Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 18, 305–321 (1971)

Zur Vorhersagetheorie stationärer Operatorfolgen

W. Hackenbroch

Einleitung

Wir betrachten Folgen $(F_n)_{n=\ldots,-1,0,1,\ldots}$ von stetigen linearen Operatoren eines komplexen Hilbertraumes H in einem solchen H', die in dem Sinne stationär sind, daß die zugehörigen Operatoren $F_{n+k}{}^* F_n$ von H in sich bei festem k für alle n übereinstimmen (* bezeichnet den adjungierten Operator). Jeder n-dimensionale diskrete (schwach) stationäre stochastische Prozeß über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, μ) läßt sich etwa durch eine solche Folge, mit $H=\mathbb{C}^n$ und $H'=L^2(\Omega, \Sigma; \mu, \mathbb{C})$, beschreiben.

Entsprechend den Fragestellungen der linearen Vorhersagetheorie untersuchen wir die Inklusionen der zu einer stationären Operatorfolge (F_n) gehörigen Folge von Teilräumen

$$\begin{aligned} &M_n=\overline{sp}\,\{F_k\,x\colon\; x\in H;\, k\leqq -n\} \qquad (n=\ldots,-1,0,1,\ldots),\\ &M_\infty=\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} M_n, \qquad M_{-\infty}=\overline{sp}\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} M_n. \end{aligned} \tag{1}$$

(Für eine Teilmenge B eines Hilbertraumes bezeichnet $\overline{sp}\,B$ die abgeschlossene lineare Hülle von B.) Von besonderem Interesse sind dabei Kriterien für die beiden Grenzfälle $M_\infty=M_{-\infty}$ (determinierter Fall) bzw. $M_\infty=0$ (vollständig undeterminierter Fall).

Diese Fragen wurden für endlich-dimensionales H im Rahmen der Vorhersagetheorie eingehend untersucht (vgl. etwa Masani [10]). Bei unendlich-dimensionalem H treten dagegen neue, insbesondere maßtheoretische, Schwierigkeiten auf, so daß dieser Fall bisher nicht in entsprechender Allgemeinheit behandelt wurde (vgl. [1, 4, 6]). Andererseits führt etwa das Problem der Reversibilität passiver Transformationen (vgl. König und Meixner [8] und insbesondere Tobergte [16]) letztlich auf die lineare Vorhersagetheorie beliebiger stationärer Operatorfolgen, so daß eine allgemeinere Theorie auch in diesem Zusammenhang von Interesse ist. Im Hinblick auf solche Anwendungen stehen in dieser Arbeit spektraltheoretische Methoden im Vordergrund.

In Abschnitt 1 werden, etwas allgemeiner, als es für das folgende notwendig ist, die integrationstheoretischen Grundlagen bei positiv-operatorwertigen Maßen bereitgestellt. Abschnitt 2 zeigt, daß der zu einem solchen Maß Φ gehörige abstrakte Hilbertraum $L^2(\Phi, H)$ gerade noch so viel „punktweise Struktur" besitzt, wie für die spätere Anwendung bekannter Tatsachen der vektorwertigen Funktionentheorie nötig ist. Durch Methoden der Theorie der Spektraldarstellungen (vgl. Dunford-Schwartz [3], S. 909ff.) werden hierbei Schwierigkeiten mit Radon-Nikodym-Dichten für operatorwertige Maße umgangen und allgemeinere Ergebnisse erzielt. Im 3. Abschnitt wird der Zusammenhang mit stationären Operatorfolgen hergestellt. Abschnitt 4 untersucht den Einfluß des (Lebesgue-) absolut stetigen bzw. singulären Teils des zu einer stationären Folge gehörenden Operatormaßes auf ihre Wold-Zerlegung. Im 5. Abschnitt werden schließlich einige notwendige und hinreichende Kriterien für den determinierten bzw. vollständig undeterminierten (regulären) Fall gegeben und der Vorhersageabstand berechnet. Schließlich wird im 6. Abschnitt die Rolle des Vorhersageirrtums-Operators untersucht, der bekanntlich im endlich-dimensionalen Falle die Regularität einer Folge vollständig charakterisiert.

1. Positiv-operatorwertige Maße

Sind H, H' zwei komplexe Hilberträume und $(F_n)_{n=\ldots,-1,0,1,\ldots}$ eine stationäre Folge im Raum $\mathscr{L}(H, H')$ der stetigen linearen Operatoren von H in H', so bedeutet die zu Anfang definierte Stationaritätsbedingung offensichtlich gerade, daß für endlich viele beliebige $x_k, y_l \in H$ gilt

$$\langle \sum F_k x_k, \sum F_l y_l \rangle_{H'} = \langle \sum F_{k-1} x_k, \sum F_{l-1} y_l \rangle_{H'}.$$

(Wir bezeichnen stets Skalarprodukte mit spitzen Klammern $\langle\,,\rangle$ und Normen mit Absolutstrichen $|\;|$; die Zugehörigkeit zu dem jeweiligen Raum wird nötigenfalls durch einen Index zusätzlich bezeichnet.)

Die Zuordnung $\sum F_k x_k \to \sum F_{k-1} x_k$ läßt sich daher zu einer unitären Abbildung W des nach (1) zugehörigen Raumes $M_{-\infty}$ auf sich fortsetzen. Es gilt dann $F_n = W^{-n} F_0$, so daß die ganze Folge (F_n) durch F_0 und W vollständig beschrieben wird. Die Spektraltheorie der Shift-Abbildung W führt im folgenden auf das Studium von Hilberträumen vom Typ $L^2(\Phi, H)$ mit einem Maß Φ, dessen Werte aus der Gesamtheit $\mathscr{L}(H)_+$ der stetigen positiven Operatoren von H in sich sind.

Da die von Rosenberg [14] in diesem Zusammenhang für den Fall eines endlich-dimensionalen Raumes H gegebenen Definitionen sich nicht auf den allgemeinen Fall eines beliebigen Hilbertraumes H ausdehnen lassen (da operatorwertige Maße im allgemeinen keine endliche Totalvariation besitzen, vgl. [5], Beispiel S. 333), betrachten wir etwas allgemeinere Räume $L^2(\Phi, H)$, deren Elemente allerdings nur noch in speziellen Fällen (Äquivalenzklassen von) Funktionen sind. Trotzdem haben diese Räume noch eine gewisse „punktweise Struktur", die für die späteren vorhersagetheoretischen Anwendungen ausreicht.

Definition (vgl. [5], S. 329). Sei S eine nicht leere Menge, Σ eine σ-Algebra von Teilmengen von S. Eine Mengenfunktion $\Phi\colon \Sigma \to \mathscr{L}(H)_+$ mit Werten in den stetigen positiven linearen Operatoren eines Hilbertraumes H in sich heißt ein positiv-operatorwertiges Maß (PO-Maß), wenn für alle $x \in H$ die Abbildungen $\langle \Phi(\cdot)\, x, x\rangle\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ σ-additiv sind.

Im folgenden Lemma bedeutet eine Zerlegung (E_i) stets ein endliches System $E_1, \ldots, E_r$ disjunkter Mengen aus Σ mit $\bigcup_1^r E_i = S$. Φ ist ein beliebiges PO-Maß auf Σ.

Lemma 1.1. i) *Es ist*

$$\sup\left\{\left|\sum \Phi(E_i)\,\alpha_i\right| : (E_i) \textit{ Zerlegung};\ \alpha_i \in \mathbb{C} \textit{ mit } |\alpha_i| \leqq 1\right\} = |\Phi(S)|.$$

ii) *Bei beliebigem endlich-dimensionalem Teilraum* $L \subset H$ *ist*

$$\sup\left\{\left|\sum \Phi(E_i)\, x_i\right| : (E_i) \text{ Zerlegung; } x_i \in L \text{ mit } |x_i| \leqq 1\right\} \leqq |\Phi(S)| \dim L.$$

Beweis. i) Nach der Schwarzschen bzw. Hölderschen Ungleichung ist für beliebige $x, y \in H$, eine Zerlegung (E_i) und komplexe α_i mit $|\alpha_i| \leqq 1$

$$\begin{aligned}|\langle \sum \alpha_i\, \Phi(E_i)\, x, y\rangle| &\leqq \sum |\langle \Phi(E_i)\, x, y\rangle| \leqq \sum \langle \Phi(E_i)\, x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle \Phi(E_i)\, y, y\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq \left(\sum \langle \Phi(E_i)\, x, x\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \langle \Phi(E_i)\, y, y\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \leqq |\Phi(S)|\, |x|\, |y|.\end{aligned}$$

Daraus liest man unmittelbar $\sup\{\ldots\} \leqq |\Phi(S)|$ ab, wobei die Gleichheit trivialerweise erreicht wird.

ii) Sei (E_i) eine Zerlegung und $x_i \in L$ mit $|x_i| \leqq 1$. Für eine Orthonormalbasis $\{y_1, \ldots, y_n\}$ von L ist dann

$$\begin{aligned}\left|\sum \Phi(E_i)\, x_i\right| &= \left|\sum_i \Phi(E_i) \sum_k \langle y_k, x_i\rangle\, y_k\right| \leqq \sum_k \left|\left(\sum_i \Phi(E_i) \langle y_k, x_i\rangle\right) y_k\right| \\ &\leqq |\Phi(S)| \sum |y_k| = n\, |\Phi(S)| \qquad \text{nach i).} \quad \text{Q.E.D.}\end{aligned}$$

Auf Grund der Additivität von Φ sind die für Σ-meßbare Stufenfunktionen f: $S \to H$ (oder $\mathbb{C}$) definierten Abbildungen

$$\int d\Phi\colon \int d\Phi f = \sum_{x \in f(S)} \Phi(\{s \in S : f(s) = x\})x \qquad \in H \left(\text{oder } \mathscr{L}(H)\right)$$

linear. Lemma 1.1 besagt, daß $\int d\Phi$ als Abbildungen der meßbaren komplex- bzw. L-wertigen Stufenfunktionen in $\mathscr{L}(H)$ bzw. in H stetig sind bezüglich der Supremums-Norm $|\ |_\infty$ im Definitionsbereich von $\int d\Phi$. Durch stetige Ausdehnung erhält man also eindeutig definierte stetige Abbildungen $\int d\Phi$: $B \to \mathscr{L}(H)$ bzw. $\int d\Phi$: $B \otimes L \to H$, wobei $B = \{\varphi\colon S \to \mathbb{C}\colon \varphi$ beschränkt, Σ-meßbar$\}$ und $B \otimes L = \{\text{endl.} \sum \varphi_i x_i\colon \varphi_i \in B,\ x_i \in L\}$. Natürlich stimmen die so definierten Abbildungen $\int d\Phi$ auf $(B \otimes L_1) \cap (B \otimes L_2)$ für zwei beliebige endlich-dimensionale Teilräume $L_1, L_2 \subset H$ überein und fließen deshalb aus einer wohldefinierten linearen Abbildung $\int d\Phi$: $B \otimes H = \bigcup_{\dim L < \infty} B \otimes L \to H$.

