_A^{\beta A}(\cdot, y)$ sont absolument continues par rapport à v et que $U_A^{\beta A} = {}^A U^\beta$ et $\hat{U}_A^{\beta A} = {}^{\hat{A}}\hat{U}^\beta$, les processus changés de temps ${}^A\mathrm{X}$ et ${}^{\hat{A}}\hat{\mathrm{X}}$ sont bien en dualité (voir [2], p. 254).

Pour démontrer la réciproque de la proposition précédente nous aurons besoin du lemme que voici:

(5.22) **Lemme.** *L'opérateur U^A détermine la FA A (à une équivalence près).*

Démonstration. Posons $V^\alpha = U^{A+\alpha}$. Comme $V^\alpha \leqq U^\alpha$, V^α est une résolvante propre, sous-markovienne; en outre $V^0 = U^A$. Le théorème 69 du chapitre IX de [7] montre alors que U^A est un noyau propre vérifiant le principe de domination, d'où il résulte ([7], chapitre X, T 8) que la résolvante V^α est parfaitement déterminée par U^A. Ainsi, si A et B sont deux FA telles que $U^A = U^B$, on peut affirmer que pour tout $\alpha>0, U^{A+\alpha} = U^{B+\alpha}$. Autrement dit, quels que soient $\alpha>0$, $f\in\mathscr{E}_+$ et $x\in\mathrm{E}$ on a

$$E_x \int_0^\infty \exp[-(A_t+\alpha t)] f(X_t)\,dt = E_x \int_0^\infty \exp[-(B_t+\alpha t)] f(X_t)\,dt,$$

soit encore

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha t) E_x[\exp(-A_t) f(X_t)]\,dt = \int_0^\infty \exp(-\alpha t) E_x[\exp(-B_t) f(X_t)]\,dt.$$

En se limitant aux f continues bornées, les applications $t\to E_x[\exp(-A_t) f(X_t)]$ et $t\to E_x[\exp(-B_t) f(X_t)]$ sont continues à droite, donc identiques, en vertu des propriétés de la transformée de Laplace. Comme elles engendrent le même semi-groupe, les fonctionnelles multiplicatives $\exp(-A)$ et $\exp(-B)$ sont équivalentes (cf. [2]), et il en est évidemment de même des FA A et B.

Nous pouvons maintenant démontrer la réciproque de la proposition 5.14:

(5.23) **Proposition.** *Soient A et $\hat{A}$ deux FA en dualité telles que $v_A>0$ et $v_{\hat{A}}>0$. Alors $v_A = v_{\hat{A}}$.*

Démonstration. Nous supposons donc que A et $\hat{A}$ sont telles que $\langle f, U^A g\rangle = \langle f\hat{U}^{\hat{A}}, g\rangle$. Considérons la mesure v_A; d'après le théorème VII.1 de [9] il existe un ensemble polaire P et une FA $\hat{A}'$ du processus $\hat{\mathrm{Y}}$, restriction de $\hat{\mathrm{X}}$ à $\mathrm{E}-\mathrm{P}$, telle que $v_{\hat{A}'} = v_A > 0$. Or il est clair que $\hat{\mathrm{Y}}$ est en dualité avec la restriction Y de X à $\mathrm{E}-\mathrm{P}$ et que A, FA de X, induit une FA A' de Y, dont la mesure associée est encore v_A. La proposition 5.14, appliquée à Y, $\hat{\mathrm{Y}}$, A', $\hat{A}'$, montre alors que les opérateurs $U^{A'}$ et $\hat{U}^{\hat{A}'}$ sont en dualité: si f et g sont dans $\mathscr{E}_+$, on a

$$\langle f, U^{A'} g\rangle = \langle f\hat{U}^{\hat{A}'}, g\rangle.$$

Mais $U^{A'}g = U^A g$ sur $\mathrm{E}-\mathrm{P}$, et $\mu(\mathrm{P})=0$, d'où $\langle f, U^A g\rangle = \langle f\hat{U}^{\hat{A}'}, g\rangle$, ce qui entraîne, compte tenu de l'hypothèse, $f\hat{U}^{\hat{A}} = f\hat{U}^{\hat{A}'}$ μ-presque partout. Or, d'après la remarque déjà faite dans la démonstration de la proposition 3.10, les restrictions à $\mathrm{E}-\mathrm{P}$ des deux fonctions de l'égalité précédente sont continues pour la topologie fine de $\hat{Y}$: elles sont donc identiques. Le lemme 5.22 implique alors que $\hat{A}'$ est indistinguable de la restriction de $\hat{A}$ à $\hat{Y}$, et l'on a donc $v_{\hat{A}} = v_{\hat{A}'} = v_A$.

La proposition suivante est à rapprocher de la proposition 5.6:

(5.24) **Proposition.** *Soient A et $\hat{A}$ deux FA en dualité, de mesure associée $v > 0$. Alors A est spéciale et $\hat{A}$ co-spéciale si et seulement si il existe un réel $c > 0$ tel que $U^{cA} \geqq 1 \otimes \mu$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que, A et $\hat{A}$ étant en dualité, il en est de même des processus changés de temps ${}^A\mathrm{X}$ et ${}^{\hat{A}}\hat{\mathrm{X}}$, ainsi que nous l'avons prouvé dans la proposition 5.14.

