Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 7, 309–326 (1967)

Über straffe Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Raum der Schwartzschen Distributionen

Peter Gänssler

Eingegangen am 18. Oktober 1966

Zusammenfassung

In den letzten Jahren erschien eine Reihe von Arbeiten, die sich systematisch mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf topologischen Gruppen, Halbgruppen, topologischen Räumen und topologischen linearen Räumen beschäftigten. Als besonders geeignet für eine „topologische Wahrscheinlichkeitstheorie" erwiesen sich hierbei die sogenannten straffen (tight) Wahrscheinlichkeitsverteilungen (vgl. Le Cam [3], Hildenbrand [11], Prochorov [20], Varadarajan [25]).

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit *straffen* Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Raum $\mathscr{D}'$, dem topologischen Dualraum des Raumes $\mathscr{D}$ der auf der reellen Zahlengeraden $\boldsymbol{R}$ definierten beliebig oft differenzierbaren Funktionen φ mit kompaktem Träger $\operatorname{Tr}\varphi$.

Der Ausgangspunkt für die Untersuchung von Zufallselementen mit Werten in linearen Räumen, die nicht notwendig Banachräume sind, war wohl der von Gelfand [8] eingeführte Begriff des verallgemeinerten stochastischen Prozesses (VSP). Solange man bei einem solchen Prozeß Eigenschaften untersucht, die sich mit Hilfe seiner endlichdimensionalen Randverteilungen $Q_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}}$, $\varphi_i \in \mathscr{D}$, beschreiben lassen, wird man sich wie im Fall eines gewöhnlichen stochastischen Prozesses natürlich die Frage stellen, ob ein geeigneter Standardstichprobenraum existiert, etwa der Raum $\mathscr{D}'$, so daß sich jeder VSP auffassen läßt als Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einem geeigneten hinreichend umfangreichen σ-Ring von Teilmengen des Raumes $\mathscr{D}'$. Die fundamentale Arbeit von Minlos [18] gab hierzu die Lösung: Durch ein verträgliches System endlichdimensionaler Wahrscheinlichkeitsverteilungen $Q_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}}$, $\varphi_i \in \mathscr{D}$, mit gewissen Eigenschaften, die denen der Randverteilungen eines VSP entsprechen, läßt sich auf dem System $\mathfrak{Z}$ der Zylindermengen des Raumes $\mathscr{D}'$ eine sogenannte schwache Verteilung μ definieren, von der gezeigt wird, daß sie σ-additiv ist. Durch Einschränkung des Raumes der sogenannten Testfunktionen φ auf den *metrisierbaren* Teilraum $\mathscr{D}_K = \{\varphi \in \mathscr{D}\colon \operatorname{Tr}\varphi \subset K,\ K \text{ kompakt in } \boldsymbol{R}\}$ von $\mathscr{D}$ läßt sich dieses Ergebnis wie folgt verschärfen: Die durch ein verträgliches System endlichdimensionaler Randverteilungen $Q_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}}$, $\varphi_i \in \mathscr{D}_K$, mit entsprechenden Eigenschaften, auf dem System $\mathfrak{Z}_K$ der Zylindermengen des Raumes $\mathscr{D}'_K$ definierte schwache Verteilung μ_K ist straff bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(\mathscr{D}'_K, \mathscr{D}_K)$ in $\mathscr{D}'_K$.

Die Frage nach der Gültigkeit einer entsprechenden Verschärfung für das Dualsystem $\langle \mathscr{D}', \mathscr{D} \rangle$, bzw. allgemeiner für ein Dualsystem $\langle E, F \rangle$ mit nicht notwendig metrisierbarem F, bildete den Gegenstand neuerer Untersuchungen, über deren Ergebnisse auf dem letzten Berkeley Symposium E. Mourier berichtete (vgl. [19]).