Lemma 1.2. i) *Durch*

$$\langle \sum \varphi_i\, x_i, \sum \psi_k\, y_k\rangle_\Phi = \sum_{i,k} \langle (\int d\Phi\, \varphi_i\, \overline{\psi}_k)\, x_i, y_k\rangle_H$$

wird eine positiv semidefinite Sesquilinearform $\langle\,,\,\rangle_\Phi$ *auf* $B \otimes H$ *gegeben.*

ii) *Bei beliebigen* $f, g \in B \otimes H$ *und* $\varphi \in B$ *ist*

$$\langle \varphi f, g\rangle_\Phi = \langle f, \overline{\varphi} g\rangle_\Phi \quad \textit{und} \quad |\langle \varphi f, f\rangle_\Phi| \leqq |\varphi|_\infty \langle f, f\rangle_\Phi.$$

iii) *Für* $f \in B \otimes H$ *ist*

$$\Phi_f\colon \Sigma \to \mathbb{R}_+ \quad \textit{mit} \quad \Phi_f(E) = \langle \chi_E f, f\rangle_\Phi$$

σ-additiv, und es ist $\int d\Phi_f\, \varphi = \langle \varphi f, f\rangle_\Phi$ *bei beliebigem* $\varphi \in B$.

Beweis. i) Ist $f=\sum\varphi_i x_i=0\in B\otimes H$ und $g=\sum\psi_k y_k\in B\otimes H$ beliebig, so wird $\langle f,g\rangle_\Phi=\sum_k\langle\int d\Phi(f\bar{\psi}_k), y_k\rangle_H=0$; daher ist zunächst $\langle f,g\rangle_\Phi$ unabhängig von der Summendarstellung von $f,g\in B\otimes H$ wohldefiniert. Um für $f=\sum\varphi_i x_i\in B\otimes H$ zu zeigen, daß $\langle f,f\rangle_\Phi\geqq 0$ ist, können wegen der Stetigkeit von $\int d\Phi\colon B\to\mathscr{L}(H)$ die φ_i als Stufenfunktionen angenommen werden. Dann ist aber auch f Stufenfunktion, also $f=\sum x_k\chi_{E_k}$ mit einer Zerlegung (E_k), und es folgt

$$\langle f,f\rangle_\Phi=\sum_{i,k}\langle\Phi(E_i\cap E_k)x_i,x_k\rangle_H=\sum\langle\Phi(E_i)x_i,x_i\rangle_H\geqq 0.$$

ii) Die erste Aussage ist trivial. Für den Beweis der zweiten folgt aus der Stetigkeit der Abbildung $\int d\Phi\colon B\to\mathscr{L}(H)$ zunächst wieder, daß φ und f als Stufenfunktionen angenommen werden können: $\varphi=\sum\alpha_i\chi_{E_i}$, $f=\sum x_k\chi_{F_k}$. Dann wird

$$\langle\varphi f,f\rangle_\Phi=\sum_{i,j,k}\alpha_i\langle\Phi(E_i\cap F_j\cap F_k)x_j,x_k\rangle=\sum_{i,k}\alpha_i\langle\Phi(E_i\cap F_k)x_k,x_k\rangle,$$

also

$$|\langle\varphi f,f\rangle_\Phi|\leqq\max_i|\alpha_i|\sum_{i,k}\langle\Phi(E_i\cap F_k)x_k,x_k\rangle=|\varphi|_\infty\langle f,f\rangle_\Phi.$$

iii) Die σ-Additivität der Φ_f folgt für Stufenfunktionen f sofort aus der σ-Additivität des PO-Maßes Φ. Bei beliebigem $f=\sum\varphi_i x_i\in B\otimes H$ erhält man durch gleichmäßige Approximation der $\varphi_i\in B$ durch Stufenfunktionen eine Folge f_n von Stufenfunktionen aus $B\otimes H$, für die wegen der Stetigkeit von $\int d\Phi\colon B\to\mathscr{L}(H)$ gilt $\langle f-f_n,f-f_n\rangle_\Phi\to 0$ und also nach ii) auch $\langle\chi_E(f-f_n),f-f_n\rangle_\Phi\to 0$ gleichmäßig in $E\in\Sigma$, womit die σ-Additivität von Φ_f aus derjenigen der Φ_{f_n} folgt. Die Formel $\int d\Phi_f\,\varphi=\langle\varphi f,f\rangle_\Phi$ ist wiederum für Stufenfunktionen $\varphi\in B$ trivial und folgt daher allgemein wegen ii).

Definition. Für ein PO-Maß $\Phi\colon\Sigma\to\mathscr{L}(H)_+$ sei $L^2(\Phi,H)$ die Hilbertraum-Vervollständigung von $B\otimes H$ bezüglich des Skalarproduktes $\langle\,,\rangle_\Phi$, also der von der Gesamtheit der Klassen äquivalenter Cauchyfolgen bezüglich der Halbnorm $|\cdot|_\Phi=\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi^{\frac{1}{2}}$ gebildete Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\,,\rangle_\Phi$. Für $\varphi\in B$ bezeichne $[\varphi]$ den nach Lemma 1.2 ii) durch stetige Ausdehnung der Abbildung $f\to\varphi f$ von $B\otimes H$ in sich definierten Operator aus $\mathscr{L}(L^2(\Phi,H))$.

Bemerkung 1.3. i) Offensichtlich übertragen sich die Aussagen ii) und damit auch iii) von Lemma 1.2 auf den Fall beliebiger $f,g\in L^2(\Phi,H)$.

ii) Ist $\Phi=1\mu$ mit einem skalaren Maß $\mu\colon\Sigma\to\mathbb{R}_+$, und dem Einsoperator $1\in\mathscr{L}(H)$, so kann natürlich $L^2(\Phi,H)$ mit dem üblichen Raum $L^2(\mu,H)$ der (Äquivalenzklassen mod μ aller) meßbaren Funktionen $f\colon S\to H$ mit μ-integrierbarem Betragsquadrat identifiziert werden. Ist allgemeiner $\Phi=T(\cdot)\mu$ mit einer schwach μ-integrierbaren Funktion $T\colon S\to\mathscr{L}(H)_+$, d.h. ist für alle $x\in H$ die skalare Funktion $\langle T(\cdot)x,x\rangle$ μ-integrierbar, und gilt

$$\langle\Phi(E)x,x\rangle=\int_E d\mu(s)\langle T(s)x,x\rangle\qquad\text{für jedes } E\in\Sigma,$$

so wird natürlich für $f\in B\otimes H$

$$\langle f,f\rangle_\Phi=\int d\mu(s)\langle T(s)f(s),f(s)\rangle_H=\int d\mu(s)\,|\sqrt{T(s)}f(s)|_H^2.$$

Ist dann der Wertebereich von $T(s)$ und damit auch der von $\sqrt{T(s)}$ für μ-fast alle $s\in S$ abgeschlossen in H (was trivialerweise bei endlich-dimensionalem H immer der Fall ist), so zeigt man leicht die Vollständigkeit von

$$\mathscr{F}=\{f\colon S\to H\colon \sqrt{T(\cdot)}\,f(\cdot)\in L^2(\mu,H)\}$$

bezüglich der Halbnorm

$$|f|=\left(\int d\mu(s)\,|\sqrt{T(s)}\,f(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

so daß $L^2(\Phi,H)$ mit dem Hilbertraum $\mathscr{F}/\mathscr{N}$, $\mathscr{N}=\{f\in\mathscr{F}\colon |f|=0\}$, von (Äquivalenzklassen von) Funktionen identifiziert werden kann. Dagegen zeigt schon der Fall $T(s)=T$ mit einem konstanten $T\in\mathscr{L}(H)_+$, dessen Wertebereich nicht abgeschlossen ist, daß eine solche Interpretation von $L^2(\Phi,H)$ als Funktionenraum im allgemeinen nicht möglich ist: konvergiert etwa für eine Folge (x_n) in H die Folge $(\sqrt{T}x_n)$ in H gegen ein $x_0\notin\sqrt{T}H$, so kann für kein $f\in\mathscr{F}$ die Folge der konstanten Funktionen $\sqrt{T}x_n$ in $L^2(\mu,H)$ gegen $\sqrt{T}f$ konvergieren, da hierfür notwendig $\sqrt{T}f(s)=x_0$ μ-f.ü. sein müßte.

iii) Ist $\Phi\colon \Sigma\to\mathscr{L}(H)_+$ ein PO-Maß und H' ein weiterer Hilbertraum, so verallgemeinert $\mathscr{L}(H',L^2(\Phi,H))$ mit der $\mathscr{L}(H')$-wertigen Sesquilinearform $(A,B)=B^*A$ den von Rosenberg [14] für endlich-dimensionale H,H' betrachteten Hilbertraum $L_{2,\Phi}$. Da bei endlich-dimensionalem H natürlich $\Phi=T(\cdot)\,\mu$ mit einem geeigneten skalaren Maß μ ist, zeigt Bemerkung ii), daß hier $L^2(\Phi,H)$ und damit bei endlich-dimensionalem H' auch $\mathscr{L}(H',L^2(\Phi,H))$ als Funktionenraum aufgefaßt werden kann und mit $L^2(\Phi,H)$ auch in den üblichen Operatortopologien vollständig ist, insbesondere in der in [14] betrachteten Norm $(\mathrm{Spur}\,A^*A)^{\frac{1}{2}}$.

