Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
47, 241–288 (1979)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Contrôle de processus alternants et applications

Jean-Michel Bismut

Université de Paris Sud, Dept. Math., Bat. 425 F-91405 Orsay, France

Résumé. L'objet de cet article est d'appliquer des méthodes de la théorie générale des processus et de théorie du potentiel à la résolution de problèmes de contrôle de processus alternants, et en particulier à des problèmes de contrôle impulsionnel. Cet article reprend et étend les résultats préalablement obtenus par l'auteur dans ce domaine.

Summary. The purpose of this paper is to apply the general theory of stochastic processes and potential theory to solve various control problems of alternating processes, and in particular problems of impulse control. This paper extends results previously obtained by the author in stochastic control.

Introduction

Dans nos précédents travaux [12–19], nous avons appliqué les méthodes de théorie du potentiel et de la théorie générale des processus à la résolution de plusieurs problèmes de contrôle stochastique:

– les problèmes de contrôle optimal des diffusions et des diffusions à sauts [12–17].
– les problèmes d'arrêt optimal [19] avec B. Skalli, et [18].
– les problèmes de contrôle avec contrôle du temps d'arrêt du système: [13] et [16].
– les problèmes de jeux stochastiques [14–16].

Dans [14], nous avons étudié le système

$$\begin{aligned} f &= R(f'+g) \\ f' &= R(f+g') \end{aligned} \tag{0.1}$$

où R est l'opérateur de réduite associé à une diffusion tuée par une exponentielle $e^{-pt}(p>0)$, et où g et g' sont deux fonctions continues sur l'espace d'états R^d

0044-3719/79/0047/0241/$09.60

telles que $g \leqq -g'$. Nous avons montré que la solution du système (0.1) était associée à la résolution d'un problème de jeu à somme nulle sur des temps d'arrêt.

Les résultats de [14] ont alors été étendus dans [18] à des jeux sur des «quasi temps d'arrêt».

Les résultats exposés dans [16] résolvaient, sous des conditions différentes, un jeu stochastique étudié par Bensoussan et Friedman dans [2] par des techniques d'inéquations variationnelles sur des espaces de Sobolev.

De plus nous avions obtenu dans [14] une formule permettant de calculer dans (0.1) les fonctions f et f' en fonction de g et g' comme les fonctions gains de problèmes d'optimisation, en utilisant des techniques de balayage. Mokobodzki a alors généralisé certains résultats de [14] à des processus de Markov quelconques dans [29].

Diverses questions se sont alors posées à nous:

1° Sous quelles hypothèses le système (0.1) possède-t-il une solution assez régulière, au sens de la théorie des processus de Markov? La régularité était en effet démontrée dans [14] par une technique de convergence uniforme d'une suite d'approximations dans un espace de fonctions continues, qui ne s'étend pas à des processus plus généraux.

L'objet de la section 1 est de donner la réponse la plus complète possible à cette question. On se donne en effet deux processus stochastiques X et X' sur un espace de probabilité filtré, qu'on suppose bornés, adaptés, continus à droite sur $[0, +\infty[$, à limites à gauche sur $]0, +\infty]$ – en abrégé cadlag –, nuls en $+\infty$, tels que si ^{3} est l'opérateur de projection prévisible, on ait ${}^3X \geqq X^-$, ${}^3X' \geqq X'^-$. Si on fait l'hypothèse qu'il existe deux surmartingales optionnelles fortes bornées $\tilde{Z}$ et $\tilde{Z}'$ telles que $X \leqq \tilde{Z} - \tilde{Z}' \leqq -X'$, le Théorème 1.2 garantit en particulier que le système

$$\begin{aligned} Z &= R(Z' + X) \\ Z' &= R(Z + X') \end{aligned} \tag{0.2}$$

où RY est l'enveloppe de Snell de Y au sens de Mertens [24] (i.e. la plus petite surmartingale optionnelle forte $\geqq Y$) a une solution.

Grâce à ce résultat, on retrouve des résultats de régularité de Bensoussan-Friedman [2] sous les conditions de [2].

2° Nous n'avions au départ pas compris l'interprétation de la formule (3.33) de [14] permettant de calculer f et f'. On définissait en effet dans [14] une relation d'ordre sur les mesures bornées (non nécessairement $\geqq 0$) prolongeant la relation d'ordre sur les mesures bornées $\geqq 0$ utilisée dans les techniques de balayage ([26, 30–31, 36, 37]:

on écrit en effet $\lambda < \mu$ si pour toute fonction p-excessive f relativement à la diffusion considérée, on a $\langle \mu, f \rangle \leqq \langle \lambda, f \rangle$. On obtenait alors pour f:

$$f(x) = \sup_{\substack{\varepsilon_x < \mu - \mu' < 0 \\ \mu, \mu' \geqq 0 \text{ finies}}} \langle \mu, g \rangle + \langle \mu', g' \rangle \tag{0.3}$$

Une idée naturelle est de considérer un système plus général que (0.1), à savoir le système

$$\begin{aligned} f &= R(f'+g) \\ f' &= R'(f+g') \end{aligned} \tag{0.4}$$

où R et R' sont deux opérateurs de réduite associés à des processus non nécessairement identiques. Dans la section 2, il apparaît que la solution de (0.4) est étroitement liée à la résolution d'un problème de contrôle alternatif de deux processus x et x'. Etant donnée une suite croissante de temps d'arrêt $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$, on construit un processus qui a la loi de x jusqu'à l'instant T_1, qui conditionnellement à x_{T_1} a la loi de x' jusqu'au temps T_2 avec $x'_{T_1} = x_{T_1}$, puis reprend la loi de x jusqu'au temps T_3 etc ... On obtient alors pour f une formule plus générale que (0.3) qui s'interprète facilement compte tenu des résultats de Meyer-Mokobodzki-Rost [28]. On résoud ainsi un problème de contrôle, où les variables de contrôle sont $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$.

3° Il est alors immédiatement apparu que les problèmes associés aux systèmes de type (0.4) étaient très proches des problèmes de contrôle impulsionnel étuidiés de manière approfondie par Bensoussan et Lions dans une série d'articles [3–9] et dans un livre à paraître [10] par des techniques d'inéquations variationnelles et quasi-variationnelles. Lions a exposé dans un cours [23] (en particulier les chapitres IV et V) les résultats obtenus par Bensoussan-Lions, Bensoussan-Goursat-Lions [11] etc.

Lorsque $R=R'$, les méthodes de la section 1 permettent de montrer que sous des hypothèses faibles sur g et g' et sur les processus x et x', f et f' sont des fonctions excessives «régulières» au sens de la théorie du potentiel. Dans le cas général, où R n'est pas nécessairement égal à R', on doit naturellement imposer une condition de régularité plus forte que la régularité potentialiste, par exemple la continuité de f et f'. Lorsque g et g' sont suffisamment «séparées», on montre au Théorème 2.4 que lorsque x et x' sont deux processus de Feller à valeurs dans un espace localement compact ayant la propriété de «réduite continue» – définie en appendice –, (0.4) a des solutions continues ou s.c.s. quand g et g' sont continues ou s.c.s.: on utilise pour cela une forme du Théorème de Hahn-Banach. Le résultat de régularité que nous avons obtenu dans [14] est plus proche des techniques de la section 2, où $R \neq R'$, que de celles de la section 1. Les mémes techniques sont utilisées à la section 3.2 pour résoudre les problèmes de contrôle impulsionnel classique.

L'intérêt essentiel de la méthode utilisée ici est de permettre l'obtention des résultats de régularité forts sur f et f', sous des hypothèses minimales de régularité sur g et g', en ne se plaçant que dans des espaces de fonctions continues ou des espaces de mesure. L'utilisation des espaces de Sobolev permet à Bensoussan-Lions d'obtenir des résultats de régularité sur les solutions faibles d'inéquations quasi-variationnelles aux dérivées partielles, lorsque x et x' sont des diffusions, mais, en contrepartie les données g et g' doivent être plus régulières.

4° Il est alors naturel d'étudier les problèmes de contrôle alternatif de processus, lorsque chaque processus est lui-même contrôlé. On est ainsi amené à étudier dans la section 2.6 la dépendance continue des solutions de (0.4) par rapport à g et g' et aux paramètres définissant les diffusions x et x'. On utilise pour cela des techniques de compacité dans des espaces de mesure. Ces techniques sont appliquées dans la section 3.1 au contrôle des diffusions alternantes, et dans la section 3.2 au problème de contrôle impulsionnel. Le problème de contrôle impulsionnel a été étudié par Bensoussan-Lions dans [3–10] et Lions dans [23]. Leurs résultats peuvent se comparer aux nôtres dans les mêmes termes que précédemment.

5° Nous avons aussi étudié diverses contraintes dans le contrôle de processus alternants. C'est ainsi que dans la section 2.7, nous avons imposé à $T_1, T_3, T_5, \ldots$ d'être portés par un fermé A, et à $T_2, T_4, T_6, \ldots$ d'être portés par un fermé B. Le problème a des solutions régulières quand A et B sont disjoints ou égaux (Théorème 2.7). Si $d(A,B)>0$, on peut raisonner comme en [14], sans avoir besoin d'une hypothèse de «séparation» sur g et g' (Théorème 2.9). Ces résultats sont appliqués à la section 3.1e) au contrôle des diffusions alternantes dans le cas contraint, et à la section 3.2e) au contrôle impulsionnel dans le cas contraint.

6° Pour des raisons de symétrie, nous avons étudié à la section 2.8 le système

$$\begin{aligned} f &= R(g-f') \\ f' &= R(g'-f). \end{aligned} \tag{0.5}$$

On montre alors au Théorème 2.10 que, lorsque x est une diffusion tuée exponentiellement, et lorsque g et g' sont assez «régulières», (0.5) a une solution. On donne aussi au Théorème 2.11 des conditions d'unicité pour le système (0.5), qui le font apparaître comme associé à un jeu à somme nulle sur une suite croissante de temps d'arrêt, où le premier joueur choisit les temps d'ordre impair, et le second joueur les temps d'ordre pair.

Nous utilisons pour simplifier des notations homogènes, mais tous les résultats sont applicables à des processus non homogènes. Par ailleurs on peut étendre tous les résultats aux diffusions à sauts homogènes ou non de Stroock [39], en utilisant les résultats de [17], ainsi que les indications explicites de [13–16]. Avec un travail technique supplémentaire, on peut aussi les appliquer aux processus arrêtés sur un fermé sans points irréguliers.

Nous établissons en appendice divers résultats équivalents à la propriété de réduite continue pour un processus de Feller.

1. Une équation aux surmartingales

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ est un espace de probabilité complet, munie d'une suite croissante et continue à droite de sous-tribus $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geqq 0}$ complètes de $\mathscr{F}$.

Tous les processus que nous considérons sont définis pour $t \in [0, +\infty]$. Pour se ramener aux hypothèses classiques de la Théorie Générale des Processus [20–21], on ajoutera un deuxième infini noté ∞^+, où les temps d'arrêt s'évanouissent. On peut alors, par un homéomorphisme ramener $[0, +\infty]$ sur $[0,1]$ et ∞^+ sur $+\infty$.

Si Y est un processus optionnel borné, RY est l'enveloppe de Snell de Y, i.e. la plus petite surmartingale optionnelle forte majorant Y sur $[0, +\infty]$, qui existe par les résultats de Mertens [24–25].

Si Y et Y' sont des processus optionnels, on écrit $Y \ll Y'$ si $Y' - Y$ est une surmartingale $\geqq 0$ optionnelle forte.

X et X' sont deux processus optionnels bornés cadlag sur $[0, +\infty]$ tels que:

$$X_{+\infty} = X'_{+\infty} = 0.$$

Il existe deux surmartingales $\geqq 0$ bornées optionnelles fortes $\tilde{Z}$ et $\tilde{Z}'$ telles que

$$X \leqq \tilde{Z} - \tilde{Z}' \leqq -X'. \tag{1.1}$$

1. Description du schéma itératif

On considère la suite de surmartingales $\geqq 0$ optionnelles fortes bornées définies par récurrence par

$$\begin{aligned} Z_1 &= RX & Z'_1 &= RX' \\ Z_{i+1} &= R(Z'_i + X) & Z'_{i+1} &= R(Z_i + X'). \end{aligned} \tag{1.2}$$

On a alors

Théorème 1.1. *$\{Z_i\}$ et $\{Z'_i\}$ sont des suites croissantes de surmartingales $\geqq 0$ bornées cadlag convergeant respectivement vers les surmartingales $\geqq 0$ bornées cadlag Z et Z'. On a*

$$\begin{aligned} Z &= R(Z' + X) \\ Z' &= R(Z + X') \end{aligned} \tag{1.3}$$

et donc $X \leqq Z - Z' \leqq -X'$. Si $(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}'_1)$ est un couple de surmartingales $\geqq 0$ bornées cadlag telles que

$$X \leqq \tilde{Z}_1 - \tilde{Z}'_1 \leqq -X' \tag{1.4}$$

(resp.

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1 &= R(\tilde{Z}'_1 + X) \\ \tilde{Z}'_1 &= R(\tilde{Z}_1 + X')), \end{aligned} \tag{1.5}$$

alors

$$Z \leqq \tilde{Z}_1 \qquad Z' \leqq \tilde{Z}'_1 \tag{1.6}$$

(resp.

$$\begin{aligned} Z - Z' &= \tilde{Z}_1 - \tilde{Z}'_1 \\ Z \ll \tilde{Z}_1, &\qquad Z' \ll \tilde{Z}'_1). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Preuve. Comme $X_{+\infty}=X'_{+\infty}=0$, on a $Z_1\geqq 0$, $Z'_1\geqq 0$. Par récurrence, on vérifie, grâce au Théorème I.2 de [19] que Z_i et Z'_i sont cadlag et majorées respectivemen par $\tilde{Z}$ et $\tilde{Z}'$. Par le Théorème 16 de [26; VI], on sait qu'une suite croissante et bornée de surmartingales cad est une surmartingale cad. On en déduit bien que les suites $\{Z_i\}$ et $\{Z'_i\}$ convergent respectivement vers les surmartingales bornées cad Z et Z', majorées par $\tilde{Z}$ et $\tilde{Z}'$. En passant à la limite dans (1.2), on a bien (1.3). De plus $Z\leqq\tilde{Z}$, $Z'\leqq\tilde{Z}'$. On obtient donc (1.6) en remplaçant $\tilde{Z}$ par $\tilde{Z}_1$ et $\tilde{Z}'$ par $\tilde{Z}'_1$.

Soit $(\tilde{Z}_1,\tilde{Z}'_1)$ un autre couple de surmartingales cad bornées solution de (1.5).

Par le corollaire du Théorème IV.2 de [18] – appliqué dans le cadre la Théorie générale des processus –, on a $Z-Z'=\tilde{Z}_1-\tilde{Z}'_1$.

Soient $Z=M-A$ et $Z'=M'-A'$ les décompositions de Meyer des surmartingales Z et Z'. Soit dB^+-dB^- la décomposition de Jordan-Hahn de la mesure $dA-dA'$ sur la tribu prévisible. Alors $dB^+\leqq dA$, $dB^-\leqq dA'$.

Si Z^+ et Z^- sont les potentiels de B^+ et B^-, on aura donc $Z^+\leqq Z$, $Z^-\leqq Z'$. Or $Z^+-Z^-=Z-Z'$. Donc par (1.6), $Z^+=Z$, $Z^-=Z'$ et $dA=dB^+$, $dA'=dB^-$.

Si $\tilde{Z}_1-Z'_1=Z-Z'$, si $\tilde{Z}_1=M_1-A_1$ et $\tilde{Z}'_1=M'_1-A'_1$ sont les décompositions de Meyer de $\tilde{Z}_1$ et $\tilde{Z}'_1$, comme $dA-dA'$ est la décomposition de Jordan-Hahn de $dA_1-dA'_1$, alors $dA\leqq dA_1$, $dA'\leqq dA'_1$ et donc $Z\ll Z_1$, $Z'\ll Z'_1$. □

On en déduit en particulier que s'il existe une solution $(\tilde{Z}_1,\tilde{Z}'_1)$ de (1.5) telle que $(\tilde{Z}_1,\tilde{Z}'_1)$ soient régulières, alors Z et Z' sont régulières.

^{3} est l'opérateur de projection prévisible. On a alors le résultat suivant:

Théorème 1.2. *Si X (resp. X') est tel que sur $]0,+\infty]$, ${}^3X\geqq X^-$ (resp. ${}^3X'\geqq X'^-$) alors Z (resp. Z') est une surmartingale régulière.*

Preuve. On reprend les notations de la démonstration du Théorème 1.1. Comme $dA-dA'$ est la décomposition de Jordan-Hahn de $dA-dA'$ sur la tribu prévisible, les supports de A et A' sont disjoints, et en particulier $(\Delta A>0)\cap(\Delta A'>0)$ est evanescent.

Soit T un temps prévisible à valeurs dans $]0,+\infty]\cup\{\infty^+\}$ section du prévisible $(\Delta A>0)$. Par le Théorème II.2 de [18], T est section de $\{Z^-=Z'^-+X^-\}$. Comme sur $(T<\infty^+)$, $\Delta A'_T=0$ on a donc

$$1_{T<\infty^+}Z'^-_T=1_{T<\infty^+}\,{}^3Z'_T. \tag{1.8}$$

De même, par hypothèse

$$1_{T<\infty^+}X^-_T\leqq 1_{T<\infty^+}\,{}^3X_T. \tag{1.9}$$

On en déduit

$$1_{T<\infty^+}Z^-_T\leqq 1_{T<\infty^+}\,{}^3(Z'+X)_T\leqq 1_{T<\infty^+}\,{}^3Z_T. \tag{1.10}$$

Or ${}^3Z\leqq Z^-$. Donc

$$1_{T<\infty^+}Z^-_T=1_{T<\infty^+}\,{}^3Z_T \tag{1.11}$$

et ainsi sur $(T<\infty^+)$, $\Delta A_T=0$. $(\Delta A>0)$ est donc evanescent.

On raisonnera de même pour X'. □

On a également le résultat suivant:

Théorème 1.3. *Si X (resp. X') peut s'écrite sous la forme*

$$X = X_1 - X_2 \tag{1.12}$$

(resp.)

$$X' = X'_1 - X'_2, \tag{1.13}$$

où X_1 et X_2 (resp. X'_1 et X'_2) sont des surmartingales bornées cadlag, alors $Z \ll X_1$ (resp. $Z' \ll X'_1$).

Preuve. On a

$$Z' + X = Z + X_1 - X_2. \tag{1.14}$$

Comme $Z = R(Z' + X)$, il vient $Z \ll Z' + X_1$. En effet posons $\tilde{X}_1 = Z' + X_1$. Si T et T' sont deux temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a

$$\begin{aligned} E^{\mathscr{F}_0}(\tilde{X}_{1_T} - Z_T)) &\leqq E^{\mathscr{F}_0}(\tilde{X}_{1_T} - \tilde{X}_{1_{T \vee T'}} + X_{2_{T \vee T'}}) \\ &\leqq E^{\mathscr{F}_0}(1_{T \leqq T'}(\tilde{X}_{1_T} - \tilde{X}_{1_{T'}}) + X_{2_{T'}})) \\ &\leqq E^{\mathscr{F}_0}(\tilde{X}_{1_0} - \tilde{X}_{1_{T'}} + X_{2_{T'}}) \end{aligned} \tag{1.15}$$

et donc par [24] T4

$$E^{\mathscr{F}_0}(\tilde{X}_{1_T} - Z_T)) \leqq \tilde{X}_{1_0} - Z_0. \tag{1.16}$$

On a donc démontré la propriété de surmartingale forte en $t=0$. On la démontre de la même manière en tout temps d'arrêt.

