Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 16, 307–320 (1970)

Sur la divisibilité des probabilités dans un groupe topologique*

H. Heyer et A. Tortrat

Paragraphe 1. Introduction

Ce travail est consacré à l'étude des familles $\mathfrak{D} := \mathfrak{D}(G)$ et $\mathfrak{P} := \mathfrak{P}(G)$ des lois décomposables et indécomposables (premières) sur un groupe topologique G. Naturallement il faut que le groupe en général possède des propriétés additionnelles: G sera complètement régulier[1] ou métrisable ou localement compact selon les cas.

Le paragraphe 2 contient des généralités sur les mesures dans les groupes topologiques[1]. Nous donnerons un résumé des notions et des faits bien connus concernant les lois sur un espace topologique arbitraire, sur un groupe topologique et sur un groupe localement compact.

Dans le paragraphe 3 une caractérisation d'une loi décomposable sur G est donnée pour les cas d'un groupe métrisable et d'un groupe localement compact (non nécessairement à base dénombrable). Les démonstrations des deux assertions sont essentiellement différentes.

Quant aux lois premières sur G nos assertions du paragraphe 4 sont basées sur le travail fondamental de Parthasarathy, Rao et Varadhan: $\mathfrak{P}$ est de type G_δ dense ([7]). Que $\mathfrak{P}$ soit dense vient de ce que dans tout espace topologique les lois sont approchées par des lois discrètes premières suivant le raisonnement de [7]. Nous suivrons une voie différente de celle de [7] pour montrer que $\mathfrak{P}$ est un G_δ ne nécessitant pas la séparabilité de G. En fait, il est possible d'affirmer ce résultat à l'aide de la fonction de concentration (de Lévy) ou de la σ-fermeture de l'application de convolution. Ces études sont étendues aux ensembles $\mathfrak{P}_c$ et $\mathfrak{P}_\omega$ des lois premières diffuses sur certains groupes polonais et des lois premières absolument continues pour la mesure de Haar ω sur les groupes localement compacts.

Au paragraphe 5 nous remarquons que chaque loi de $\mathfrak{L}^1(G, \omega)$ décomposable *dans* cet espace, a une densité presque-sûrement semi-continue inférieurement. Nous allons présenter une démonstration assez directe du théorème de Cohen et Hewitt sur la décomposabilité des éléments d'un algèbre de Banach. L'application de ce théorème à l'algèbre $\mathfrak{L}^1 := \mathfrak{L}^1(G, \omega)$ des fonctions ω-intégrables sur G donné montre que dans le cas d'un groupe compact l'ensemble des lois décomposables dans l'ensemble $\mathfrak{M}_\omega = \mathfrak{M}_\omega(G)$ des lois sur G absolument continues par rapport à ω en deux facteurs avec des densités continues, l'une (strictement) positive, est dense dans $\mathfrak{M}_\omega$ au sens de $\mathfrak{L}^1$. Ce résultat généralise le dernier théorème de [3].

* En hommage à Mr. Paul Lévy, initiateur en ce domaine aussi.

[1] Rappelons que tout groupe topologique séparé au sens de Fréchet et muni d'une de ses structures uniformes est complètement régulier.

Paragraphe 2. Généralités sur les mesures dans un groupe topologique

2.1. X espace topologique. Soient X un espace topologique arbitraire, $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(X)$ la tribu borélienne engendrée par les ouverts de X et $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}(X)$ la tribu de Baire engendrée par les préimages $f^{-1}(B)$ des fonctions $f \in \mathfrak{C} := \mathfrak{C}(X)$, espace de Banach des fonctions réelles continues et bornées sur X avec la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|$, pour B borélien dans $\mathbb{R}$.

Si X est parfaitement normal, c'est à dire: X est normal et tout fermé de X est un G_δ, nous avons $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}$. Une mesure $\mu (\geqq 0)$ sur $\mathfrak{B}$ s'appelle *F-régulière* (ou simplement *régulière*), si elle est approchée intérieurement par ses valeurs sur des fermés F de X, c'est à dire: pour tout $B \in \mathfrak{B}$ on a:

$$\mu(B) = \sup \{\mu(F): F \quad \text{fermé} \subset B\}.$$

Une mesure bornée μ sur $\mathfrak{B}$ avec $\mu(X) = 1$ (mesure de probabilité ou simplement loi) est dite *tendue* (suivant les K_ε), s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact K_ε de X tel que $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. μ étant tendue et régulière est aussi *K-régulière*, c'est à dire: μ est approchée intérieurement par ses valeurs sur des compacts de X où:

$$\mu(B) = \sup \{\mu(K): K \text{ compact } \subset B\}$$

pour tout $B \in \mathfrak{B}$.

Dans ce cas on appelle la mesure μ *t-régulière* (Varadarajan). Soit $\mathfrak{A}$ la sous-tribu de $\mathfrak{B}$ engendrée par les fermés qui sont de type G_δ, alors toute loi sur $\mathfrak{B}$ (ou, plus généralement, toute mesure σ-finie sur $\mathfrak{B}$) est régulière sur $\mathfrak{A}$. Supposons X métrisable, séparable et complet (c'est à dire: polonais), alors toute loi sur $\mathfrak{B}$ est K-régulière.

Une famille $(\mu_i)_{i \in I}$ de loi sur $\mathfrak{B}$ est dite *uniformément tendue* (suivant les K_ε), s'il existe un système $(K_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ des compacts de X tel que:

$$\mu_i(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$$

pour tout $i \in I$.

Une fonctionnelle linéaire positive T sur $\mathfrak{C}$ est dite *τ-continue* (ou *σ-continue*), si elle satisfait à la condition suivante: pour toute famille filtrante décroissante (ou suite décroissante) (f_α) dans $\mathfrak{C}$ la relation $f_\alpha \downarrow 0$ implique $T f_\alpha \downarrow 0$. T s'appelle *tendue*, si pour toute famille (f_α) dans $\mathfrak{C}$ les relations $f_\alpha \to 0$ uniformément sur tout compact K de X et $|f_\alpha| \leqq M$ pour les α (M constant) implique $T f_\alpha \to 0$. T est alors τ-continue.

On montre qu'il est équivalent pour T (linéaire positive sur $\mathfrak{C}$) d'être tendue en ce sens: il existe des compacts K_ε de X tels que $0 \leqq f \leqq 1$, $f = 0$ sur K_ε entrainent $T f \leqq \varepsilon$. Toute loi μ tendue sur $\mathfrak{B}$ est telle que $T f = \int f \, d\mu$ est tendue, et inversement à toute T tendue (avec $T 1 = 1$) correspond une mesure μ t-régulière unique (comme ci-dessous, avec la même hypothèse concernant X).