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit des Verfassers wird demgegenüber eine Methode aufgezeigt, mit deren Hilfe, unter Verwendung des Minlosschen Satzes in seiner ursprünglichen Form, auf direktem Wege für das Dualsystem $\langle \mathscr{D}', \mathscr{D} \rangle$ der Nachweis gelingt, daß eine schwache Verteilung μ auf $\mathfrak{Z}$ nicht nur σ-additiv, sondern automatisch straff ist (bzgl. der schwachen Topologie $\sigma(\mathscr{D}', \mathscr{D})$ in $\mathscr{D}'$) und sich somit eindeutig fortsetzen läßt zu einer straffen Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem System $\hat{\mathfrak{B}}$ der Borelschen Mengen in $\mathscr{D}'$, welches den von den Zylindermengen erzeugten σ-Ring $\sigma(\mathfrak{Z})$ umfaßt. Mit anderen Worten wird damit gezeigt, daß man jeden VSP auffassen kann als straffe Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Borelschen Mengen in $\mathscr{D}'$. Wir sprechen dann auch von einer *zufälligen Distribution.*

Im zweiten Kapitel betrachten wir spezielle zufällige Distributionen, nämlich Normalverteilungen ν, die aus Randverteilungen hervorgehen, welche n-dimensionale Normalverteilungen sind, und beschäftigen uns mit dem Problem der Äquivalenz und Singularität

zweier Normalverteilungen ν_1 und ν_2 in $\mathscr{D}'$. Für den Fall $\nu_1 = \nu$, $\nu_2 = \nu_{f_0}$, wo $\nu_{f_0}(Z) = \nu(Z - f_0)$, $Z \in \mathfrak{Z}$, $f_0 \in \mathscr{D}'$, zeigte DUDLEY [6], daß entweder Äquivalenz oder Singularität vorliegt, wobei er ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für den Fall der Äquivalenz angibt. Aus der Theorie der gewöhnlichen stochastischen Prozesse ist nun bekannt, daß die beiden Wahrscheinlichkeitsmaße, die zwei beliebigen Gaußschen Prozessen auf dem Raum ihrer Realisierungen entsprechen, entweder äquivalent oder singulär sind. Es lag deshalb nahe, nach einem Kriterium zu suchen, welches es einerseits gestattet, im Fall zweier beliebiger Normalverteilungen ν_1 und ν_2 in $\mathscr{D}'$ zu entscheiden, wann Äquivalenz vorliegt, und welches andererseits die naheliegende Vermutung bestätigt, daß für zwei Normalverteilungen in $\mathscr{D}'$ dieselbe Alternative wie im eben zitierten klassischen Fall vorliegt. Dieses Problem wird gelöst, indem wir zeigen, daß sich ein von KALLIANPUR-OODAIRA [13] aufgestelltes Kriterium für die Äquivalenz zweier Normalverteilungen auf den Borelschen Mengen eines separablen Hilbertraumes auf den Distributionsraum $\mathscr{D}'$ übertragen läßt.

Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage der Äquivalenz zweier beliebiger (nicht notwendig normaler) Wahrscheinlichkeitsverteilungen in $\mathscr{D}'$.

I. Straffe Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Raum $\mathscr{D}'$

Sei $\mathscr{D}$ die Gesamtheit aller reellwertigen auf der reellen Zahlengeraden $\boldsymbol{R}$ definierten beliebig oft differenzierbaren Funktionen φ mit kompaktem Träger $\operatorname{Tr}\varphi$. Wir versehen $\mathscr{D}$ mit der üblichen Topologie $\mathfrak{T}$ (vgl. SCHWARTZ [23]) und schreiben $\mathscr{D}[\mathfrak{T}]$. Sei $\mathscr{D}'$ der topologische Dualraum zu $\mathscr{D}$, also der Raum aller $\mathfrak{T}$-stetigen Linearfunktionen auf $\mathscr{D}$. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ sei ein abstrakter Wahrscheinlichkeitsraum.