Si $X_1 = M_1 - C_1$ est la décomposition de Meyer de X_1, on en déduit que dA a une densité $\leqq 1$ par rapport à $d(A' + C_1)$. Or on a vu au Théorème 1.1 que dA et dA' sont étrangères. Donc dA a une densité $\leqq 1$ par rapport à dC_1. Le Théorème en résulte. □

Sous certaines hypothèses, on peut montrer que le jeu à somme nulle défini par le critère

$$F(T, T') = E(1_{T \leqq T'} X_T - 1_{T' < T} X'_{T'}) \tag{1.17}$$

où T et T' sont des temps d'arrêt – et non des quasi-temps d'arrêt comme en [18] – où on maximise F en T et où on minimise F en T' a une solution. Soient en effet B et B' les fermés optionnels

$$\begin{aligned} B &= (Z - Z' = X) \\ B' &= (Z - Z' = -X'). \end{aligned} \tag{1.18}$$

On a alors:

Théorème 1.4. *Si X et X' sont tels que sur $]0, +\infty]$, ${}^3X \geqq X^{-}, {}^3X' \geqq X'^{-}$, alors si T et T' sont des temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a*

$$F(T, D_{B'}) \leqq F(D_B, D_{B'}) \leqq F(D_B, T'). \tag{1.19}$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que D_B et $D_{B'}$ sont des temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty]$ puisque $\Omega \times \{+\infty\} \subset B \cap B'$. Puisque Z et Z' sont régulières par le Théorème 1.2, grâce au Théorème 1.4 de [19] appliqué à la partie II de [19], on a $E(Z_0) = E(Z_{D_B})$, $E(Z'_0) = E(Z'_{D_{B'}})$, et donc

$$\begin{aligned} &E(Z_0) = E(Z_{D_B \wedge D_{B'}}) \\ &E(Z'_0) = E(Z'_{D_B \wedge D_{B'}}). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Alors

$$\begin{aligned} E(Z_0 - Z'_0) &= E((Z - Z')_{D_B \wedge D_{B'}}) \\ &= E(1_{D_B \leqq D_{B'}} (Z - Z')_{D_B} + 1_{D_{B'} < D_B} (Z - Z')_{D_{B'}}) = F(D_B, D_{B'}). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Si T est un temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a $X_T \leqq (Z - Z')_T$. Donc comme $(Z - Z')_{D_B} = -X'_{D_{B'}}$, il vient

$$F(T, D_{B'}) \leqq E((Z - Z')_{T \wedge D_{B'}}). \tag{1.22}$$

Or on a

$$\begin{aligned} &E(Z_{T \wedge D_{B'}}) \leqq E(Z_0) \\ &E(Z'_{D_{B'}}) = E(Z'_0) \leqq E(Z'_{T \wedge D_{B'}}) \leqq E(Z'_0) \end{aligned} \tag{1.23}$$

et donc

$$E(Z'_{T \wedge D_{B'}}) = E(Z'_0). \tag{1.24}$$

De (1.21)–(1.24), on tire

$$F(T, D_{B'}) \leqq F(D_B, D_{B'}). \tag{1.25}$$

L'autre partie de l'inégalité (1.19) se démontre de la même manière. □

2. *Applications*

p est une constante >0. a désigne une application continue définie sur R^d à valeurs définies positives et uniformément bornées dans $R^d \otimes R^d$. b est une fonction borélienne bornée définie sur R^d à valeurs dans R^d. x est un élément de R^d.

Q_x^b est la solution du problème des martingales de Stroock et Varadhan [38] associé à (a, b, x). Tous les résultats qui suivent s'appliquent aussi aux diffusions non homogènes ou aux diffusions à sauts [39].

g et g' sont deux fonctions continues telles qu'il existe h et $h' Q^b$ p-excessives bornées pour lesquelles

$$g \leqq h - h' \leqq -g'. \tag{1.26}$$

R^b désigne l'opérateur de réduite relativement au cône des fonctions Q^b fortement p-surmédianes.

On définit la suite de fonctions (f_i, f_i') par récurrence:

$$\begin{aligned} f_1 &= R^b g & f_1' &= R^b g' \\ f_{i+1} &= R^b(f_i' + g) & f_{i+i}' &= R^b(f_i + g'). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Les Théorèmes 1.1 et 1.2 nous indiquent que les suites de fonctions $\{f_i\}$ et $\{f_i'\}$ croissent vers les fonctions p-excessives régulières bornées f et f'.

De plus si g et g' sont les p-potentiels de fonctions boréliennes bornées L et L', par le Théorème I.3, f est le p-potentiel d'une fonction M telle que $0 \leqq M \leqq L^+$, et f' est le p-potentiel d'une fonction M' telle que $0 \leqq M' \leqq L'^+$. Par la propriété de Feller forte de Q^b[38]-7, f et f' sont des fonctions continues. $q = f - f'$ est donc une fonction continue.

De plus, par [38]-7, en tout point de R^d, on peut trouver un module de continuité du potentiel d'une fonction bornée N qui ne dépende que de $\|b\|_{L^\infty(R^d)}$ et de $\|N\|_{L^\infty(R^d)}$. Si b, L, L' restent bornées, les fonctions associées f, f' sont donc équicontinues sur tout compact. Par le Théorème de Dini, on en déduit en particulier que la suite de fonctions (f_i, f_i'), qui sont continues par [13]-II converge vers (f, f') uniformément sur tout compact.

Soit V_p^b l'opérateur p-potentiel associé à Q^b. Soit (b^n, L'^n), une suite de $L_\infty(R^d)$ convergeant vers $(b, L) \in L_\infty(R^d)$ pour la topologie $\sigma(L_\infty(R^d), L_1(R^d))$. On pose

$$\begin{aligned} g^n &= V_p^{b^n} L^n & g &= V_p^b L \\ g'^n &= V_p^{b^n} L'^n & g' &= V_p^b L' \end{aligned} \tag{1.28}$$

et on suppose que $g^n \leqq -g'^n$. L'hypothèse (1.26) est trivialement vérifiée. Soient (f^n, f'^n) (resp. (f, f')) les fonctions continues construites comme précédemment associées à (g^n, g'^n, Q^{b^n}) (resp. (g, g', Q^b)). On pose enfin

$$\begin{aligned} q^n &= f^n - f'^n \\ q &= f - f'. \end{aligned} \tag{1.29}$$

On a alors

Théorème 1.5. *La suite de fonctions continues q^n est uniformément bornée et converge uniformément sur tout compact vers q.*

Preuve. Pour vérifier (1.26), on peut prendre $h^n = V_p^{b^n} L^{n+}$, $h'^n = V_p^{b^n} L^{n-}$. Comme $f^n \leqq h^n$, $f'^n \leqq h'^n$, et comme h^n et h'^n restent bornées, la suite $\{f^n\}$ est bornée. De même la suite $\{f'^n\}$ reste bornée.

Par [12]-Théorème V.1.a), on sait que g^n (resp. g'^n) est une suite bornée de fonctions continues convergeant simplement vers g (resp. g'). Grâce à l'équicontinuité de la suite g^n (resp. g'^n), on en déduit que la suite $\{g^n\}$ (resp. $\{g'^n\}$) converge vers g (resp. g') uniformément sur tout compact.

Les suites $\{f^n\}$ et $\{f'^n\}$ sont bornées et équicontinues sur tout compact. Soient f^{n_k}, f'^{n_k} des sous-suites convergeant uniformément sur tout compact vers des fonctions continues et bornées $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$. On a par hypothèse

$$\begin{aligned} f^{n_k} &= R^{b^{n_k}}(f'^{n_k} + g^{n_k}) \\ f'^{n_k} &= R^{b^{n_k}}(f^{n_k} + g'^{n_k}). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Grâce à la preuve du Théorème VII-1 de [14], on peut passer à la limite dans (1.30) et écrire

$$\tilde{f}=R^b(\tilde{f}'+g)$$
$$\tilde{f}'=R^b(\tilde{f}+g').$$

Du Théorème 1.1, on tire que $q=\tilde{f}-\tilde{f}'$.

En raisonnant sur toutes les sous-suites de N, le Théorème en résulte. □

Nous retrouvons ainsi sous des conditions plus faibles des résultats de Bensoussan-Friedman exposés dans [2] Théorème 4.1, dans le cas où la fonction F de Bensoussan-Friedman est linéaire en u et u_x. Pour démontrer la continuité de q, ces auteurs résolvent le problème dans des espaces de Sobolev, en prouvant des majorations a priori dans ces espaces et en utilisant des résultats de compacité, pour démontrer la convergence d'une suite d'approximations – qui n'est pas f_i-f_i' – vers q dans l'espace des fonctions continues.

Dans [14], on montre que, sous des hypothèses de «séparation» suffisantes de g et g', f et f' sont continues, grâce à des majorations à priori qui permettent de majorer la vitesse de convergence de (f_i, f_i') vers (f, f'). Nous allons voir, dans la section 2, que la continuité de (f, f') est aussi liée dans ce dernier cas à l'application du Théorème de Hahn-Banach.

2. Processus alternants

E est un espace lusinien métrisable, auquel on adjoint un point cimetière δ, où toutes les fonctions définies sur E s'annulent. Ω est l'espace des fonctions continues à droite définies sur R^+ à valeurs dans $E\cup\{\delta\}$.

x et x' sont deux processus de Markov droits transients, à durée de vie finie, ayant tous deux comme cimetière δ. Si λ est une mesure $\geqq 0$ bornée sur E, P_λ, P_λ' désignent les mesures sur Ω associées à x et x' quand la mesure d'entrée est λ.

Pour des raisons techniques, on fait l'hypothèse que les fonctions excessives pour x et x' sont boréliennes.

K et K' sont les cônes des fonctions fortement surmédianes associés à x et x'.

On pose alors la définition suivante, en suivant Rost [36]:

Definition 2.1. Si λ et μ sont des mesures bornées sur E, on écrit $\lambda<\mu$ (resp. $\lambda\stackrel{\prime}{<}\mu$) si pour tout $f\in K$ (resp. $f\in K'$) bornée, on a $\langle\mu,f\rangle\leqq\langle\lambda,f\rangle$.

Si λ et μ sont $\geqq 0$, on sait par le Théorème de Rost [36], [1] que si $\lambda<\mu$ (resp. $\lambda\stackrel{\prime}{<}\mu$), alors μ est associée à un temps d'arrêt randomisé T pour P (resp. P') par la formule $\langle\mu,h\rangle=E^{P_\lambda}h(x_T)$ (resp. $\langle\mu,h\rangle=E^{P_\lambda'}h(x_T)$). R et R' désignent les opérateurs de réduite relativement à K et K' (voir [25]).

Si h est borélienne, Rh et $R'h$ sont boréliennes. En effet, ce résultat est vrai quand h est continue, car Rh et $R'h$ sont excessives. On applique alors le Théorème des classes monotones [26] I-T20.

De plus, par les résultats de Mertens [25] et Rost [36], si λ est une mesure $\geqq 0$ finie sur E, on a

$$\langle\lambda,Rh\rangle=\sup_{\mu\geqq 0\ \lambda<\mu}\langle\mu,h\rangle \qquad \langle\lambda,R'h\rangle=\sup_{\mu\geqq 0\ \lambda\stackrel{\prime}{<}\mu}\langle\mu,h\rangle. \tag{2.1}$$

On pose alors les définitions suivantes:

Definition 2.2. Soit M une suite de mesures $\mu_n \geqq 0$ finies. On écrit $|M| \leqq n$ si pour $i \geqq n+1$, $\mu_i = 0$. Si λ est une mesure $\geqq 0$ finie, on écrit $\lambda \ll M$ (resp. $\lambda' \ll M$) si

$$\lambda < \mu_1 \overset{\prime}{<} \mu_2 < \mu_3 \overset{\prime}{<} \mu_4 < \dots \tag{2.2}$$

(resp.

$$\lambda \overset{\prime}{<} \mu_1 < \mu_2 \overset{\prime}{<} \mu_3 \overset{\prime}{<} \mu_4 \overset{\prime}{<} \dots). \tag{2.2'}$$

Soient g et g' deux fonctions boréliennes bornées. Si $M = (\mu_n)$ est telle que $|M| < +\infty$, on pose

$$\langle M, (g, g') \rangle = \sum_0^{+\infty} \mu_{2i+1}\, g + \sum_1^{+\infty} \mu_{2i}\, g'. \tag{2.3}$$

1. Un schéma itératif

On définit par récurrence la suite de fonctions (f_i, f_i').

$$\begin{aligned} f_1 &= R\,g & f_1' &= R'\,g' \\ f_{i+1} &= R(f_i' + g) & f_{i+1}' &= R'(f_i + g'). \end{aligned} \tag{2.4}$$

On a:

Proposition 2.1. *Pour toute mesure* $\geqq 0$ *finie* λ, *on a*

$$\langle \lambda, f_i \rangle = \operatorname*{Sup}_{|M| \leqq i\ \lambda \ll M} \langle M, (g, g') \rangle, \tag{2.5}$$

$$\langle \lambda, f_i' \rangle = \operatorname*{Sup}_{|M| \leqq i\ \lambda \overset{\prime}{\ll} M} \langle M', (g', g) \rangle. \tag{2.5'}$$

Preuve. On raisonne par récurrence. Par (2.1) on a (2.5) pour $i=1$. Comme $f_i = R(f_{i-1}' + g)$, par (2.1), on a

$$\langle \lambda, f_i' \rangle = \operatorname*{Sup}_{\mu \geqq 0\ \lambda < \mu_1} \langle \mu_1, g \rangle + \langle \mu_1, f_{i-1}' \rangle. \tag{2.6}$$

Si on suppose (2.5) et (2.5′) vraies à l'ordre $i-1$, on sait que

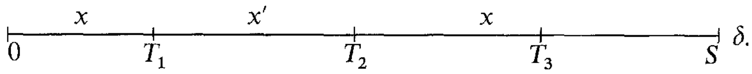
$$\langle \mu_1, f_{i-1}' \rangle = \sup_{|M'| \leqq i-1\ \mu_1 \ll M'} \langle M', (g', g) \rangle. \tag{2.7}$$

En posant $M = (\mu_1, M')$, et en utilisant (2.6), on trouve bien (2.5) à l'ordre i. On raisonne de même pour (2.5′). □

On peut interpréter (2.5) et (2.5′). $\mathbb{T}$ désigne l'ensemble des suites de temps 'arrêt algébriques $T = (T_n)$ sur Ω tels que $T_1 \leqq T_2 \leqq T_3 \leqq \dots$ On écrit que $|T| \leqq i$ si pour $n \geqq i+1$, $T_n = +\infty$.

Si $T = (T_n) \in \mathbb{T}$ et si λ est une mesure $\geqq 0$ finie sur E, P_λ^T (resp. $P_\lambda'^T$) est la mesure sur Ω obtenue par recollement markovien alterné des lois de x et x', i.e. P_λ^T (resp. $P_\lambda'^T$) a la loi de x (resp. x') jusqu'au temps T_1, puis la loi de x' (resp.

x) jusqu'à l'instant T_2, puis la loi de x (resp. x') jusqu'à l'instant T_3 etc... jusqu'à l'instant $S=\lim T_i$ à partir duquel x est égal à δ i.e.



Si $T=(T_n)\in\mathbb{T}$, avec $|T|<+\infty$, on pose

$$(g,g')(x_T)=\sum_0^{+\infty} g(x_{T_{2i+1}})+\sum_i^{+\infty} g'(x_{T_{2i}}). \tag{2.8}$$

Proposition 2.2. *Pour toute mesure $\geqq 0$ finie λ, on a*

$$\langle\lambda,f_i\rangle=\operatorname*{Sup}_{T\in\mathbb{T}\,|T|\leqq i} E^{P_\lambda^T}(g,g')(x_T), \tag{2.9}$$

$$\langle\lambda,f_i'\rangle=\operatorname*{Sup}_{T\in\mathbb{T}\,|T|\leqq i} E^{P_\lambda'^T}(g',g)(x_T). \tag{2.9'}$$

Preuve. En utilisant les résultats de Mertens [25], on a $\langle\lambda,Rh\rangle=\operatorname{Sup} E^{P_\lambda}h(x_T)$($T$ temps d'arrêt).

On procède alors comme à la Proposition 2.1. □

2. Convergence de la suite (f_i,f_i')

Comme g et g' sont nulles en δ, f_1 et f_1' sont $\geqq 0$. On vérifie alors par récurrence que les suites de fonctions $\{f_i\}$ et $\{f_i'\}$ sont croissantes. Elles convergent donc vers les fonctions f et f' qui sont respectivement fortement surmédianes relativement à x et x'.

On a immédiatement:

Théorème 2.1. *Pour toute mesure $\geqq 0$ finie λ, on a*

$$\langle\lambda,f\rangle=\operatorname*{Sup}_{|M|<+\infty\,\lambda\ll M}\langle M,(g,g')\rangle\ \langle\lambda,f'\rangle=\operatorname*{Sup}_{|M'|<+\infty\,\lambda\ll M}\langle M',(g',g)\rangle \tag{2.10}$$

De plus

$$\begin{aligned} f&=R(f'+g)\\ f'&=R'(f+g'). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Preuve. C'est évident par passage à la limite dans (2.4). □

3. Une formule pour (f,f')

Dans [14] – Théorème III.4, nous avons donné une formule pour f et f' dans un cas particulier. Elle a été étendue par Mokobodzki dans [29] au cas général quand $x=x'$. Nous allons la démontrer quand x n'est pas nécessairement égal à x'.

On suppose que f et f' sont bornées. Or

$$g \leqq f - f' \leqq -g'. \tag{2.12}$$

Une condition nécessaire pour que f et f' soient bornées est donc qu'il existe $\tilde{f} \in K$ et $\tilde{f}' \in K'$ bornées telles que

$$g \leqq \tilde{f} - \tilde{f}' \leqq -g'. \tag{2.13}$$

On vérifie alors par récurrence que $f_i \leqq \tilde{f}$, $f_i' = \tilde{f}'$, et donc que $f \leqq \tilde{f}$, $f' = \tilde{f}'$. La condition (2.13) est donc également suffisante.