Soit maintenant X complètement régulier. Alors toute fonctionnelle (linéaire et) positive T sur $\mathfrak{C}$ et τ-continue est prolongeable aux fonctions $\mathfrak{B}$-mesurables. On a $T f = \int f \, d\mu$ pour tout f $\mathfrak{B}$-mesurable, avec $\mu(B) = T 1_B$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$, et la mesure μ est régulière et *τ-continue* en sens suivant: pour chaque famille décroissante (F_α) des fermés de X on a:

$$\mu(\lim \downarrow F_\alpha) = \lim \downarrow \mu(F_\alpha).$$

Inversement toute mesure bornée τ-régulière définit une fonctionnelle T sur $\mathfrak{C}$ par $Tf = \int f\,d\mu$ qui est τ-continue. Sur X métrique et séparable toute mesure μ bornée est τ-continue (cf. [6]).

Nous dénoterons les ensembles des lois t-régulières et des lois régulières et τ-continues (c'est à dire τ-régulières) par $\mathfrak{M}^t := \mathfrak{M}^t(X)$ et $\mathfrak{M}^\tau := \mathfrak{M}^\tau(X)$ respectivement.

La *convergence faible* dans l'ensemble $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}(X)$ des mesures bornées est définie par la convergence simple des fonctionnelles $f \to \mu(f)$ sur $\mathfrak{C}$. Soit (μ_α) une famille filtrante dans $\mathfrak{M}$. Alors $\mu_\alpha \to \mu$ (faiblement) équivaut à:

(1) $\liminf \mu_\alpha(O) \geqq \mu(O)$ pour tout ouvert O de X de la forme $f^{-1}[-\infty, a[$, $f \in \mathfrak{C}$, $a \in \mathbb{R}$, ou sans cette restriction si X est normal et μ régulière ou si X est parfaitement normal (en tout cas les $\mu_\alpha(X)$ étant bornés);

aussi bien c'est, sous les mêmes conditions:

(2) $\limsup \mu_\alpha(F) \leqq \mu(F)$ pour tout fermé F de X.

Si X est complètement régulier et μ régulière, (1) implique:

(3) $\limsup \mu_\alpha(K) \leqq \mu(K)$ pour tout compact K de X.

Si (μ_α) est uniformément tendue (3) implique (1) et la mesure limite μ est tendue.

$\mathfrak{M}^\tau(X)$ est faiblement métrisable si et seulement si X est métrisable.

Une famille (μ_α) dans $\mathfrak{M}^t$ est dite *convergente* (faiblement) *uniformément tendue* vers μ, si $\mu_\alpha \to \mu$ faiblement et (μ_α) est une famille uniformément tendue.

Soit X complètement régulier. Toute famille de lois uniformément tendue (suivant des K_ε métrisables) forme, après fermeture, un espace faiblement compact et métrisable (donc séparable et séquentiellement compact). Soient $\mathfrak{E} := \mathfrak{E}(X)$ l'ensemble des mesures ponctuelles et $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(X)$ l'enveloppe convexe de $\mathfrak{E}$. Alors $\mathfrak{E}$ est faiblement homéomorphe à X et $\mathfrak{G}$ est un sous-ensemble faiblement dense de $\mathfrak{M}^t$.

Toutes les notions et la plupart des résultats résumés ici sont contenus dans les mémoires de Le Cam ([5]) et de Varadarajan ([11]).

Rappelons le théorème de Alexandrov-Le Cam: Dans tout X métrisable la convergence d'une suite $\mu_n \in \mathfrak{M}(X)$ sur tout $\mathfrak{C}(X)$, soit $\mu_n f \to Tf$, entraine que $Tf = \int f\,d\mu$, avec $\mu \in \mathfrak{M}$, et (Le Cam) si les μ_n et μ sont tendues, cette convergence est uniformément tendue.

2.2. $X = G$ groupe topologique. Soient G un groupe topologique, μ et ν deux lois tendues sur $\mathfrak{B}$. On peut définir sur $\mathfrak{B}$ le produit de convolution $\mu * \nu$ par:

$$\mu * \nu(B) := \int \nu(x^{-1} B)\,\mu(dx) = \int \mu(B y^{-1})\,\nu(dy)$$

pour tout $B \in \mathfrak{B}$, et on a:

$$\mu * \nu(f) = \int \mu(dx) \int f(x y)\,\nu(dy) = \int \nu(dy) \int f(x y)\,\mu(dx)$$

pour toute fonction $\mathfrak{B}$-mesurable f sur G, en particulier pour tout $f \in \mathfrak{C}$ (les fonctions $x \to \nu(x^{-1} B)$, $x \to \int f(x y)\,\nu(dy)$, $y \to \mu(B y^{-1})$ et $y \to \int f(x y)\,\mu(dx)$ sur G sont alors $\mathfrak{B}$-mesurables). Nous avons $\mu * \nu \in \mathfrak{M}^t$, si $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^t$. D'autre part on a $\mu * \nu \in \mathfrak{M}^\tau$ pour $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^\tau$, avec les mêmes résultats, en supposant X métrisable. On trouve le raisonnement pour ces résultats dans un cadre aussi plus général, dans [10], 280–283.

Pour des lois uniformément tendues sur $\mathfrak{B}$ l'application de convolution est faiblement bicontinue, c'est à dire: (μ_α) et (ν_α) étant deux ensembles filtrants de lois uniformément tendus les relations $\mu_\alpha \to \mu$ et $\nu_\alpha \to \nu$ faiblement impliquent $\mu_\alpha * \nu_\alpha \to \mu * \nu$ faiblement.

En particulier l'ensemble $\mathfrak{M}^t$ est un semi-groupe topologique au sens de la convergence faible (voir [9], 224).

2.3. $X = G$ groupe localement compact. Dans ce cas la théorie se raccorde à la théorie de la mesure de Bourbaki. L'ensemble $\mathfrak{M}_1$ se présente comme l'ensemble $\mathfrak{M}_1 := \mathfrak{M}_1(G)$ des mesures de Radon positives et (bornées) normées sur G qui est contenu dans la boule unité du dual de l'espace $\mathfrak{K} := \mathfrak{K}(G)$ des fonctions continues sur G à support compact. La convergence faible dans $\mathfrak{M}_1(G)$ équivaut à la convergence vague des mesures vers une limite de $\mathfrak{M}_1(G)$. Alors $\mathfrak{M}_1$ est un semi-groupe topologique, qui est métrisable si et seulement si G est métrisable. Un résultat analogue vaut en remplaçant métrisable par complet, métrisable et séparable.

Paragraphe 3. Mesures décomposables

Nous appellerons *facteur* (à gauche) d'une loi $\nu \in \mathfrak{M}^t$ toute loi $\mu \in \mathfrak{M}^t$ tel qu'il existe une autre loi $\rho \in \mathfrak{M}^t$ (dite cofacteur de ν) satisfaisant $\nu = \mu * \rho$. Dans ce cas on dit aussi que la loi μ *divise* ν (à gauche).