Ist nun jedem $\varphi \in \mathscr{D}$ eine reellwertige zufällige Variable x_φ über $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ zugeordnet und gelten die Bedingungen

(1.1) $x_{\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2} = \alpha x_{\varphi_1} + \beta x_{\varphi_2}$ P-fast sicher für beliebige $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}$ und $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$

und

(1.2) $\{\varphi_{nj}, \varphi_j \in \mathscr{D},\ j = 1, \ldots, m;\ n = 1, 2, \ldots$ und $\varphi_{nj} \xrightarrow{\text{in } \mathscr{D}[\mathfrak{T}]} \varphi_j\}$
$\Rightarrow Q_{\{\varphi_{n1}, \ldots, \varphi_{nm}\}} \underset{\text{schwach}}{\longrightarrow} Q_{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}}$, wobei $Q_{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}}$ die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der zufälligen Variablen $x_{\varphi_1}, \ldots, x_{\varphi_m}$ bezeichnet,

so nennt man $(x_\varphi)_{\varphi \in \mathscr{D}}$ einen verallgemeinerten stochastischen Prozeß (VSP) (GELFAND [8]).

Sei $\mathfrak{S}$ das System aller nicht leeren endlichen Teilmengen S von $\mathscr{D}$. Die Familie $(Q_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ der im Fall $S = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ auf den Borelschen Mengen $\mathfrak{B}_n$ des Raumes $\boldsymbol{R}^n$ definierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen $Q_S = (x_{\psi_1}, \ldots, x_{\psi_n})(P)$ heißt das System der endlichdimensionalen Verteilungen (Randverteilungen) des VSP $(x_\varphi)_{\varphi \in \mathscr{D}}$.

Wegen (1.1) ist für beliebige Elemente $\psi_1, \ldots, \psi_m$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ aus $\mathscr{D}$ mit $\psi_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \varphi_k$, $i = 1, \ldots, m$

(1.3) $Q_{\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}}(B) = Q_{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}}(\tilde{B})$, wo $\tilde{B} = L^{-1}(B)$, $B \in \mathfrak{B}_m$; dabei bezeichnet L die durch die Matrix (γ_{ik}) definierte lineare Abbildung von $\boldsymbol{R}^n$ in $\boldsymbol{R}^m$.

Die Familie $(Q_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ erfüllt außerdem die natürlichen Verträglichkeitsbedingungen, also

(1.4) $Q_{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}} \equiv Q_{\{\varphi_{\pi(1)}, \ldots, \varphi_{\pi(n)}\}}$ für jede Permutation $\pi = \begin{Bmatrix} 1 \ldots\ldots n \\ \pi(1) \ldots \pi(n) \end{Bmatrix}$,

und

(1.5) $Q_{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}} \equiv Q_{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_m\}} \circ (\mathrm{pr}_n^m)^{-1}$, wo pr_n^m die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{R}^m$ auf $\boldsymbol{R}^n$ bezeichnet.

Aus der Theorie der stochastischen Prozesse $(x_t)_{t\in T}$, wo T gewöhnlich die Menge $\boldsymbol{N}$ der natürlichen Zahlen oder ein Intervall der Zahlengeraden bedeutet, ist bekannt, daß sich jeder solche Prozeß auffassen läßt als eine auf einem geeigneten σ-Ring von Teilmengen des Funktionenraumes $\boldsymbol{R}^T$ definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Wir befassen uns im folgenden mit der Frage, ob für einen VSP ein geeigneter Standardstichprobenraum existiert, etwa der Raum $\mathscr{D}'$ der Schwartzschen Distributionen, so daß sich jeder VSP auffassen läßt als eine *straffe* Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einem hinreichend umfangreichen σ-Ring von Teilmengen von $\mathscr{D}'$.