2. Punktweise Struktur von $L^2(\Phi,H)$

Nach der Bemerkung ii) des vorigen Abschnitts kann $L^2(\Phi,H)$ bei unendlich-dimensionalem H im allgemeinen nicht als Funktionenraum aufgefaßt werden. Andererseits induziert die Algebra der Multiplikationsoperatoren $[\varphi]$ mit $\varphi\in B$ eine gewisse punktweise Struktur in $L^2(\Phi,H)$.

Definition. Seien H,H' komplexe Hilberträume und $\Phi\colon \Sigma\to\mathscr{L}(H)_+$, $\Phi'\colon \Sigma\to\mathscr{L}(H')_+$ PO-Maße. Eine lineare Abbildung $A\colon L^2(\Phi,H)\to L^2(\Phi',H')$ heiße punktweise, wenn gilt $A[\varphi]=[\varphi]A$ für alle $\varphi\in B$.

Man überlegt sich leicht, daß in einfachen Fällen, insbesondere bei endlich-dimensionalen H,H', ein „punktweiser" Operator A wirklich in der punktweisen Anwendung einer Funktion $A\colon S\to\mathscr{L}(H,H')$ besteht.

Satz 2.1. *Sei $\Phi\colon \Sigma\to\mathscr{L}(H)_+$ ein PO-Maß mit separablem $L^2(\Phi,H)$. Dann gilt:*

i) *Es existieren Wahrscheinlichkeitsmaße μ auf Σ so, daß für $E\in\Sigma$ genau dann $\Phi(E)=0$ ist, wenn $\mu(E)=0$ ist.*

ii) *Zu jedem Maß $\lambda\colon \Sigma\to\mathbb{R}_+$ mit $\Phi\ll\lambda$ (also mit $\Phi(E)=0$ für alle $E\in\Sigma$ mit $\lambda(E)=0$) existieren punktweise Isometrien $I\colon L^2(\Phi,H)\to L^2(\lambda,H)$.*

Beweis. i) Für $f\in L^2(\Phi,H)$ sei

$$M_f=\overline{sp}\{[\varphi]f\colon \varphi\in B\}\subset L^2(\Phi,H).$$

Nach dem Zornschen Lemma existieren maximale, wegen der Separabilität von $L^2(\Phi, H)$ höchstens abzählbar unendliche Systeme $\{f_1, f_2, \dots\} \subset L^2(\Phi, H)$ mit $\langle f_n, f_n\rangle_\Phi = 1$ und paarweise orthogonalen M_{f_n}. Dann ist also $L^2(\Phi, H) = \bigoplus_1^\infty M_{f_n}$. Wir betrachten noch die zu den f_n nach Lemma 1.2 iii) gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_n = \Phi_{f_n}$. Wegen der Orthogonalität der M_{f_n} ist dann für eine endliche Linearkombination $f = \sum_1^r \alpha_n f_n \in L^2(\Phi, H)$ natürlich $\Phi_f = \sum_1^r \mu_n$. Da solche f dicht in $L^2(\Phi, H)$ liegen, erfüllt also das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} \mu_n$ die Behauptung i).

ii) Ist H unendlich-dimensional und $\{x_1, x_2, \dots\}$ eine Folge orthonormierter Vektoren aus H, so definiert die Abbildung

$$J\colon \sum_1^r [\varphi_n] f_n \to \sum_1^r \varphi_n \sqrt{\frac{d\mu_n}{d\mu}}\, x_n \qquad (\varphi_n \in B \text{ für } n = 1, \dots, r;\ r = 1, 2, \dots)$$

eine punktweise Isometrie von $L^2(\Phi, H)$ in $L^2(\mu, H)$. Denn zunächst ist J so auf dem von $\bigcup_1^\infty M_{f_n}$ aufgespannten dichten Teilraum von $L^2(\Phi, H)$ definiert. Wegen Lemma 1.2 iii) ist weiter

$$|[\varphi_n] f_n|_{L^2(\Phi, H)} = |\varphi_n|_{L^2(\mu_n, \mathbb{C})} = \left|\varphi_n \sqrt{\frac{d\mu_n}{d\mu}}\right|_{L^2(\mu, \mathbb{C})} = \left|\varphi_n \sqrt{\frac{d\mu_n}{d\mu}}\, x_n\right|_{L^2(\mu, H)},$$

so daß J auf jedem M_{f_n} isometrisch ist. Da schließlich die M_{f_n} paarweise orthogonal sind und durch J auf paarweise orthogonale Teilräume von $L^2(\mu, H)$ abgebildet werden, ist J auf dem ganzen von $\bigcup_1^\infty M_{f_n}$ aufgespannten linearen Teilraum von $L^2(\Phi, H)$ isometrisch und kann deshalb zu einer, offensichtlich punktweisen, Isometrie von $L^2(\Phi, H)$ in $L^2(\mu, H)$ fortgesetzt werden. Ist schließlich $\mu \ll \lambda$, und schließt man an J noch die durch Multiplikation mit $\sqrt{d\mu/d\lambda}$ definierte punktweise Isometrie von $L^2(\mu, H)$ in $L^2(\lambda, H)$ an, so erhält man eine punktweise Isometrie $I\colon L^2(\Phi, H) \to L^2(\lambda, H)$ der in Teil ii) behaupteten Art.

Bei endlich-dimensionalem H ist natürlich $\Phi = T(\cdot)\lambda$ mit einer Dichte $T\colon S \to \mathscr{L}(H)_+$, und die zunächst auf $B \otimes H$ durch $f \to \sqrt{T(\cdot)} f(\cdot)$ definierte Abbildung läßt sich trivialerweise zu einer punktweisen Isometrie $I\colon L^2(\Phi, H) \to L^2(\lambda, H)$ fortsetzen.

Bemerkung 2.2. Die Existenz punktweiser Isometrien $I\colon L^2(\Phi, H) \to L^2(\Phi', H')$ steht in engem Zusammenhang mit dem Satz von Radon-Nikodym. Wir beschränken uns dabei auf den für das folgende allein interessanten Fall, daß $\Phi' = \mu 1$ mit einem skalaren Maß $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$ ist. Dann gilt also

$$\langle [\chi_E] f, g\rangle_\Phi = \int_E d\mu(s) \langle I f(s), I g(s)\rangle_{H'}, \qquad \text{alle } E \in \Sigma \text{ und } f, g \in L^2(\Phi, H), \tag{2}$$

insbesondere

$$\Phi \ll \mu \quad \text{und} \quad \frac{d\langle \Phi(\cdot) x, y\rangle}{d\mu}(s) = \langle I x(s), I y(s)\rangle \qquad \mu\text{-f.ü. in } S$$

für alle $x, y \in H$. Ist speziell im Sinne von Bemerkung 1.3 ii) $\Phi = T(\cdot)\,\mu$ mit einer schwach integrierbaren Dichte $T\colon S \to \mathscr{L}(H)_+$, so gilt also

$$\langle T(s)\,x, y\rangle_H = \langle I\,x(s), I\,y(s)\rangle_{H'} \quad \mu\text{-f.ü., für alle } x, y \in H.$$

Ist H separabel mit einer Orthonormalbasis $\{x_1, x_2, \ldots\}$, so sind daher die zunächst auf der linearen Hülle von $\{x_1, x_2, \ldots\}$ durch $I(s)\,x_i = I\,x_i(s)$ μ-f.ü. definierten linearen Abbildungen $I(s)$ stetig und somit zu Abbildungen $I(s) \in \mathscr{L}(H, H')$ stetig auf ganz H fortsetzbar. Diese faktorisieren dann T gemäß $T(s) = I(s)^* I(s)$ μ-f.ü., und umgekehrt definiert natürlich jede solche Faktorisierung $I\colon S \to \mathscr{L}(H, H')$ von T durch punktweise Anwendung eine punktweise Isometrie von $L^2(\Phi, H)$ in $L^2(\mu, H')$.

3. Stationäre Operatorfolgen und *PO*-Maße

Wie zu Beginn des 1. Abschnitts sei $(F_n)_{n=\ldots,-1,0,1,\ldots}$ eine stationäre Operatorfolge in $\mathscr{L}(H, H')$; $(M_n)_{n=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,\infty}$ sei die nach (1) zugehörige Folge von Teilräumen von H', und $W\colon M_{-\infty} \to M_{-\infty}$ die unitäre Shiftabbildung mit $F_n = W^{-n} F_0$ für alle n. S bezeichne von jetzt an immer die Teilmenge $\{s \in \mathbb{C}\colon |s| = 1\}$ der komplexen Zahlen und Σ die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von S; $e\colon S \to \mathbb{C}$ sei die Identität: $e(s) = s$, $s \in S$.

