Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
68, 1–8 (1984)

Zeitschrift für
**Wahrscheinlichkeitstheorie**
und verwandte Gebiete


# Sur l'intégrabilité des vecteurs gaussiens

Michel Talagrand

Equipe d'Analyse Université Paris VI, Tour 46, 4, Place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05, France

**Summary.** Let $T$ be any set, and let $(X_t)_{t\in T}$ be a separable gaussian process with mean zero on $T$. Assume that $X$ is almost surely bounded, and let $N = \sup_{t\in X} |X_t|$.

Let $\sigma = \sup_{t\in T} (EX_t^2)^{1/2}$, and let

$$\tau = \sup\{\lambda \geqq 0;\ P\{N<\lambda\}=0\}.$$

Let $\beta > \tau/\sigma^2$. We prove that

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} N^2 - \beta N\right)\right) < +\infty.$$

Examples are given to show that this result cannot be readily improved. When $\tau = 0$, we also show that the distribution of $N$ has a continuous density with respect to Lebesgue measure.

## 1. Introduction

Soient $E$ un espace vectoriel, et $(f_n)$ une suite de formes linéaires sur $E$. Soit $\mathscr{B}$ la tribu sur $E$ engendrée par les $f_n$. Soit $\mu$ une mesure gaussienne sur $(E, \mathscr{B})$, c'est-à-dire une probabilité sur $(E, \mathscr{B})$ telle que la loi de toute famille finie de $f_n$ soit gaussienne centrée. Posons $N(x) = \sup_n |f_n(x)|$. On suppose $N(x) < +\infty$ $\mu$.p.s. Soient

$$\tau = \sup\{\lambda;\ \mu(\{x;\ N(x)<\lambda\})=0\}, \qquad \sigma = \sup_n (Ef_n^2)^{1/2}.$$

Un théorème célèbre de Fernique [3] montre que pour $\alpha < \dfrac{1}{2\sigma^2}$, on a $E(\exp \alpha N^2) < +\infty$. Nous allons préciser ce résultat.

**Théorème 1.** *Pour $\beta > \tau/\sigma^2$, on a*

$$E\left(\exp\left(\frac{N^2}{2\sigma^2} - \beta N\right)\right) < +\infty.$$

Un cas particulier de ce résultat a été démontré par M. Weber [5] (c'est ce qui nous a suggéré le résultat général).

**Théorème 2.** a) *Il existe un exemple de la situation précédente où*

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}N^2-\frac{\tau}{\sigma^2}N\right)\right)=+\infty.$$

b) *Il existe un exemple de la situation précedente où* $\tau>0$ *mais où* $E\left(\exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}N^2-\varepsilon N\right)\right)<+\infty$ *pour* $\varepsilon>0$.

Posons

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2\,du}.$$

Un résultat remarquable de A. Ehrhard [2] affirme que la fonction

$$h(t)=\Phi^{-1}(\mu(\{x;N(x)\leqq t\}))$$

est concave sur $]\tau,\infty[$. Notre résultat peut s'interpréter par la formule

$$l=\lim_{t} h(t)-t\,\sigma\geqq-\tau/\sigma.$$

On a bien sur $l\leqq 0$.

La concavité de $h$ montre que $h(t)\leqq t\,\sigma+l$. Il est naturel de se demander à quelle vitesse $h$ s'approche de son assymptote. La réponse est que cela peut être arbitrairement lentement.

**Théorème 3.** *Soit* $\varphi$: $[0,\infty[\to\mathbb{R}$ *décroissante avec* $\varphi(t)\to 0$. *Il existe alors un exemple de la situation précédente où* $\tau=l=0$, $\sigma=1$ *et* $h(t)\leqq t-\varphi(t)$ *pour tout* $t$ *assez grand.*

*Remarque.* Dans le cas où la condition d'entropie utilisée par Weber est vérifiée, les calculs de celui-ci donnent des resultats plus précis que la méthode générale exposée ici, et donnent en particulier une très bonne estimation de $h(t)-t\,\sigma$ pour $t\to\infty$.