Montrons que la condition est suffisante. Si $U^{cA} \geqq 1 \otimes \mu$ on sait, d'après le lemme 4.1, que $U_A^{cA} \geqq 1 \otimes v_A$ $(v_A = v)$, ce qui peut encore s'écrire ${}^A U^c \geqq 1 \otimes v_A$. La proposition 5.6 entraîne alors que la fonction 1 est spéciale à la fois pour ${}^A\mathrm{X}$ et pour ${}^{\hat{A}}\hat{\mathrm{X}}$, ce qui équivaut à la spécialité de A et à la co-spécialité de $\hat{A}$.

Réciproquement, si A est spéciale et $\hat{A}$ co-spéciale il existe, toujours en vertu de la proposition 5.6, un réel $c_1 > 0$ tel que l'on ait

$$U_A^{c_1 A} \geqq 1 \otimes v_A.$$

Pour $0 < c_2 < c_1$ l'équation résolvante donne

$$\begin{aligned} U^{c_2 A} &\geqq (c_1 - c_2)\, U_A^{c_1 A}\, U^{c_2 A} \\ &\geqq (c_1 - c_2)(1 \otimes v_A)\, U^{c_2 A} = \frac{c_1 - c_2}{c_2}\,(1 \otimes \mu). \end{aligned}$$

En procédant comme dans la démonstration de la proposition 3.14 on déduit de cette dernière inégalité l'existence d'un réel $c > 0$ tel que $U^{cA} \geqq 1 \otimes \mu$.

Nous nous sommes déjà servis du fait que, A étant une FA de X, il existe un ensemble polaire P et une FA $\hat{A}$ du processus $\hat{\mathrm{X}}$ restreint à $\mathrm{E} - \mathrm{P}$ telle que $v_{\hat{A}} = v_A$ ([9], théorème VII.1).

Le corollaire suivant précise dans quelles conditions $\hat{A}$ est une FAS de $\hat{\mathrm{X}}$ restreint à $\mathrm{E} - \mathrm{P}$. Avec les notations que nous venons de donner, il s'énonce ainsi:

(5.25) **Corollaire.** *La fonctionnelle $\hat{A}$ est spéciale pour $\hat{\mathrm{X}}$ restreint à* $\mathrm{E} - \mathrm{P}$ *si et seulement si il existe un réel $c > 0$ tel que $U^{cA} \geqq 1 \otimes \mu$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.24, moyennant des arguments semblables à ceux utilisés dans la démonstration de la proposition 5.23.

Revenons, pour finir, aux processus fortement fellériens. Des arguments classiques permettent de démontrer sans difficulté le critère suivant:

(5.26) **Proposition.** *Supposons qu'il existe un $\alpha > 0$ pour lequel la fonction u^α soit bornée sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ *et telle que pour tout $y \in \mathrm{E}$ $u^\alpha(\cdot, y)$ soit une fonction continue. Alors, quelle que soit la FA A telle que $v_A > 0$, le processus changé de temps ${}^A\mathrm{X}$ est fortement fellérien.*

On en déduit aussitôt:

(5.27) **Corollaire.** *Soient* X *un processus vérifiant les hypothèses de la proposition précédente et A une FA à support relativement compact et telle que $v_A > 0$. A est alors une FAS.*

Démonstration. Le processus ${}^A X$ étant fortement fellérien, il suffit d'appliquer la proposition 3.13.

L'exemple le plus simple de processus vérifiant les hypothèses de la proposition 5.26 est le mouvement brownien à une dimension, pour lequel on a

$$u^\alpha(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\sqrt{2\alpha}|x-y|}.$$

Nous retrouvons ainsi, par une méthode différente, le résultat du corollaire 3.11. Le corollaire 5.27 va nous permettre de l'étendre aux processus stables sur $\mathbb{R}$, d'indice $\lambda \in]1, 2[$. En effet, pour ces processus la fonction $u^\alpha(\alpha > 0)$ est donnée par la formule

$$u^\alpha(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos[(x-y)v]}{\alpha + \frac{1}{2} v^\lambda} dv,$$

et il est clair, grâce au théorème de Lebesgue, qu'elle satisfait aux conditions de la proposition 5.26.

Bibliographie

1. Azema, J., Kaplan-Duflo, M., Revuz, D.: Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **8**, 157–181 (1967)
2. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov processes and potential theory. New York: Academic Press 1968
3. Brancovan, M.: Quelques propriétés des résolvantes récurrentes au sens de Harris. Ann. Inst. H. Poincaré **9**, 1–18 (1973)
4. Brancovan, M.: Fonctionnelles additives spéciales d'un processus de Harris. C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, **283**, 57–59 (1976)
5. Brunel, A., Revuz, D.: Quelques applications probabilistes de la quasi-compacité. Ann. Inst. H. Poincaré **10**, 301–337 (1974)
6. Dellacherie, C.: Une application aux fonctionnelles additives d'un théorème de Mokobodzki. Séminaire de Probabilités III. Université de Strasbourg. Lecture notes in Math. **88**, 93–96. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969
7. Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel. Paris: Hermann 1966
8. Neveu, J.: Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris. Ann. Inst. Fourier 22, 85–130 (1972)
9. Revuz, D.: Mesures associées aux fonctionnelles additives de Markov I. Trans. Amer. Math. Soc. **148**, 501–531 (1970)
10. Revuz, D.: Markov Chains. Amsterdam-Oxford: North Holland 1975
11. Rudin, W.: Real and Complex analysis. New York: McGraw Hill 1966

Reçu le 23 Mars 1977; en forme révisée le 8 Octobre 1978