Satz 3.1. *Es gibt genau ein PO-Maß $\Phi\colon \Sigma \to \mathscr{L}(H)_+$, so daß die Zuordnung $\sum F_k x_k \to \sum e^{-k} x_k$ sich linear und stetig zu einer unitären Abbildung V von $M_{-\infty}$ auf $L^2(\Phi, H)$ fortsetzen läßt.*

Beweis. Natürlich kann es höchstens ein solches Φ geben, da ja durch die Isometrie von V insbesondere die $\langle \Phi(E)\,x, y\rangle_H = \langle V^{-1}\chi_E x, V^{-1}\chi_E y\rangle_{H'}$ für alle $x, y \in H$ und $E \in \Sigma$ festgelegt sind. Ist $P\colon \Sigma \to \mathscr{L}(M_{-\infty})$ das Spektralmaß mit $W = \int dP(s)\,s$, so zeigen wir, daß das *PO*-Maß Φ mit $\Phi(E) = F_0^* P(E)\,F_0$ für $E \in \Sigma$ die behaupteten Eigenschaften hat. Die Isometrie von V und damit auch die Abgeschlossenheit des Wertebereiches $VM_{-\infty}$ in $L^2(\Phi, H)$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\Big\langle \sum_k F_k x_k, \sum_l F_l y_l\Big\rangle_{H'} &= \Big\langle \sum_k W^{-k} F_0 x_k, \sum_l W^{-l} F_0 y_l\Big\rangle_{H'}\\ &= \sum_{k,l} \Big\langle F_0^* \Big(\int dP(s)\,s^{l-k}\Big) F_0 x_k, y_l\Big\rangle_H = \Big\langle \sum_{k,l} e^{-k} x_k, e^{-l} y_l\Big\rangle_\Phi.\end{aligned}$$

Der Wertebereich von V enthält nach Lemma 1.2 iii) insbesondere für jedes $x \in H$ alle durch Funktionen φx mit $\varphi \in L^2(\langle \Phi(\cdot)\,x, x\rangle, \mathbb{C})$ definierten Elemente aus $L^2(\Phi, H)$ und ist andererseits ein abgeschlossener linearer Teilraum von $L^2(\Phi, H)$. Somit ist V surjektiv.

Bemerkung 3.2. i) In Satz 3.1 können beliebige *PO*-Maße Φ auftreten: Ist etwa $\Psi\colon \Sigma \to \mathscr{L}(H)_+$ ein vorgegebenes *PO*-Maß und bezeichnet F_n für ganzzahliges n die Abbildung aus $\mathscr{L}(H, L^2(\Psi, H))$, welche $x \in H$ auf das zu $e^{-n} x$ gehörige Element $\in L^2(\Psi, H)$ abbildet, so erhält man offenbar eine stationäre Operatorfolge, deren *PO*-Maß Φ auf Grund der Eindeutigkeitsaussage von 3.1 gleich Ψ ist.

ii) Für das *PO*-Maß Φ von Satz 3.1 ergibt sich im Beweis die Darstellung $\Phi(\cdot) = F_0^* P(\cdot)\,F_0$ mit dem zu der Shifttransformation W gehörigen Spektralmaß

P. Insbesondere haben wir die übliche „Spektraldarstellung"

$$F_n x = W^{-n}(F_0 x) = \left(\int dP(s)\, s^{-n}\right) F_0 x = \int d\big(P(s) F_0 x\big)\, s^{-n}, \qquad x \in H$$

der Folge $(F_n x)$ nach dem „orthogonalen Vektormaß" $P(\cdot) F_0 x$.

iii) Hat man wie in ii) das PO-Maß Φ einer stationären Folge (F_n) in der Form $F_0{}^* P(\cdot) F_0$ dargestellt und definiert für eine meßbare Stufenfunktion $f = \sum x_i \chi_{E_i}$: $S \to H$ das Integral $\int d(P(s) F_0) f(s) = \sum P(E_i) F_0 x_i$, so wird $|\int d(P(s) F_0) \cdot f(s)|^2_{H'} = \langle f, f \rangle_\Phi$. Wir können deshalb dieses Integral zu einer linearen Abbildung $\int d(P(s) F_0)$: $L^2(\Phi, H) \to M_{-\infty}$ stetig fortsetzen. Diese Abbildung ist offenbar gerade die Umkehrung V^{-1} der unitären Abbildung V des Satzes 3.1, die sich also auch im allgemeinen Falle formal als Integral schreiben läßt (vgl. Rozanov [15], Chapter I.7 und 8).

Bezeichnet

$$A = \left\{ \sum_0^n \alpha_k e^k \colon \alpha_k \in \mathbb{C};\; n = 0, 1, \ldots \right\}$$

die Algebra der analytischen trigonometrischen Polynome, ferner $\mathcal{M}(\Phi)$ für ein PO-Maß Φ: $\Sigma \to \mathcal{L}(H)_+$ den von $A \otimes H$ in $L^2(\Phi, H)$ erzeugten abgeschlossenen Unterraum, schließlich $U = [e]$ die durch Multiplikation mit e entstehende unitäre Abbildung von $L^2(\Phi, H)$ auf sich, so wird im Satz 3.1 offenbar $VM_n = U^n \mathcal{M}(\Phi)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Insbesondere wird die Untersuchung der Inklusionen $M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_\infty$ auf das Studium der Isometrie U: $\mathcal{M}(\Phi) \to \mathcal{M}(\Phi)$ reduziert.

Wir benutzen dabei die folgenden bekannten Tatsachen über Isometrien in Hilberträumen (vgl. etwa Sz.-Nagy-Foiaş [12], Chapter I.1).

Satz 3.3 (Wold-Zerlegung). *Sei H ein Hilbertraum, U: $H \to H$ eine Isometrie, $L = H \ominus UH$, $H_1 = \bigcap_0^\infty U^n H$, $H_2 = H \ominus H_1$. Dann gilt:*

i) $H_2 = \bigoplus_0^\infty U^n L$.

ii) *H_1 ist doppelt invariant, d.h. $UH_1 = H_1$, und H_2 ist einfach invariant, d.h. $\bigcap_0^\infty U^n H_2 = 0$.*

iii) *Ist $H = H_1' \oplus H_2'$ mit doppelt invariantem H_1' und einfach invariantem H_2', so ist $H_1' = H_1$, $H_2' = H_2$.*

Eine stationäre Operatorfolge (F_n) ist also genau dann determiniert (d.h. $M_\infty = M_{-\infty}$) bzw. vollständig undeterminiert (d.h. $M_\infty = 0$), wenn für das zugehörige PO-Maß Φ der Raum $\mathcal{M}(\Phi)$ doppelt bzw. einfach invariant ist. In Abschnitt 5 werden einige allgemeine Kriterien hierfür abgeleitet.

4. Lebesgue-Zerlegung von Φ und Wold-Zerlegung

Wir verwenden die am Ende des vorigen Abschnittes eingeführten Begriffe und Bezeichnungen; außerdem sei m das normierte Lebesguemaß auf S. Der komplexe Hilbertraum H wird von nun an separabel vorausgesetzt. Man überzeugt sich leicht, daß dann auch $L^2(\Phi, H)$ separabel ist, so daß wir insbesondere Satz 2.1 anwenden können. Die Begriffe invariant, einfach invariant (abgekürzt e.i.), doppelt invariant (d.i.) für abgeschlossene lineare Teilräume von $L^2(\Phi, H)$ beziehen sich von nun an immer auf die Isometrie $U=[e]$. Wir verwenden die triviale Tatsache, daß für eine beliebige punktweise Isometrie $I\colon L^2(\Phi, H) \to L^2(\Phi', H')$ ein Teilraum $M \subset L^2(\Phi, H)$ genau dann invariant bzw. e.i. bzw. d.i. ist, wenn dies für $IM \subset L^2(\Phi', H')$ zutrifft (auf Grund der Isometrie von I ist IM abgeschlossen, wenn M abgeschlossen ist).

Satz 4.1. *Sei $\Phi\colon \Sigma \to \mathscr{L}(H)_+$ ein PO-Maß.*

i) *Es gibt eine F_σ-Menge $N \in \Sigma$ mit $m(N)=0$ und $\chi_{N'}\Phi \ll m$ ($\chi_{N'}$ = charakteristische Funktion des Komplements N' von N).*

ii) *Für N aus* i) *seien $\Phi_a = \chi_{N'}\Phi$ und $\Phi_s = \chi_N \Phi$ der m-absolutstetige bzw. singuläre Teil von Φ; $i_a\colon L^2(\Phi_a, H) \to L^2(\Phi, H)$ bzw. $i_s\colon L^2(\Phi_s, H) \to L^2(\Phi, H)$ seien die durch Nullsetzen außerhalb N' bzw. N definierten isometrischen Einbettungen, $p_a = i_a^*$ bzw. $p_s = i_s^*$ die dazu dualen Projektionen. Dann ist*

$$\mathscr{M}(\Phi) = i_s L^2(\Phi_s, H) \oplus i_a \mathscr{D}(\Phi_a) \oplus i_a \mathscr{E}(\Phi_a),$$

wobei $\mathscr{D}(\Phi_a)$ bzw. $\mathscr{E}(\Phi_a)$ den d.i. bzw. e.i. Teil der Wold-Zerlegung von $\mathscr{M}(\Phi_a)$ gemäß Satz 3.3 *bezeichnen.*

Beweis. i) Es sei $\{x_1, x_2, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von H. Dann liefert die gewöhnliche Lebesgue-Zerlegung der skalaren Maße $\mu_i = \langle \Phi(\cdot)\, x_i, x_i \rangle$ für $i = 1, 2, \ldots$ jeweils Mengen $M_i \in \Sigma$ mit $m(M_i)=0$ und $\chi_{M_i'} \mu_i \ll m$. Auf Grund der Innenregularität der Bairemaße μ_i gibt es weiter F_σ-Mengen $N_i \subset M_i$ mit $\mu_i(M_i) = \mu_i(N_i)$ für alle $i = 1, 2, \ldots$. Die F_σ-Menge $N = \bigcup_1^\infty N_i$ hat dann offensichtlich die in i) behaupteten Eigenschaften.

ii) Bei beliebigem $f \in \mathscr{M}(\Phi)$ sind offensichtlich $p_a f \in \mathscr{M}(\Phi_a)$ und $p_s f \in \mathscr{M}(\Phi_s)$. Da $f = i_s p_s f \oplus i_a p_a f$, erhält man die Inklusion $\mathscr{M}(\Phi) \subset i_s L^2(\Phi_s, H) \oplus i_a \mathscr{D}(\Phi_a) \oplus i_a \mathscr{E}(\Phi_a)$ (die Orthogonalität von $\mathscr{D}(\Phi_a)$ und $\mathscr{E}(\Phi_a)$ bleibt bei Anwendung der Isometrie i_a erhalten). Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus den beiden folgenden Hilfssätzen.