**Théorème 4.** *Si* $\tau=0$, *la distribution de* $N$ *possède une densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

## 2. Preuve du théorème 1

*Réduction.* On applique le procédé d'orthonormalisation de Graham-Schmidt à la suite $(f_n)$, considérée comme suite de $L^2(\mu)$. On peut écrire $f_n=\sum_{i\leqq n} a_{i,n}\,e_n$, où $e_n$ est une forme linéaire mesurable sur $(E,\mathscr{B})$, et où la suite $(e_n)$ est orthonormale dans $L^2(\mu)$. Considérons l'application $\theta$: $x\to(e_n(x))$ de $E$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La mesure image est la gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire la mesure produit quand chaque facteur est muni de la loi normale. On est donc ramené à ce cas, avec de plus chaque $f_n$ dans $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. On peut donc prendre pour $\mathscr{B}$ la tribu borélienne.

**Lemme 1.** *Pour $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit $R_n(x)$ l'élément de $l^\infty$ obtenu à partir de $x$ en remplacant les $n$ premières coordonnées par des zéros. Alors on a*

$$\mu \cdot \text{p.s.} \quad \lim N(R_n(x)) = \tau.$$

*Preuve. Première étape.* On montre que pour tout $n$, on a $N(R_n(x)) \geqq \tau$ p.s. Il en résulte que $\liminf N(R_n(x)) \geqq \tau$ $\mu \cdot$p.s. Soit $\tau' < \tau$ et soit $A = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ N(R_n(x)) < \tau'\}$. Soit

$$B = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ \forall i \leqq n,\ |x_i| \leqq (\tau - \tau')/n\,\sigma\}.$$

Alors $\mu(B) > 0$. De plus puisque chaque $f_m$ est de norme $\leqq \sigma$ dans $L^2(\mu)$, on a $|a_{i,m}| \leqq \sigma$ pour chaque $i, m$. Il en résulte que pour $x \in B$, on a $N(x - R_n(x)) \leqq \tau - \tau'$. Ainsi pour $x \in A \cap B$, on a $N(x) < \tau$. Par définition de $\tau$, ceci montre que $\mu(A \cap B) = 0$. D'autre part, $\mu$ étant une mesure produit, on a $\mu(A \cap B) = \mu(A)\,\mu(B)$, et $\mu(B) > 0$, d'où $\mu(A) = 0$. Ceci prouve le résultat.

*Deuxième étape.* On montre que si $\tau' > \tau$ et si $\varepsilon > 0$, il existe un $n$ tel que $\mu(L) \geqq 1 - \varepsilon$, où

$$L = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ N(R_n(x)) \leqq \tau'\}.$$

Soit

$$D = \{x;\ N(x) \leqq \tau'\}.$$

Par hypothèse on a $\mu(D) > 0$. Puisque $N(x) = \operatorname{Sup} |f_n(x)|$, il existe un entier $m$ tel que si

$$D' = \{x;\ \forall i \leqq m,\ |f_i(x)| \leqq \tau'\}$$

on a $\mu(D')(1 - \varepsilon/2) \leqq \mu(D)$. Puisque chaque $f_i$ ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées on peut écrire $D' = M \times F_n$ où $M \subset \mathbb{R}^n$ et $F_n = \mathbb{R}^{]n,\infty[}$. On désigne par $\lambda_n$, $\nu_n$ les gaussiennes canoniques de $\mathbb{R}^n$, $F_n$. On a $\mu = \lambda_n \times \nu_n$. Le théorème de Fubini montre qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que si on pose

$$G = \{y \in F_n;\ N(x, y) \leqq \tau'\},$$

on a $\nu_n(G) \geqq 1 - \varepsilon/2$.

Par symétrie on a $\nu_n(-G) \geqq 1 - \varepsilon/2$, et ainsi $\nu_n(G \cap -G) \geqq 1 - \varepsilon$. Or, pour $y \in G \cap -G$, on a $N(x, y) \leqq \tau'$, et $N(x, y) = N(-x, y) \leqq \tau'$, d'où $N(0, y) \leqq \tau'$. Ceci montre que $\mathbb{R}^n \times (G \cap -G) \subset L$, d'où $\mu(L) \geqq 1 - \varepsilon$.