Il est bien connu (voir [7], 229) que dans un groupe (complètement régulier) l'ensemble $\mathfrak{F}_\nu$ des facteurs d'une loi $\nu \in \mathfrak{M}^t$ suivant les $(K_i, \varepsilon_i)_{i \geq 1}$ où pour chaque $i \geq 1$ il y a un $\varepsilon_i > 0$ et un compact K_i de G correspondant à ε_i, est uniformément tendu après translations convenables à droite suivant les $(K_i, \varepsilon_i')_{i \geq 1}$, où les ε_i' satisfont $\sum_{i \geq 1} \varepsilon_i (\varepsilon_i')^{-1} < \infty$. Les lois limites pour la convergence uniformément tendue de $\mathfrak{F}_\nu$ sont encore dans $\mathfrak{F}_\nu$.

Le théorème suivant étend un résultat de [8], 435 à une situation suffisamment générale.

Théorème 3.1. *Soit G un groupe topologique métrisable ou localement compact. μ et ν étant des lois dans $\mathfrak{M}^t(G)$ les assertions suivantes sont équivalentes:*

$$\text{(1)} \qquad \mu \textit{ divise } \nu \ \textit{(avec cofacteur } \rho\textit{)},$$

$$\text{(2)} \qquad \nu(f) \leq \sup_{y \in G} \mu * \varepsilon_y(f) \ \text{ pour tout } f \in \mathfrak{C}.$$

Remarque. Le cofacteur ρ de ν peut être impropre, c'est à dire que $\rho = \varepsilon_x$ pour un $x \in G$. Dans ce cas on a:

$$\text{(2')} \qquad \sup_{y \in G} \mu * \varepsilon_y = \sup_{\rho \in \mathfrak{M}^t} \mu * \rho.$$

En fait: pour tout $\rho \in \mathfrak{M}^t$ et $f \in \mathfrak{C}$ nous obtenons:

$$\mu * \rho(f) = \int_G \int_G f(x\,y)\, \mu(dx)\, \rho(dy) = \int_G \mu * \varepsilon_y(f)\, \rho(dy) \leq \sup_{y \in G} \mu * \varepsilon_y(f),$$

alors

$$\sup_{\rho \in \mathfrak{M}^t} \mu * \rho(f) \leq \sup_{y \in G} \mu * \varepsilon_y(f).$$

Il semble donc que (2) puisse être peu propre à l'étude de la divisibilité de ν puisqu'il suffit que $\nu=\mu*\varepsilon_x$ pour réaliser (2).

Démonstration du théorème.

I. *Le cas métrisable.* Soit C l'ensemble des mesures $\pi=\mu*\lambda$ où $\mu\in\mathfrak{M}^t$ et $\lambda\in\mathfrak{G}$, c'est à dire:

$$\lambda=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\varepsilon_{x_i}\quad\text{avec}\quad \beta_i\in\mathbb{R},\ \beta_i>0,\ x_i\in G\qquad (i=1,\dots,n)$$

et

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i=1.$$

Evidemment C est un sous-ensemble convexe du dual $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ qui est localement convexe. Soit, de plus, D l'adhérence de C en sens de la topologie faible dans $\mathfrak{C}'$.

Pour tout $\nu\in\mathfrak{M}^t$ satisfaisant (2) nous obtenons $\nu\in D$. En effet: Si ν n'appartenait pas à D le point $\nu\in\mathfrak{C}'$ serait séparé de D par un élément $f\in\mathfrak{C}$. On aurait: soit

$$\sup_{\pi\in C}\pi(f)<\nu(f)$$

soit

$$\inf_{\pi\in C}\pi(f)>\nu(f)$$

ce qui contredirait (2) (et (2')).

G étant métrisable on sait que $\mathfrak{M}^t$ est métrisable. On a donc l'existence d'une suite $(\rho_j)_{j\geqq 1}$ dans $\mathfrak{G}$ tel que:

$$\nu=\lim_{j\to\infty}\mu*\rho_j,$$

donc $\nu=\mu*\lim_{k\to\infty}\rho_{j_k}$, $(\mu*\rho_j)_{j\geqq 1}$ donc $(\rho_j)_{j\geqq 1}$ étant uniformément tendues.

II. *Le cas localement compact.* Soient $\mu\in\mathfrak{M}^t$ fixé et $f\in\mathfrak{C}$ arbitraire. Nous définissons une fonction $g:=g_f$ par:

$$g_f(y):=\mu*\varepsilon_y(f)$$

pour tout $y\in G$. Posons:

$$\mathfrak{C}_\mu:=\mathfrak{C}_\mu(G)=\{g:g=g_f\ \text{pour tout}\ f\in\mathfrak{C}\}.$$

Evidemment $\mathfrak{C}_\mu$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{C}$. De plus, à $g_1:=g_{f_1}$ et $g_2:=g_{f_2}$ correspondent $g:=g_f\in\mathfrak{C}_\mu$ avec $g\geqq g_1$ et $g\geqq g_2$ et $g':=g_{f'}\in\mathfrak{C}_\mu$ avec $g'\leqq g_1$ et $g'\leqq g_2$: on prend simplement $f=\sup(f_1,g_2)$ et $f'=\inf(g_1,f_2)$. Maintenant nous définissons une forme linéaire et positive T_0 sur $\mathfrak{C}_\mu$ par:

$$T_0\,g:=T_0\,g_f=\int_G f\,d\nu=\nu(f)$$

pour tout $g=g_f\in\mathfrak{C}_\mu$.

D'après le théorème de Banach-Hahn, il y a une extension positive T de T_0 à tout $\mathfrak{C}$. On pose donc pour tout $B\in\mathfrak{B}$:

$$\rho(B)=\sup\{\rho(K):\ K\ \text{compact}\subset B\},$$

où

$$\rho(K)=\inf\{Tf:\ f\in\mathfrak{C}\quad\text{avec}\quad f\geqq 1_K\}.$$

Puisque G est localement compact, on a:

$$Tg = \int_G g\, d\rho$$

pour toute $g \in \mathfrak{K} \subset \mathfrak{C}^\infty := \mathfrak{C}^\infty(G)$, l'ensemble des fonctions continues sur G qui valent 0 à l'infini.

Il faut que nous montrions $\mathfrak{C}_\mu \subset \mathfrak{C}^\infty$. Pour cela on peut se borner aux fonctions $g \in \mathfrak{C}_\mu$ de la forme $g = g_f$ avec $f \in \mathfrak{K}$: soit K le support de f. A chaque $\varepsilon > 0$ il existe un compact K_ε de G tel que $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Alors:

$$g_f(y) = \int_G f(x\,y)\,\mu(dx) \leqq \int_{K_\varepsilon} f(x\,y)\,\mu(dx) + \varepsilon$$

pour tout $y \in G$, donc:

$$g(y) = g_f(y) \leqq \varepsilon$$

pour tout $y \in \complement K_\varepsilon^{-1} K$ où $g \in \mathfrak{C}^\infty$.

Finalement, on a pour chaque $f \in \mathfrak{C}$ les égalités:

$$\nu(f) = T g_f = \int_G g\, d\rho = \int_G \rho(dy) \int_G f(x\,y)\,\mu(dx),$$

donc $\nu = \mu * \rho$. Ces mesures étant t-régulières la factorisation nécessite $\rho(G) = 1$, alors le résultat est établi.