Hilfssatz 4.2 (vgl. Lumer [10], S. 39). *Es ist $i_a \mathscr{M}(\Phi_a) \subset \mathscr{M}(\Phi)$ und $i_s \mathscr{M}(\Phi_s) \subset \mathscr{M}(\Phi)$.*

Beweis. Nach Forelli-Ahern-Glicksberg (vgl. [10], S. 22) existieren trigonometrische Polynome $p_n \in A$ mit $|p_n(\cdot)| \leqq 1$ und $p_n(s) \to \chi_{N'}(s)$ für alle s außerhalb einer m-Nullmenge $\subset N'$. Für ein beliebiges Maß $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$ mit $\mu_s = \chi_N \mu$ gilt dann $p_n \to \chi_{N'}$ in $L^2(\mu, \mathbb{C})$, wie man für die Komponenten $\mu_a = \chi_{N'}\mu$ und $\mu_s = \chi_N \mu$ einzeln durch majorierte Konvergenz einsieht. Wendet man dies speziell auf die zu einem $g \in L^2(\Phi, H)$ gehörigen skalaren Maße Φ_g an, so hat man nach Lemma 1.2 iii) die Konvergenz $[p_n]\, g \to [\chi_{N'}]\, g$ in $L^2(\Phi, H)$. Also gilt bei vorgegebenem $f \in \mathscr{M}(\Phi_a)$ für eine Folge (f_k) in $A \otimes H$ mit $f_k \to f$ in der Norm von $L^2(\Phi_a, H)$, daß $[p_n]\, f_k \to [\chi_{N'}]\, f_k$ mit $n \to \infty$ und $[\chi_{N'}]\, f_k = i_a f_k \to i_a f$ mit $k \to \infty$, beides in der Norm von $L^2(\Phi, H)$. Da die $[p_n]\, f_k$ aus $A \otimes H$ sind, folgt $i_a f \in \mathscr{M}(\Phi)$, also die erste Behauptung. Genauso erhält man die zweite Behauptung mit Hilfe der trigonometrischen Polynome $1 - p_n$.

Hilfssatz 4.3 (vgl. König u. Tobergte [9]). *Ist ein PO-Maß Φ auf einer m-Nullmenge konzentriert, so ist $\mathscr{M}(\Phi) = L^2(\Phi, H)$ (und also insbesondere d.i.).*

Beweis. Wegen Lemma 1.2 iii) genügt es, für beliebiges $x \in H$ zu zeigen, daß A dicht liegt in $L^2(\Phi_x, \mathbb{C})$: dann enthält $\mathcal{M}(\Phi)$ insbesondere alle φx mit beschränkten meßbaren $\varphi: S \to \mathbb{C}$ und somit den in $L^2(\Phi, H)$ dichten Teilraum $B \otimes H$. Für ein $\psi \in L^2(\Phi_x, \mathbb{C})$ im Orthokomplement von A annulliert das skalare Maß $\bar{\psi}\Phi_x$ die Algebra A und ist deshalb nach dem Satz von F. und M. Riesz m-stetig. Da andererseits Φ_x auf einer m-Nullmenge konzentriert ist, muß $\bar{\psi}\Phi_x = 0$ und somit $\psi = 0 \in L^2(\Phi_x, \mathbb{C})$ sein.

Korollar 4.4. *Für $n = 0, 1, \ldots$ sei $P_n \in \mathcal{L}(L^2(\Phi_a, H))$ die Orthogonalprojektion auf $U^n \mathcal{E}(\Phi_a)$, $R_n \in \mathcal{L}(L^2(\Phi, H))$ die Orthogonalprojektion auf $U^n \mathcal{M}(\Phi)$, $Q \in \mathcal{L}(L^2(\Phi_a, H))$ die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{D}(\Phi_a)$. Dann gilt*

$$R_n = i_s\, p_s \oplus i_a\, Q p_a \oplus i_a\, P_n\, p_a$$

(Summe dreier Projektoren mit orthogonalen Wertbereichen).

Beweis. Daß auf der rechten Seite drei Orthogonalprojektoren mit paarweise orthogonalen Wertebereichen stehen, ist eine unmittelbare Folge der Definitionen; insbesondere ist ihre Summe daher die Orthogonalprojektion auf die Summe der Wertebereiche. Auf Grund von 4.1 ii) ist weiter

$$U^n \mathcal{M}(\Phi) = i_s\, L^2(\Phi_s, H) \oplus i_a\, \mathcal{D}(\Phi_a) \oplus i_a\, U^n \mathcal{E}(\Phi_a), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

da i_s und i_a punktweise (also mit U^n vertauschbar) operieren und $U^n L^2(\Phi_s, H) = L^2(\Phi_s, H)$, $U^n \mathcal{D}(\Phi_a) = \mathcal{D}(\Phi_a)$ ist. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Bemerkung 4.5. Die in Satz 4.1 gegebene Zerlegung von $\mathcal{M}(\Phi)$ verfeinert die Wold-Zerlegung $\mathcal{M}(\Phi) = \mathcal{M}(\Phi)_d \oplus \mathcal{M}(\Phi)_e$ in d.i. und e.i. Bestandteil von $\mathcal{M}(\Phi)$. Bezeichnen für $x \in H$ jeweils x_d und x_e die zur Wold-Zerlegung von $\mathcal{M}(\Phi)$ gehörigen Komponenten des durch die konstante Funktion x definierten Elements aus $\mathcal{M}(\Phi)$, und definieren wir PO-Maße Φ_d, Φ_e durch (vgl. Lemma 1.2 iii))

$$\langle \Phi_d(E)\, x, y\rangle_H = \langle [\chi_E]\, x_d, y_d\rangle_\Phi, \qquad \langle \Phi_e(E)\, x, y\rangle_H = \langle [\chi_E]\, x_e, y_e\rangle_\Phi, \qquad \text{jedes } E \in \Sigma,$$

so erhalten wir eine „Woldzerlegung“ $\Phi = \Phi_d + \Phi_e$ des PO-Maßes Φ. (Ein d.i. Teilraum von $L^2(\Phi, H)$ enthält mit f stets auch $[\chi_E] f$, wie im folgenden Satz 5.1 sogleich gezeigt wird. Deshalb ist $\langle [\chi_E]\, x_d, y_e\rangle_\Phi = \langle [\chi_E]\, x_e, y_d\rangle_\Phi = 0$ für alle $x, y \in H$ und $E \in \Sigma$). Nach Korollar 4.4 ist also $\Phi_e = \Phi_a$ und $\Phi_d = \Phi_s$ genau dann, wenn $\mathcal{M}(\Phi_a)$ e.i. ist. Dieses Ergebnis zusammen mit geeigneten Kriterien für einfache Invarianz von $\mathcal{M}(\Phi_a)$ (z.B. Korollar 6.4 dieser Arbeit bei endlich-dimensionalem H) umfaßt entsprechende Resultate von Robertson und anderen, vgl. [13], Theorem 5.2.

5. Invariante Teilräume von $L^2(\Phi, H)$

Es sei wieder H ein separabler komplexer Hilbertraum und $\Phi: \Sigma \to \mathcal{L}(H)_+$ ein beliebiges PO-Maß auf der Peripherie S des Einheitskreises der komplexen Zahlenebene.

Satz 5.1. *Ein abgeschlossener invarianter Teilraum $M \subset L^2(\Phi, H)$ ist genau dann d.i., wenn die Orthogonalprojektion auf M ein punktweiser Operator ist.*

Beweis. Lemma 1.2 iii) kann offenbar so interpretiert werden, daß $E \to [\chi_E]$ das zu U gehörige Spektralmaß ist. Doppelte Invarianz von M bedeutet Invarianz von M unter U und U^*, und dies bedeutet Invarianz bei allen $[\chi_E]$, $E \in \Sigma$. Dies wiederum ist äquivalent der Vertauschbarkeit des Projektors auf M mit allen $[\chi_E]$ und daher auch mit allen $[\varphi]$, $\varphi \in B$, was zu zeigen war.