On a alors un résultat élémentaire:

Proposition 2.3. *Soit λ une mesure $\geqq 0$ finie, et $M = (\mu_n)$ une suite de mesures $\geqq 0$ finies telle que $|M| < +\infty$, $\lambda \ll M$. On pose*

$$m = \sum_{0}^{+\infty} \mu_{2i+1} \, m' = \sum_{1}^{+\infty} \mu_{2i}. \tag{2.14}$$

Alors

$$\lambda < m - m' \overset{\prime}{<} 0. \tag{2.15}$$

Preuve. On a $m - m' = \sum_{0}^{+\infty} (\mu_{2i+1} - \mu_{2i+2})$. Comme $\mu_{2i+1} \overset{\prime}{<} \mu_{2i+2}$, on a $m - m' \overset{\prime}{<} 0$. De plus

$$m - m' = \mu_1 + \sum_{1}^{+\infty} (\mu_{2i+1} - \mu_{2i}). \tag{2.16}$$

Comme $\mu_{2i} < \mu_{2i+1}$, on a aussi $\mu_1 < m - m'$. Or $\lambda < \mu_1$, et donc $\lambda < m - m'$. □

On en déduit

Théorème 2.2. *Pour toute mesure $\lambda \geqq 0$ finie, on a*

$$\langle \lambda, f \rangle = \operatorname*{Sup}_{\substack{m, m' \geqq 0 \\ \text{finies}, \ \lambda < m - m' \overset{\prime}{<} 0}} \langle m, g \rangle + \langle m', g' \rangle, \tag{2.17}$$

$$\langle \lambda, f' \rangle = \operatorname*{Sup}_{\substack{m, m' \geqq 0 \\ \text{finies}, \ \lambda \overset{\prime}{<} m' - m < 0}} \langle m, g \rangle + \langle m', g' \rangle \tag{2.17'}$$

Preuve. On a $g \leqq f - f' \leqq -g'$. Donc si m et m' sont telles que $\lambda < m - m' \overset{\prime}{<} 0$, il vient

$$\begin{aligned} \langle \lambda, f \rangle &\geqq \langle m - m', f \rangle \geqq \langle m, f' + g \rangle - \langle m', f' - g' \rangle \\ &= \langle m, g \rangle + \langle m', g' \rangle + \langle m - m', f' \rangle \\ &\geqq \langle m, g \rangle + \langle m', g' \rangle. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Le premier membre de (2.17) est donc plus grand que le second membre. Grâce au Théorème 2.1 et à la Proposition 2.3, on en a fait l'égalité. On raisonne de même pour (2.17'). □

L'interprétation de (2.17) est intéressante. On a en effet:

Proposition 2.4. *Soient m et m' deux mesures $\geqq 0$ finies telles que $\lambda < m - m' \overset{\prime}{<} 0$. Il existe $M = (\mu_n)$ et deux mesures $\geqq 0$ finies m_1, m'_1 telles que*

$$\begin{aligned}
&\lambda \ll M \\
&m = \sum_0^{+\infty} \mu_{2i+1} + m_1 \\
&m' = \sum_1^{+\infty} \mu_{2i} + m'_1 \\
&m_1 \overset{\prime}{<} m'_1 < m_1.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Preuve. Comme $\lambda + m' < m$, par un résultat de Meyer-Mokobodzki-Rost [28] il existe μ_1 et $\beta_1 \geqq 0$ finies telles que

$$\lambda < \mu_1 \qquad m' < \beta_1 \qquad m = \mu_1 + \beta_1. \tag{2.20}$$

Alors $\mu_1 + \beta_1 \overset{\prime}{<} m'$. Il existe donc μ_2 et $\beta'_2 \geqq 0$ finies telles que

$$\mu_1 \overset{\prime}{<} \mu_2 \qquad \beta_1 \overset{\prime}{<} \beta'_2 \qquad m' = \mu_2 + \beta'_2. \tag{2.21}$$

Comme $\mu_2 + \beta'_2 < \beta_1$, on peut trouver μ_3 et $\beta_3 \geqq 0$ finies telles que

$$\mu_2 < \mu_3 \qquad \beta'_2 < \beta_3 \qquad \beta_1 = \mu_3 + \beta_3. \tag{2.22}$$

On itère l'opération. A l'ordre $2n+1$, on a

$$\begin{aligned}
&m = \sum_0^n \mu_{2i+1} + \beta_{2n+1} \\
&m' = \sum_1^n \mu_{2i} + \beta'_{2n} \\
&\mu_{2n+1} + \beta_{2n+1} \overset{\prime}{<} \beta'_{2n} < \beta_{2n+1}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Les suites de mesures β_{2n+1} et β'_{2n} sont décroissantes, et convergent donc vers des mesures $\geqq 0$ finies m_1 et m'_1. En passant à limite dans (2.23), on a bien (2.19). □

Remarque 2.1. Si $x = x'$, on a $m_1 = m'_1$, puisque ces deux mesures coïncident sur les fonctions excessives. □

Au couple (m, m'), on a donc pu associer une suite $M = (\mu_n)$ de mesures $\geqq 0$ de masse totale finie, telle que $\lambda \ll M$. Il reste à montrer pourquoi dans la maximisation de (2.10), on peut ne pas tenir compte des mesures (m_1, m'_1) apparaissant dans (2.19) (remarquons que la formule (2.10) reste vraie lorsque au lieu de supposer que $|M| < +\infty$, on fait l'hypothèse que M est de masse totale finie. Il suffit pour cela d'effectuer un passage à la limite).

On a en effet:

Proposition 2.5. *Si m et m' sont des mesures $\geqq 0$ finies telles que $m_1 \overset{\prime}{<} m'_1 < m_1$, alors*

$$\langle m_1, g \rangle + \langle m'_1, g' \rangle \leqq 0. \tag{2.24}$$

Preuve. On a

$$0 \geqq \langle m_1 - m'_1, f \rangle \geqq \langle m_1 - m'_1, f' \rangle + \langle m_1, g \rangle + \langle m'_1, g' \rangle \geqq \langle m_1, g \rangle + \langle m'_1, g' \rangle. \quad \square \tag{2.25}$$

On peut donc éliminer m_1 et m'_1 dans la maximisation de (2.10).

4. Un exemple simple

On suppose temporairement que $x = x'$, et que g et g' sont deux fonctions boréliennes, cadlag sur les trajectoires de x, et telles que

$$^3g(x_t) \geqq g(x_t)_-, \quad ^3g'(x_t) \geqq g'(x_t)_- \tag{2.26}$$

il existe $\tilde{f}, \tilde{f}'$ excessives bornées et $\beta > 0$ tels que

$$g + \beta \leqq \tilde{f} - \tilde{f}' \leqq -g' - \beta. \tag{2.27}$$

Pour que (2.26) soit satisfaite, il suffit que g et g' soient différences d'une fonction excessive régulière bornée et d'une fonction excessive bornée, ou encore qu'elles vérifient les conditions de [19] III.2.

Par le Théorème 1.4, on sait que f et f' sont des fonctions excessives régulières bornées.

Si C est un presque-borélien de E, on pose $Q^C h(x) = E_x 1_{D_C < +\infty} h(x_{D_C})$.

A et B sont les finement fermés boréliens $A = (f - f' = g)$, $B = (f - f' = -g')$.

Theoreme 2.3. (f, f') *est le seul couple de fonctions excessives régulières bornées tel que*

$$\begin{aligned} f &= R(f' + g) \\ f' &= R(f + g'). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Pour toute mesure $\lambda \geqq 0$ finie, le Sup *dans* (2.17) (*resp.* (2.17')) *est atteint par les mesures $\geqq 0$ finies définies par les séries absolument convergentes*

$$\begin{aligned} m &= \lambda(Q^A + Q^A Q^B Q^A + \dots) \\ m' &= \lambda(Q^A Q^B + (Q^A Q^B)^2 + \dots) \end{aligned} \tag{2.29}$$

(*resp.*

$$\begin{aligned} m &= \lambda(Q^B Q^A + (Q^B Q^A)^2 + \dots) \\ m' &= \lambda(Q^B + Q^B Q^A Q^B + \dots)). \end{aligned}$$

Preuve. Soit (f^1, f'^1) un couple de fonctions excessives régulières bornées solution de (2.28), et A^1 et B^1 les ensembles presque-boréliens finement fermés

$$A^1 = (f^1 - f'^1 = g) \qquad B^1 = (f^1 - f'^1 = -g'). \tag{2.30}$$

Par le Théorème I.4 de [19] appliqué à la partie II de [19], on a

$$\begin{aligned} f^1 &= Q^{A^1}(f'^1+g) \\ f'^1 &= Q^{B^1}(f^1+g') \end{aligned} \tag{2.31}$$

ou encore

$$f^1 = Q^{A^1} Q^{B^1} f^1 + Q^{A^1} Q^{B^1} g' + Q^{A^1} g. \tag{2.32}$$

En itérant il vient

$$\begin{aligned} f^1 = {} & (Q^{A^1} Q^{B^1})^n f^1 + (Q^{A^1} Q^{B^1})^n g' + (Q^{A^1} Q^{B^1})^{n-1} Q^{A^1} g \\ & + (Q^{A^1} Q^{B^1})^{n-1} g' + \ldots + Q^{A^1} Q^{B^1} g' + Q^{A^1} g. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Comme $g \leqq \tilde{f} - \tilde{f}' - \beta$, $g' \leqq \tilde{f}' - \tilde{f} - \beta$, on a

$$\begin{aligned} \langle \lambda, f^1 \rangle \leqq \langle \lambda, {} & (Q^{A^1} Q^{B^1})^n f^1 + [(Q^{A^1} Q^{B^1})^{n-1} + (Q^{A^1} Q^{B^1})^{n-2} + \ldots + I]\, Q^{A^1} \\ & \cdot (Q^{B^1} \tilde{f}' - \tilde{f}') + [(Q^{A^1} Q^{B^1})^{n-1} + \ldots + Q^{A^1} Q^{B^1}](Q^{A^1} \tilde{f} - \tilde{f}) \\ & + Q^{A^1} \tilde{f} - \beta[(Q^{A^1} Q^{B^1})^n + (Q^{A^1} Q^{B^1})^{n-1} Q^{A^1} + \ldots + Q^{A^1}] \rangle. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Comme $Q^{A^1} \tilde{f} \leqq \tilde{f}$, $Q^{B^1} \tilde{f}' \leqq \tilde{f}'$, on tire de (2.34)

$$\beta \langle \lambda, (Q^{A^1} Q^{B^1})^n + \ldots + Q^{A^1} \rangle \leqq \langle \lambda, \tilde{f} + (Q^{A^1} Q^{B^1})^n f^1 \rangle. \tag{2.35}$$

Or f^1 et $\tilde{f}$ sont bornées, et donc $\tilde{f} + (Q^{A^1} Q^{B^1})^n f^1$ reste borné. Comme $\beta > 0$, la série de mesures associée à (2.29) est absolument convergente, et en particulier $\lim (Q^{A^1} Q^{B^1})^n = 0$. On peut donc passer à la limite dans (2.33) et écrire

$$\langle \lambda, f^1 \rangle = \langle \lambda, Q^{A^1} g + Q^{A^1} Q^{B^1} g' + Q^{A^1} Q^{B^1} Q^{A^1} g + \ldots \rangle. \tag{2.36}$$

Soient m^1 et m'^1 les mesures associées à A^1 et B^1 par (2.29). On a

$$\begin{aligned} m^1 &= \lambda Q^{A^1} + m'^1 Q^{A^1} \\ m^1 &= m'^1 + m^1 (I - Q^{B^1}) \end{aligned} \tag{2.37}$$

et donc $\lambda < m^1 - m'^1 < 0$. Or (2.33) s'écrit, pour toute mesure $\lambda \geqq 0$ finie

$$\langle \lambda, f_1 \rangle = \langle m^1, g \rangle + \langle m'^1, g' \rangle. \tag{2.38}$$

En supposant que $\lambda = \varepsilon_x$ avec $x \in E$, grâce au Théorème 2.2, on en déduit que $f^1 = f$. On montrera de même que $f'^1 = f'$. □

5. *Régularité des solutions*

Dans le cas général, où $x \neq x'$, il n'y a aucune raison pour que f et f' soient des fonctions régulières sur les processus x et x'.

Nous allons cependant montrer des résultats de régularité quand x et x' sont des processus de Feller.

Soit en effet E un espace localement compact dénombrable à l'infini, δ un point cimetière.

x et x' désignent deux processus de Feller à valeurs dans $E \cup \{\delta\}$, de potentiel fini.

On fait l'hypothèse qu'ils vérifient les conditions équivalentes du Théorème 1 de l'appendice dont on reprend les notations. Si x et x' sont des diffusions ou des diffusions à sauts tuées par une exponentielle e^{-pt} $(p>0)$, ils vérifient cette hypothèse par le Théorème II.3 de [13]. $\mathscr{C}$ est l'ensemble des fonctions continues bornées définies sur E à valeurs réelles, prolongées par la valeur 0 en δ. $\bar{E}$ désigne le compactifié de Cech de E.

K (resp. K') est le cône des fonctions fortement surmédianes pour x (resp. x'). On note $\bar{K} = K \cap \mathscr{C}$, $\bar{K}' = K' \cap \mathscr{C}$.

g et g' sont deux fonctions continues (resp. s.c.s.) bornées définies sur E à valeurs dans R, telles qu'il existe $\tilde{f} \in \bar{K}$, $\tilde{f}' \in \bar{K}'$ et $\beta > 0$ tels que

$$g + \beta \leqq \tilde{f} - \tilde{f}' \leqq -g' - \beta. \tag{2.39}$$

On considère la suite (f_i, f_i') définie en (2.4). On a alors le résultat fondamental suivant:

Théorème 2.4. *Si g et g' sont continues (resp. s.c.s.) les fonctions f_i et f_i' forment des suites croissantes de fonctions continues (resp. s.c.s.) convergeant uniformément sur tout compact (resp. simplement) vers les fonctions continues (resp. s.c.s.) f et f'.*

Preuve. Par récurrence, et grâce au Théorème 1 de l'appendice, on vérifie que f_i et f_i' sont continues (resp. s.c.s.) si g et g' sont continues (resp. s.c.s.). Si g et g' sont continues, f et f' sont donc s.c.i.

Si h est une fonction s.c.s. bornée définie sur E, on peut la prolonger en une fonction s.c.s. bornée sur $\bar{E}$ en posant, comme dans l'Appendice

$$h = \inf_{h' \in \mathscr{C} \geqq h \text{ sur } E} h'. \tag{2.40}$$

Si on prolonge ainsi g et g' sur tout $\bar{E}$, on a encore

$$g + \beta \leqq \tilde{f} - \tilde{f}' \leqq -g' - \beta \quad \text{sur } \bar{E}. \tag{2.41}$$

Pour $(u, u') \in \mathscr{C} \times \mathscr{C}$, et $x \in E$, on pose

$$F_x(u, u') = \inf_{\substack{\bar{f} \in \bar{K},\, \bar{f}' \in \bar{K}' \\ g + u \leqq \bar{f} - \bar{f}' \leqq -g' - u'}} \bar{f}(x). \tag{2.42}$$

F_x est une fonction convexe sur $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$. De plus grâce à (2.39) comme $(\tilde{f}, \tilde{f}') \in \bar{K} \times \bar{K}'$, si $\|u\|_{\mathscr{C}} < \beta$, $\|u'\|_{\mathscr{C}} < \beta$, $F_x(u, u') \leqq \tilde{f}(x)$. Par la Proposition 21 de [41]-II.2.10, F_x étant convexe et bornée sur la boule $(\|u\|_{\mathscr{C}} < \beta$, $\|u'\|_{\mathscr{C}} < \beta)$ est continue sur cette boule, et est en particulier continue en 0. Calculons alors la duale F_x^* de F_x sur $\bar{\mathscr{M}} \times \bar{\mathscr{M}}$ ($\bar{\mathscr{M}}$ est défini dans l'appendice) au sens de [32], [34]. Pour $(\mu, \mu') \in \bar{\mathscr{M}} \times \bar{\mathscr{M}}$, on a:

$$F_x^*(\mu, \mu') = \operatorname*{Sup}_{\substack{(\bar{f}, \bar{f}') \in \bar{K} \times \bar{K}' \\ g + u \leqq \bar{f} - \bar{f}' \leqq -g' - u'}} \langle \mu, u \rangle + \langle \mu', u' \rangle - \bar{f}(x). \tag{2.43}$$

Si $\mu<0$ ou $\mu'<0$, il vient

$$F_x^*(\mu,\mu')=+\infty.$$

Si $\mu\in\bar{\mathcal{M}}$ est $\geqq 0$, on a

$$\sup_{g+u\leqq\bar{f}-\bar{f}'}\langle\mu,u\rangle=\langle\mu,\bar{f}\rangle-\langle\mu,\bar{f}'\rangle-\langle\mu,g\rangle. \tag{2.44}$$

On en déduit que si $\mu\geqq 0$, $\mu'\geqq 0$, il vient

$$F_x^*(\mu,\mu')=-\langle\mu,g\rangle-\langle\mu',g'\rangle+\sup_{\bar{f}\in\bar{K}}(\langle\mu-\mu',\bar{f}\rangle-\bar{f}(x))+\sup_{\bar{f}'\in\bar{K}'}\langle\mu'-\mu,\bar{f}'\rangle \tag{2.45}$$

et donc

$$F_x^*(\mu,\mu')=\begin{cases}-\langle\mu,g\rangle-\langle\mu',g'\rangle & \text{si } \mu\geqq 0,\ \mu'\geqq 0,\ \varepsilon_x<\mu-\mu'\overset{\prime}{<}0\\ +\infty \quad \text{ailleurs.}\end{cases} \tag{2.46}$$

Comme F est continue en $(0,0)$, on a par [32]:

$$F_x^{**}(0,0)=F_x(0,0)$$

ou encore

$$F_x(0,0)=\sup_{\substack{\mu\geqq 0\ \mu'\geqq 0\\ \varepsilon_x<\mu-\mu'\overset{\prime}{<}0}}\langle\mu,g\rangle+\langle\mu',g'\rangle \tag{2.47}$$

Rappelons qu'ici μ et μ' sont dans $\bar{\mathcal{M}}$, et qu'on ne peut a priori conclure à l'égalité de $F_x(0,0)$ et de $f(x)$ en utilisant le Théorème 2.2.

Si h est une fonction s.c.s. bornée sur $\bar{E}$, on pose, pour $x\in\bar{E}$

$$\bar{R}h(x)=\inf_{f\in\bar{K}\geqq h\,\mathrm{sur}\,\bar{E}}f(x) \tag{2.48}$$

Par le Théorème 1 c) de l'Appendice, $\bar{R}h$ coïncidence avec Rh sur E.

Soit λ et μ deux éléments $\geqq 0$ de $\bar{\mathcal{M}}$ tels que $\lambda<\mu$. L'ensemble des éléments de $\bar{K}$ qui majorent h sur $\bar{E}$ est filtrant décroissant. De la Proposition II.7.4 de [33], on tire

$$\langle\lambda,\bar{R}h\rangle=\inf_{f\in\bar{K}\geqq h}\langle\lambda,f\rangle\langle\mu,\bar{R}h\rangle=\inf_{f\in\bar{K}\geqq h}\langle\mu,f\rangle \tag{2.49}$$

et donc

$$\langle\mu,\bar{R}h\rangle\langle\leqq\lambda,\bar{R}h\rangle \tag{2.50}$$

On en déduit que si h est une fonction s.c.s. sur $\bar{E}$, la «réduite» de h sur $\bar{E}$ est s.c.s., coïncide sur E avec la «réduite» classique Rh, et reste x «fortement surmédiane» sur $\bar{E}$. On raisonnera de même pour x'.

Par récurrence, on en déduit que les fonctions (f_i,f_i') de la suite d'approximations (2.4) peuvent être prolongées à tout $\bar{E}$ en gardant les mêmes propriétés et sont respectivement majorées sur tout $\bar{E}$ par $\bar{f}$ et $\bar{f}'$ (qui sont dans $\bar{K}$ et $\bar{K}'$). Elles convergent donc vers les fonctions f et f', qui sont respectivement x-«fortement surmédiane» et x'-«fortement surmédiane». Alors si $x \in E$ et si μ et μ' sont des éléments $\geqq 0$ de $\bar{\mathscr{M}}$ tels que $\varepsilon_x < \mu - \mu' \stackrel{\prime}{<} 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &\geqq \langle \mu - \mu', f \rangle \geqq \langle \mu, g \rangle + \langle \mu', g' \rangle + \langle \mu - \mu', f' \rangle \\ &\geqq \langle \mu, g \rangle + \langle \mu', g' \rangle \end{aligned} \tag{2.51}$$

et donc $f(x) \geqq F_x(0,0)$. Comme $f(x) \leqq F_x(0,0)$, on en déduit que sur E, $f = F.(0,0)$ f étant un inf de fonctions continues est s.c.s. sur E. On raisonne de même pour f'. □

Remarque 2.1. La technique utilisée est la technique des multiplicateurs de Lagrange. Si l'espace d'états avait été compact, la démonstration aurait été beaucoup plus simple. On pourrait aussi montrer que si μ et μ' sont des éléments $\geqq 0$ de $\bar{\mathscr{M}}$ tels que $\varepsilon_x < \mu - \mu' \stackrel{\prime}{<} 0$, si μ_1 et μ'_1 sont les parties de μ portées par $\bar{E}/E$, alors $\mu_1 \stackrel{\prime}{<} \mu'_1 < \mu_1$, ce qui permet d'obtenir le résultat directement. □

Soient A et B les ensembles

$$\begin{aligned} A &= (f = f' + g) \\ B &= (f' = f + g'). \end{aligned} \tag{2.52}$$

A et B sont boréliens. Par les résultats de [19]-II, A et B sont finement fermés respectivement pour x et x'. Si x et x' sont des diffusions A et B sont fermés dans les deux cas par les résultats de [13]-III. Si g et g' sont continues, A et B sont fermés.