Paragraphe 4. Mesures premières

Une loi $\mu \in \mathfrak{M}$ (ou $\mathfrak{M}^t$) est dite *première*, si tout facteur de μ dans $\mathfrak{M}$ (ou $\mathfrak{M}^t$) est dégénéré[2]. C'est à dire: $\mu \in \mathfrak{M}$ (ou $\mathfrak{M}^t$) est première, si toute décomposition $\mu = \nu * \lambda$ de μ avec $\nu, \lambda \in \mathfrak{M}$ (ou $\mathfrak{M}^t$) implique nécessairement: ou $\nu = \varepsilon_x$ ou $\lambda = \varepsilon_x$ pour un $x \in G$. Soient $\mathfrak{P} := \mathfrak{P}(G)$ la totalité des lois premières sur G, $\mathfrak{P}^t := \mathfrak{P}^t(G)$ l'ensemble des lois premières de $\mathfrak{M}^t$. Les propriétés suivantes sont des généralisations évidentes des résultats de [7].

4.1. Si G est un groupe infini, toute loi $\mu \in \mathfrak{M}$ peut être approchée (faiblement) par des lois discrètes et premières dans $\mathfrak{M}$ (lois discrètes et de $\mathfrak{P}$).

En effet, en utilisant les modifications appropriées des Lemmes 5.1 et 5.3 dans [7] on peut construire un ensemble $B := \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ dénombrable tel que pour tout ensemble fini $F := \{x_1, \ldots, x_n\}$ la réunion $F \cup B$ ne puisse être écrit $A_1 A_2$, où A_1 et A_2 contiennent au moins deux éléments.

G étant complètement régulier l'ensemble $\mathfrak{G}$ est faiblement dense dans $\mathfrak{M}^t$. Il est évident qu'il est aussi dense dans l'ensemble des fonctions additives positives et finies sur la tribu $\mathfrak{F}$ de Baire.

Lorsque G est métrisable, on pourra choisir ainsi des suites dans $\mathfrak{G}$ pour approcher les lois $\mu \in \mathfrak{M}$.

Alors toute loi $\mu \in \mathfrak{M}$ à support égal à $F \cup B$ est première (donc $\in \mathfrak{P}$) et prenant $\mu(B - F) < \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$, μ approche ainsi arbitrairement (en variation) toute loi donnée portée par F.

Finalement à l'aide de la Proposition 9.4 de [3] on voit que l'ensemble $\mathfrak{P}_0$ des lois premières portées par $B \cup F$ (B dénombrable fixé, F fini quelconque) est faiblement dense dans $\mathfrak{M}$.

[2] Nous n'étudions en fait la divisibilité que dans $\mathfrak{M}^t$ car hors de $\mathfrak{M}^t$ la convolution est en général «mal» définie, et on ne dispose pas de la propriété de bicontinuité pour cette opération.

4.2. Soit G un groupe topologique et soit $\mu \in \mathfrak{M}$. Pour tout $B \in \mathfrak{B}$ nous définissons les fonctions de concentration Q_μ^d et Q_μ^g par

$$Q_\mu^d(B) := \sup_{x \in G} \mu(Bx) \quad \text{et} \quad Q_\mu^g(B) := \sup_{x \in G} \mu(xB).$$

Q_μ^d est alors une application de $\mathfrak{B}$ dans $[0, \infty]$ qui est invariante par toute translation à droite, sous-additive, croissante et continue pour les limites croissantes. Si μ est K-régulière, Q_μ^d l'est aussi. La convolution à droite ne peut diminuer Q_μ^d sur tout $B \in \mathfrak{B}$. Si une famille filtrante (μ_α) dans $\mathfrak{M}$ converge faiblement vers $\mu \in \mathfrak{M}$ et si G est parfaitement normal ou G est normal et μ est régulière, alors pour tout ouvert O de G on a:

$$\liminf Q_{\mu_\alpha}^d(O) \geqq Q_\mu^d(O).$$

Si G est localement compact à base dénombrable, la convergence de (μ_α) vers μ entraine celle de la famille $(Q_{\mu_\alpha}^d)$ en sens que $Q_{\mu_\alpha}^d(B) \to Q_\mu^d(B)$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$ tel que $Q_\mu^d(\mathring{B}) = Q_\mu^d(\bar{B})$.

4.3. Soient G un groupe topologique normal, U un voisinage de l'unité e de G et pour tout $\varepsilon > 0$:

$$E(U, \varepsilon) := \{\mu \in \mathfrak{M}^t \colon \mu = \nu * \lambda \quad \text{tel que} \quad Q_\nu^d(U) \leqq 1 - \varepsilon \quad \text{et} \quad Q_\lambda^g(U) \leqq 1 - \varepsilon\}.$$

Alors $E(U, \varepsilon)$ est fermé pour la convergence uniformément tendue dans $\mathfrak{M}^t$.

En effet: soit (μ_α) une famille filtrante dans $\mathfrak{M}^t$ convergente vers μ suivant un filtre. Si (μ_α) est uniformément tendue, les facteurs à gauche ν_α de μ_α le deviennent après translation à droite, soit $\nu_\alpha * \varepsilon_{x_\alpha}$ ((x_α) dans G), alors les $\varepsilon_{x_\alpha^{-1}} * \lambda_\alpha$ le sont aussi et on a:

$$\mu = \nu' * \lambda' \quad \text{avec} \quad \nu' = \lim \nu_\alpha * \varepsilon_{x_\alpha} \quad \text{et} \quad \lambda' = \lim \varepsilon_{x_\alpha^{-1}} * \lambda_\alpha$$

(voir la remarque précédant le théorème 3.1 ou [7], 206). Mais la relation:

$$\liminf \nu_\alpha(O) \geqq \nu(O)$$

pour tout ouvert O de G entraine immédiatement:

$$\liminf Q_{\nu_\alpha}^d(U) \geqq Q_\nu^d(U)$$

aussi bien avec $Q_{\lambda_\alpha}^g$ et Q_λ^g, donc $\nu, \lambda \in E(U, \varepsilon)$, lorsque (ν_α) et (λ_α) sont dans $E(U, \varepsilon)$. C'est dire en particulier que les ensembles $\{\nu \in \mathfrak{M}^t \colon Q_\nu^d(U) \leqq a\}$ et $\{\nu \in \mathfrak{M}^t \colon Q_\nu^g(U) \leqq a\}$ (pour $a \in \mathbb{R}$) sont fermés pour la convergence (faible) uniformément tendue.

4.4. Soit G métrisable. Alors l'ensemble $\complement \mathfrak{P}^t(G)$ est de type F_σ au sens de la convergence faible.

En effet: $\complement \mathfrak{P}^t$ est réunion dénombrable d'ensembles $E(U, \varepsilon)$ pour une base dénombrable de U et une suite (ε_n) décroissante vers 0. Il faut noter que $\mathfrak{M}^t$ étant métrisable, la convergence des lois équivaut à celle des suites, et que celle-ci est alors nécessairement uniformément tendue.