*Troisième étape.* Le théorème de Fernique montre que $EN(x) < +\infty$. Si $\mathscr{B}_n$ est la $\sigma$-algèbre engendrée par les coordonnées de rang $\geqq n+1$ la suite $(N(R_n(x)))_n$ est une sous-martingale par rapport à la suite décroissante $(\mathscr{B}_n)$. Elle converge donc, et les deux étapes précédentes montrent que sa limite est p.s. égale à $\tau$.

*Remarque.* Le lemme 1 possède un intêret en soi. Toutefois, pour la suite, nous n'utiliserons que la deuxième étape. En particulier, notre preuve n'utilisera pas le théorème de Fernique.

**Lemme 2.** *Soient $B$ un convexe borélien symétrique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $K$ la boule unité de $l^2$. Supposons que $\nu_n(H) \geqq 1/2$, où $H = \{y \in F_n;\ (0, y) \in B\}$. Alors pour tout $t \geqq 0$ on a:*

$$\mu(\{z, z \notin B + tK\}) \leqq P(\chi^2 > t^2)$$

*où $\chi^2$ a une loi chi 2 à $n+1$ degrés de liberté.*

*Preuve.* Soit $K'$ la boule unité de $l^2(]n, \infty[)$. Le point crucial est l'inégalité de C. Borell [1], qui affirme que $\nu_n(H+uK') \geqq \Phi(u)$ pour $u \geqq 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, et $y \in F_n$, $y \in H + uK'$, on a $(x, y) \in B - tK$, si $u^2 + \|x\|_2^2 \leqq t^2$. Ainsi, pour $t \geqq \|x\|_2$,

$$\begin{aligned} &\nu_n(\{y \in F_n;\ (x, y) \notin B + tK\}) \\ &\quad \leqq \nu_n(\{y \in F_n;\ y \notin B' + (t^2 - \|x\|_2^2)^{1/2} K'\}) \leqq 1 - \Phi((t^2 - \|x\|_2^2)^{1/2}). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini on a donc

$$\mu(\{z; z \notin B + tK\}) \leqq \lambda_n(\{x; \|x\|_2 \geqq t\}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-s^2/2} \, ds \, d\lambda_n(x)$$

où

$$A = \{(x, s) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \|x\|_2 \leqq t,\ \|x\|_2^2 + s^2 \geqq t^2\}$$

et ainsi

$$\mu(\{z; z \notin B + tK\}) \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{s^2 + \|x\|_2^2 \geqq t^2} e^{-s^2/2} \, ds \, d\lambda_n(x)$$

ce qui est le résultat cherché.

**Lemme 3.** *Pour tout $\tau' > \tau$, il existe un entier $n$ tel que*

$$\forall t \geqq 0, \quad \mu(\{z; N(z) > t + \tau'\}) \leqq P(\sigma^2 \chi^2 > t^2)$$

*où $\chi^2$ est une loi chi 2 à $n$ degrés de liberté.*

*Preuve.* Avec les notations de la deuxième étape du lemme 1, on peut choisir $n$ tel que $\nu_n(H) \geqq 1/2$, où

$$H = \{y \in F_2;\ N(0, y) \leqq \tau'\}.$$

Soit $B = \{z;\ N(z) \leqq 1\}$. Puisque chaque $f_n$ est de norme au plus $\sigma$ dans $l^2$ pour $z \in K$, on a $N(z) = \operatorname{Sup}_n |f_n(z)| \leqq \sigma$, d'où $K \subset \sigma B$. Il résulte alors du lemme 2 que:

$$\mu(\{z;\ z \notin \tau' B + \sigma u B\}) \leqq P(\chi^2 < u^2)$$

ce qui est le résultat cherché.