Si C est un borélien de R^d, Q^C (resp. Q'^C) est le noyau

$$Q^C h(x) = E_x 1_{D_C < +\infty} h(x_{D_C}) \tag{2.53}$$

(resp.

$$Q'^C h(x) = E'_x 1_{D_C < +\infty} h(x_{D_C})). \tag{2.53'}$$

On a alors le résultat suivant:

Théorème 2.5. *(f, f') est le seul couple de fonctions s.c.s. bornées tel que*

$$\begin{aligned} f &= R(f' + g) \\ f' &= R'(f + g'). \end{aligned} \tag{2.54}$$

De plus, pour toute mesure $\lambda \geqq 0$ finie, le Sup *dans* (2.17) (*resp.* (2.17')) *est atteint par les séries étroitement convergentes*

$$\begin{aligned} m &= \lambda(Q^A + Q^A Q'^B Q^A + \ldots) \\ m' &= \lambda(Q^A Q'^B + (Q^A Q'^B)^2 + \ldots) \end{aligned} \tag{2.55}$$

(*resp.*

$$\begin{aligned} m &= \lambda(Q'^B Q^A + (Q'^B Q^A)^2 + \ldots) \\ m' &= \lambda(Q'^B + Q'^B Q^A Q'^B + \ldots)). \end{aligned} \tag{2.55'}$$

Preuve. Soit (f^1, f'^1) une autre solution de (2.54), A^1 et B^1 les ensembles correspondant à A et B. Par le Théorème I.4 de [19] appliqué aux parties II et III de [19]), on a

$$\begin{aligned} f^1 &= Q^{A^1}(f'^1 + g) \\ f'^1 &= Q'^{B^1}(f^1 + g'). \end{aligned} \tag{2.56}$$

On itère alors (2.56) et on raisonne comme au Théorème 2.3. □

L'interprétation des résultats des Théorèmes 2.3 et 2.4 est évidente si on tient compte du Théorème 2.1. On trouve en particulier que pour maximiser le deuxième membre de (2.17), il suffit de construire la chaîne de temps d'arrêt $T = (D_A, D_B \circ D_A, D_A \circ D_B \circ D_A \ldots)$. Remarquons aussi que si λ est une mesure $\geqq 0$ finie, et si M *est une suite* (μ_n) de mesures $\geqq 0$ finies telle que $\lambda \ll M$, on peut définir $\langle M, (g, g')\rangle$ sans conditions sur M.

On pose en effet par convention

$$\begin{aligned} \langle M, (g, g')\rangle = \langle \mu_1, \tilde{f}\rangle + \sum_1^{+\infty} \langle \mu_{2i+1} - \mu_{2i}, \tilde{f}\rangle + \sum_1^{+\infty} \langle \mu_{2i} - \mu_{2i-1}, \tilde{f}'\rangle \\ + \sum_0^{+\infty} \langle \mu_{2i+1}, g - \tilde{f} + \tilde{f}'\rangle + \sum_1^{+\infty} \langle \mu_{2i}, g' - \tilde{f}' + \tilde{f}\rangle. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Chacun des termes des différentes sommes est $\leqq 0$, et (2.57) a donc bien un sens. Si M est telle que $|M| < +\infty$, cette définition coïncide avec la définition précédente. On en déduit:

Proposition 2.6. *Pour toute mesure $\geqq 0$ finie λ, on a*

$$\begin{aligned} \langle \lambda, f\rangle &= \sup_{\lambda \ll M} \langle M, (g, g')\rangle \\ \langle \lambda, f'\rangle &= \sup_{\lambda' \ll M} \langle M', (g', g)\rangle. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Preuve. Si $\langle M, (g, g')\rangle > -\infty$, par (2.57), comme $g - \tilde{f} + \tilde{f}' \leqq -\beta$ et $g' - \tilde{f}' + \tilde{f} \leqq -\beta$, il vient

$$\sum_1^{+\infty} \mu_i(1) < +\infty. \tag{2.59}$$

La série de terme général μ_i est donc étroitement convergente, ce qui permet d'écrire

$$\langle M, (g, g')\rangle = \sum_0^{+\infty} \mu_{2i+1}\, g + \sum_1^{+\infty} \mu_{2i}\, g'. \tag{2.60}$$

Si on pose $m = \sum_0^{+\infty} \mu_{2i+1}$, $m' = \sum_1^{+\infty} \mu_{2i}$, on a trivialement $\lambda < m - m' \lessdot 0$. On utilise alors le Théorème 2.2. □

6. Dépendances continues

Nous allons maintenant montrer un résultat de dépendance continue de f et f' par rapport aux paramètres définissant ces fonctions. Nous nous plaçons directement dans le cas des diffusions de manière à faire varier également leur dérive, mais le résultat reste vrai dans le cas général si l'on ne fait varier que g et g'.

(a,b) et $(a'.b')$ ont les mêmes propriétés que (a,b) à la section 1.2. Q^b et $Q'^{b'}$ *sont les processus associés.* E_x^b et $E'^{b'}_{x'}$ sont les opérateurs d'espérance pour Q_x^b et $Q'^{b'}_{x'}$, p et p' sont deux réels >0. x (resp. x') désigne le processus Q^b (resp. $Q'^{b'}$) tué par l'exponentielle e^{-pt} (resp. $e^{-p't}$).

Le résultat donné est meilleur que le résultat donné au Théorème VII.1 de [14] dans le cas où $Q^b = Q'^{b'}$: la démonstration ne repose plus sur la détermination d'une vitesse uniforme de convergence de suite (f_i, f_i') vers (f, f') comme en [14], car une telle détermination n'est en général plus possible.

On a en effet:

Théorème 2.6. *Soit $\{b^n\}$ et $\{b'^n\}$ une suite d'éléments de $L_\infty(R^d)$ convergeant vers b et $b' \in L_\infty(R^d)$ pour la topologie $\sigma(L_\infty(R^d), L_1(R^d))$. Soit $\{g^n\}$ et $\{g'^n\}$ deux suites de fonctions continues et uniformément bornées, convergeant vers g et g' uniformément sur les compacts de R^d. On suppose que pour tout n il existe $\tilde{f}^n Q^{b^n}$ p-excessive continue et $\tilde{f}'^n$ Q'^{b^n} p'-excessive continue et qu'il existe $\beta > 0$ tels que*

$$g^n + \beta \leqq \tilde{f}^n - \tilde{f}'^n \leqq -g'^n - \beta. \tag{2.61}$$

On suppose également qu'il existe $\tilde{f} Q^b$ p-excessive continue et $\tilde{f}' Q'^{b'}$ p'-excessive continue telles que

$$g + \beta \leqq \tilde{f} - \tilde{f}' \leqq -g' - \beta. \tag{2.62}$$

On suppose enfin que les fonctions $\tilde{f}^n, \tilde{f}, \tilde{f}'^n, \tilde{f}'$ sont uniformément bornées.

Alors la suite de fonctions continues (f^n, f'^n) construite au Théorème 2.4 relativement à $(Q^{b^n}, Q'^{b'^n}, g^n, g'^n)$ est uniformément bornée et converge uniformément sur tout compact vers le couple de fonctions (f, f') construit au Théorème 2.4 relativement à $(Q^b, Q'^{b'}, g, g')$.

Preuve. Soit $(f_i^n, f_i'^n)$ et (f_i, f_i') la suite d'approximations de (f^n, f'^n) et (f, f') construite au Théorème 2.4. Alors par la preuve du Théorème VII.1 de [14], on vérifie que les suites uniformément bornées de fonctions continues $\{f_1^n\}$ et $\{f_1'^n\}$ convergent vers f_1 et f_1' uniformément sur tout compact. Par récurrence, on vérifie un résultat identique à l'indice i.

Soit alors x^n une suite de points de R^d convergeant vers $x \in R^d$. Pour tout i, on a

$$\liminf f^n(x^n) \geqq \lim f_i^n(x^n) = f_i(x) \tag{2.63}$$

et donc

$$\liminf f^n(x^n) \geqq f(x). \tag{2.64}$$

On va démontrer l'inégalité inverse. La difficulté essentielle provient encore de la non compacité de R^d.

Soit A^n et B^n les ensembles A et B construits à l'ordre n. Q_n^C et $Q_n'^C$ sont les noyaux Q^C et Q'^C à l'ordre n.

Par l'inégalité (2.35) – qui est vraie également à condition de remplacer Q^{B^1} par Q'^{B^1} – comme $f^n \leqq \tilde{f}^n$, on a

$$\beta[Q_n^{A^n} + Q_n^{A^n} Q_n'^{B^n} Q_n^{A^n} + \ldots + Q_n^{A^n} (Q_n'^{B^n} Q_n^{A^n})^k + \ldots](1) \leqq \|\tilde{f}_n\|_{\mathscr{C}}. \tag{2.65}$$

Or la suite de fonctions $Q_n^{A^n}(1)$, $Q_n^{A^n} Q_n'^{B^n} Q_n^{A^n}(1) \ldots$ est trivialement décroissante. De plus la suite $\tilde{f}^n$ est majorée par une constante $M > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, et soit k un entier tel qu'en $x \in R^d$, on ait

$$Q_n^{A^n} (Q_n'^{B^n} Q_n^{A^n})_x^k (1) \geqq \frac{\varepsilon \beta}{M}. \tag{2.66}$$

Alors de (2.65), on tire

$$\frac{\beta^2 (k+1) \varepsilon}{M} \leqq M. \tag{2.67}$$

Donc, pour $k \geqq \dfrac{M^2}{\varepsilon \beta^2}$, on a

$$Q_n^{A^n} (Q_n'^{B^n} Q_n^{A^n})^k (1) \leqq \frac{\varepsilon \beta}{M}. \tag{2.68}$$

Posons

$$R_k^n = Q_n^{A^n} [(Q_n'^{B^n} Q_n^{A^n})^k + (Q_n'^{B^n} Q_n^{A^n})^{k+1} + \ldots]. \tag{2.69}$$

Comme $(Q_n^{A^n})^2 = Q_n^{A^n}$, on a aussi

$$R_k^n = Q_n^{A^n} (Q_n'^{B^n} Q_n^{A^n})^k [Q_n^{A^n} + Q_n^{A^n} Q_n'^{B_n} Q_n^{A^n} + \ldots]. \tag{2.70}$$

Grâce à (2.65) et (2.68), on en déduit que si $k \geqq \dfrac{M^2}{\varepsilon \beta^2}$, alors

$$R_k^n(1) \leqq \varepsilon. \tag{2.71}$$

On va alors vérifier que les mesures m^n et m'^n obtenues en (2.55) et (2.55') pour $\lambda = \varepsilon_{x^n}$, vérifient une condition de relative compacité de Prokhorov dans $\mathscr{M}^b$.

En effet de (2.65), on tire que les m^n et les m'^n sont uniformément bornées. De plus

$$m^n = [Q_n^{A^n} + Q_n^{A^n} Q_n'^{B^n} Q_n^{A^n} + \ldots + Q_n^{A^n} (Q_n'^{B^n} Q_n^{A^n})^{k-1}]_{x_n} + R_{k x^n}^n. \tag{2.72}$$

Soit $\eta > 0$. Posons $l_\eta = \left[\dfrac{2M^2}{\eta \beta^2}\right] + 1$. Par (2.71), on a

$$R_{l_\eta}^n(1) \leqq \frac{\eta}{2}. \tag{2.73}$$

Posons enfin

$$\begin{aligned}\mu_1^n &= Q_n^{A^n}{}_{x^n}\\ \mu_2^n &= (Q_n^{A^n} Q_n'^{B^n})_{x^n}\\ \mu_3^n &= (Q_n^{A^n} Q_n'^{B^n} Q_n^{A^n})_{x^n}\\ &\vdots\end{aligned} \tag{2.74}$$

Alors on a

$$\varepsilon_{x^n} \overset{n}{<} \mu_1^n \overset{'n}{<} \mu_2^n \overset{n}{<} \mu_3^n \overset{'n}{<} \dots \tag{2.75}$$

(on indexe par n les relations $<$ et $\overset{'}{<}$ correspondant à Q^{b^n} et $Q'^{b'^n}$). Par la Proposition II.1 de [13], les familles de mesures $\{\mu_1^n, \mu_2^n, \dots, \mu_{2l_n-1}^n\}$ vérifient un critère de Prokhorov quand n décrit N. (Dans le cas général où les processus considérés resteraient fixes on devrait utiliser le Théorème 1 d) de l'appendice pour obtenir le même type de résultat). Il existe donc un compact K de R^d tel que, pour tout $n \in N$, on ait

$$\sum_0^{l_n-1} \mu_{2j+1}^n(1_{CK}) \leqq \frac{\eta}{2}. \tag{2.76}$$

Or on a $m^n = \sum_0^{l_n-1} \mu_{2j+1}^n + R_{l_n}^n{}_{x^n}$.

De (2.73) et (2.76), on tire

$$m^n(1_{CK}) \leqq \eta. \tag{2.77}$$

Les m^n vérifient donc le critère de relative compacité de Prohorov. On raisonne de même sur les m'^n.

Soit m et m' les limites étroites de sous-suites extraites m^{n_k} et m'^{n_k}. Par hypothèse, on a

$$m'^{n_k} + \varepsilon_{x^{n_k}} \overset{n_k}{<} m^{n_k} \qquad m^{n_k} \overset{'n_k}{<} m'^{n_k}. \tag{2.78}$$

Alors comme au Théorème IV.2 de [13], on vérifie qu'on peut passer à la limite dans (2.78) et qu'on a

$$m' + \varepsilon_x < m \quad m \overset{'}{<} m' \tag{2.79}$$

ou encore $\varepsilon_x < m - m' \overset{'}{<} 0$. Or on a

$$f^{n_k}(x^{n_k}) = \langle m^{n_k}, g^{n_k}\rangle + \langle m'^{n_k}, g'^{n_k}\rangle. \tag{2.80}$$

Alors, comme les suites g^{n_k} et g'^{n_k} sont uniformément bornées, comme elles convergent uniformément sur tout compact vers g et g', comme m^{n_k} et m'^{n_k} convergent étroitement vers m et m', on a

$$\lim \langle m^{n_k}, g^{n_k}\rangle + \langle m'^{n_k}, g'^{n_k}\rangle = \langle m, g\rangle + \langle m', g'\rangle \tag{2.81}$$

et donc $f(x) \geqq \limsup f^{n_k}(x^{n_k})$.

En raisonnant sur toutes les sous-suites de N, on en déduit que

$$f(x) \geqq \limsup f^n(x^n) \tag{2.82}$$

De (2.64) et (2.82), on déduit bien le Théorème pour f. On raisonne de même pour f'. □

7. *Le cas contraint*

On se place sous les hypothèses de la section 2.1. Soient A et B deux fermés de E. On considère le schéma itératif

$$\begin{aligned} f_1 &= R 1_A g & f_1' &= R' 1_B g' \\ f_{i+1} &= R 1_A(f_i' + g) & f_{i+1}' &= R' 1_B(f_i + g'). \end{aligned} \tag{2.83}$$

On obtient alors les formules (2.5) (resp. (2.5′)) en supposant que M (resp. M') est tel que μ_{2i+1} (resp. μ_{2i}) est portée par A, et μ_{2i} (resp. μ_{2i+1}) par B, et cela pour tout i.

On a également l'analogue de la Proposition 2.2 et du Théorème 2.1. La condition (2.13) est remplacée par

$$\begin{aligned} g &\leqq \tilde{f} - \tilde{f}' && \text{sur } A \\ \tilde{f} - \tilde{f}' &\leqq -g' && \text{sur } B. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Dans (2.17) et (2.17′) on devra également supposer que m est portée par A et m' par B.

On se place alors sous les hypothèses de la section 2.5 et on suppose que g et g' sont deux fonctions définies respectivement sur A et sur B, continues (resp. s.c.s.) bornées, telles qu'il existe $\tilde{f} \in \bar{K}$ et $\tilde{f}' \in \bar{K}'$ et $\beta > 0$ avec

$$\begin{aligned} g + \beta &\leqq \tilde{f} - \tilde{f}' && \text{sur } A \\ \tilde{f} - \tilde{f}' &\leqq -g' - \beta && \text{sur } B. \end{aligned} \tag{2.85}$$

On considère alors la suite (f_i, f_i') définie en (2.83), et sa limite (f, f').

On a:

Théorème 2.7. *Les fonctions f et f' sont bornées et s.c.s. De plus (f, f') est le seul couple de fonctions s.c.s. bornées telles que*

$$f = R 1_A(f' + g) \qquad f' = R' 1_B(f + g'). \tag{2.86}$$

Preuve. On vérifie par récurrence que $f_i \leqq \tilde{f}, f_i' \leqq \tilde{f}'$, et donc que f et f' sont des fonctions bornées.

$\mathscr{C}(A)$ et $\mathscr{C}(B)$ sont les ensembles de fonctions continues bornées sur A et B. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont les compactifiés de Stone-Cech de A et B. $\bar{\mathscr{M}}^A$ et $\bar{\mathscr{M}}^B$ sont les espaces duals de $\mathscr{C}(A)$ et $\mathscr{C}(B)$, i.e. l'ensemble des éléments de $\bar{\mathscr{M}}$ portés par $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Pour $(u,u')\in\bar{\mathscr{C}}(A)\times\bar{\mathscr{C}}(B)$, on pose

$$F'_x(u,u')=\inf_{\substack{\bar f\in\bar K,\,\bar f'\in\bar K'\\ g+u\leqq \bar f-\bar f' \text{ sur } A\\ \bar f-\bar f'\leqq -g'-u' \text{ sur } B}} \bar f(x). \tag{2.87}$$

On calcule alors la duale de F'_x en procédant comme au Théorème 2.4. Le même raisonnement qu'au Théorème 2.4 montre que f et f' sont s.c.s. L'unicité de la solution de (2.86) se démontre comme au Théorème 2.5. □

Corollaire. *Sous les hypothèses de la section* 2.6, *(pour b et b′ fixés), si A et B sont disjoints, ou si $A=B$, et si g et g′ sont respectivement continues sur A et sur B, f est continue sur A et sur ${}^cA$ et f′ est continue sur B et sur ${}^cB$.*

Preuve. On a nécessairement $f=Q^A f$. Par le Lemme 2 (p. 275) de [27], f est continue sur ${}^cA$. De plus f_1 est continue sur A et ${}^cA$. En effet soit A_1 l'ensemble

$$A_1=(f_1=g)\cap A \tag{2.88}$$

Par [13] III, A_1 est fermé. De plus par le Théorème III.4 de [13], on a $f_1=Q^{A_1}f_1$. f_1 est ainsi continue sur ${}^cA_1$, donc continue sur ${}^cA$. De plus, si $x\in A_1$, si $x_n\in A$ et si $x_n\to x$, on a $g(x_n)\to g(x)$. Comme $f_1(x_n)\geqq g(x_n)$ on a $f_1(x)\leqq \liminf f_1(x_n)$. f_1 est s.c.i. sur A, donc continue sur A. De même f'_1 est continue sur B et sur ${}^cB$.

Comme A et B sont disjoints ou égaux, f_1 est continue sur B et f'_1 est continue sur A. On peut donc itérer le raisonnement. On montre ainsi que pour tout i, f_i est continue sur A et ${}^cA$, et f'_i est continue sue B et ${}^cB$. f est donc s.c.i. sur A et ${}^cA$ et f' est s.c.i. sur B et ${}^cB$. Comme on sait que f et f' sont s.c.s., le corollaire est démontré. □

On a enfin le résultat de dépendance continue, énoncé sous les hypothèses de la section 2.6.

Théorème 2.8. *On suppose que A et B sont disjoints ou égaux. Soit $\{b^n\}$ et $\{b'^n\}$ deux suites d'éléments de $L_\infty(R^d)$ convergeant vers b et $b'\in L_\infty(R^d)$ pour la topologie $\sigma(L_\infty(R^d), L_1(R^d))$. Soit g^n et g'^n deux suites uniformément bornées de fonctions continues défines respectivement sur A et sur B, et convergeant vers g et g′ uniformément sur les compacts de A et B. On suppose que pour tout n, il existe $\tilde f^n\, Q^{b^n}$ p-excessive continue et $\tilde f'^n\, Q'^{b'^n}$ p′-excessive continue et $\beta>0$ tels que*

$$\begin{aligned} &g^n+\beta\leqq \tilde f^n-\tilde f'^n \quad \text{sur } A\\ &\tilde f^n-\tilde f'^n\leqq -g'^n-\beta \quad \text{sur } B. \end{aligned} \tag{2.89}$$

On suppose également qu'il existe $\tilde f Q^b$ p-excessive continue et $\tilde f' Q'^{b'}$ p-excessive continue telles que

$$\begin{aligned} &g+\beta\leqq \tilde f-\tilde f' \quad \text{sur } A\\ &\tilde f-\tilde f'\leqq -g'-\beta \quad \text{sur } B. \end{aligned} \tag{2.90}$$

On suppose enfin que les fonctions $\tilde f^n, \tilde f'^n, \tilde f, \tilde f'$, sont uniformément bornées. (f^n, f'^n) (resp. (f,f')) sont les fonctions construites au Théorème 2.7 relativement à

$(Q^{b^n}, Q'^{b^n}, g^n, g'^n)$ (*resp.* $(Q^b, Q'^{b'}, g, g')$). *Alors la suite* $\{f^n\}$ (*resp.* $\{f'^n\}$) *est uniformément bornée et converge vers* f (*resp.* f') *uniformément sur les compacts de* A *et* ${}^cA$ (*resp. de* B *et* ${}^cB$).