Résumant les assertions de 4.1 à 4.4 nous obtenons:

Théorème 4.1. *Soit G un groupe métrisable. Alors l'ensemble $\mathfrak{P}^t(G)$ des lois premières dans $\mathfrak{M}^t$ est un sous-ensemble dense de type G_δ de $\mathfrak{M}^t$.*

Remarque. Dans la démonstration du théorème nous nous sommes écartés des auteurs de [7] qui supposaient G séparable et devaient utiliser pour exprimer la convergence des lois (dans G groupe polonais) une base dénombrable $(f_i)_{i\geqq 1}$ de $\mathfrak{C}(G)$ uniformément continues pour les structures uniformes de G.

La seconde propriété de l'ensemble $\mathfrak{P}^t$ qui apparait dans la formulation du Théorème 4.1 peut être encore assurée à l'aide du théorème suivant.

Théorème 4.2. *Soit G un groupe topologique. Prenons un $\varepsilon>0$. On considère l'ensemble $\mathfrak{M}_\varepsilon := \mathfrak{M}_\varepsilon(G)$ des mesures de $\mathfrak{M}^t$ qui chargent d'au moins $\varepsilon>0$ une partie donnée $E=\bigcup_{n\geqq 1} K_n$, où pour tout $n\geqq 1$, K_n est un compact de G. Nous munissons $\mathfrak{M}^t$ de la convergence (faible) uniformément tendue. Alors l'application $\psi: \mathfrak{M}_\varepsilon\times\mathfrak{M}_\varepsilon\to\mathfrak{M}^t$ défini par $\psi(\mu,\nu):=\mu*\nu$ pour tout couple $(\mu,\nu)\in\mathfrak{M}_\varepsilon\times\mathfrak{M}_\varepsilon$ est σ-fermée, c'est à dire: ψ transforme toute partie fermée de $\mathfrak{M}_\varepsilon\times\mathfrak{M}_\varepsilon$ en une partie de type F_σ de $\mathfrak{M}^t$.*

Démonstration. On considère dans $\mathfrak{M}_\varepsilon$ une partie fermée F_0 et les parties A_n de F_0 définies par $A_n := \{\mu\in F_0: \mu(K_n)\geqq\varepsilon/2\}$ $(n\geqq 1)$. Elles sont fermées (dans $\mathfrak{M}^t$), et on a $F_0=\bigcup_{n\geqq 1} A_n$. De même pour tout fermé F contenu dans $\mathfrak{M}_\varepsilon\times\mathfrak{M}_\varepsilon$ on a la représentation $F=\bigcup_{i,j\geqq 1} F_{ij}$ avec $F_{ij} := F\cap A_{ij}$ et $A_{ij} := \{(\mu,\nu): \mu\in A_i, \nu\in A_j\}$ $(i,j\geqq 1)$. Il suffit de montrer que $\psi(F_{ij})$ est fermé dans $\mathfrak{M}^t$ pour tout $i,j\geqq 1$.

Soient donc (μ_α) et (ν_α) deux familles filtrantes de A_i et A_j respectivement telles que $(\mu_\alpha*\nu_\alpha)$ converge vers λ (suivant un filtre) et $(\mu_\alpha,\nu_\alpha)\in F_{ij}$ pour tout α.

Par hypothèse, la convergence de $(\mu_\alpha*\nu_\alpha)$ vers λ étant uniformément tendue, il existe une famille (x_α) dans G avec $(\mu_\alpha*\varepsilon_{x_\alpha})$ et $(\varepsilon_{x_\alpha^{-1}}*\nu_\alpha)$ uniformément tendue (voir la remarque précédant le Théorème 3.1). Prenant $\varepsilon'<\varepsilon/2$ et $K_{\varepsilon'}$ portant les $\mu_\alpha*\varepsilon_{x_\alpha}$. Sauf une mesure $\leqq\varepsilon'$, on voit que K_i coupe $K_{\varepsilon'}x_\alpha^{-1}$ pour tout α, donc que $x_\alpha\in K_i^{-1}K_{\varepsilon'}$, où les K_i sont les compacts définissant les $A_i (i\geqq 1)$. Alors (μ_α), donc (ν_α) sont uniformément tendues et il existe des éléments limites μ et ν (suivant des filtres plus fins) tels que $\mu*\nu=\lambda$ vu la bicontinuité de l'application ψ au sens de la convergence uniformément tendue. De plus $(\mu,\nu)\in F$ puisque A_i et A_j sont fermés. Alors $\psi(F_{ij})$ est fermé dans $\mathfrak{M}^t$ pour tout $i,j\geqq 1$, la démonstration étant complète.

Corollaire 4.1. *Si le group G est σ-compact et si l'ensemble $\mathfrak{M}_\varepsilon$ du théorème coïncide avec $\mathfrak{M}^t$ entier (i.e. $\varepsilon=1$), l'application de convolution ψ est σ-fermé.*

Corollaire 4.2. *Si G est supposé seulement métrisable, ψ transforme $\mathfrak{M}_\varepsilon\times\mathfrak{M}_\varepsilon$ en un sous-ensemble de type F_σ de $\mathfrak{M}^t$ (pour la convergence faible, qui est alors toujours uniformément tendue).*

En effet: on prend une suite $(U_n)_{n\geqq 1}$ de voisinages de l'unité dans G et pour tout $n\geqq 1$ on définit:

$$A_n := \left\{\mu\in\mathfrak{M}_\varepsilon:\ Q_\mu^d(U_n)\leqq 1-\frac{1}{2^n}\right\},$$

où Q_μ^d désigne la fonction de concentration à droite de μ introduite dans 4.2. A_n est fermé, suivant 4.3 au début de ce paragraphe, donc $\mathfrak{M}_\varepsilon$ et $\mathfrak{M}_\varepsilon\times\mathfrak{M}_\varepsilon$ sont de type F_σ dans $\mathfrak{M}^t$ et $\mathfrak{M}^t\times\mathfrak{M}^t$ resp.

Voici maintenant une deuxième démonstration du fait que $\mathfrak{P}^t$ est une partie de type G_δ de $\mathfrak{M}^t$. Cette démonstration généralise celle du Théorème 9.2 de [3] et écarte une inexactitude dans le Théorème 5.2 de ce texte.

Soit $\mathfrak{M}' := \mathfrak{M}^t \times \mathfrak{M}^t$. Nous définissons l'ensemble:

$$\Delta := \{(\mu, \nu) \in \mathfrak{M}'; \quad \text{ou} \quad \mu = \varepsilon_x \quad \text{ou} \quad \nu = \varepsilon_x \quad \text{pour un } x \in G\}.$$

Δ est homéomorphe à $(G \times \mathfrak{M}^t) \cup (\mathfrak{M}^t \times G)$. $\complement \Delta$ étant fermé dans $\mathfrak{M}'$ la σ-fermeture de l'application de convolution ψ (Corollaire 4.1) implique que $\psi(\complement \Delta)$ est une partie de type F_σ de $\mathfrak{M}^t$. Alors $\mathfrak{P}^t = \complement_{\mathfrak{M}^t} \psi(\complement_{\mathfrak{M}'} \Delta)$ est de type G_δ dans $\mathfrak{M}^t$.