Wir legen das Dualsystem $\langle\mathscr{D}', \mathscr{D}\rangle$ zugrunde. In $\mathscr{D}'$ betrachten wir hierbei die schwache Topologie $\sigma(\mathscr{D}', \mathscr{D})$ und schreiben für $\mathscr{D}'[\sigma(\mathscr{D}', \mathscr{D})]$ kurz $\mathscr{D}'[\sigma]$. Mit $\langle f, \varphi\rangle$, $f\in\mathscr{D}'$, $\varphi\in\mathscr{D}$, bezeichnen wir den Wert von f auf φ. Sei B eine algebraische Basis in $\mathscr{D}$. Wir betrachten dann die Funktionenmenge

$$\mathscr{M} = \{p_\varphi(\cdot) = \langle\cdot, \varphi\rangle, \varphi\in\mathsf{B}\}.$$

Jedes $p_\varphi\in\mathscr{M}$ bildet $\mathscr{D}'$ auf $\boldsymbol{R}$ ab und ist stetig bezüglich der schwachen Topologie σ in $\mathscr{D}'$; außerdem trennt $\mathscr{M}$ Punkte von $\mathscr{D}'$. Weiter betrachten wir endliche geordnete Teilmengen $\mathscr{N}\subset\mathscr{M}$ und hierzu die Abbildungen $\pi_{\mathscr{N}}\colon \mathscr{D}'\to\boldsymbol{R}^n$, die jedem $f\in\mathscr{D}'$ den Vektor $(\langle f, \varphi_1\rangle, \ldots, \langle f, \varphi_n\rangle)$ zuordnen, falls $\mathscr{N} = \{p_{\varphi_1}, \ldots, p_{\varphi_n}\}$. Sei $B\in\mathfrak{B}_n$. Die Menge $Z = \pi_{\mathscr{N}}^{-1}(B)$ nennen wir Zylindermenge in $\mathscr{D}'$. Die Gesamtheit aller Mengen, die man auf diese Weise erhält, wenn B ganz $\mathfrak{B}_n$ durchläuft, bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}_{\mathscr{N}}$, und $\mathfrak{Z} = \bigcup_{\substack{\mathscr{N}\subset\mathscr{M}\\ \mathscr{N}\text{ endlich}}} \mathfrak{Z}_{\mathscr{N}}$ heißt das *System der Zylindermengen* in $\mathscr{D}'$ (vgl. Krickeberg [16]).

Wir wollen nun annehmen, daß zu je endlich vielen beliebigen Elementen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ aus B Wahrscheinlichkeitsverteilungen $Q_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}}$ auf $\mathfrak{B}_n$ vorgegeben sind, welche die Verträglichkeitsbedingungen erfüllen (vgl. (1.4) und (1.5)).

Auf dem System $\mathfrak{Z}$ der Zylindermengen von $\mathscr{D}'$ läßt sich dann auf folgende Weise eine sogenannte schwache Verteilung μ definieren:

Ist $Z\in\mathfrak{Z}$, also $Z\in\mathfrak{Z}_{\mathscr{N}}$ für ein geeignetes $\mathscr{N} = \{p_{\varphi_1}, \ldots, p_{\varphi_n}\}$, $\varphi_i\in\mathsf{B}$, und damit $Z = \pi_{\mathscr{N}}^{-1}(B)$ für ein bestimmtes $B\in\mathfrak{B}_n$, so setzen wir

$$\mu(Z) = Q_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}}(B).$$

Wegen (1.4) und (1.5) ist diese Definition sinnvoll. μ ist σ-additiv auf jedem $\mathfrak{Z}_{\mathscr{N}}$ und additiv auf $\mathfrak{Z}$.

Für beliebige $\psi_1, \ldots, \psi_m\in\mathscr{D}$ existieren $\varphi_1, \ldots, \varphi_n\in\mathsf{B}$, so daß $\psi_i = \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}\varphi_k$, $i = 1, \ldots, m$. Für jedes $B\in\mathfrak{B}_m$ definieren wir dann

(1.6) $Q_{\{\psi_1,\ldots,\psi_m\}}(B) = Q_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}}(\tilde{B})$, wo $\tilde{B} = L^{-1}(B)$ mit $L\colon \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$, definiert durch (γ_{ik}).

Auf diese Weise sind beliebigen Elementen $\psi_1, \ldots, \psi_m$ aus $\mathscr{D}$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen $Q_{\{\psi_1,\ldots,\psi_m\}}$ zugeordnet.