Preuve. Soit x^n une suite de points de A (resp. ${}^cA$) convergeant vers $x \in A$ (resp. ${}^cA$). Comme au Théorème VII.1 de [14], on vérifie que

$$f_1(x) \geqq \limsup f_1^n(x^n). \tag{2.91}$$

Soit A_1 le fermé $A^1 = A \cap (f_1 = g)$. Alors si $x \in A^1$, on a $g(x) = \lim g^n(x^n)$, et donc

$$f_1(x) \leqq \liminf f_1^n(x^n). \tag{2.92}$$

Si $x \notin A^1$, on vérifie, comme au Théorème VII.1 de [14] que (2.92) reste encore vrai. f_1 est donc limite uniforme de $\{f_1^n\}$ sur les compacts de A et ${}^cA$. De même, f_1' est limite uniforme de $\{f_1'^n\}$ sur les compacts de B et ${}^cB$. Enfin les suites $\{f_1^n\}$ et $\{f_1'^n\}$ restent uniformément bornées, puisqu'elles sont majorées par les suites $\{\tilde{f}^n\}$ et $\{\tilde{f}'^n\}$.

Comme A et B sont disjoints ou égaux, la suite $\{f_1'^n\}$ reste bornée et converge vers f_1' uniformément sur les compacts de A, et la suite $\{f_1^n\}$ est bornée et converge vers f_1 uniformément sur les compacts de B. Par récurrence, on en déduit le même résultat à l'ordre i.

Soit x^n une suite d'éléments de A (resp. ${}^cA$) convergeant vers $x \in A$ (resp. ${}^cA$). (2.64) reste vrai ici. On montre l'inégalité correspondant à (2.82). □

Au lieu de (2.89), on fait maintenant l'hypothèse que

$$d(A, B) > 0. \tag{2.93}$$

On a alors

Théorème 2.9. *Si* $d(A,B) > 0$, *si* g *et* g' *sont des fonctions définies respectivement sur* A *et sur* B, *s.c.s. et bornées, les suites de fonctions s.c.s. bornées* $\{f_i\}, \{f_i'\}$ *convergent uniformément sur* R^d *vers les fonctions s.c.s. bornées* f *et* f'. (f, f') *est le seul couple de fonctions s.c.s. bornées solution de*

$$\begin{aligned} f &= R^b 1_A(f' + g) \\ f' &= R'^{b'} 1_B(f + g'). \end{aligned} \tag{2.94}$$

Si g *et* g' *sont respectivement continues sur* A *et sur* B, f *est continue sur* A *et* ${}^cA$, *et* f' *est continue sur* B *et* ${}^cB$.

Preuve. Comme en [14]-(6.7), on montre par récurrence les inégalités

$$\begin{aligned} f_{2n+1} &\leqq f_{2n} + Q^A Q'^B \dots Q'^B f_1 \\ f'_{2n+1} &\leqq f'_{2n} + Q'^B Q^A \dots Q^A f_1' \\ f_{2n+2} &\leqq f_{2n+1} + Q^A Q'^B \dots Q^A f_1' \\ f'_{2n+2} &\leqq f'_{2n+1} + Q'^B Q^A \dots Q'^B f_1. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Comme $d(A,B) > 0$, par la Proposition VI.2 de [14], il existe α tel que $0 \leqq \alpha < 1$, ne dépendant que de $\|b\|_{L_\infty(R^d)}$ et α' tel que $0 \leqq \alpha' < 1$ ne dépendant que de

$\|b'\|_{L_\infty(R^d)}$ tel que

$$Q^A 1 \leqq \alpha \quad \text{sur } B \quad Q'^B 1 \leqq \alpha' \quad \text{sur } A. \tag{2.96}$$

Les séries $\sum_2^n (f_i - f_{i-1})$ et $\sum_2^n (f_i' - f_{i-1}')$ sont donc normalement convergentes. f et f' sont donc s.c.s. et bornées. Pour l'unicité de la solution de (2.94), on raisonne comme au Théorème 2.3. Pour les résultats de continuité, on raisonne comme au Corollaire du Théorème 2.7. □

On a encore un résultat de dépendance continue équivalent au Théorème 2.8, où on peut supprimer les hypothèses (2.89) et (2.90), qu'on montre comme le Théorème VII.1 de [14]. Il suffit en effet de remarquer que la preuve du Théorème 2.8 montre que les fonctions f_i sont limites uniformes sur les compacts de A et ${}^cA$ des f_i^n quand $n \to +\infty$. Grâce à l'uniformité en n des majorations (2.96) et à (2.95), l'uniformité en n de la convergence de f_i^n vers f^n implique la convergence de f^n vers f. On raisonne de même pour f'^n et f'.

8. *Une équation fonctionnelle*

On se replace temporairement sous les hypothèses de la section 2.1. g et g' sont deux fonctions boréliennes bornées.
On veut résoudre l'équation

$$\begin{aligned} f &= R(g - f') \\ f' &= R'(g' - f). \end{aligned} \tag{2.97}$$

On considère le schéma itératif

$$\begin{aligned} f_1 &= Rg & f_1' &= R'g' \\ f_{i+1} &= R(g - f_i') & f_{i+1}' &= R'(g' - f_i). \end{aligned} \tag{2.98}$$

On a trivialement

$$\begin{aligned} f_{2i} &\leqq f_{2i-1} & f_{2i}' &\leqq f_{2i-1}' \\ f_{2i+1} &\geqq f_{2i} & f_{2i+1}' &\geqq f_{2i}'. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Il n'y a donc a priori pas convergence du schéma.

On se replace alors sous les hypothèses de la section 1.2, où x et x' sont tous deux égaux à une diffusion tuée par l'exponentielle e^{-pt}. On suppose de plus que g et g' sont les Q^b p-potentiels de fonctions boréliennes bornés L et L' (non nécessairement $\geqq 0$), i.e.

$$g = V_p^b L \quad g' = V_p^b L'. \tag{2.100}$$

On a alors

Théorème 2.10. *Il existe au moins un couple de fonctions continues bornées (f, f') telles que*

$$\begin{aligned} f &= R^b(g-f') \\ f' &= R^b(g'-f). \end{aligned} \tag{2.101}$$

Preuve. On pose

$$\begin{aligned} B = \{(N,N') \in L_\infty(R^d) \times L_\infty(R^d);\ & N \geqq 0, N' \geqq 0, \|N\|_{L_\infty(R^d)} \\ & \leqq \|L\|_{L_\infty(R^d)}, \|N'\|_{L_\infty(R^d)} \leqq \|L'\|_{L_\infty(R^d)}. \end{aligned} \tag{2.102}$$

B est convexe. On munit B de la topologie $\sigma(L_\infty(R^d) \times L_\infty(R^d),\ L_1(R^d) \times L_1(R^d))$. B devient compact.

$A(N,N') \in B$, on associe les fonctions

$$\begin{aligned} f &= R^b(g - V_p^b N') \\ f' &= R^b(g' - V_p^b N). \end{aligned} \tag{2.103}$$

Par l'argument donné au Théorème 1.3, f est une fonction Q^b p-excessive telle que $f \ll V_p^b L^+$. Il existe donc $\tilde{N} \in L_\infty(R^d)$ tel que $0 \leqq \tilde{N} \leqq L^+$ et que $f = V_p^b \tilde{N}$. L'ensemble des $\tilde{N}$ qui conviennent est trivialement convexe. De plus le Théorème V.1.a) de [12], il est fermé (il est d'ailleurs réduit à un seul point dans de nombreux cas). De même on a $f' = V_p^b \tilde{N}'$ avec $0 \leqq \tilde{N}' \leqq L'^+$.

Considérons alors la multiplication Γ qui à (N,N') associe $\{(\tilde{N},\tilde{N}')\}$ défini précédemment.

Elle est à valeurs convexes fermées non vides. Montrons qu'elle est s.c.s. Soit donc (N_n, N'_n) une suite d'éléments de B convergeant vers $(N,N') \in B$, $(\tilde{N}_n, \tilde{N}'_n)$ une autre suite d'éléments de B telle que, pour tout n, $(\tilde{N}_n, \tilde{N}'_n) \in \Gamma(N_n, N'_n)$ et que $(\tilde{N}_n, \tilde{N}'_n) \to (\tilde{N}, \tilde{N}')$. Par le Théorème V.1.a) de [12], $V_p^b N_n$, $V_p^b N'_n$, $V_p^b \tilde{N}_n$, $V_p^b \tilde{N}'_n$ convergent simplement vers $V_p^b N$, $V_p^b N'$, $V_p^b \tilde{N}$, $V_p^b \tilde{N}'$. Comme ces fonctions sont équicontinues, elles convergent uniformément sur tout compact. De plus, elles sont uniformément bornées. Par la preuve du Théorème VII.1 de [14], $R^b(g - V_p^b N'_n)$ et $R^b(g' - V_p^b N_n)$ convergent uniformément sur tout compact vers $R^b(g - V_p^b N')$ et $R^b(g' - V_p^b N)$. On en déduit que $(\tilde{N}, \tilde{N}') \in \Gamma(N,N')$. Γ est bien s.c.s.

Par le Théorème de point fixe de Kakutani, Γ a un point fixe, qu'on note (N_0, N'_0). $f = V_p^b N_0$ et $f' = V_p^b N'_0$ sont donc solution de (2.101). □

Il n'y a en général pas unicité. En effet, si $g' = g$, on vérifie que $(f=0, f' = R^b g)$ et $(f = R^b g, f' = 0)$ sont solution de (2.101).

Soit A^+ et B^+ les ensembles fermés

$$\begin{aligned} A^+ &= (g \geqq 0) \\ B^+ &= (g' \geqq 0). \end{aligned} \tag{2.104}$$

On fait l'hypothèse que

$$d(A^+, B^+) > 0. \tag{2.105}$$

Par la Proposition VI.2 de [14], il existe α tel que $0 \leqq \alpha < 1$ ne dépendant que de $\|b\|_{L_\infty(R^d)}$ pour lequel

$$Q^{A^+}(1) \leqq \alpha \quad \text{sur } B^+ \qquad Q^{B^+}(1) \leqq \alpha \quad \text{sur } A^+. \tag{2.106}$$

Donc, si λ est une mesure $\geqq 0$ finie, et si $M=(\mu_n)$ est une suite de mesures $\geqq 0$ finies telle que $\lambda \ll M$, si pour tout i, μ_{2i} est portée par B^+ (resp. A^+) et μ_{2i+1} par A^+ (resp. B^+), il existe k ne dépendant que de $\lambda(1)$ et de α tel que

$$\sum_1^{+\infty} \mu_i(1) \leqq k. \tag{2.107}$$

Dans ce cas, on peut définir sans ambiguité $\langle M, (g, -g') \rangle$ (resp. $\langle M, (g', -g) \rangle$).

Si C et D sont des boréliens, on pose

$$M^{(C,D)} = (\lambda Q^C, \lambda Q^C Q^D, \lambda Q^C Q^D Q^C \ldots). \tag{2.108}$$

Si $C \subset A^+$ et si $D \subset B^+$, $M_\lambda^{(C,D)}$ vérifie bien les hypothèses précédentes. On pose

$$\begin{aligned} F_\lambda(C,D) &= \langle M_\lambda^{(C,D)}, (g, -g') \rangle \\ F'_\lambda(C,D) &= \langle M_\lambda^{(D,C)}, (g', -g) \rangle. \end{aligned} \tag{2.109}$$

On a alors le résultat d'unicité suivant:

Théorème 2.11. *Il existe un seul couple de fonctions continues bornées (f, f') tel que*

$$\begin{aligned} f &= R(g - f') \\ f' &= R(g' - f). \end{aligned} \tag{2.110}$$

Si A et B sont les fermés

$$\begin{aligned} A &= (f + f' = g) \\ B &= (f + f' = g') \end{aligned} \tag{2.111}$$

alors $A \subset A^+$ et $B \subset B^+$. Pour toute mesure $\lambda \geqq 0$ finie sur R^d, si C et D sont des boréliens de R^d tels que $C \subset A^+$, $D \subset B^+$, on a

$$\begin{aligned} F_\lambda(C,B) &\leqq F_\lambda(A,B) \leqq F_\lambda(A,D) \\ F'_\lambda(A,D) &\leqq F'_\lambda(A,B) \leqq F'_\lambda(C,B) \end{aligned} \tag{2.112}$$

f et f' peuvent être définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf_{D \subset B^+} \sup_{C \subset A^+} F_{\varepsilon_x}(C,D) = \sup_{C \subset A^+} \inf_{D \subset B^+} F_{\varepsilon_x}(C,D) \\ f'(x) &= \inf_{C \subset A^+} \sup_{D \subset B^+} F'_{\varepsilon_x}(C,D) = \sup_{D \subset B^+} \inf_{C \subset A^+} F'_{\varepsilon_x}(C,D). \end{aligned} \tag{2.113}$$

Preuve. Soit (f, f') une solution de (2.110). Comme f et f' sont $\geqq 0$, A est inclus dans A^+ et B est inclus dans B^+. Par la Proposition II.2 de [13], on a

$$\begin{aligned} f &= Q^A(g - f') \\ f' &= Q^B(g' - f). \end{aligned} \tag{2.114}$$

Donc

$$f = Q^A Q^B f - Q^A Q^B g' + Q^A g$$

et en itérant, il vient

$$f=(Q^A Q^B)^n f-(Q^A Q^B)^n g'+(Q^A Q^B)^{n-1} Q^A g \ldots -Q^A Q^B g'+Q^A g. \tag{2.115}$$

Or, comme $A \subset A^+$, $B \subset B^+$, on a $\lim(Q^A Q^B)^n=0$, et donc

$$f=Q^A g-Q^A Q^B g'+Q^A Q^B Q^A g \ldots . \tag{2.116}$$

Ainsi

$$\langle \lambda, f\rangle = F_\lambda(A,B). \tag{2.117}$$

De plus, comme $f=R(g-f')$, pour tout borélien C, on a $f \geqq Q^C(g-f')$ et grâce à (2.114), il vient

$$f \geqq Q^C Q^B f - Q^C Q^B g' + Q^C g$$

ou, en itérant

$$f \geqq (Q^C Q^B)^n f-(Q^C Q^B)^n g'+(Q^C Q^B)^{n-1} Q^C g \ldots -Q^C Q^B g'+Q^C g. \tag{2.118}$$

Si $C \subset A^+$, $\lim(Q^C Q^B)^n=0$ et donc

$$f \geqq Q^C g-Q^C Q^B g'+Q^C Q^B Q^C g \ldots \tag{2.119}$$

ce qui s'écrit

$$\langle \lambda, f\rangle \geqq F_\lambda(C,B). \tag{2.120}$$

De même, on montrera que si D est un borélien $\subset B^+$

$$\langle \lambda, f\rangle \leqq F_\lambda(A,D). \tag{2.121}$$

De (2.117), (2.120) et (2.121), on tire bien (2.112). (A,B) est donc un point selle pour le jeu associé à F_λ, et $F_\lambda(A,B)$ est la valeur de ce jeu. Comme $\langle \lambda, f\rangle = F_\lambda(A,B)$, en faisant $\lambda=\varepsilon_x$, on tire bien (2.113). On raisonne de même pour F'_λ et f'. □

3. Applications aux problèmes de contrôle

1. Le contrôle des diffusions alternantes: le cas simple

On se replace sous les hypothèses de 2.6: a et a' gardent en particulier le même sens qu'en 2.6. σ et σ' sont leurs racines carrées positives. p et p' sont deux réels >0.

K et K' sont deux multiplications boréliennes définies sur R^d à valeurs dans $R^d \times R^+$, qu'on suppose non vides, compactes et uniformément bornées. $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ désignent les classes d'équivalence pour la mesure de Lebesgue des sections boréliennes de K et K'. On munit $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}$ de la topologie $\sigma(L_\infty(R^d), L_1(R^d))$.

h et h' sont deux fonctions continues $\geqq 0$ bornées, telles qu'il existe $\beta \geqq 0$ pour lequel $h \geqq 2\beta$.

On veut minimiser

$$E_\lambda\left[\int_0^{T_1} e^{-pt} L(x_t)\,dt + e^{-pT_1}\left(h(x_{T_1}) + \int_{T_1}^{T_2} e^{-p'(t-T_1)} L'(x_t)\,dt\right.\right.$$
$$\left.\left.+ e^{-p'(T_2-T_1)}\left(h'(x_{T_2}) + \int_{T_2}^{T_3} e^{-p(t-T_2)} L(x_t)\,dt + \dots\right)\right)\right] \tag{3.1}$$

où x a la loi de Q^b entre 0 et T_1, la loi de $Q^{b'}$ entre T_1 et T_2, la loi de Q^b entre T_2 et T_3 etc ..., avec $c=(b,L)$ et $c'=(b',L')$.

Pour $c=(b,L)\in\mathscr{L}$ et $c'=(b',L')\in\mathscr{L}'$, on pose

$$\begin{aligned} V_c(x) &= E_x^b \int_0^{+\infty} e^{-pt} L(x_t)\,dt \\ V'_{c'}(x) &= E_x'^{b'} \int_0^{+\infty} e^{-p't} L'(x_t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Soit $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$ les mesures associées à $T_1, T_2, T_3 \dots$ (3.1) s'écrit

$$\langle\lambda, V_c\rangle - \langle\mu_1, V_c\rangle - \sum_1^{+\infty} \langle\mu_{2i+1}-\mu_{2i}, V_c\rangle - \sum_1^{+\infty} \langle\mu_{2i}-\mu_{2i-1}, V'_{c'}\rangle$$
$$-\sum_0^{+\infty} \langle\mu_{2i+1}, -h\rangle - \sum_1^{+\infty} \langle\mu_{2i}, -h'\rangle. \tag{3.3}$$

On pose alors

$$\begin{aligned} g_{(c,c')} &= V_c - V'_{c'} - h \\ g'_{(c,c')} &= V'_{c'} - V_c - h'. \end{aligned} \tag{3.4}$$

On a

$$g_{(c,c')} + \beta \leqq V_c - (V'_{c'} + \beta) \leqq -g'_{(c,c')} - \beta. \tag{3.5}$$

Pour $(c,c')\in\mathscr{L}\times\mathscr{L}'$, (2.39) est bien vérifiée relativement à $(g_{(c,c')}, g'_{(c,c')}, Q^b, Q'^{b'})$ avec

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{(c,c')} &= V_c \\ \tilde{f}'_{(c,c')} &= V'_{c'} + \beta \end{aligned} \tag{3.6}$$

(il est ici essentiel que $L\geqq 0$, $L'\geqq 0$). De plus, (3.3) s'écrit

$$\langle\lambda, V_c\rangle - \langle\mu_1, \tilde{f}_{(c,c')}\rangle - \sum_1^{+\infty} \langle\mu_{2i+1}-\mu_{2i}, \tilde{f}_{(c,c')}\rangle$$
$$-\sum_1^{+\infty} \langle\mu_{2i}-\mu_{2i-1}, \tilde{f}'_{(c,c')}\rangle - \sum_0^{+\infty} \langle\mu_{2i+1}, g_{(c,c')} - \tilde{f}_{(c,c')} + \tilde{f}'_{(c,c')}\rangle$$
$$-\sum_1^{+\infty} \langle\mu_{2i}, g'_{(c,c')} - \tilde{f}'_{(c,c')} + \tilde{f}_{(c,c')})\rangle. \tag{3.7}$$

Or, par la Proposition 2.6, l'inf en $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ de (3.7) est égal à

$$\langle \lambda, V_c - f_{(c,c')} \rangle \tag{3.8}$$

où $(f_{(c,c')}, f'_{(c,c')})$ est la solution du système (2.54) associé à $(g_{(c,c')}), g'_{(c,c')}, Q^b, Q'^{b'})$.