Satz 5.2 (vgl. [12], S. 78). *Ein abgeschlossener invarianter Teilraum $M \subset L^2(\Phi, H)$ ist genau dann e.i., wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

i) *Für jedes $f \in M$ ist $M(f) = \overline{sp}\,\{U^n f: n = 0, 1, \ldots\}$ e.i.*

ii) *Für jedes $f \neq 0$ aus M gilt für das in Lemma 1.2 iii) definierte Maß Φ_f*

$$\Phi_f \ll m \quad und \quad \exp\left(\int d\,m(s) \log \frac{d\Phi_f}{d\,m}(s)\right) > 0.$$

iii) *Für jedes $f \neq 0$ aus M ist $\Phi_f \ll m$ und $m \ll \Phi_f$.*

Beweis. M e.i. $\Rightarrow$ i) Nach Satz 3.3 ist M genau dann e.i., wenn es keinen d.i. Teilraum N mit $0 \neq N \subset M$ gibt. Insbesondere ist dann also auch jeder Teilraum $M(f)$ e.i.

i) $\Rightarrow$ ii) Nach Lemma 1.2 iii) wird $\overline{sp}\,\{U^n f: n = 0, \pm 1, \ldots\}$ durch die Zuordnung $[\varphi] f \to \varphi$ isometrisch und punktweise auf $L^2(\Phi_f, \mathbb{C})$ abgebildet, wobei $M(f)$ auf die Hülle $\mathcal{M}(\Phi_f)$ der Algebra A in $L^2(\Phi_f, \mathbb{C})$ übergeht. Nach i) ist also $\mathcal{M}(\Phi_f)$ e.i. Nach Satz 4.1 ii) (für den skalaren Fall $H = \mathbb{C}$) ist daher zunächst $\Phi_f \ll m$. Bildet man nun durch Multiplikation mit $\sqrt{d\Phi_f/d\,m}$ den Raum $L^2(\Phi_f, \mathbb{C})$ punktweise und isometrisch in $L^2(m, \mathbb{C})$ ab, so wird das Bild vom $\mathcal{M}(\Phi_f)$ ein e.i. Teilraum von $L^2(m, \mathbb{C})$, ist also (vgl. Helson [6], S. 8) gleich $q\,H^2(m, \mathbb{C})$ mit einer meßbaren Funktion $q\colon S \to \mathbb{C}$ vom Betrage 1. Insbesondere ist daher $\sqrt{d\Phi_f/dm} = |h(\cdot)|$ mit $h \in H^2(m, \mathbb{C})$, was wegen $\int d\,m(s) \log |h(s)| > -\infty$ für beliebige $h \neq 0$ aus $H^2(m, \mathbb{C})$ (vgl. [6], S. 21) die Behauptung ergibt.

ii) $\Rightarrow$ iii) triviale Abschwächung.

iii) $\Rightarrow M$ e.i. Würde M einen d.i. Teilraum $N \neq 0$ enthalten, so wähle man ein $f \neq 0$ in N. Da $m \ll \Phi_f \ll m$, hat die Menge $\left\{s: \frac{d\Phi_f}{d\,m}(s) \neq 0\right\}$ Lebesgue-Maß 1 und enthält daher Borelmengen E mit $0 < m(E) < 1$. Nach Satz 5.1 ist auch $g = [\chi_E] f \in N$, und natürlich $\frac{d\Phi_g}{d\,m} = \chi_E \frac{d\Phi_f}{d\,m}$. Dies ist $\neq 0$ m-f.ü. auf E, aber $= 0$ auf dem Komplement E' von E. Wegen $m(E) > 0$ und $m(E') > 0$ widerspricht das der Voraussetzung iii). Q.E.D.

Mit Hilfe punktweiser Isometrien lassen sich aus den bekannten Eigenschaften invarianter Teilräume von $L^2(m, H)$ Aussagen über invariante Teilräume von $L^2(\Phi, H)$ gewinnen. Der in Bemerkung 2.2 erläuterte Zusammenhang zwischen punktweisen Isometrien und Faktorisierungen einer Radon-Nikodym-Dichte von Φ zeigt, daß diese Methode die natürliche Verallgemeinerung der in [6], Lecture XI geschilderten Theorie ist. Wir beschränken uns dabei auf solche Resultate, die ohne irgendwelche einschränkenden Voraussetzungen über Φ gelten. Insbesondere wird nur die in Abschnitt 2 geschilderte „punktweise Struktur" von $L^2(\Phi, H)$

benutzt und nicht etwa verlangt, daß $L^2(\Phi, H)$ ein Funktionenraum sein muß, vgl. die Bemerkung 1.3 ii).

Wir benutzen die bekannte Tatsache (vgl. etwa Helson [6], S. 61), daß ein beliebiger invarianter Teilraum M von $L^2(m, H)$ von der Form

$$M = R\,L^2(m, H) \oplus V H^2(m, H_0) \tag{3}$$

ist. Dabei ist H_0 ein Teilhilbertraum von H, $H^2(m, H_0)$ die Hülle von $A \otimes H_0$ in $L^2(m, H_0)$; $R\colon S \to \mathscr{L}(H)$ und $V\colon S \to \mathscr{L}(H_0, H)$ bezeichnen (stark, d.h. angewandt auf jeden festen Vektor) meßbare Operatorfunktionen, wobei die $R(s)$ Orthogonalprojektionen und die $V(s)$ Isometrien sind, und für m-fast alle $s \in S$ die Wertebereiche $R(s)H$ und $V(s)H_0$ orthogonal in H sind. $R\,L^2(m, H)$ bezeichnet dann die Gesamtheit aller Funktionen $s \to R(s) f(s)$ aus $L^2(m, H)$ für $f \in L^2(m, H)$, entsprechend $V H^2(m, H_0)$ die Gesamtheit aller Funktionen $s \to V(s) f(s)$ für $f \in H^2(m, H_0)$.

Satz 5.3. *Es sei $\Phi = \Phi_a + \Phi_s$ die Lebesgue-Zerlegung von Φ nach Satz* 4.1 ii) *und $I\colon L^2(\Phi_a, H) \to L^2(m, H)$ eine beliebige punktweise Isometrie nach Satz* 2.1 ii). *Zu einer Darstellung* (3) *des invarianten Teilraumes $I\mathscr{M}(\Phi_a)$ von $L^2(m, H)$ definieren wir noch $E = V(\cdot)^* I\colon L^2(\Phi_a, H) \to L^2(m, H)$. Dann ist in der Metrik des Hilbertraums $L^2(\Phi, H)$ die Distanz*

$$\operatorname{dist}(f, U^n \mathscr{M}(\Phi)) = \left(\sum_{-\infty}^{n-1} |(Ef_a)^\wedge(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (f \in L^2(\Phi, H);\ n = 0, 1, \ldots).$$

Dabei bezeichnet $f_a = p_a f$ die in 4.1 ii) *definierte Projektion von $f \in L^2(\Phi, H)$ in $L^2(\Phi_a, H)$, und $\hat{g}$ für $g \in L^2(m, H)$ die durch $\hat{g}(k) = \int \frac{dt}{2\pi} e^{-ikt} g(e^{it})$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, definierte Fouriertransformierte.*

Beweis. Sind wie in Korollar 4.4 P_n bzw. Q die Orthogonalprojektionen von $L^2(\Phi_a, H)$ auf $U^n \mathscr{E}(\Phi_a)$ bzw. $\mathscr{D}(\Phi_a)$, so gilt f.ü.

$$(EP_n g)(e^{it}) = \sum_n^\infty (Eg)^\wedge(k)\, e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R};\ g \in L^2(\Phi_a, H)), \tag{$*$}$$

$$I(1 - Q) = V(\cdot)\, E. \tag{$**$}$$

Dabei ergibt sich ($*$) aus der Tatsache, daß für $g \in U^n \mathscr{E}(\Phi_a)$ offenbar

$$Eg \in U^n H^2(m, H_0) = \{h \in L^2(m, H_0)\colon \hat{h}(k) = 0 \text{ für } k < n\},$$

und andererseits für $g \in L^2(\Phi_a, H) \ominus U^n \mathscr{E}(\Phi_a)$ auch $Ig \in L^2(m, H)$ im Orthokomplement von $IU^n \mathscr{E}(\Phi_a) = V U^n H^2(m, H_0)$ und deshalb Eg im Orthokomplement von $U^n H^2(m, H_0)$ liegt.

Um die Identität ($**$) zweier punktweiser Operatoren zu zeigen, genügt es natürlich, ihre Gleichheit bei Anwendung auf ein $g \in \mathscr{M}(\Phi_a)$ nachzuweisen. Wegen

$$I(1 - Q)\, \mathscr{M}(\Phi_a) = I \mathscr{E}(\Phi_a) = V H^2(m, H_0)$$

ist aber dann $I(1 - Q)\, g = V(\cdot)\, V(\cdot)^*\, I(1 - Q)\, g = V(\cdot)\, Eg$.

Nunmehr ergibt sich die Behauptung des Satzes folgendermaßen:
Nach Korollar 4.4 ist

$$\operatorname{dist}(f, U^n \mathscr{M}(\Phi)) = |p_a f - Q p_a f - P_n p_a f|_{L^2(\Phi_a, H)} = |I(f_a - Q f_a - P_n f_a)|_{L^2(m, H)};$$

nach (**) ist dies weiter

$$= |V(\cdot) E f_a - I P_n f_a|_{L^2(m, H)} = |E f_a - E P_n f_a|_{L^2(m, H)},$$

und dies ist nach (*) gleich $\left(\sum_{-\infty}^{n-1} |(E f_a)\hat{}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, wie behauptet. Q.E.D.