Wir wollen weiter voraussetzen, daß diese Zuordnung die folgende Bedingung erfüllt:

(1.7) $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}\to Q_{\{\psi_1,\ldots,\psi_m\}}$ ist stetig bezüglich der m-fachen Produkttopologie $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}\times\cdots\times\mathfrak{T}$ des Raumes $\mathscr{D}\times\mathscr{D}\times\cdots\times\mathscr{D}$ und der schwachen Konvergenz der Maße Q.

Man sieht nun leicht, daß für beliebige $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \mathscr{D}$ auch die Mengen $\tilde{Z} = \{f \in \mathscr{D}' : (\langle f, \psi_1\rangle, \ldots, \langle f, \psi_m\rangle) \in B\}$, $B \in \mathfrak{B}_m$, Zylindermengen sind, denn es ist $\tilde{Z} = \pi_{\mathscr{N}}^{-1}(\tilde{B})$ mit $\mathscr{N} = \{p_{\varphi_1}, \ldots, p_{\varphi_n}\}$, $\varphi_i \in \mathsf{B}$, und ihre Maße sind durch die für Basiselemente aus B vorgegebenen Verteilungen eindeutig bestimmt, d. h. $\mu(\tilde{Z}) = Q_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}}(\tilde{B})$.

Bei der Definition der Zylindermengen in $\mathscr{D}'$ kann man also auch von beliebigen Elementen von $\mathscr{D}$ ausgehen und eine schwache Verteilung μ auf $\mathfrak{Z}$ definieren, falls zu beliebigen $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \mathscr{D}$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen $Q_{\{\psi_1,\ldots,\psi_m\}}$ auf $\mathfrak{B}_m$ vorgegeben sind, welche die Bedingungen (1.4)—(1.7) erfüllen. Man sieht dabei, daß μ unabhängig von der Wahl einer speziellen Basis in $\mathscr{D}$ auf $\mathfrak{Z}$ eindeutig definiert ist. Die Bedingung (1.7) bedeutet, daß μ die *Minlossche Stetigkeitsbedingung* erfüllt (vgl. GELFAND-VILENKIN [9], MINLOS [18]).

Aus den bei GELFAND-VILENKIN [9] im vierten Kapitel, § 2, Abschnitt 3 und 5, bewiesenen Sätzen folgt nun, daß jede schwache Verteilung μ auf $\mathfrak{Z}$ in $\mathscr{D}'$ σ-additiv ist, sich also eindeutig fortsetzen läßt zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf den durch $\mathfrak{Z}$ erzeugten σ-Ring $\sigma(\mathfrak{Z})$.

Wenn wir nun von einem VSP $(x_\varphi)_{\varphi\in\mathscr{D}}$ ausgehen, dessen endlichdimensionale Randverteilungen die Bedingungen (1.4)—(1.7) erfüllen, so bedeutet das eben formulierte Resultat, daß $(x_\varphi)_{\varphi\in\mathscr{D}} \approx (\pi_\varphi)_{\varphi\in\mathscr{D}}$, wobei π_φ die Projektion von $\mathscr{D}'$ auf $\boldsymbol{R}$ bezeichnet, die jeder stetigen Linearfunktion f ihren Wert auf φ zuordnet; das Zeichen „$\approx$“ bedeutet, daß die beiden Prozesse $(x_\varphi)_{\varphi\in\mathscr{D}}$ und $(\pi_\varphi)_{\varphi\in\mathscr{D}}$ zur selben Familie endlichdimensionaler Verteilungen führen. Demnach läßt sich jeder VSP auffassen als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem σ-Ring $\sigma(Z)$ in $\mathscr{D}'$.