Le théorème 1 est maintenant une simple conséquence du lemme 2, en choisissant $\tau < \tau' < \beta\sigma^2$ et en écrivant

$$\begin{aligned} &\int_{N(x) > \tau'} \exp(N^2(x)/2\sigma^2 - \beta N(x)) \, d\mu(x) \\ &\quad = \int_0^\infty \exp((t+\tau')^2/2\sigma^2 - \beta(t+\tau')) \, \mu(\{x;\ N(x) > t + \tau'\}) \, dt \\ &\quad \leqq K \int_0 \exp(t^2/2\sigma^2 - (\beta - \tau'/\sigma^2) t) \, P(\chi^2 > t^2/\sigma^2) \, dt < +\infty. \end{aligned}$$

*Remarque.* Une fois effectuée la réduction à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, muni de la tribu borélienne $\mathscr{B}$, on n'utilise plus la forme explicite de $N$, mais seulement le fait que $N$ est une quasi-semi-norme mesurable, et que $N(x) \leqq \sigma$ pour $x$ dans $B$, (c'est-à-dire dans la boule unité de l'expace auto-reproduisant). On peut formuler des énoncés très généraux du type de ceux donnés dans [1], dont la preuve se ramène par des procédés, maintenant classiques, au cas mentionné. Nous ne l'avons pas fait pour ne pas obscurcir la simplicité du résultat. La même remarque s'applique aux trois lemmes.

## 3. Preuve des théorèmes 2 et 3

Nous utiliserons l'observation classique suivante:

Le théorème central limite montre que la mesure gaussienne canonique $\mu_n$ sur $\mathbb{R}^n$, la loi de $\|x\|^2$ est approximativement $N(n, 3\sqrt{n})$. En particulier $\mu_n$ est concentrée près de la sphére de rayon $\sqrt{n}$. On désigne par $(n_k)$ une suite telle que

$$\mu_{n_k}\{x \in \mathbb{R}^{n_k};\, |\|x\| - \sqrt{n_k}| \leqq n_k^{1/4}\} \leqq 2^{-k}. \tag{1}$$

On pose $I_p = ]\sum_{i<p} n_{k_i}, \sum_{i \leqq p} n_{k_i}]$. On pose $F_1 = \mathbb{R}$, $F_2 = \mathbb{R}^{]1,\infty[}$, on désigne par $\mu_1$ (resp. $\mu_2$) la gaussienne canonique sur $F_1$ (resp. $F_2$), et on pose $E = F_1 \times F_2$, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$.

La condition (1) montre que pour $\mu_2$ presque tout $y \in F_2$, on a

$$\lim_{k \to \infty} n_k^{-1} \sum_{i \in I_k} y_i^2 = 1. \tag{2}$$

Deux des exemples vont être obtenus en posant $N(x) = \sup_{f \in D} |f(x)|$, où $D \subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est dénombrable.

*Preuve du théorème 2*, (a). On prend pour $D$ l'ensemble des suites finies de rationnels $(z_n)$ qui vérifient la condition:

$$\sup(\sum z_n^2, \sup_k n_k \sum_{i \in I_k} z_i^2) \leqq 1. \tag{3}$$

On a $\sigma = 1$, et (2) montre que $\tau = 1$ et que $N < \infty$ $\mu$.p.s. Pour $x \in F_1$, pour $\mu_2$ presque tout $y \in F_2$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $k$ assez grand, il existe des $(z_i)_{i \in I_k}$ rationnels tels que $\sum_{i \in I_k} z_i y_i \geqq 1 - \varepsilon$. Si on définit

$z'$ par $z'_1 = \left(1 - \dfrac{1}{n_k}\right)$ signe $(x)$, $z'_i = z_i$ pour $i \in I_k$ et $z'_i = 0$ sinon, alors $z' \in D$ et

$$z'(x, y) \geqq |x|\,(1 - n_k^{-1}) + 1 - \varepsilon.$$

Il en résulte que $N(x, y) \geqq |x| + 1$. On a donc

$$E \exp\left(\frac{N^2}{2} - N\right) \geqq E\left[\exp\left(\frac{t^2}{2} + 1\right) \exp(-N(y))\right]$$

$$\geqq a \int \exp\left(\frac{t^2}{2} + 1\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = +\infty$$

pour un $a > 0$, ce qui montre le résultat.