Pour $(c,c') \in \mathscr{L} \times \mathscr{L}'$, on pose enfin

$$\begin{aligned} q_{(c,c')} &= V_c - f_{(c,c')} \\ q'_{(c,c')} &= V'_{c'} - f'_{(c,c')}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

$q_{(c,c')}$ et $q'_{(c,c')}$ sont des fonctions continues bornées. Comme $g_{(c,c')} \leqq V_c - V'_{c'} \leqq -g'_{(c,c')}$ on a

$$\begin{aligned} f_{(c,c')} &\leqq V_c \\ f'_{(c,c')} &\leqq V'_{c'} \end{aligned} \tag{3.10}$$

et donc

$$\begin{aligned} V_c &\geqq q_{(c,c')} \geqq 0 \\ V'_{c'} &\geqq q'_{(c,c')} \geqq 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Enfin

$$-h' \leqq q_{(c,c')} - q'_{(c,c')} \leqq h. \tag{3.12}$$

Pour résoudre le problème de manière satisfaisante, on va procéder en plusieurs étapes.

a) Le cas convexe: un résultat intermédiaire

On suppose temporairement que K et K' sont à valeurs convexes. $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sont alors convexes et compacts.

Pour $c = (b, L) \in \mathscr{L}$, $c' = (b', L') \in \mathscr{L}'$, $\tilde{c} = (\tilde{b}, \tilde{L}) \in \mathscr{L}$, $\tilde{c}' = (\tilde{b}', \tilde{L}') \in \mathscr{L}'$, on pose

$$\begin{aligned} q^{\tilde{c}}_{(c,c')} &= V_{\tilde{c}} - R^{\tilde{b}}(V_{\tilde{c}} - q'_{(c,c')} - h) \\ q'^{\tilde{c}'}_{(c,c')} &= V'_{\tilde{c}'} - R'^{\tilde{b}'}(V'_{\tilde{c}'} - q_{(c,c')} - h'). \end{aligned} \tag{3.13}$$

On a trivialement

$$\begin{aligned} q^{c}_{(c,c')} &= q_{(c,c')} \\ q'^{c'}_{(c,c')} &= q'_{(c,c)}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

On a alors le résultat suivant:

Proposition 3.1. *Si $(c,c') \in \mathscr{L} \times \mathscr{L}'$, les ensembles*

$$\begin{aligned} \Gamma_{(c,c')} &= \{\tilde{c} \in \mathscr{L};\, q^{\tilde{c}}_{(c,c')} = \inf_{c^* \in \mathscr{L}} q^{c^*}_{(c,c')}\} \\ \Gamma'_{(c,c')} &= \{\tilde{c}' \in \mathscr{L}';\, q'^{\tilde{c}'}_{(c,c')} = \inf_{c^{*\prime} \in \mathscr{L}'} q'^{c^{*\prime}}_{(c,c')}\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

sont non vides, convexes et compacts. De plus la multiplication $\bar{\Gamma}$ définie sur $\mathscr{L}\times\mathscr{L}'$ à valeurs dans $\mathscr{L}\times\mathscr{L}'$

$$(c,c')\to\Gamma_{(c,c')}\times\Gamma'_{(c,c')} \tag{3.16}$$

est semi-continue supérieurement.

Preuve. $\Gamma_{(c,c')}$ et $\Gamma'_{(c,c')}$ sont non vides, convexes et compacts par le Théorème II.5 de [16]. De plus, $(c,\tilde{c},c')\to q^{\tilde{c}}_{(c,c')}$ est continue de $\mathscr{L}\times\mathscr{L}\times\mathscr{L}'$ dans l'espace des fonctions continues bornées muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. En effet, par le Théorème V.1 a) de [12] et le résultat d'équicontinuité de [38] -7, $V_{c_n}\to V_c$ et $V'_{c'_n}\to V'_{c'}$ uniformément sur tout compact quand $(c_n, c'_n, \tilde{c}_n)$ converge faiblement vers $(c, c', \tilde{c})$. De plus ces suites restent uniformément bornées. Par le Théorème 2.6, dont les hypothèses sont trivialement vérifiées, on voit que

$$q'_{(c_n,c'_n)}\to q'_{(c,c')}$$

uniformément sur tout compact en restant uniformément bornée. Par la preuve du Théorème VII.1 de [14], $R^{\tilde{b}_n}(V_{\tilde{c}_n}-q'_{(c_n,c'_n)}-h)\to R^{\tilde{b}}(V_{\tilde{c}}-q'_{(c,c')}-h)$ uniformément sur tout compact. Donc $q^{\tilde{c}_n}_{(c_n,c'_n)}\to q^{\tilde{c}}_{(c,c')}$ uniformément sur tout compact.

On vérifie alors trivialement que la multiplication $\bar{\Gamma}$ est semi-continue supérieurement. □

On en déduit:

Théorème 3.1. *Il existe $(c_0,c'_0)\in\mathscr{L}\times\mathscr{L}'$ tel que si $(\tilde{c},\tilde{c}')\in\mathscr{L}\times\mathscr{L}'$, on ait*

$$\begin{aligned} q^{c_0}_{(c_0,c'_0)}&=q_{(c_0,c'_0)}\leqq q^{\tilde{c}}_{(c_0,c'_0)}\\ q'^{c'_0}_{(c_0,c'_0)}&=q'_{(c_0,c'_0)}\leqq q'^{\tilde{c}'}_{(c_0,c'_0)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Preuve. Par la Proposition 3.1, on peut appliquer le Théorème de point fixe de Kakutani à la multiplication $\bar{\Gamma}$. □

b) Le cas convexe: résolution du problème

Pour $(c,c')\in\mathscr{L}\times\mathscr{L}'$, on pose

$$\begin{aligned} A^{(c,c')}&=(q_{(c,c')}-q'_{(c,c')}=h)\\ B^{(c,c')}&=(q'_{(c,c')}-q_{(c,c')}=h'). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dans la suite, $\mathscr{T}$ est l'ensemble des temps d'arrêt algébriques sur $\mathscr{C}(R^+;R^d)$.

Théorème 3.2. *Si $(c_0,c'_0)\in\mathscr{L}\times\mathscr{L}'$ est pris comme au Théorème 3.1, alors pour tout $x\in R^d$, on a*

$$\begin{aligned} q_{(c_0,c'_0)}(x)=\inf_{\substack{c_{2i+1}\in\mathscr{L}\\ c'_{2i}\in\mathscr{L}'\\ T_i\in\mathscr{T}}}\Bigg[&E^{b_1}_x\int_0^{T_1}e^{-pt}L_1(x_t)\,dt+e^{-pT_1}(h(x_{T_1})+E'^{b'_2}_{x_{T_1}}\\ &\int_0^{T_2}e^{-p't}L'_2(x_t)\,dt+e^{-pT_2}\bigg(h'(x_{T_2})+E^{b_3}_{x_{T_2}}\int_0^{T_3}e^{-pt}L_3(x_t)\,dt+\dots\bigg)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.19}$$

L'inf dans (3.19) *est réalisé par*

$$c_1 = c_3 = \ldots = c_{2i+1} = c_0, c'_2 = c'_4 = \ldots = c'_{2i} = c'_0,$$

$$T_1 = T_3 = \ldots = T_{2i+1} = D_{A(c_0, c'_0)}, \quad T_2 = T_4 = \ldots = T_{2i} = D_{B(c_0, c'_0)}.$$

On a l'expression correspondante pour $q'_{(c_0, c'_0)}$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} q_{(c_0, c'_0)} &= V_{c_0} - f_{(c_0, c'_0)} \\ q'_{(c_0, c'_0)} &= V'_{c'_0} - f'_{(c_0, c'_0)} \end{aligned} \tag{3.20}$$

$q_{(c_0, c'_0)}$ est alors égal au membre de droite de (3.19), quand on remplace $c_1, c_3, \ldots, c_{2i+1}$ par $c_0, c'_2, c'_4, \ldots, c'_{2i}$ par $c'_0, T_1, T_3, \ldots, T_{2i+1}$ par $D_{A(c_0, c'_0)}$ et $T_2, T_4, \ldots, T_{2i}$ par $D_{B(c_0, c'_0)}$: cela résulte en effet de (3.20) et de (2.55). On a naturellement le résultat correspondant pour $q'_{(c_0, c'_0)}$.

De plus, grâce à (3.17), pour $c_1 = (b_1, L_1) \in \mathscr{L}$ et $c'_2 = (b'_2, L'_2) \in \mathscr{L}'$, si T_1 et T'_2 sont des éléments de $\mathscr{T}$, par le Théorème II.4 de [16], on a

$$\begin{aligned} q_{(c_0, c'_0)}(x) &\leqq E_x^{b_1} \int_0^{T_1} e^{-pt} L_1(x_t)\, dt + E_x^{b_1} e^{-pT_1} (q'_{(c_0, c'_0)} + h)(x_{T_1}) \\ q'_{(c_0, c'_0)}(x) &\leqq E_x^{\prime b'_2} \int_0^{T_2} e^{-p't} L'_2(x_t)\, dt + E_x^{\prime b'_2} e^{-p'T_2} (q_{(c_0, c'_0)} + h')(x_{T_2}). \end{aligned} \tag{3.21}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} q_{(c_0, c'_0)}(x) \leqq E_x^{b_1} \Bigg[\int_0^{T_1} e^{-pt} L(x_t)\, dt + e^{-pT_1} \Bigg(h(x_{T_1}) \\ + E_{x_{T_1}}^{\prime b'_2} \left(\int_0^{T_2} e^{-p't} L'_2(x_t)\, dt + e^{-p'T_2} (q_{(c_0, c'_0)} + h')(x_{T_2}) \right) \Bigg) \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.22}$$

On peut naturellement remplacer c_1 par c_3, c'_2 par c'_4 dans (3.21)–(3.22). On itère alors l'inégalité (3.22), et on obtient une inégalité du type (3.22) avec une chaîne de longueur 4, puis 6, puis $2n$, i.e.

$$\begin{aligned} &q_{(c_0, c'_0)}(x) \\ &\quad \leqq E_x^{b_1} \Bigg[\int_0^{T_1} e^{-pt} L_1(x_t) + e^{-pT_1} \Bigg(h(x_{T_1}) + E_{x_{T_1}}^{\prime b'_2} \int_0^{T_2} e^{-p't} L'_2(x_t)\, dt \\ &\quad + e^{-p'T_2} \Bigg(h'(x_{T_2}) + E_{x_{T_2}}^{b_3} \int_0^{T_3} e^{-pt} L_3(x_t)\, dt + \ldots \\ &\quad + E_{x_{T_{2n-1}}}^{\prime b'_{2n}} e^{-pT_{2n}} (q_{(c_0, c'_0)} + h')(x_{T_{2n}}) \Bigg) \Bigg) \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Le membre de droite de (3.23) croît naturellement avec n. Or $h \geqq 2\beta$, $q_{(c_0, c'_0)} \geqq 0$ et $h' \geqq 0$. De plus, le dernier terme du deuxième membre de (3.23) reste borné.

Soit μ_1 la mesure sur R^d associée à $Q_x^{T_1}$, μ_2 la mesure associé à $Q_x^{T_1} Q'^{T_2\circ\theta T_1}_{x_{T_1}}$ etc ... Si la limite du membre de droite de (3.23) est finie, on a

$$\sum_0^{+\infty} \mu_{2i+1}(1) < +\infty \tag{3.24}$$

et comme $\mu_{2i+1} \overset{Q'^{b'_{2i+2}}}{<} \mu_{2i+2}$, on a

$$\sum_1^{+\infty} \mu'_{2i}(1) < +\infty. \tag{3.25}$$

Alors

$$E_x^{b_1} e^{-pT_1} E'^{b'_2}_{x_{T_1}} e^{-p'T_2} \dots E'^{b'_{2n}}_{x_{T_{2n-1}}} e^{-pT_{2n}} (q_{(c_0, c'_0)} + h')(x_{T_{2n}}) \to 0. \tag{3.26}$$

On obtient bien (3.19). On a naturellement le résultat correspondant pour $q'_{(c_0, c'_0)}$. □

Les fonctions $q_{(c_0, c'_0)}$ et $q'_{(c_0, c'_0)}$ sont donc des fonctions fixes, ne dépendant pas du point fixe particulier (c_0, c'_0). On les note désormais q et q'. De même les ensembles $A^{(c_0, c'_0)}$ et $B^{(c_0, c'_0)}$ sont notés maintenant A et B. On a ainsi

$$\begin{aligned} A &= (q - q' = h) \\ B &= (q' - q = h'). \end{aligned} \tag{3.27}$$

c) Le cas convexe: caractérisation des optimums

Par hypothèse, on a

$$q(x) = \inf_{c \in \mathscr{L}, T \in \mathscr{T}} E_x^b \int_0^T e^{-pt} L(x_t)\, dt + E_x^b e^{-pT} (h + q')(x_T), \tag{3.28}$$

$$q'(x) = \inf_{c' \in \mathscr{L}', T' \in \mathscr{T}} E'^{b'}_x \int_0^{T'} e^{-p't} L(x_t)\, dt + E'^{b'}_x e^{-p'T'} (h' + q)(x_{T'}). \tag{3.28'}$$

On en déduit immédiatement:

Proposition 3.2. *Pour que* (c_0, c'_0) *vérifie* (3.17), *il faut et il suffit que* c_0 *réalise* l'inf *dans* (3.28) *et que* c'_0 *réalise* l'inf *dans* (3.28').

Preuve. Nous avons vu que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Si c_0 et c'_0 réalisent l'inf dans (3.28) et (3.28'), on a

$$\begin{aligned} V_{c_0} - q &= R^{b_0}(V_{c_0} - h - q') \\ V'_{c'_0} - q' &= R'^{b'_0}(V'_{c'_0} - h' - q). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Par le Théorème d'unicité 2.5, on en déduit que

$$q = q_{(c_0, c'_0)}\; q' = q'_{(c_0, c'_0)}. \tag{3.30}$$

On en déduit immédiatement que (c'_0, c'_0) vérifie (3.17). □

Soit λ une mesure de probabilité sur R^d équivalente à la mesure de Lebesgue. On définit les mesures λ et λ' par

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(\phi)&=E^0_{\lambda}\int_0^{D_A} e^{-pt}\,\phi(x_t)\,dt\\ \tilde{\lambda}'(\phi)&=E'^0_{\lambda}\int_0^{D_B} e^{-p't}\,\phi'(x_t)\,dt.\end{aligned}\tag{3.31}$$

On a alors le résultat essentiel suivant:

Théorème 3.3. *Il existe une fonction borélienne H (resp. H') définie sur R^d à valeurs dans R^d telle que pour que (c_0, T) (resp. (c'_0, T')) réalise l'*inf *dans* (3.28) (*resp.* (3.28′)), *on ait*

a) $$L_0(x)+\langle H(x),\sigma^{-1}(x)\,b_0(x)\rangle=\inf_{(\tilde{b},\tilde{L})\in K(x)}(\tilde{L}+\langle H(x),\sigma^{-1}(x)\,\tilde{b}\rangle)\;\tilde{\lambda}\text{ p.p.}\tag{3.32}$$
(*resp.*
$$L'_0(x)+\langle H'(x),\sigma^{-1}(x)\,b'_0(x)\rangle=\inf_{(\tilde{b}',\tilde{L}')\in K'(x)}(\tilde{L}'+\langle H'(x),\sigma^{-1}(x)\,\tilde{b}'\rangle)\;\tilde{\lambda}'\text{ p.p.}).\tag{3.32′}$$

b) T(*resp.* T') *est porté par* A (*resp.* B).

c) T(*resp.* T') *est* $\leqq D_{A_{c_0}}$ (*resp.* $D_{B_{c'_0}}$) *où* A_{c_0} (*resp.* $B_{c'_0}$) *est le support fin de la fonctionnelle additive continue engendrant la fonction-Q^{b_0} p-excessive* (*resp.* $Q'^{b'_0}$ *p'-excessive*) *régulière* $V_{c_0}-q$ (*resp.* $V'_{c'_0}-q'$).

Preuve. C'est le Théorème II.5 de [16]. □

d) Le cas général: existence d'un optimum

Nous ne définirons pas formellement les problèmes d'optimisation que nous résolvons dans le cas général. Il s'agit naturellement de minimiser pour tous les $x\in R^d$ simultanément les deux expressions

$$\begin{aligned}&E^{b_1}_x\int_0^{T_1} e^{-pt}L_1(x_t)\,dt+e^{-pT_1}\Big(h(x_{T_1})\\ &\quad+E'^{b'_2}_{x_{T_1}}\int_0^{T_2} e^{-p't}L'_2(x_t)\,dt+e^{-p'T_2}(h'(x_{T_2})+\ldots)\Big).\end{aligned}\tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}&E'^{\tilde{b}'_1}_x\int_0^{\tilde{T}_1} e^{-p't}\tilde{L}'_1(x_t)\,dt+e^{-p'\tilde{T}_1}\Big(h'(x_{\tilde{T}_1})\\ &\quad+E^{\tilde{b}_2}_{x_{\tilde{T}_1}}\int_0^{\tilde{T}_2} e^{-pt}\,\tilde{L}_2(x_t)\,dt+e^{-p\tilde{T}_2}(h(x_{\tilde{T}_2})+\ldots)\Big)\end{aligned}\tag{3.33′}$$

avec $c_1,\tilde{c}_2,c_3,\tilde{c}_4,\ldots\in\mathscr{L}$, $\tilde{c}'_1,c'_2,\tilde{c}'_3,c'_4,\ldots\in\mathscr{L}'$, $T_1,\tilde{T}_1,T_2,\tilde{T}_2\ldots\in\mathscr{T}$, quand K et K' ne sont pas nécessairement à valeurs convexes.

On ne fait donc plus d'hypothèse de convexité sur K et K'.

On a le résultat final:

Théorème 3.4. *Il existe des fermés A et B et $(c_0, c'_0) \in \mathscr{L} \times \mathscr{L}'$ tels que si on pose*

$$\begin{aligned} & c_1 = \tilde{c}_2 = c_3 = \tilde{c}_4 = \ldots = c_0 \\ & \tilde{c}'_1 = c'_2 = \tilde{c}'_3 = c'_4 = \ldots = c'_0 \\ & T_1 = \tilde{T}_2 = T_3 = \ldots = D_A \\ & \tilde{T}_1 = T_2 = \tilde{T}_3 = \ldots = D_B \end{aligned} \tag{3.34}$$

(3.33) *et* (3.33′) *sont minimisés pour tous les $x \in R^d$ simultanément.*

Preuve. Soit $\hat{K}(x)$ et $\hat{K}'(x)$ les enveloppes fermées convexes de $K(x)$ et $K'(x)$. Par le corollaire 3.3 de [35], $\hat{K}$ et $\hat{K}$ sont des multiplications boréliennes. Soit $\hat{\mathscr{L}}$ et $\hat{\mathscr{L}}'$ les classes de sections boréliennes de $\hat{K}$ et $\hat{K}'$ pour la mesure de Lebesgue. On peut alors résoudre les problèmes d'optimisation relativement à $\hat{\mathscr{L}}$ et $\hat{\mathscr{L}}$.