Nach diesem Satz hängt also der Abstand von $U^n \mathscr{M}(\Phi)$ nur vom m-stetigen Teil von Φ ab. Eine einfache Folgerung ist auch das

Korollar 5.4. *$\mathscr{M}(\Phi)$ ist genau dann e.i., wenn $\Phi \ll m$ und eine „analytische" punktweise Isometrie E: $L^2(\Phi, H) \to L^2(m, H)$ existiert mit $E\mathscr{M}(\Phi) \subset H^2(m, H)$.*

Beweis. Daß die Existenz einer analytischen punktweisen Isometrie E die einfache Invarianz von $\mathscr{M}(\Phi)$ ergibt, folgt z.B. aus 5.2 ii) oder auch aus der bekannten Tatsache, daß $H^2(m, H)$ keine d.i. Teile $\neq 0$ enthält. Ist umgekehrt $\mathscr{M}(\Phi)$ e.i., so muß zunächst nach 4.1 ii) $\Phi \ll m$, also $\Phi = \Phi_a$ sein. Dann leistet aber die in Satz 5.3 definierte Abbildung E das Verlangte: Nach Definition ist E punktweise und $E\mathscr{M}(\Phi) = E\mathscr{E}(\Phi) = H^2(m, H_0) \subset H^2(m, H)$. Ist $\mathscr{M}(\Phi)$ e.i., also $\bigcap_0^\infty U^n \mathscr{M}(\Phi) = 0$, so liefert die in 5.3 gegebene Distanzformel außerdem für $f \in L^2(\Phi, H)$

$$|f|_{L^2(\Phi, H)} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(f, U^n \mathscr{M}(\Phi)) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |(Ef)\hat{}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |Ef|_{L^2(m, H)},$$

also die Isometrie von E.

Bemerkung 5.5. Ist $\Phi = T(\cdot)\, m$, so ist nach Bemerkung 2.2 das Korollar 5.4 gerade das bekannte Faktorisierbarkeitskriterium für die einfache Invarianz von $\mathscr{M}(\Phi)$ (vgl. [6], S. 117).

6. Der Vorhersageirrtum

Ist (F_n) eine stationäre Operatorfolge in $\mathscr{L}(H, H')$ mit der nach (1) zugehörigen Folge von Teilräumen $M_n \subset H'$, so heißt der Operator

$$C = F_0^* (1 - p) F_0 \qquad \text{mit } p = \text{Orthogonalprojektion von } M_{-\infty} \text{ auf } M_1$$

von H in sich der Vorhersageirrtum der Folge (vgl. Gangolli [4], S. 897).

Wir setzen wieder H separabel voraus und betrachten das zu (F_n) nach Satz 3.1 gehörige PO-Maß Φ.

Zunächst ergibt sich aus den Sätzen 3.1 und 5.3 unmittelbar für beliebige $x \in H$, daß

$$\begin{aligned} \langle Cx, x\rangle &= \operatorname{dist}^2_{L^2(\Phi, H)}(x, U\mathscr{M}(\Phi)) = \operatorname{dist}^2_{L^2(\Phi, H)}(x, A_0 \otimes H) \\ &= \operatorname{dist}^2_{L^2(\Phi_a, H)}(x_a, U\mathscr{M}(\Phi_a)) = |\textstyle\int dm(s)(E x_a)(s)|^2; \end{aligned} \tag{4}$$

hierbei ist $A_0 = \{\varphi \in A: \int dm(s)\, \varphi(s) = 0\}$. Insbesondere liest man aus (4) ab, daß $0 \leqq C \leqq \Phi_a(S) \leqq \Phi(S)$ ist, und dabei natürlich $C = 0$ genau dann, wenn $\mathscr{M}(\Phi)$ d.i. ist.

Außerdem zeigt (4), daß die Zuordnung $x \to \int dm(s)(E x_a)(s)$ eine Abbildung $(\int E) \in \mathscr{L}(H)$ definiert mit $C = (\int E)^* (\int E)$.

Das folgende Lemma gibt eine andere Faktorisierung von C (vgl. [7], S. 190–191).

Lemma 6.1. *Sei $I: L^2(\Phi_a, H) \to L^2(m, H)$ eine punktweise Isometrie. Dann existiert eine Funktion B: $S \to \mathscr{L}(H)$ mit $C = B(s)^* B(s)$, $s \in S$, und $(s \to B(s)x) \in L^2(m, H) \ominus I U \mathscr{M}(\Phi_a)$ für jedes $x \in H$.*

Beweis. Nach (4) ist für $x \in H$

$$\langle Cx, x \rangle = \inf\{\int dm(s) \langle I(x-f)(s), I(x-f)(s) \rangle : f \in U\mathscr{M}(\Phi_a)\},$$

und dieses Infimum wird durch ein Element $X \in U\mathscr{M}(\Phi_a)$ angenommen. Dann gilt also

$$\int dm(s) \langle I(x-X)(s), If(s) \rangle = 0, \qquad \text{jedes } f \in U\mathscr{M}(\Phi_a),$$

insbesondere für $f = [u](x - X)$ bei beliebigem $u \in A_0$. Die Funktion

$$s \to \langle I(x-X)(s), I(x-X)(s) \rangle$$

aus $L^1(m, \mathbb{C})$ annuliert daher A_0 und ist also konstant, d.h.

$$\langle I(x-X)(s), I(x-X)(s) \rangle = \int dm(s) \langle I(x-X)(s), I(x-X)(s) \rangle = \langle Cx, x \rangle \qquad m\text{-f.ü.}$$

Ist $\{x_1, x_2, \ldots\}$ eine feste Orthonormalbasis von H und wählt man für jedes $i = 1, 2, \ldots$ einen festen Repräsentanten der Funktion $I(x_i - X_i) \in L^2(m, H)$ so, daß die vorige Gleichung für alle x_i und damit auch alle Linearkombinationen der x_i überall auf S gilt, so erhält man durch stetige lineare Ausdehnung der Abbildungen $x_i \to I(x_i - X_i)(s)$ eine Familie von Abbildungen $B(s) \in \mathscr{L}(H)$ der behaupteten Art.

Satz 6.2. *Sei $\Phi \ll m$ und $C \geqq cP$ mit einer Konstanten $c > 0$ und der Orthogonalprojektion P von H auf das Orthokomplement des Nullraums von $\Phi(S)$. Dann ist $\mathscr{M}(\Phi)$ e.i.*

Beweis. Wegen $0 \leqq \Phi(E) \leqq \Phi(S)$ für alle $E \in \Sigma$ bilden die $\Phi(E)$ jeweils den Teilraum $H' = P(H)$ in sich ab, so daß die Einschränkung $\Phi' = \Phi(\cdot)|H'$ ein *PO*-Maß mit Werten in $\mathscr{L}(H')_+$ ist. Dann definiert $f \to Pf$ offensichtlich eine punktweise Isometrie von $L^2(\Phi, H)$ auf $L^2(\Phi', H')$, wobei $\mathscr{M}(\Phi)$ auf $\mathscr{M}(\Phi')$ übergeht (und deshalb genau dann e.i. ist, wenn $\mathscr{M}(\Phi')$ e.i. ist). Insbesondere ist für $x \in H'$

$$\operatorname{dist}_{L^2(\Phi, H)}(x, U\mathscr{M}(\Phi)) = \operatorname{dist}_{L^2(\Phi', H')}(x, U\mathscr{M}(\Phi')),$$

so daß für den nach (4) zu Φ' gehörigen Vorhersageirrtum $C' \in \mathscr{L}(H')_+$ nach Voraussetzung $C' \geqq c1$ gilt. Also kann o.B.d.A. $P = 1$ angenommen werden.

Mit den Operatoren $B(s) \in \mathscr{L}(H)$ des vorigen Lemmas ist dann

$$E = \sqrt{C}^{-1} B(\cdot)^* I: L^2(\Phi, H) \to L^2(m, H)$$

eine punktweise Isometrie: wegen $B(s)^* B(s) = C$ für $s \in S$ ist $\sqrt{C}^{-1} B(s)^*$ eine Isometrie $\in \mathscr{L}(H)$ und für festes $x \in H$ nach Lemma 6.1. $s \to \sqrt{C}^{-1} B(s)^* x$ natürlich meßbar, so daß punktweise Anwendung der Operatorfunktion $\sqrt{C}^{-1} B(\cdot)^*$ den Funktionenraum $L^2(m, H)$ isometrisch in sich abbildet. Also ist E eine punktweise Isometrie von $L^2(\Phi, H)$ in $L^2(m, H)$, und nach Korollar 5.4 bleibt nur zu zeigen, daß $E\mathscr{M}(\Phi)\subset H^2(m, H)$ ist. Da E punktweise operiert, genügt es $Ex\in H^2(m, H)$ für $x\in H$ nachzuweisen. Nach Lemma 6.1 ist aber für $z\in H$ die Funktion $s\to B(s)\,z$ orthogonal $IU\mathscr{M}(\Phi)$ und somit bei beliebigen $x, y\in H$ und $u\in A_0$

$$\int dm(s)\,u(s)\langle E\,x(s), y\rangle=\int dm(s)\langle I([u]\,x)(s), B(s)\sqrt{C}^{-1}\,y\rangle=0, \qquad \text{Q.E.D.}$$

Ist P der zu Φ gehörige Projektor von Satz 6.2 und P' ein beliebiger weiterer Projektor mit $P'\leqq P$, und bezeichnet $\Phi'\colon \Sigma\to\mathscr{L}(H)_+$ das durch $\Phi'(E)=P'\Phi(E)P'$ definierte PO-Maß, sowie C' den nach (4) zu Φ' gehörigen Operator aus $\mathscr{L}(H)_+$, so ist offenbar P' der Projektor auf das Orthokomplement des Nullraums von $\Phi'(S)$, und für $x\in P'(H)$ wird

$$\begin{aligned}\langle C'x, x\rangle &=\operatorname{dist}^2_{L^2(\Phi', H)}(x, U\mathscr{M}(\Phi'))=\operatorname{dist}^2_{L^2(\Phi', H)}(x, A_0\otimes H)\\ &=\operatorname{dist}^2_{L^2(\Phi, H)}(x, A_0\otimes P'(H))\geqq\operatorname{dist}^2_{L^2(\Phi, H)}(x, A_0\otimes H)=\langle Cx, x\rangle.\end{aligned}$$

Andererseits kann man natürlich bei beliebigem $x\in H$ und $\varepsilon>0$ einen Projektor $P'\leqq P$ mit endlich-dimensionalem, x enthaltendem Wertebereich $P'(H)$ so finden, daß für das zugehörige Φ' gilt

$$\operatorname{dist}^2_{L^2(\Phi', H)}(x, A_0\otimes H)\leqq\langle Cx, x\rangle+\varepsilon.$$

Damit ist die Prämisse $C\geqq cP$ von Satz 6.2 äquivalent zu: $C'\geqq cP'$ für jeden Projektor $P'\leqq P$ mit $\dim P'(H)<\infty$. Dies ist also zusammen mit $\Phi\ll m$ ein weiteres hinreichendes Kriterium für die einfache Invarianz von $\mathscr{M}(\Phi)$.