*Preuve du théorème 3.* On se donne une suite de réels $b_i>0$, avec $b_i\to 0$. On considère maintenant l'ensemble $D$ des suites finies de rationnels $(z_n)$ telles que

$$\sup\left(\sum z_n^2;\ \sup_k \frac{n_k}{b_k}\sum_{i\in I_k} z_i^2\right)\leqq 1. \tag{4}$$

On a toujours $\sigma=1$, et on voit sans peine que $\tau=0$. Soit

$$A=\{y\in F_2;\ \operatorname{Inf}_k(\sum_{i\in I_k} y_i^2)^{1/2}\geqq 1/2\}.$$

La condition (2) montre que $a=\mu_2(A)>0$. Pour $y\in A$, on a, comme dans la preuve précédente,

$$N(x,y)\geqq \sup_k\{|x|\,(1-n_k^{-1})+b_k/2\}=u(x)\geqq x.$$

Il en résulte que, puisque $N(x,y)\geqq |x|$, on a

$$\begin{aligned}\mu(\{(x,y);\ N(x,y)<t\})&\leqq(1-a)\,\mu_1([-t,t])+a\,\mu_1([-v(t),v(t)])\\ &\leqq(1-a)\,\mu_1([-\infty,t])+a\,\mu_1([-\infty,v(t)])\end{aligned}$$

où $v(t)$ est le sup des $s$ tels que $u(s)<t$. Le choix des $b_k$ étant arbitraire, on peut imposer à la fonction $u(x)-u$ de tendre vers zéro aussi lentement que spécifié à l'avance. Il en est de même de la fonction $t-v(t)$. Or, la fonction $\Phi^{-1}$ étant convexe sur $]0,1[$, on a

$$\Phi^{-1}\circ\mu(\{z;\ N(z)\leqq t\})\leqq(1-a)\,t+a\,v(t)=t-a(t-v(t)).$$

Le résultat en découle.

*Preuve du théorème 2*(b). Toujours sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $N(x)=\sup_n |x_n|\,(2\log n)^{-1/2}$. Il est classique que $\sigma=\tau=1$, et des estimations élémentaires montrent que $\Phi^{-1}\circ\mu(\{z;\ N(z)\leqq t\})-t\to 0$.

## 4. Preuve du théorème 4

On opère la même réduction que dans le cas du théorème 1.

**Lemme 4.** *Avec les notations du lemme* 1, *on a* $\mu$.p.s.

$$\lim_n N(x-R_n(x))=N(x).$$

*Preuve.* Puisque $N$ est semi-continue inférieurement, on a $\liminf_n N(x-R_n(x))\geqq N(x)$ pour tout $x$. D'autre part, si $\mathscr{B}'_n$ désigne la tribu engendrée par les coordonnées de rang $\leqq n$, la suite $(N(x-R_n(x)))$ est une surmartingale pour la suite $\mathscr{B}'_n$. Puisque $\int N(x-R_n(x))\,d\mu(x)\leqq\int N(x)\,d\mu(x)$, cette sous-martingale converge dans $L^1$ vers $N(x)$, donc aussi p.s.

On pose

$$B=\{x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ N(x)\leqq 1\}.$$

Le théorème d'Ehrhard [2] montre que la fonction

$$h(t)=\Phi^{-1}(\mu(tB))$$

est concave. En chaque point, elle est donc dérivable à droite et à gauche. Il en est donc de même de la fonction $t\to\mu(tB)$. Il suffit de montrer que $a=0$, où

$$a=\limsup_{h\to 0}(2h)^{-1}(\mu((1+h)B)-\mu((1-h)B))).$$

Soit $\varepsilon>0$, fixé, et soit $\eta>0$, que l'on précisera ultérieurement. Il existe $0<\beta<1/10$ tel que

$$\mu((1-3\beta)B)\geqq\mu(B)-\eta.$$

L'hypothèse que $\tau=0$, et les lemmes 1 et 4 impliquent qu'il existe $n$ tel que $\nu_n(H)\geqq 1-\eta$ et $\lambda_n(A)\geqq\mu((1-3\beta)B)-\eta$, où

$$H=\{y\in F_n;\ N(0,y)\leqq\beta/2\}$$
$$A=\{x\in\mathbb{R}^n;\ N(x,0)\leqq 1-3\beta\}.$$

Etant donné $t\in\mathbb{R}^+$ on considère la transformation $P_t$ (resp. $Q_t$) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui consiste à multiplier les coordonnées de rang $\leqq n$ (resp. $>n$) par $t$.