Soit H et H' les fonctions définies au Théorème 3.3 associées à ce nouveau problème. Par le Théorème 3.3, pour que $(c_0, c'_0) \in \hat{\mathscr{L}} \times \hat{\mathscr{L}}'$ réalise l'inf dans (3.28) et (3.28′), il faut et il suffit que (3.32) et (3.32′) soient vérifiées. Comme $K(x)$ et $\hat{K}(x)$ (resp. $K'(x)$ et $\hat{K}'(x)$) ont les mêmes points extrémaux, par le Théorème 2 de [35], on peut trouver $(c_0, c'_0) \in \mathscr{L} \times \mathscr{L}'$ vérifiant (3.28) et (3.28′). (c'_0, c'_0) est donc optimal sur $\hat{\mathscr{L}} \times \hat{\mathscr{L}}'$ et à fortiori optimal sur $\mathscr{L} \times \mathscr{L}'$. □

e) Le cas contraint

Soit A et B deux fermés de R^d disjoints ou égaux. Dans (3.33) et (3.33′), on peut demander que les T_{2i+1}, $\tilde{T}_{2i}$ soient portés par A et les T_{2i}, $\tilde{T}_{2i+1}$ par B. On a alors deux types de résultats:

a) Dans le cas général, on doit encore demander que K et K' soient à valeurs dans $R^d \times R^+$ et que h et h' soient continues bornées et telles que $h \geqq 2\beta > 0$, $h' \geqq 0$.

Dans (3.13), on remplace $R^{\bar{b}}$ et $R'^{\bar{b}'}$ par $R^{\bar{b}} 1_A$ et $R'^{\bar{b}'} 1_B$. Le résultat de dépendance continue du Théorème 2.8 permet alors de démontrer l'équivalent de la Proposition 3.1 et du Théorème 3.1, et d'obtenir un résultat d'existence.

b) Si $d(A, B) > 0$, K et K' peuvent être pris à valeurs dans $R^d \times R$ et h et h' sont des fonctions continues bornées quelconques. Par le Théorème 2.9 et la remarque qui le suit, les résultats de dépendance continue restent vrais sous ces hypothèses. On poursuit la démonstration comme précédemment.

Dans le cas a) comme dans le cas b), apparaissent au lieu de fonctionnelles additives continues, des fonctionnelles additives continues à gauche. On se référera à [16] pour leur utilisation dans les problèmes de contrôle.

f) Extensions

On peut établir tous les résultats précédents en supposant qu'on arrête le processus sur un fermé C sans points irréguliers pour les deux classes de processus qu'on fait alterner. Il faut pour cela réétablir tous les résultats de [13] et le Théorème VII.1 de [14]. On utilise pour cela la compacité étroite de $\{\mu \geqq 0;\ \varepsilon_x \overset{b}{<} \mu \overset{b}{<} \mu_{D_C}\}$ (resp. $\{\mu' \geqq 0;\ \varepsilon_x \overset{b'}{<} \mu' \overset{b'}{<} \mu_{D_C}\}$) où μ_{D_C} est la mesure associée au temps d'arrêt D_C.

2. Contrôle impulsionnel classique

Nous allons traiter un cas simple de contrôle impulsionnel. Tous les autres cas peuvent se traiter de la même manière. Ce cas est inspiré de Bensoussan-Lions [3–10] et de Lions [23]. Pour les applications de cet exemple, nous renvoyons à Lions [23].

On reprend les hypothèses de la section 3.1 sur a, b, p. On se donne également une direction priviligiée e_1 dans R^d. Au lieu de faire alterner deux diffusions, on va faire alterner une diffusion et un processus de translation uniforme à la vitesse 1 par rapport à une variable de temps muette τ. Cette translation est ainsi naturellement équivalente à une impulsion. De plus pour éviter des impulsions infinies, on restreindra le domaine des impulsions possibles de manière à le rendre compact.

a) Définition de R'

Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de R^d. H est le demi-espace $(x_1 \geqq 0)$. x'désigne le processus de translation uniforme dans la direction e_1, jusqu'à l'instant D_H où il atteint le demi-espace H. Il reste alors un temps aléatoire exponentiellement distribué en x_{D_H}, et rejoint alors le cimetière δ (qui est aussi le cimetière du sous-processus de Q^b associé à e^{-pt}). On vérifie alors immédiatement que x' est un processus de Markov fellérien. E'_x est l'opérateur d'espérance associé à x' quand $x'_0 = x$.

K' est le cône des fonctions x' fortement surmédianes. L'opérateur de réduite relativement à K' s'écrit:

$$\begin{aligned} R'k &= k^+(x) && \text{si } x_1 \geqq 0 \\ &\sup_{\tau \leqq -x_1} k^+(x+\tau e_1) && \text{si } x_1 < 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Si k est continue bornée (resp. s.c.s. bornée), $R'k$ est trivialement continue bornée (resp. s.c.s. bornée). x' vérifie donc les hypothèses équivalentes du Théorème 1 de l'Appendice.

Le processus x' nous permettra essentiellement de donner une interprétation probabiliste de l'opérateur R', et de nous ramener à la situation étudiée à la section 2.

b) Le schéma itératif

Soit g et g' deux fonctions continues bornées telles qu'il existe $\tilde{f}Q^b$ p-excessive continue bornée, $\tilde{f}'$ x'-excessive continue bornée et $\beta > 0$ tels que

$$g + \beta \leqq \tilde{f} - \tilde{f}' \leqq -g' - \beta \tag{3.36}$$

(dans les applications $\tilde{f}'$ sera constante).

On considère le schéma itératif de la section 2. On peut alors appliquer le Théorème 2.4: (f, f') est un couple de fonctions continues bornées. Le Théorème 2.5 s'applique également. On a l'équivalent du Théorème 2.6, où on ne fait naturellement varier que b^n, g^n et g'^n: la démonstration en est identique. On obtient aussi l'analogue des résultats de la section 2.7.

c) Un exemple de gestion des stocks de Bensoussan-Lions

Soit K une multiplication borélienne définie sur R^d à valeurs dans $R^d \times R^+$, qu'on suppose non vides, compactes et uniformément bornées. $\mathscr{L}$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour la mesure de Lebesgue des sections boréliennes de K. On munit $\mathscr{L}$ de la topologie $\sigma(L_\infty(R^d), L_1(R^d))$.

h et h' sont deux fonctions continues bornées telles qu'il existe deux réels α et α' pour lesquels

$$h \leqq \alpha < \alpha' \leqq h'. \tag{3.37}$$

Soit λ une mesure >0 finie. Pour $c=(b,L)$, on considère le critère

$$E_\lambda^b\left[\int_0^{T_1} e^{-pt} L(x_t)\,dt \right.$$
$$\left. + e^{-pT_1}\left(-h(x_{T_1}) + h'(x_{T_2}) + E_{x_{T_2}}^b\left(\int_0^{T_3} e^{-pt} L(x_t)\,dt + e^{-pT_3}(\ldots)\right)\right)\right] \tag{3.38}$$

où x coïncide avec Q^b entre l'instant 0 et l'instant T_1, passe en $x_{T_2} = x_{T_1} + \tau e_1 (\tau \geqq 0)$, où T_2 est un temps fictif, coïncide avec Q^b entre T_2 et T_3 etc... On demande de plus que $x_{1_{T_1}}, x_{1_{T_2}}, x_{1_{T_3}} \ldots$ soient $\leqq 0$, i.e. qu'on ne puisse appliquer d'impulsions que dans la région $(x_1 \leqq 0)$.

Le passage de $x_{T_{2i-1}}$ à $x_{T_{2i}}$ est ici déterministe et ne peut s'accompagner d'un meurtre. Comme le processus considéré en a) et b) peut mourir, on doit prendre des précautions élémentaires.

Remarquons tout d'abord que (3.38) a bien un sens. En effet comme $h'(x_{T_{2i}}) - h(x_{T_{2i-1}}) \geqq 0$, on ne somme que des termes $\geqq 0$. On pose

$$\begin{aligned} \tilde{g}_c &= V_c + h \\ \tilde{g}'_c &= -V_c - h', \\ \beta &= \frac{\alpha' - \alpha}{2}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Alors

$$\tilde{g}_c + \beta \leqq V_c + \frac{\alpha' + \alpha}{2} \leqq -\tilde{g}'_c - \beta \tag{3.40}$$

et les conditions de 2.5 sont vérifiées. Toutefois comme $\tilde{g}'_c$ peut être $\leqq 0$, une application brutale de 2.5 conduirait à tuer le processus pendant l'impulsion, ce qui est absurde. Soit donc M un réel tel que, pour tout $c \in \mathscr{L}$, $M \geqq V_c + h'$. On pose alors

$$\begin{aligned} g_c &= V_c + h - M \\ g'_c &= -V_c - h' + M. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Alors $g'_c \geqq 0$. Si on pose

$$\begin{aligned} \tilde{f}_c &= V_c \\ \tilde{f}'_c &= M - \left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.42}$$

on a

$$g_c+\beta \leqq \tilde{f}_c-\tilde{f}'_c \leqq -g'_c-\beta. \tag{3.43}$$

Si $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \ldots$ sont les mesures associées à $x_{T_1}, x_{T_2}, \ldots, x_{T_n}$, (3.38) s'écrit

$$\begin{aligned}\langle \lambda, V_c\rangle - \langle \mu_1, \tilde{f}_c\rangle - \sum_1^{+\infty} \langle \mu_{2i+1}-\mu_{2i}, \tilde{f}_c\rangle - \sum_1^{+\infty} \langle \mu_{2i}-\mu_{2i-1}, \tilde{f}'_c\rangle \\ - \sum_0^{+\infty} \langle \mu_{2i+1}, g_c-\tilde{f}_c+\tilde{f}'_c\rangle - \sum_1^{+\infty} \langle \mu_{2i}, g'_c-\tilde{f}'_c+\tilde{f}_c\rangle.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Or pour $c \in \mathscr{L}$ fixé, par la Proposition 2.6, l'inf en $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ de (3.44) est égal à

$$\langle \lambda, V_c - f_c\rangle \tag{3.45}$$

où (f_c, f'_c) est la solution du système associé à (g_c, g'_c, Q^b, x').

En effet, comme g'_c est $\geqq 0, f_c+g'_c$ est aussi $\geqq 0$. Pour le processus x' le temps d'atteinte de $(f'_c=f_c+g'_c)$ est donc toujours $<+\infty$, et dans l'alternance optimale des $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n \ldots$ telles que $\lambda < \mu_1 \overset{\prime}{<} \mu_2 < \ldots$, où on accepte de tuer x' – ce qui est le cas à la section 3.2b), on peut en fait ne pas le tuer. En résolvant le problème de contrôle alternatif au sens de 3.2. b) pour c fixé, on résoud bien le problème de minimisation de (3.38) pour c fixé. On vérifiera d'ailleurs trivialement que si on remplace M par $M' \geqq M$, f_c ne change (heureusement!) pas.

On pose

$$\begin{aligned} q_c &= V_c - f_c \\ q'_c &= -f'_c. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Alors, comme

$$\begin{aligned} & f_c \leqq V_c \\ & f'_c \leqq M-\alpha \\ & V_c+h-M \leqq f_c-f'_c \leqq V_c+h'-M, \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} & V_c \geqq q_c \geqq -0 \\ & 0 \geqq q'_c \geqq -M+\alpha \\ & M-h' \leqq q_c-q'_c \leqq M-h. \end{aligned} \tag{3.48}$$

On procède alors à la section 3.1.

a) On suppose K à valeurs convexes. $\mathscr{L}$ est alors compact.
Pour $(c=(b,L), \tilde{c}=(\tilde{b},\tilde{L})) \in \mathscr{L} \times \mathscr{L}$, on pose

$$q_c^{\tilde{c}} = V_{\tilde{c}} - R^{\tilde{b}}(V_{\tilde{c}} - q'_c + h - M). \tag{3.49}$$

On remarque que $q_c^c = q_c$. On pose également

$$\Gamma_c = \{\tilde{c} \in \mathscr{L};\, q_c^{\tilde{c}} = \inf_{c^* \in \mathscr{L}} q_c^{c^*}\}. \tag{3.50}$$

On vérifie encore que Γ est une multiplication à valeurs non vides convexes fermées, qui est s.c.s. Elle a donc un point fixe. On a ainsi l'équivalent du Théorème 3.1: il existe $c_0 \in \mathscr{L}$ tel que si $\tilde{c} \in \mathscr{L}$

$$q_{c_0}^{c_0} = q_{c_0} \leqq q_{c_0}^{\tilde{c}}. \tag{3.51}$$

On montre alors l'équivalent du Théorème 3.2. On peut donc remplacer q_{c_0}, q'_{c_0} par q, q'. On pose

$$\begin{aligned} A &= (q = q' - h + M) \\ B &= (q' = q + h' - M). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Remarquons ici que

$$\begin{aligned} q'(x) = & \inf_{0 \leqq \tau \leqq -x_1} (q + h')(x + \tau e_1) - M \qquad \text{si } x_1 \leqq 0 \\ & q + h' - M \qquad \text{si } x_1 > 0 \end{aligned} \tag{3.53}$$

ce qui implique que $q' + M$ ne dépend pas de M. A et B sont donc des fermés ne dépendant pas de M (à condition naturellement que M soit choisi assez grand). De plus $(x_1 \geqq 0) \subset B$, et donc $A \subset (x_1 < 0)$, ce qui montre bien qu'on a satisfait aux contraintes.

b) Dans le cas général, on fait plus d'hypothèse de convexité sur K. On résoud alors le problème comme au Théorème 3.5.

d) Le cas où h' est non bornée

Au lieu de borner la taille des impulsions en leur imposant de faire rester le processus dans le demi-espace $(x_1 \leqq 0)$, on peut supposer que h' est une fonction continue ne dépendant que de x_1, croissante avec x_1 et telle que $\lim_{x_1 \to +\infty} h'(x_1) = +\infty$. On conserve les autres hypothèses.

On se ramène en fait au cas précédent. On procède en effet de manière heuristique.

Si q_c est la fonction cout de ce problème, on a encore

$$0 \leqq q_c \leqq V_c. \tag{3.54}$$

Si $q'_c(x) = \inf_{\tau \geqq 0} (q_c + h')(x + \tau e_1)$, comme h' croît avec x_1, on a

$$q'_c(x) \geqq h'(x_1). \tag{3.55}$$

Or l'ensemble A sur lequel on donne les impulsions est défini par

$$A = (q_c = q'_c - h). \tag{3.56}$$

Comme q_c et h sont uniformément bornées, de (3.55), on tire que A est à coupes x_1 uniformément bornées à droite, i.e. la fonction x_1 est bornée supérieurement sur A. Soit B l'ensemble

$$B = (q'_c = q_c + h'). \tag{3.57}$$

Comme $h'(x_1)\uparrow +\infty$ quand $x_1 \to +\infty$, si $x\in A$, on peut trouver $y=x+\tau e_1 \in B$ avec $\tau \geqq 0$ tel que $q_c'(x)=q_c'(y)$ et donc

$$q_c(x)=q_c'(y)\, h(x). \tag{3.58}$$

Par le même argument que précédemment, on en déduit que la partie de B qui nous intéresse – i.e. celle qu'on atteint à partir de A – est x_1 uniformément bornée à droite. On peut donc trouver γ qu'on détermine ainsi a priori tel que A et la partie intéressante de B soit inclus dans $(x_1 \leqq \gamma)$. On modifie alors h' en $\tilde{h}'$

$$\begin{aligned}\tilde{h}'(x)&=h'(x_1) &&\text{si } x_1 \leqq \gamma\\ &=h'(\gamma) &&\text{si } x_1>\gamma.\end{aligned} \tag{3.59}$$

On résoud alors le problème associé à $(K, h, \tilde{h}')$ et à l'hyperplan $(x_1=\gamma)$ comme précédemment, et on trouve a posteriori qu'on a en fait résolu le problème initial.

e) Le cas contraint

On peut mettre des contraintes sur le point de départ des impulsions et sur leur point d'arrivée. Par exemple si on contraint $x_{T_1}, x_{T_2}, x_{T_3}\dots$ à être portés par $(x_1 \leqq 0)$, on doit remplacer les opérateurs R et R' par $R 1_{(x_1\leqq 0)}$ et $R' 1_{(x_1 \leqq 0)}$. Dans ce cas particulier, on retrouve la même solution qu'à la section 3.2. c). En effet, pour $c\in\mathscr{L}$, on vérifie que les fonctions

$$\begin{aligned}&\hat{f}_c=f_c\\ &\hat{f}_c'=1_{x_1\leqq 0}\, f_c'\end{aligned} \tag{3.60}$$

est le couple unique de fonctions s.c.s. bornées solution de

$$\begin{aligned}&\hat{f}_c=R^b\, 1_{(x_1\leqq 0)}(\hat{f}_c'+g_c)\\ &\hat{f}_c'=R'\, 1_{x_1\leqq 0}(\hat{f}_c+g_c').\end{aligned} \tag{3.61}$$

On peut naturellement mettre des contraintes plus substantielles. On peut par exemple se donner deux fermés $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ inclus dans $(x_1 \leqq 0)$ tels que

$$\tilde{A}\subset\{\tilde{B}-\lambda e_1, \lambda\geqq 0\} \tag{3.62}$$

et imposer au début de l'impulsion d'être dans $\tilde{A}$ et à sa fin d'être dans $\tilde{B}$ (la condition (3.62) permet encore de ne pas tuer x' pendant l'impulsion). Comme au Théorème 2.7, on vérifie que le problème d'optimisation – *pour c fixé* – a une solution. Comme au Théorème 2.9, on peut remplacer la condition (3.37) par la condition $d(\tilde{A}, \tilde{B})>0$ pour résoudre le problème d'optimisation à c fixé.

Comme en général, si h est continue bornée sur B, $R' 1_B h$ est s.c.s. sur R^d, mais pas nécessairement continue sur B et sur ${}^cB$, on doit introduire des hypothèses supplémentaires sur A et B pour résoudre le problème d'optimisation quand c peut varier, de manière à se ramener à une situation semblable à la situation étudiée au corollaire du Théorème 2.7 ou au Théorème 2.8.

On peut aussi demander que dans l'example 3.2.c), les impulsions soient de taille $\leqq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Pour traiter le problème par les techniques précédentes, on plonge R^d dans R^{d+1}.

On définit alors trois processus x, x', x'' qu'on fait alterner dans cet ordre.

Si $(x, y) \in R^{d+1}$ le proxessus x_t de point de départ (x, y) est la diffusion $(Q_x^{b'}, y)$ tuée par l'exponentielle e^{-pt}. x' est le processus de translation dans la direction $e_1 + e_{d+1}$ arrêté sur l'hyperplan $(x_{d+1} = \varepsilon)$. x'' est le processus de translation uniforme dans la direction $-e_{d+1}$ arrêté sur l'hyperplan $(x_{d+1} = 0)$. On ne met aucune contrainte sur les temps de transition de x vers x' ou de x' vers x''. Le temps de transition de x'' vers x doit être porté par $(x_{d+1} = 0)$.

g et g' sont prolongées à R^{d+1} par $g(x, y) = g(x), g'(x, y) = g'(x)$.

On résoud le système:

$$\begin{aligned}
&f = R^b(f' + g)\\
&f' = R'(f'' + g') \qquad\qquad (3.63)\\
&f'' = R'' 1_{\{x_{d+1}=0\}} f.
\end{aligned}$$

En adaptant les techniques précédentes, on vérifie que ce problème a une solution continue. On fait alors varier b comme précédemment. La fonction coût du problème est égale à $f(x, 0)$.

Appendice

L'objet de cet appendice est d'établir les résultats techniques nécessaires à l'obtension des résultats des sections 2.5 et 2.7.

E désigne un espace métrisable localement compact dénombrable à l'infini, δ un point cimetière, x un processus de Hunt à valeurs dans $E \cup \{\delta\}$ à durée de vie finie ζ.

$\mathscr{C}^0$ est l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

$\bar{\mathscr{C}}$ est l'ensemble des fonctions continues bornées sur E, $\bar{E}$ est le compactifié de Stone-Cech de E, $\mathscr{M}^b$ l'ensemble des mesures bornées sur E, $\bar{\mathscr{M}}$ le dual de $\bar{\mathscr{C}}$ i.e. l'ensemble des mesures bornées régulières sur $\bar{E}$ (voir la Proposition II.7.5 de [33]).