Durch Einschränkung des Raumes $\mathscr{D}$ der sogenannten Testfunktionen ψ auf den *metrisierbaren* Teilraum $\mathscr{D}_K = \{\psi \in \mathscr{D} : \mathrm{Tr}\psi \subset K,\ K \text{ kompakt in } \boldsymbol{R}\}$ läßt sich dieses Ergebnis, wie wir weiter unten sehen werden, folgendermaßen verschärfen (vgl. MINLOS [18]):

Die zu einem verträglichen System endlichdimensionaler Randverteilungen $Q_{\{\psi_1,\ldots,\psi_m\}}$, $\psi_i \in \mathscr{D}_K$, (mit entsprechenden Eigenschaften wie oben) auf dem analog wie für $\mathscr{D}'$ zu definierenden Ring $\mathfrak{Z}_K$ der Zylindermengen des Raumes $\mathscr{D}_K'$ gehörende schwache Verteilung μ_K ist straff bezüglich der schwachen Topologie σ_K in $\mathscr{D}_K'$.

Der Frage nach der Gültigkeit einer entsprechenden Verschärfung für das Dualsystem $\langle\mathscr{D}', \mathscr{D}\rangle$ (vgl. MOURIER [19]) wollen wir uns nun zuwenden.

Wir werden in Satz 1.5 zeigen, daß ohne weitere als die bisher genannten Voraussetzungen an die Randverteilungen eine schwache Verteilung μ auf $\mathfrak{Z}$ in $\mathscr{D}'[\sigma]$ nicht nur σ-additiv, sondern sogar straff ist. Unter Heranziehung bekannter Erweiterungssätze für straffe Maße erhalten wir dann die Existenz eines eindeutig bestimmten straffen Maßes $\hat{\mu}$ auf dem System $\hat{\mathfrak{B}}$ der Borelschen Mengen in $\mathscr{D}'[\sigma]$, welches — infolge der Konstruktion von $\mathfrak{Z}$ — den von den Zylindermengen erzeugten σ-Ring $\sigma(\mathfrak{Z})$ umfaßt (vgl. PROCHOROV [20]), so daß auf diese Weise das Problem eines geeigneten Standardstichprobenraumes mit einem im Hinblick auf die Anwendungen hinreichend umfangreichen σ-Ring für einen VSP eine befriedigende Lösung findet.

Wir wollen zunächst die nötigen Hilfsmittel zusammenstellen.

Definition 1.1 (vgl. HILDENBRAND [11], II). Sei $X[\mathfrak{T}]$ ein topologischer Raum, $\mathfrak{B}(X)$ die Gesamtheit der Baireschen Mengen in X. Eine Mengenfunktion μ, definiert auf einem Ring $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{B}(X)$ heißt *straff*, wenn gilt:

(a) μ ist endlich, positiv und endlich additiv,

(b) $\sigma(\mathfrak{R})$ ist verträglich mit $\mathfrak{T}$, d. h. man erhält $\sigma(R)$ als initiale Struktur einer Familie von stetigen Funktionen über X,

(c) μ hat die Ausschöpfeigenschaft, d. h. zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subset X$, so daß für jedes $R \in \mathfrak{R}$ mit $R \cap K_\varepsilon = \emptyset$ $\mu(R) \leqq \varepsilon$ ist,

(d) μ ist regulär, d. h. $\mu(R) = \inf\{\mu(\mathcal{O})\colon \mathcal{O}$ offen, $\mathcal{O} \in \mathfrak{R}$ und $R \subset \mathcal{O}\}$ für beliebiges $R \in \mathfrak{R}$.

Bemerkung (vgl. HILDENBRAND [11], II). Eine auf einem Ring $\mathfrak{R}$ des topologischen Raumes $X[\mathfrak{T}]$ definierte straffe Mengenfunktion ist σ-additiv auf $\mathfrak{R}$.