Le Théorème 6.2 de [7] concernant la catégorie de l'ensemble des lois diffuses se déduit des considérations suivantes; soit X un espace topologique. Une mesure $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ est dite *diffuse* (ou continue) si $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in X$.

4.5. Soit X un espace complètement régulier. Nous définissons pour tout $\eta > 0$ l'ensemble:

$$E_\eta := \{\mu \in \mathfrak{M}^t(X) \colon \exists\, x \in X \text{ avec } \mu(\{x\}) \geqq \eta\}.$$

Alors E_η est fermé pour la convergence uniformément tendue dans $\mathfrak{M}^t$.

En effet: Soit (μ_α) dans $\mathfrak{M}^t$ convergeant vers $\mu \in \mathfrak{M}^t$ tel qu'il existe un compact K de X avec $\mu_\alpha(\complement K) < \eta$ pour tout α. Alors on a la convergence des points x_α tels que $\mu_\alpha(\{x_\alpha\}) \geqq \eta$, appartenant nécessairement à K, vers x pour un filtre convenable. Soit U un voisinage fermé de x. On a:

$$\mu(U) \geqq \limsup \mu_\alpha(U),$$

donc $\mu(U) \geqq \eta$ et finalement:

$$\mu(\{x\}) = \inf\{\mu(U) \colon \text{ voisinage fermé de } x\} \geqq \eta,$$

puisque μ est τ-continue.

Remarque. On peut en effet se borner aux voisinages $U = f^{-1}(0)$ pour $f \colon X \to \mathbb{R}$ tel que $f(\complement V) = 1$ pour un voisinage V de a et $f(a) = 0$ $(a \in X)$.

4.6. Soit X un espace polonais sans points isolés. Alors l'ensemble $Q := Q(X)$ des lois diffuses sur X est faiblement dense et de type G_δ dans $\mathfrak{M}^t(X)$.

En effet: Si pour tout $\eta > 0$, E_η est défini comme dans 4.5 et si $\bigcup_{\eta > 0} E_\eta$ contenait un ouvert de $\mathfrak{M}^t$, il existerait à l'aide du théorème de Baire un tel ouvert O partie de E_η pour un $\eta > 0$. Prenant dans O une loi $\nu \in \mathfrak{G}$ de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_{x_i} \quad \left(\alpha_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \quad \text{et} \quad x_i \in X \ \text{ pour } i = 1, \dots, n\right)$$

et puisque les voisinages U_i des points x_i contiennent tous une infinité de points, il existerait des lois ν' discrètes de masses $\nu'(U_i) = \alpha_i$ réparties en des points de U_i assez nombreux pour charger chacun d'eux de moins de η. Donc les lois ν' n'appartiennent pas à E_η et sont pourtant arbitrairement voisines de ν; en effet l'ensemble ouvert O devrait contenir un voisinage de ν de la forme:

$$\{\mu \in \mathfrak{M}^t \colon\ |\mu(f_j) - \nu(f_j)| < \varepsilon_j;\ f_j \in \mathfrak{C},\ \varepsilon_j > 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, m\},$$

donc toutes les lois ν' sus-dites (pour les U_i tels que $|f_j(x) - f_j(x_i)| < \varepsilon_j$ avec $x \in U_i$ et $j = 1, \dots, m$).

4.7. Soit X un espace polonais sans points isolés. Alors l'ensemble $\mathfrak{N} := \mathfrak{N}(X)$ des lois diffuses sur X étant positives sur tout ouvert de X est faiblement dense et de type G_δ dans $\mathfrak{M}^t(X)$.

En effet: Il suffit de montrer que l'ensemble $\mathfrak{S} := \mathfrak{S}(X)$ des lois positives sur tout ouvert de X est faiblement dense et de type G_δ dans $\mathfrak{M}^t$, car dans l'espace $\mathfrak{M}^t$ métrisable et complet l'intersection de deux ensembles G_δ est aussi un ensemble G_δ. Alors si (U_i) est une base dénombrable d'ouverts de X (X étant métrisable et séparable) l'ensemble:

$$G_N := \{\mu \in \mathfrak{M}^t: \ \mu(U_i) > 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, N\}$$

est ouvert dans $\mathfrak{M}^t$, car si $\mu \in G_N$ et $\mu(U_i) > \varepsilon_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$, l'ensemble:

$$G'_N := \{\mu' \in \mathfrak{M}^t: \ \mu'(U_i) > \mu(U_i) - \varepsilon_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, N\}$$

est une partie ouverte de G_N. Evidemment si $f_i \in \mathfrak{C}$, $f_i \leqq 1_{U_i}$ et $\mu(f_i) > \mu(1_{U_i}) - \dfrac{\varepsilon_i}{2}$ pour $i = 1, \dots, N$, on a

$$G'_N \supset \left\{\mu' \in \mathfrak{M}^t: \ |\mu'(f_i) - \mu(f_i)| < \frac{\varepsilon_i}{2} \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, N\right\}.$$

Que $\mathfrak{S}$ soit faiblement dense dans $\mathfrak{M}^t$ tient à ce que, dans 4.1 avec des lois ν de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_{x_i}$ on peut prendre les x_i ($i = 1, \dots, n$) dans une suite fixe (y_j) dense dans X, et à ce que les lois portées par (y_j) tout entier sont de $\mathfrak{S}$, et approchant les lois ν, elles-mêmes faiblement denses dans $\mathfrak{M}^t$.

Résumant les Propositions 4.5 et 4.7 nous obtenons (suivant [7]):

Théorème 4.3. *Soit G un groupe polonais sans points isolés. Alors la famille $\mathfrak{P}_c := \mathfrak{P}_c(G)$ des lois premières diffuses et positives sur tout ouvert de G (c'est à dire l'ensemble $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}$) est faiblement dense et de type G_δ dans $\mathfrak{M}^t$.*

Le théorème est une conséquence évidente du Théorème 4.1.

Paragraphe 5. Divisibilité dans le cas d'un groupe compact

Soient G un groupe localement compact (non nécessairement séparable) et ω une mesure invariante à gauche (mesure de Haar) sur G. $\mathfrak{M}_\omega := \mathfrak{M}_\omega(G)$, $\mathfrak{P}_\omega :=$ $\mathfrak{P}_\omega(G)$ et $\mathfrak{D}_\omega := \mathfrak{D}_\omega(G)$ sont les sous ensembles de $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1(G)$ des lois, qui sont absolument ω-continues, premières et décomposables dans $\mathfrak{M}_\omega$ respectivement.