Proposition 1. *Soit λ une mesure $\geqq 0$ finie sur E. Alors $B_\lambda = \{\mu \in \mathscr{M}^b \geqq 0,\ \lambda < \mu\}$ est étroitement compact.*

Preuve. Soit P_λ la mesure associée au processus x de mesure d'entrée λ. Soit V l'ensemble des processus continus X, tels que $E(\sup|X_t|) < +\infty$, V' son dual. Par les résultats de [40], l'ensemble C des processus optionnels $\geqq 0$ A croissants continus à droite adaptés et $\leqq 1$ est $\sigma(V', V)$ compact pour la dualité $(A, X) \to E \int_0^{+\infty} X\,dA$. De plus, comme x est un processus de Hunt, si $g \in \bar{\mathscr{C}}$, la projection prévisible du processus $g(x_t)$ est égale à $g(x_t)_-$. Par [40], l'application $A \to E \int_0^{+\infty} g(x_t)\,dA$ est continue sur C. Enfin, par le Théorème de Rost [36], B_λ est précisément l'image de C par l'application ψ qui à A associe μ défini par

$$\langle \mu, g \rangle = E \int_0^{+\infty} g(x_t)\, dA \tag{1}$$

où $g \in \bar{\mathscr{C}}$. ψ étant continue de C dans B_λ muni de la topologie $\sigma(\mathscr{M}^b, \bar{\mathscr{C}})$, B_λ est bien étroitement compact. □

x désigne maintenant un processus de Feller à valeurs dans $E \cup \{\delta\}$, à durée de vie finie, dont le noyau potentiel V est fini, i.e. $V1 < +\infty$. $\bar{K}$ est l'ensemble des fonctions fortement surmédianes appartenant à $\bar{\mathscr{C}}$. Si λ et μ sont dans $\bar{\mathscr{M}}$, on écrit $\lambda < \mu$ si pour tout $f \in \bar{K}$, $\langle \mu, f \rangle \leqq \langle \lambda, f \rangle$.

Remarquons que si λ et μ sont dans $\mathscr{M}^b$, et si $\lambda < \mu$, alors $\lambda < \mu$ au sens de la définition 2.1. En effet si $\phi \in \mathscr{C}_0^+$, $V\phi \in \mathscr{C}_0$ et donc $\langle \mu, V\phi \rangle \leqq \langle \lambda, V\phi \rangle$. Pour toute fonction universellement mesurable bornée ϕ, on en déduit $\langle \mu, V\phi \rangle \leqq \langle \lambda, V\phi \rangle$. Or par [26] IX T64, toute fonction excessive f bornée est limite croissante d'une suite de potentiels de fonctions universellement mesurables $\geqq 0$. Donc $\langle \mu, f \rangle \leqq \langle \lambda, f \rangle$, et par [1] et [36], pour tout $f \in K$ bornée, $\langle \mu, f \rangle \leqq \langle \lambda, f \rangle$ et ainsi $\lambda < \mu$.

Théorème 1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

a) Pour tout $h \in \bar{\mathscr{C}}$, $Rh \in \bar{\mathscr{C}}$.

b) Pour tout $x \in E$, $\{\mu \in \mathscr{M}^b,\ \mu \geqq 0;\ \varepsilon_x < \mu\} = \{\mu \in \bar{\mathscr{M}};\ \mu \geqq 0;\ \varepsilon_x < \mu\}$.

*c) Pour toute fonction h s.c.s. bornée sur $\bar{E}$, Rh est s.c.s. (et est l'*inf *des éléments de $\bar{K} \geqq h$ sur $\bar{E}$).*

d) Si L est un compact de $E, \{\mu \in \mathscr{M}^b;\ \mu \geqq 0;\ \exists x \in L,\ \varepsilon_x < \mu\}$ est étroitement compact.

e) Pour tout fermé F de E, $P_x(D_F < \zeta)$ est une fonctions s.c.s. sur E.

Preuve. a) ⇒ b): Par (2.1) on sait que si g est borélienne bornée,

$$Rg(x) = \sup_{\substack{\mu \geqq 0 \in \mathscr{M}^b \\ \varepsilon_x < \mu}} \langle \mu, g \rangle. \tag{2}$$

Si $g \in \bar{\mathscr{C}}$, $Rg \in \bar{\mathscr{C}}$, et si μ est un élément $\geqq 0$ de $\bar{\mathscr{M}}$ tel que $\varepsilon_x < \mu$, on a:

$$Rg(x) \geqq \langle \mu, Rg \rangle \geqq \langle \mu, g \rangle. \tag{3}$$

Donc

$$Rg(x) = \sup_{\substack{\mu \geqq 0 \in \bar{\mathscr{M}} \\ \varepsilon_x < \mu}} \langle \mu, g \rangle. \tag{4}$$

Comme $\{\mu \in \mathscr{M}^b;\ \mu \geqq 0;\ \varepsilon_x < \mu\} \subset \{\mu \in \bar{\mathscr{M}};\ \varepsilon_x < \mu, \mu \geqq 0\}$, et comme chacun de ces deux ensembles est $\sigma(\bar{\mathscr{M}}, \bar{\mathscr{C}})$ compact, comme enfin ils ont même fonction d'appui, ils sont égaux.

b) ⇒ c):

Soit g est s.c.s. bornée sur $\bar{E}$.
Pour $u \in \bar{\mathscr{C}}$, on pose:

$$F_x(u) = \inf_{f \in \bar{K} \geqq g + u \text{ sur } \bar{E}} f. \tag{5}$$

Soit F_x^* la duale de F_x sur $\bar{\mathcal{M}}$. Si μ est $<0, F_x^*(\mu) = +\infty$. Si μ est $\geqq 0$, on a:

$$F_x^*(\mu) = \sup_{\substack{f \geqq g+u \text{ sur } \bar{E} \\ u \in \mathscr{C}}} \langle \mu, u \rangle - f(x) = -\langle \mu, g \rangle + \sup_{f \in \bar{K}} \langle \mu, f \rangle - f(x) \tag{6}$$

et donc

$$F_x^*(\mu) = \begin{cases} -\langle \mu, g \rangle & \text{si } \mu \geqq 0\ \varepsilon_x < \mu \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{7}$$

Comme F_x est bornée sur $\|u\|_{\mathscr{C}} < 1$, par la Proposition 21 de [41]-II.2.10 F_x est continue en 0 et donc

$$F_x(0) = \sup_{\substack{\mu \geqq 0 \in \bar{\mathcal{M}} \\ \varepsilon_x < \mu}} \langle \mu, g \rangle. \tag{8}$$

De (2) et de b), on en déduit que $Rg = F_x(0)$, et donc que Rg est s.c.s.

c) $\Rightarrow$ a): On s'inspire d'un argument de Mokobodzki-Sibony dans [37]. Si $g \in \mathscr{C}$, par c), Rg est s.c.s. Soit $\overline{Rg}$ la régularisée s.c.i. de Rg. $\overline{Rg}$ est $\geqq g$. De plus, si V^p est la résolvante associée à x, on a:

$$pV^p \overline{Rg} = \sup_{h \in \mathscr{C} \leqq Rg} pV^p h \tag{9}$$

et donc, comme x est de Feller, $pV^p \overline{Rg}$ est s.c.i.

Or

$$pV^p \overline{Rg} \leqq pV^p Rg \leqq Rg \tag{10}$$

et donc $pV^p \overline{Rg} \leqq \overline{Rg}$. $\overline{Rg}$ est donc surmédiane par rapport à la résolvante. Sa régularisée excessive $\widehat{\overline{Rg}}$ est encore trivialement $\geqq g$ et donc $Rg \geqq \overline{Rg} \geqq \widehat{\overline{Rg}} \geqq g$. Alors $Rg = \widehat{\overline{Rg}}$, et ainsi $Rg = \overline{Rg}$. Rg est s.c.i. donc continue.

b) $\Rightarrow$ d): L'ensemble $D = \{\mu \in \bar{\mathcal{M}};\ \mu \geqq 0;\ \exists\, x \in L;\ \varepsilon_x < \mu\}$ est $\sigma(\bar{\mathcal{M}}, \bar{\mathscr{C}})$ compact. En effet soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur D. A tout $\mu \in D$ on peut associer $x \in L$ tel que $\varepsilon_x < \mu$ par une application ϕ. Alors $\phi(\mathscr{U})$ est une base d'ultrafiltre sur L, convergeant vers $x \in L$. De plus, comme $\{\mu \in \bar{\mathcal{M}};\ \mu \geqq 0;\ \langle \mu, 1 \rangle \leqq 1\}$ est $\sigma(\bar{\mathcal{M}}, \bar{\mathscr{C}})$ compact, $\mathscr{U}$ converge vers $\mu \in \bar{\mathcal{M}} \geqq 0$. Si $f \in \bar{K}$, on en déduit $\langle \mu, f \rangle \leqq f(x)$, et $\varepsilon_x < \mu$, ce qui implique $\mu \in D$.

d) $\Rightarrow$ c) Soit g s.c.s. bornée. Soit $x_n \to x$ dans E. On peut supposer que tous les x_n appartiennent au même compact L. Comme $\mu \to \langle \mu, g \rangle$ est s.c.s. sur $\{\mu \in \mathcal{M}^b;\ \mu \geqq 0, \varepsilon_{x_n} < \mu\}$ pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}^b, \mathscr{C})$, elle atteint son maximum sur cet ensemble qui est compact en μ_n. Par d), il existe une sous-suite μ_{n_k} convergeant vers $\mu \in \mathcal{M}^b$, et en raisonnant comme précédemment, $\varepsilon_x < \mu$.

Donc $Rg(x) \geqq \langle \mu, g \rangle \geqq \limsup \langle \mu_{n_k}, g \rangle = \limsup Rg(x_{n_k})$. En raisonnant sur toutes les sous-suites de N, on en déduit le résultat.

c) $\Rightarrow$ e): La fonction 1_F est s.c.s., et $R1_F$ est trivialement égale à $P_x(D_F < \zeta)$.

e) $\Rightarrow$ d): On peut supposer que $E=UK_n$, où $\{K_n\}$ est une suite croissante de compacts telle que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$. Si E est compact, b) est trivialement vérifiée et donc d) est vérifiée. Si E n'est pas compact, la suite K_n est infinie. Par le Théorème d'Urysohn, il existe ϕ continue, telle que $\phi \geqq n$ sur $c_{\mathring{K}_n}$.

Comme L est compact, ϕ est bornée sur L. Considérons la fonction s.c.s. $f_n(x)=P_x(D_{c\mathring{K}_n}<\zeta)$. Si $x\in E, D_{c\mathring{K}_n} \to +\infty$ P_x p.s. En effet $\phi(x_{D_{c\mathring{K}_n}}) \geqq n$, et comme $\phi(x_t)$ est processus cadlag, le processus $\phi(x_t)$ est à trajectoires bornées sur tout compact. Comme $\zeta < +\infty P_x$ p.s., la suite de fonctions f_n décroit vers 0.

Par le Théorème de Dini cette suite tend vers 0 uniformément sur L. Comme les f_n sont fortement surmédianes, si $\mu \in \mathcal{M}^b \geqq 0$ est telle que $\varepsilon_x < \mu$ pour $x\in L$, on a:

$$\langle \mu, f_n \rangle \leqq f_n(x) \tag{11}$$

et donc

$$\langle \mu, 1_{cK_{n+1}} \rangle \leqq \langle \mu, 1_{c\mathring{K}_n} \rangle \leqq f_n(x). \tag{12}$$

De la convergence uniforme des f_n vers 0 sur L, on déduit que les éléments de $\{\mu \in \mathcal{M}^b \geqq 0; \exists x \in L, \varepsilon_x < \mu\}$ vérifient un critére de Prohorov. De plus ils sont de norme $\leqq 1$. On en déduit bien e). □

Remarque. Quand E est non compact, si $E \cup \{+\infty\}$ est le compactifié d'Alexandrof de E, et si d est une distance sur E telle que $d(x,y)$ tend vers $+\infty$ si $y \to +\infty$ – par exemple si $\tilde{d}$ est une distance sur E, et si ϕ est la fonction construite précédemment, $d(x,y)=\tilde{d}(x,y)+|\phi(y)-\phi(x)|$ convient – alors e) est équivalente à la condition.

f) Pour tout compact $L \subset E$, $\lim\sup\limits_{n\to+\infty\, x\in L} P_x(\sup\limits_{0\leqq t<\zeta} d(x,x_t)>n)=0$.

f) $\Rightarrow$ d): On a:

$$P_x(\sup_{0\leqq t<\zeta} d(x,x_t)>n)=P_x(D_{cK_n^x}<\zeta)$$

$$\text{où } K_n^x \text{ est le compact } K_n^x=\{y\in E; d(x,y)\leqq n\}. \tag{13}$$

Si $\mu \in \mathcal{M}^b \geqq 0$ est telle que $\varepsilon_x < \mu$, on voit, comme en (11), que

$$\langle \mu, 1_{cK_n^x} \rangle \leqq \langle \mu, P\cdot(D_{cK_n^x}<\zeta) \rangle \leqq P_x(D_{cK_n^x}<\zeta). \tag{14}$$

Pour tout n, il existe trivialement une boule fermée compacte K_n contenant tous les K_n^x quand x parcourt L. De (14), on tire

$$\langle \mu, 1_{cK_n} \rangle \leqq P_x(D_{cK_n^x}<\zeta). \tag{15}$$

Les $\mu \geqq 0$ de $\mathcal{M}^b$ tels que $\varepsilon_x < \mu$ pour $x\in L$ vérifient donc un critère de Prohorov.

e) $\Rightarrow$ f): Si d est le diamètre de L, si $x_0 \in L$, tout K_n^x pour $x\in L$, $n \geqq d$ contient $\mathring{K}_{x_0}^{n-d}$. Donc si $x\in L$, on a:

$$P_x(D_{c\mathring{K}_x^n}<\zeta) \leqq P_x(D_{c\mathring{K}_{x_0}^{n-d}}<\zeta) \tag{16}$$

Comme par e) $P_x(D_{{}^c\mathring{K}^{n-d}_{x_0}} < \zeta)$ est s.c.s. et comme cette suite de fonctions tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, elle tend uniformément vers 0 sur L. □

On remarquera incidemment que le critère d'étroite compacité utilisé dans [13] pour démontrer la continuité de la réduite, qui résulte d'une inégalité de Stroock et Varadhan sur les diffusions [38], qui implique la condition f), est en fait une condition nécessaire de continuité de la réduite.

Références

1. Azéma, J., Meyer, P.A.: Une nouvelle représentation du type de Skorohod, Séminaire de Probabilités n° 8. Lecture Notes in Mathematics **381**, 1–10. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
2. Bensoussan, A., Friedman, A.: Non linear variational inequalities and differential games with stopping times. J. Functional Analysis **16**, 305–352 (1974).
3. Bensoussan, A., Lions, J.L.: Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et applications. C.R. Acad. Sci. Paris **276**, 1189–1192 (1973)
4. Bensoussan, A., Lions, J.L.: Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles d'évolution, C.R. Acad. Sci. Paris **276**, 1333–1338 (1973)
5. Bensoussan, A., Lions, J.L.: Contrôle impulsionnel et contrôle continu. Méthodes des Inéquations quasi-variationnelles non linéaires. C.R. Acad. Sci. Paris **278**, 675–679 (1974)
6. Bensoussan, A., Lions, J.L.: Contrôle impulsionnel et systèmes d'inéquations quasi-variationnelles. C.R. Acad. Sci. Paris **278**, 747–751 (1974)
7. Bensoussan, A., Lions, J.L.: Jeux impulsionnels et inéquations quasi-variationnelles. Colloque IFAC, Phoenix, 1974
8. Bensoussan, A., Lions, J.L.: Propriétés des inéquations quasi-variationnelles décroissantes. Analyse convexe et ses applications. St. Pierre de Chartreuse. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 102, 66–84. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
9. Bensoussan, A., Lions, J.L.: Nouvelles méthodes en contrôle impulsionnel. Appl. Math. Optimization **1**, 289–312 (1975)
10. Bensoussan, A., Lions, J.L.: Temps d'arrêt optimaux et contrôle impulsionnel. Livre en préparation
11. Bensoussan, A., Goursat, M., Lions, J.L.: Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles stationnaires, C.R. Acad. Sci. Paris **276**, 1279–1284 (1973)
12. Bismut, J.M.: Théorie probabiliste du contrôle des diffusions. Mem. Amer. Math. Soc. **4**, **167**, 1–130 (1976)
13. Bismut, J.M.: Dualité convexe, temps d'arrêt optimal et contrôle stochastique. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **38**, 169–198 (1977)
14. Bismut, J.M.: Sur un problème de Dynkin. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **39**, 31–53 (1977)
15. Bismut, J.M.: Probability theory methods in zero-sum stochastic games. SIAM J. Control and Optimization, **15**, 539–545 (1977)
16. Bismut, J.M.: Contrôle stochastique, jeux et temps d'arrêt: Applications de la Théorie probabiliste du potentiel. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **39**, 315–338 (1977)
17. Bismut, J.M.: Control of jump processes and Applications. Bul. Soc. Math. France **106**, 25–60 (1978)
18. Bismut, J.M.: Temps d'arrêt optimal, quasi-temps d'arrêt et retournement du temps. [A paraître aux Ann. Probability]
19. Bismut, J.M., Skalli, B.: Temps d'arrêt optimal, théorie générale des processus et processus de Markov. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **39**, 301–313 (1977)
20. Dellacherie, C.: Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 67. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
21. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et Potentiels. 2° édition, Paris: Hermann 1975
22. Kushner, H.J.: Probability methods for Approximations in stochastic control and for elliptic equations. New-York: Academic Press 1977

23. Lions, J.L.: Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal. Montréal: Presses de l'Université de Montréal 1976
24. Mertens, J.F.: Théorie des processus stochastiques généraux. Application aux surmartingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **22**, 45–68 (1972)
25. Mertens, J.F.: Strongly supermedian functions and optimal stopping. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **26**, 119–139 (1973)
26. Meyer, P.A.: Probabilités et Potentiels. 1° édition. Paris: Hermann 1966
27. Meyer, P.A.: Exposé sur les diffusions à coefficients continus. Séminaire de Probabilités n° **4**, p. 241–282. Lecture Notes in Mathematics n° **124**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
28. Meyer, P.A.: Le schéma de remplissage en temps continu, d'après H. Rost. Séminaire de Probabilités n° 6, 130–150. Lecture Notes in Mathematics n° **258**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
29. Mokobodozki, G.: Séminaire de Théorie du Potentiel n° 3. Lecture Notes in Mathematics. n° **681**, 188–208. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978
30. Mokobodozki, G.: Cônes de potentiels et noyaux subordonnés. Centro Internazionale Mathematico Estive, Stresa (1969)
31. Mokobodozki, G.: Cônes de fonctions et Théorie du Potentiel. Exposés n° 8 et 9. Séminaire de Théorie du Potentiel. Ins. H. Poincaré (1966)
32. Moreau, J.J.: Fonctionnelles convexes. Séminaire d'équations aux dérivées partielles. Collège de France 1966–1967
33. Neveu, J.: Bases mathématiques du calcul des Probabilités. Paris: Masson 1970
34. Rockafellar, R.T.: Convex analysis. Princeton: Princeton University Press 1972
35. Rockafellar, R.T.: Measurable dependence of convex sets and functions on parameters. J. Math. Anal. Appl. **28**, 4–25 (1969)
36. Rost, M.: The stopping distribution of a Markov process. Inventiones Math., **14**, 1–16 (1971)
37. Sibony, D.: Cônes de fonctions et potentiels. Cours de 3° cycle. Faculté des Sciences de Paris (1967–1968)
38. Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: Diffusion processes with continuous coefficients. Comm. Pure Appl. Math., **XXII**, 345–400, 479–530 (1969)
39. Stroock, D.W.: Diffusion processes with Levy generators. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. **32**, 209–244 (1975)
40. Bismut, J.M.: Régularité et continuité des processus. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. **44**, 261–268 (1978)
41. Bourbaki, N.: Eléments de Mathématiques. Espaces vectoriels topologiques. Livre V-Chapitres I et II. Paris: Hermann 1966

Reçu le 1 Janvier 1978; en forme révisée le 19 Septembre 1978