Bemerkung 6.3. i) Der Vorhersageirrtum C wurde zu Beginn dieses Abschnitts direkt durch die stationäre Operatorfolge (F_n) selbst definiert. Der Beweis von Satz 3.1 zeigt, daß auch $\Phi(S)=F_0^*F_0$ und damit der Projektor P von Satz 6.2 direkt durch die Folge (F_n) gegeben sind. Der Satz 6.2 besagt dann, daß die „full rank"-Bedingung $C\geqq cP$ (oder nach dem im Anschluß an 6.2 Bemerkten auch die Gesamtheit der entsprechenden Bedingungen $C'\geqq cP'$ für jeden „sub process" $(F_n P')$ mit endlichrangigem Projektor P'; vgl. [4], S. 900) im Falle $\Phi\ll m$ die Regularität der Folge (F_n) impliziert.

ii) Das Beispiel $\Phi=Tm$ mit einem injektiven, aber nicht stetig invertierbaren Operator $T\in\mathscr{L}(H)_+$ zeigt, daß die Bedingung $C\geqq cP$ von Satz 6.2 nicht notwendig ist für die einfache Invarianz von $\mathscr{M}(\Phi)$ (für dieses Φ ist $C=T$ und $P=1$). Betrachtet man dagegen den in [2], S. 120 untersuchten Fall, daß $\Phi=T(\cdot)\,m$ mit einer Dichte der Form $T(\cdot)=T\chi_E+T'\chi_{E'}$, wobei $0<m(E)<1$ ist und die Operatoren $T, T'\in\mathscr{L}(H)_+$ beide injektiv sind mit $T\geqq T'$, aber für eine geeignete Folge (x_n) in H einerseits $\sqrt{T'}\,x_n\to 0$, andererseits $\sqrt{T}\,x_n\to x\neq 0$ konvergiert, so ist offenbar das zugehörige $C\geqq T'$, also noch injektiv, aber $\mathscr{M}(\Phi)$ nicht mehr e.i., wie in [2] gezeigt wird.

iii) Sei $\Phi'\colon\Sigma\to\mathscr{L}(H)_+$ ein weiteres PO-Maß und $\Phi'(E)\leqq\Phi(E)$ für alle $E\in\Sigma$. Die Bemerkungen ii) zeigen, daß man aus der einfachen Invarianz von $\mathscr{M}(\Phi')$ nicht ohne weiteres auf einfache Invarianz von $\mathscr{M}(\Phi)$ schließen kann. Die in [2], Theorem 1 im Falle $\Phi=T(\cdot)\,m$, $\Phi'=T'(\cdot)\,m$ hierfür gegebenen Zusatzbedingungen lassen sich leicht auf unsere Situation verallgemeinern:

Die identische Abbildung $(B\otimes H;|\ |_{\Phi})\to(B\otimes H;|\ |_{\Phi'})$ ist offenbar kontraktiv und deshalb zu einer punktweisen Kontraktion K: $L^2(\Phi,H)\to L^2(\Phi',H)$ stetig ausdehnbar. Ist also $M\subset L^2(\Phi,H)$ ein d.i. abgeschlossener Teilraum, so auch $\overline{K(M)}\subset L^2(\Phi',H)$. Insbesondere impliziert also die doppelte Invarianz von $\mathscr{M}(\Phi)$ diejenige von $\mathscr{M}(\Phi')$. Dagegen kann $\mathscr{M}(\Phi')$ e.i. sein, ohne daß $\mathscr{M}(\Phi)$ e.i. ist, weil für einen d.i. Teil $M\neq 0$ von $\mathscr{M}(\Phi)$ das Bild $K(M)$ der Nullraum sein kann. Setzt man dagegen K als injektiv voraus, so impliziert somit einfache Invarianz von $\mathscr{M}(\Phi')$ auch einfache Invarianz von $\mathscr{M}(\Phi)$. Man prüft leicht nach, daß die in [2], Theorem 1 angegebenen Bedingungen gerade die Injektivität von K garantieren.

Bei endlich-dimensionalem H läßt sich Satz 6.2 auch umkehren: Ist dann $\mathscr{M}(\Phi)$ e.i., so gilt wegen Korollar 5.4

$$\Phi=T(\cdot)\,m \quad \text{und} \quad T(s)=E(s)^*\,E(s) \quad m\text{-f.ü.},$$

wobei für E: $S\to\mathscr{L}(H)$ noch $E(\cdot)\,x\in H^2(m,H)$ ist für alle $x\in H$. Daher ist für jedes $x\in H$ entweder

$$E(s)\,x=0 \quad m\text{-f.ü.} \qquad \text{oder} \qquad E(s)\,x\neq 0 \quad m\text{-f.ü.}$$

Da E eine Isometrie von $L^2(\Phi,H)$ in $L^2(m,H)$ definiert, ist $E(s)\,x=0$ und also $T(s)\,x=0$ m-f.ü. genau für die x aus dem Nullraum von $\Phi(S)$, dagegen $E(s)\,x\neq 0$ und also $T(s)\,x\neq 0$ m-f.ü. für alle $x\in H'$, dem Orthokomplement des Nullraums von $\Phi(S)$ (vgl. Tobergte [16], Kapitel 7). Für m-fast alle $s\in S$ bildet also der Operator $T(s)\in\mathscr{L}(H)_+$ den Teilraum H' in sich ab und definiert so einen injektiven Operator $T'(s)\in\mathscr{L}(H')_+$. Für die Determinante des nach (4) hierzu gehörigen Operators $C'\in\mathscr{L}(H')_+$ ist dann bekanntlich

$$\det C'=\exp\int dm(s)\log\big(\det T'(s)\big)$$

(vgl. etwa Masani [11], S. 369), und die rechte Seite ist >0 bei e.i. $\mathscr{M}(\Phi)$ (vgl. [16], Kapitel 7). Also gilt wegen der Endlich-Dimensionalität von H' sogar $C'\geqq c\,1$ mit einer Zahl $c>0$ und deshalb nach dem ersten Teil des Beweises von Satz 6.2 auch $C\geqq cP$.

Da noch allgemein $0\leqq C\leqq\Phi_a(S)$ und deshalb insbesondere der Nullraum $N(\Phi_a(S))$ enthalten ist im Nullraum $N(C)$, haben wir schließlich noch das folgende Korollar:

Korollar 6.4. *Bei endlich-dimensionalem H ist $\mathscr{M}(\Phi_a)$ genau dann e.i., wenn $\dim N(C)=\dim N\big(\Phi_a(S)\big)$ ist.*

Literatur

1. Devinatz, A.: The factorization of operator valued functions. Ann. of Math. II. Ser. **73**, 458–495 (1961).
2. Douglas, R.G.: On factoring positive operator functions. J. Math. Mech. **16**, 119–126 (1966).
3. Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear operators, part II. New York-London: Interscience 1963.
4. Gangolli, R.: Wide-sense stationary sequences of distributions in Hilbert space and the factorization of operator valued functions. J. Math. Mech. **12**, 893–910 (1963).
5. Hackenbroch, W.: Integration vektorwertiger Funktionen nach operatorwertigen Maßen. Math. Z. **105**, 327–344 (1968).

6. Helson, H.: Lectures on invariant subspaces. New York-London: Academic Press 1964.
7. – Lowdenslager, D.: Prediction theory and Fourier series in several variables. Acta math. **99**, 165–202 (1958).
8. König, H., Meixner, J.: Lineare Systeme und lineare Transformationen. Math. Nachr. **19**, 265–322 (1958).
9. – Tobergte, J.: Ein Problem der Approximation mit trigonometrischen Funktionen. Arch. der Math. **13**, 363–376 (1962).
10. Lumer, G.: Algèbres de fonctions et espaces de Hardy. Lecture Notes in Mathematics 75. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
11. Masani, P.: Recent trends in multivariate prediction theory. Erschienen in: Multivariate analysis, edited by P. R. Krishnaiah. New York-London: Academic Press 1966.
12. Sz.-Nagy, B., Foias, C.: Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert. Budapest: Akadémiai Kiadó 1967.
13. Robertson, J. B.: Orthogonal decompositions of multivariate weakly stationary stochastic processes. Canadian J. Math. **20**, 368–383 (1968).
14. Rosenberg, M.: The square-integrability of matrix-valued functions with respect to a non-negative hermitian measure. Duke math. J. **31**, 291–298 (1964).
15. Rozanov, Yu. A.: Stationary random processes. San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day 1967.
16. Tobergte, J.: Invariante Teilräume und die verlorene Energie linearer passiver Transformationen. Dissertation. Köln 1965.
17. Urbanik, K.: Lectures on prediction theory. Lecture Notes in Mathematics, Bd. 44. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.

Dr. W. Hackenbroch
Mathematisches Institut
der Universität des Saarlandes
BRD-6600 Saarbrücken
Deutschland

(Eingegangen am 12. August 1969)