Wir bezeichnen mit A die Gesamtheit aller Intervalle $\alpha \subset \boldsymbol{R}$ mit rationalen Endpunkten. A ist abzählbar und bildet bezüglich der Inklusion „$\subset$" eine gerichtete Menge. Mit $\mathcal{D}_\alpha$ bezeichnen wir den linearen Raum aller reellwertigen auf $\boldsymbol{R}$ definierten beliebig oft differenzierbaren Funktionen, deren Träger im Intervall α enthalten ist. $\mathcal{D}_\alpha$ sei mit der üblichen Topologie $\mathfrak{T}_\alpha$ versehen (vgl. SCHWARTZ [23]). Dann gilt:

$$\alpha, \beta \in \mathsf{A} \quad \text{und} \quad \alpha \subset \beta \Rightarrow \mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}_\beta;$$

außerdem ist diese Einbettung, die wir mit I^α_β bezeichnen, stetig bezüglich $\mathfrak{T}_\alpha$ und $\mathfrak{T}_\beta$, denn die durch $\mathfrak{T}_\beta$ auf $\mathcal{D}_\alpha$ induzierte Topologie stimmt mit $\mathfrak{T}_\alpha$ überein. Die zu $\mathcal{D}_\alpha$ topologisch dualen Räume $\mathcal{D}'_\alpha$ bilden ein gerichtetes System, und für jedes Paar α, β mit $\alpha \subset \beta$ ist eine lineare Abbildung $A^\beta_\alpha\colon \mathcal{D}'_\beta \to \mathcal{D}'_\alpha$ erklärt, indem man jedem $f_\beta \in \mathcal{D}'_\beta$ seine Einschränkung $f_\alpha = f_\beta | \mathcal{D}_\alpha$ auf $\mathcal{D}_\alpha$ zuordnet. Die A^β_α sind lineare Abbildungen von $\mathcal{D}'_\beta$ *auf* $\mathcal{D}'_\alpha$ (vgl. KÖTHE [15], § 20, 1. (1)) und erfüllen offenbar die Bedingung

$$A^\beta_\alpha A^\gamma_\beta = A^\gamma_\alpha, \quad \text{falls} \quad \alpha \subset \beta \subset \gamma. \tag{1.8}$$

Mit $\breve{F}$ bezeichnen wir den linearen Teilraum des Produktraumes $F = \prod\limits_{\alpha \in \mathsf{A}} \mathcal{D}'_\alpha$, der aus *allen* $\breve{f} = (f_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{A}}$, mit $A^\beta_\alpha f_\beta = f_\alpha$ für $\alpha \subset \beta$, besteht. Bezeichnen wir mit P_α die Projektion von F auf $\mathcal{D}'_\alpha$, so können wir $\breve{F}$ auch auffassen als *Kern* der $P_\alpha^{-1}(\mathcal{D}'_\alpha)$ und wir schreiben dann $\breve{F} = \underset{\alpha}{\mathsf{K}}\, P_\alpha^{-1}(\mathcal{D}'_\alpha)$ (vgl. KÖTHE [15], § 19, 6). Ist $\widehat{F}$ ein linearer Teilraum von $\breve{F}$ und bedeutet $\widehat{P}_\alpha$ die Einschränkung von P_α auf $\widehat{F}$, so ist $\widehat{F} = \underset{\alpha}{\mathsf{K}}\, \widehat{P}_\alpha^{-1}(\mathcal{D}'_\alpha)$ und es gilt

$$\widehat{P}_\alpha = A^\beta_\alpha \widehat{P}_\beta \quad \text{für} \quad \alpha \subset \beta \quad \text{(vgl. KÖTHE [15], § 19,7. (6)).}$$

$\breve{F}$ ist der größte in Frage kommende Teilraum $\widehat{F}$ von F. Man nennt den dadurch eindeutig bestimmten Raum $\breve{F} = \underset{\alpha}{\mathsf{K}}\, \breve{P}_\alpha^{-1}(\mathcal{D}'_\alpha)$ den *projektiven Limes der* $\mathcal{D}'_\alpha$ *bezüglich der Abbildungen* A^β_α, $\alpha \subset \beta$:

$$\breve{F} = \lim_{\substack{\alpha}} \operatorname{proj} \mathcal{D}'_\alpha;$$

dabei bedeutet $\breve{P}_\alpha$ die Einschränkung von P_α auf $\breve{F}$ und es gilt

$$\breve{P}_\alpha = A^\beta_\alpha \breve{P}_\beta \quad \text{für} \quad \alpha \subset \beta. \tag{1.9}$$