Théorème 5.1. *Soit $\mu \in \mathfrak{D}_\omega$. Alors μ possède une densité presque sûrement semi-continue inférieurement.*

Démonstration. Nous montrerons d'abord qu'une fonction h de la forme $f * g$ avec f, g dans l'espace $\mathfrak{L}^1 := \mathfrak{L}^1(G, \omega)$ des fonctions réelles ω-intégrables sur G est continue, si le facteur de droite, g, est borné. Plus exactement $f * g$ est continue (uniformément), si g est bornée, ou si f est bornée et $g = g^*$ (où g^* est défini par $g^*(x) := g(x^{-1})$ pour tout $x \in G$). La démonstration de cette assertion résulte de la continuité de l'application $x \to {}_x f$ de G dans $\mathfrak{L}^1$ définie par ${}_x f(y) := f(x y)$ pour tout $x \in G$ ($y \in G$) ([2], (20.4)), puisqu'on a pour tous $s, t \in G$:

$$|f * g(s) - f * g(t)| \leqq \int_G |f(s y) - f(t y)| \, |g(y^{-1})| \, \omega(d y) \leqq \|{}_s f - {}_t f\|_1 \, \|g\| \, .$$

Plus généralement $f * g$ est continue si f est bornée et $g \in (\mathfrak{L}^1)^*$, c'est à dire $g = h^*$ avec $h \in \mathfrak{L}^1$.

Dans le cas d'un groupe aux structures uniformes équivalentes $f * g$ est continue, si un des facteurs est borné.

Soit alors $\mu \in \mathfrak{D}_\omega$, c'est à dire $\mu = h\omega$ avec $h \in \mathfrak{L}^1$ de la forme $f * g$ où $f, g \in \mathfrak{L}^1$. Approchant g inférieurement par une famille $(g_i)_{i \in I}$ de fonctions g_i bornées de $\mathfrak{L}^1 (i \in I)$, telle que $g_i \uparrow g$ nous obtenons la semi-continuité inférieure de h à l'aide de la proposition précédente.

Théorème 5.2. *Soit G métrisable: l'unité e de G possède une base dénombrable de voisinages. Alors l'ensemble $\mathfrak{P}_\omega(G)$ est de type G_δ pour la topologie du Banach $\mathfrak{L}^1$.*

Si G est un groupe abélien polonais localement compact mais non compact, $\mathfrak{P}_\omega(G)$ est aussi dense dans $\mathfrak{M}_\omega$ pour la topologie de $\mathfrak{L}^1$.

Démonstration. $\mathfrak{P}_\omega := \mathfrak{P} \cap \mathfrak{M}_\omega$, étant de type G_δ dans $\mathfrak{M}_\omega$ pour la convergence faible, vu le Théorème 4.1, est en effet évidemment de type G_δ pour la topologie trace (celle de la convergence faible) donc à fortiori pour la topologie plus fine de la convergence en densité moyenne qui est celle de $\mathfrak{L}^1$. La deuxième assertion est contenue dans [7], 215.

Pour donner un résultat sur la catégorie de l'ensemble $\mathfrak{D}_\omega$ dans le cas d'un groupe compact, il nous faut rappeler le théorème bien connu de Cohen ([1]) et Hewitt. Nous allons présenter une démonstration assez brève de ce théorème qui utilise une idée de Koosis ([4]):

Théorème 5.3 (Cohen, Hewitt). *Soit A un algèbre de Banach et soit V un A-module de Banach à gauche, c'est à dire: un A-module algébrique à gauche tel que $\|a v\| \leqq \|a\| \, \|v\|$ pour tout $a \in A$, $v \in V$. Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour chaque $a \in A$, $v \in V$ et $\varepsilon > 0$ il y a un $e \in A$ avec $\|e\| \leqq M$, $\|a - a e\| < \varepsilon$ et $\|v - e v\| < \varepsilon$.*

Alors pour tout $v \in V$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $w \in V$ possédant les propriétés suivantes:

(i) $v = a w$.

(ii) $\|v - w\| < \varepsilon$.

(iii) $\|a\| \leqq M$.

(iv) $w \in \overline{A v}$ *(fermeture de $A v$ dans V).*

Démonstration. Nous pouvons supposer $M = 1$. En effet: dans le cas général on peut remplacer les termes $2 - e_n$ par $1 + p(1 - e_n)$ pour p suffisamment petit et positif.

Soit A' l'algèbre de Banach $A \oplus \{1\}$ obtenue en adjoignant une identité (multiplicative) 1 à A. Alors V devient un A'-module à gauche.

Par induction nous choisissons une suite $(e_n)_{n \geq 1}$ dans A telle que $\|e_n\| \leqq 1$. En effet, on choisit e, tel que $\|v - e_1 v\| < \varepsilon/2$; $e_1, \ldots, e_n$ étant choisis, nous prenons:

$$a_n := (2 - e_1)^{-1} (2 - e_2)^{-1} \ldots (2 - e_n)^{-1}$$

et

$$w_n := (2 - e_n)(2 - e_{n-1}) \ldots (2 - e_1) v.$$

Alors $a_n \in A'$, $w_n \in \overline{Av}$, puisque $v \in \overline{Av}$, et $v = a_n w_n$ $(n \geqq 1)$. Il est bien clair que:

$$(*) \qquad a_n = \frac{1}{2^n} + b_n \quad \text{où} \quad b_n \in A \qquad (n \geqq 1).$$

Choisissant e_{n+1} tel que:

$$\|w_n - e_{n+1} w_n\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

et

$$\|b_n - b_n e_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}$$

nous allons montrer que les suites $(a_n)_{n \geqq 1}$ et $(w_n)_{n \geqq 1}$ sont de Cauchy. Considérons d'abord $(a_n)_{n \geqq 1}$. Evidemment:

$$\|(2 - e_n)^{-1}\| \leqq 1$$

et

$$(2 - e_n)^{-1} - 1 = (e_n - 1)(2 - e_n)^{-1}.$$

Maintenant

$$a_{n+1} = a_n (2 - e_{n+1})^{-1}$$

et donc:

$$a_{n+1} - a_n = a_n((2 - e_{n+1})^{-1} - 1) = \frac{1}{2^n}((2 - e_{n+1})^{-1} - 1) + b_n(e_{n+1} - 1)(2 - e_{n+1})^{-1}.$$

Alors

$$\|a_{n+1} - a_n\| \leqq \frac{1}{2^{n-1}} + \|b e_{n+1} - b_n\| \leqq \frac{1}{2^{n-2}},$$

donc il y a un $a \in A'$ avec $a_n \to a$, a étant un élément de A vu $(*)$.

Considérons alors la suite $(w_n)_{n \geqq 1}$. L'égalité:

$$w_{n+1} = (2 - e_{n+1}) w_n$$

implique

$$w_{n+1} - w_n = w_n - e_{n+1} w_n$$

puis:

$$\|w_{n+1} - w_n\| \leqq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad (n \geqq 1) \quad \text{donc} \quad w_n \to w \in \overline{Av}.$$

Puisque $\|v - w_1\| = \|v - e_1 v\| < \varepsilon/2$, on a $\|v - w\| < \varepsilon$.