Le résultat d'Ehrhard montre que la fonction $h(t)=\Phi^{-1}\circ\mu(P_t(B))$ est concave. En particulier il existe $1<t_0<1+\beta$ tel que pour $t\leqq t_0$ on ait $\mu(P_t(B))\leqq\mu(B)+\eta$.

Soit maintenant $t\in[1-\beta,t_0]$, et posons $C=P_t(B)$. La fonction $g(u)=\Phi^{-1}\circ\mu(Q_u(C))$ est concave. Pour $x\in A$, on a

$$N(tx,0)\leqq(1+\beta)(1-3\beta)\leqq 1-\beta$$

d'où pour $y\in H$ on a $N(tx,2y)\leqq 1$; c'est-à-dire que $Q_2\circ P_t(x,y)\in B$. Ainsi $A\times H\subset Q_{1/2}(C)$. Il en résulte que

$$\mu(Q_{1/2}(C))\geqq\lambda_n(A)\,\nu_n(H)\geqq(1-\eta)(\mu(B)-\eta)$$
$$\mu(Q_1(C))\leqq\mu(B)+\eta.$$

Si $\eta$ est assez petit, cela implique que $g(1/2)\geqq g(1)-\varepsilon$. Puisque $g$ est concave croissante, pour $u\geqq 3/4$, on a $g(u)-g(1)\leqq 4\varepsilon|u-1|$. Puisque $\Phi$ est lipschitzienne de rapport $\leqq 1$, on a

$$|\mu(Q_t(P_t(B))-\mu(P_t(B))|\leqq 4\varepsilon|t-1|.$$

Pour $0\leqq h\leqq\operatorname{Inf}(\beta,t_0-1)$ on a, puisque $tB=Q_t(P_t(B))$:

$$(2h)^{-1}\mu((1+h)B)-\mu((1-h)B)\leqq 8\varepsilon+2h^{-1}(\mu(P_{1+h}(B))-\mu(P_{1-h}(B)))$$

et ainsi $a\leqq 8\varepsilon+b$ où

$$b=\limsup_{h}(2h)^{-1}(\mu(P_{1+h}(B))-\mu(P_{1-h}(B))).$$

Pour $y \in F_n$, $D \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit $D_y = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ N(x, y) \in D\}$. On a $t B_y = (P_t(B))_y$. Ainsi on a

$$\mu(P_{1+h}(B)) - \mu(P_{1-h}(B)) = \int_{F_n} \lambda_n((1+h) B_y) - \lambda_n((1-h) B_y)\, d\nu_n(y).$$

Pour chaque $y$, $B_y$ est convexe, et l'ensemble des $B_y$ est borné. Comme $\lambda_n$ a une densité bornée par rapport à la mesure de Lebesgue, on voit sans peine (par exemple en utilisant les coordonnées polaires) que l'on est dans un cas de convergence dominée, et donc que

$$b \leqq \int_{F_n} \limsup (2h)^{-1} (\lambda_n((1+h) B_y) - \lambda_n((1-h) B_y))\, d\nu_n(y).$$

Pour un ensemble $D$, on a $\lambda_n(t D) = \int_D h_t(u)\, du$ où $h_t$ est la densité de la mesure $\nu$ donnée par $\nu(A) = \lambda_n(t A)$. On peut dériver sous l'intégrale; et $t \to \mu_1(t D)$ est infiniment dérivable. Il s'ensuit que $b = 0$, et termine la preuve.

*Remarque*. Un exemple de [4] montre que le théorème 4 est faux sans l'hypothèse $\tau = 0$.

## Bibliographie


1. Borell, C.: The Brunn-Minkowski Inequality in Gauss Space. Inventiones Math. **30**, 205–216 (1975)
2. Ehrhard, A.: Symétrisation dans l'espace de Gauss
3. Fernique, X.: Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires Gaussiennes. Lecture notes in Math. N° **480**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
4. Tsirelson, V.S.: The density of the distribution of the maximum of a Gaussian process. Theory Probability Appl. 847–856 (1975)
5. Weber, M.: Analyse asymptotique des processus gaussiens stationnaires. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. **XVI**, n° 2, 117–176 (1980)


Reçu le 20 Juin 1983