Finalement $v = a_n w_n$ pour tout $n \geqq 1$ implique $v = a w$, alors le résultat.

Corollaire 5.1. *Soit $A = V = \mathfrak{L}^1$. Alors pour tout $h \in \mathfrak{L}^1$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $M > 0$, et $f, g \in \mathfrak{L}^1$ avec les propriétés suivantes:*

(i) $h = f * g$.

(ii) $\|h - g\|_1 < \varepsilon$.

(iii) $\|f\|_1 \leqq M$.

(iv) $g \in \overline{\mathfrak{L}^1 * h}$.

Démonstration. Il est bien connu ((2), (20.15)) que $\mathfrak{L}^1$ possède des approximations à droite et à gauche de l'unité, c'est à dire: il existe une constante $M>0$ telle que pour tout $f, g \in \mathfrak{L}^1$ et tout $\varepsilon>0$ nous avons un $k \in \mathfrak{L}^1$ avec $\|k\| \leqq M$, $\|f-f*k\|_1<\varepsilon$ et $\|h-k*h\|_1<\varepsilon$. Alors le théorème donne le résultat.

Corollaire 5.2. *Soit G un groupe compact. Alors pour tout $h \in \mathfrak{C}(G)$ tel que $h>0$ et tout $\varepsilon>0$ il existe $f, g \in \mathfrak{C}$ avec $f, g>0$ tel que:*

(i) $h=f*g$.

(ii) $\|h-g\|<\varepsilon$.

Démonstration. Etant donné $h \in \mathfrak{C}$ tel que $h>0$ on peut choisir la suite $(e_n)_{n \geqq 1}$ dans la démonstration du théorème telle que $e_n>0$ en ajoutant à e_n une constante assez petite pour chaque $n \geqq 1$. Par le Corollaire 5.1, il existe pour tout $\varepsilon>0$ des fonctions f, $g \in \mathfrak{L}^1$ avec les propriétés (i) et (ii) de ce corollaire. Le choix spécial de la suite $(e_n)_{n \geqq 1}$ implique $f>0$. De plus, on peut faire que g approche h uniformément (et arbitrairement), donc $\|h-g\|<\varepsilon$.

Finalement la suite $(e_n)_{n \geqq 1}$ et donc f, g peuvent être choisies dans $\mathfrak{C}$.

La décomposition $h=f*g$ n'est pas triviale: $g=h$ nécessiterait f portée par un sous-groupe compact de G, f ne serait >0 que pour h constante.

Etant donnés $\varepsilon<\inf h$ et $\|h-g\|<\varepsilon$ la fonction g est aussi positive.

Théorème 5.4. *(Généralisation du Théorème* 10.2 *dans* [3].*)*

Soit G un groupe compact (non nécessairement séparable). Alors l'ensemble $\mathfrak{D}''_\omega := \mathfrak{D}''_\omega(G)$ des lois décomposables dans $\mathfrak{M}_\omega$ en deux mesures avec des densités continues et strictement positives, est dense dans $\mathfrak{M}_\omega$ au sens de $\mathfrak{L}^1$.

Démonstration. Soit $\mu \in \mathfrak{M}_\omega$ de la forme $\mu=h\,\omega$ avec $h \in \mathfrak{C}$ et $h>0$. Par le Corollaire 5.2. $\mu \in \mathfrak{D}'_\omega$, c'est à dire: il existe deux lois $\nu, \lambda \in \mathfrak{M}_\omega$ de la forme $\nu=f\,\omega$, $\lambda=g\,\omega$ respectivement avec $f, g \in \mathfrak{C}$, $f, g>0$ telles que $\mu=\nu*\lambda$. Puisque $\mathfrak{M}_\omega$ est dense dans $\mathfrak{C}$ au sens de $\mathfrak{L}^1$, $\mathfrak{D}''_\omega$ est dense dans $\mathfrak{M}_\omega$ en ce sens.

Remarque. Par le raisonnement de la démonstration du Corollaire 5.2 l'ensemble $\mathfrak{D}''_\omega$ du théorème peut être remplacé par l'ensemble $\mathfrak{D}'_\omega := \mathfrak{D}'_\omega(G)$ des lois décomposables dans $\mathfrak{M}_\omega$ en deux lois avec des densités continues, l'une strictement positive.

Remarque ajoutée après la réception du manuscrit par la rédaction. Suivant la méthode de J. Štěpàn dans son travail "On the family of translations of a tight probability measure on a topological group" (Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **15**, 131–138 (1970)), les résultats du paragraphe 3 peuvent être améliorés. En fait dans le cas de la démonstration du Théorème 3.1 il n'est besoin d'aucune condition concernant le groupe G dès lors μ et ν sont t-régulières (conférer la condition (j) de Štěpàn); aucune des hypothèses faites par Štěpàn (G normal, abélien, la condition (k)) n'est nécessaire.

Bibliographie

0. Lévy, Paul: Sur une classe de lois de probabilité indécomposables. C.r. Acad. Sci., Paris **235**, 489–491 (1952).

   – Remarques sur l'algèbre des produits de composition. C.r. Acad. Sci., Paris **259**, 1923–1927 (1964).

1. Cohen, P.J.: Factorization in group algebras. Duke math. J. **26**, 199–206 (1959).
2. Hewitt, E., Ross, K.A.: Abstract harmonic analysis I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.

3. Heyer, H.: Factorization of probability measures on locally compact groups. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **8**, 231–258 (1967).
4. Koosis, P.: Sur un théorème de Paul Cohen. C.r. Acad. Sci. Paris **259**, 1380–1382 (1964).
5. LeCam, L.: Convergence in distribution of stochastic processes. Univ. of California Press 1957.
6. Neveu, J.: Bases mathématiques du calcul des probabilités. Paris: Masson 1964.
7. Parthasarathy, K. R., Rao, R. R., Varadhan, S. R. S.: On the category of indecomposable distributions on topological groups. Trans. Amer. math. Soc. **102**, 200–217 (1962).
8. Strassen, V.: The existence of probability measures with given marginals. Ann. math. Statistics **36**, 423–439 (1965).
9. Tortrat, A.: Lois de probabilité sur un espace topologique complètement régulier et produits infinis à termes indépendants dans un groupe topologique. Ann. Inst. Henri Poincaré **I**, 217–237 (1965).
10. – Lois tendues et convolutions dénombrables dans un groupe topologique X. Ann. Inst. Henri Poincaré **II**, 279–298 (1966).
11. Varadarajan, V. S.: Mesures sur les espaces topologiques. Mat. Sbornik n. Ser. **55**, 35–100 (1961).

Prof. Dr. H. Heyer
Mathematisches Institut
der Universität
D-7400 Tübingen
Hölderlinstraße 19

Dr. A. Tortrat
Université de Paris
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
11, Rue Pierre-Curie
F-Paris 5(e)

(Reçu le 8 mai 1969)