Satz 1.1 (KÖTHE [15], § 19,7. (8)). *Ist die gerichtete Menge* A *abzählbar und sind die Abbildungen* A_α^β, $\alpha \subset \beta$, *stets Abbildungen von* $\mathscr{D}_\beta'$ *auf* $\mathscr{D}_\alpha'$, *so sind im projektiven Limes* $\breve{F} = \underset{\alpha}{\mathsf{K}} \breve{P}_\alpha^{-1}(\mathscr{D}_\alpha')$ *auch die Abbildungen* $\breve{P}_\alpha$ *Abbildungen von* $\breve{F}$ *auf* $\mathscr{D}_\alpha'$.

Hieraus folgt für die Familie $(\mathscr{D}_\alpha')_{\alpha\in\mathsf{A}}$, daß sie *einfach maximal* ist im Sinne von BOCHNER [2]. Sie erfüllt außerdem die Bedingung der *Folgenmaximalität* im Sinne von BOCHNER [2], nämlich:

Für jede monoton wachsende Folge von Indizes $\alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \cdots \subset \alpha_n \subset \cdots$ und beliebig gewählte Punkte $f_{\alpha_i}^0$ in $\mathscr{D}_{\alpha_i}'$ mit $f_{\alpha_r}^0 = A_{\alpha_r}^{\alpha_s} f_{\alpha_s}^0$, $\alpha_r \subset \alpha_s$, existiert ein $\breve{f}$ in $\breve{F}$, so daß $f_{\alpha_r}^0 = \breve{P}_{\alpha_r}\breve{f}$, $r = 1, 2, \ldots$ (vgl. KÖNIG [14], IIIb, Satz 1).

Versehen wir nun die Räume $\mathscr{D}_\alpha'$ mit der schwachen Topologie $\sigma(\mathscr{D}_\alpha', \mathscr{D}_\alpha)$ (für $\mathscr{D}_\alpha'[\sigma(\mathscr{D}_\alpha', \mathscr{D}_\alpha)]$ schreiben wir kurz $\mathscr{D}_\alpha'[\sigma_\alpha]$), so sind die A_α^β stetig als adjungierte Abbildungen der stetigen Einbettungen I_β^α (bezüglich der Dualsysteme $\langle \mathscr{D}_\alpha', \mathscr{D}_\alpha\rangle$ und $\langle \mathscr{D}_\beta', \mathscr{D}_\beta\rangle$). Sei $\breve{\mathfrak{T}}$ die durch die Produkttopologie in $\prod_{\alpha\in\mathsf{A}} \mathscr{D}_\alpha'[\sigma_\alpha]$ auf $\breve{F}$ induzierte, also die gröbste lokalkonvexe Topologie in $\breve{F}$, für die alle $\breve{P}_\alpha$ stetige Abbildungen von $\breve{F}$ auf $\mathscr{D}_\alpha'$ sind. Dann gilt der

Satz 1.2. *Die Räume* $\mathscr{D}'[\sigma]$ *und* $\breve{F}[\breve{\mathfrak{T}}]$ *sind topologisch isomorph.*

Beweis. $\mathscr{D}'$ und $\breve{F}$ sind als lineare Räume isomorph, denn jedem $f \in \mathscr{D}'$ entspricht das Element $\breve{f} = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$, wo $f_\alpha = f \,|\, \mathscr{D}_\alpha$ und umgekehrt definiert jedes $\breve{f} \in \breve{F}$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{D}$ (vgl. KÖNIG [14], IIIb, Satz 1); außerdem ist die Zuordnung $f \to \breve{f}$ linear. Diese Isomorphie ist nun auch topologisch, denn sei U_α Element einer Nullumgebungsbasis in $\mathscr{D}_\alpha'[\sigma_\alpha]$, d. h. $U_\alpha = \left\{ f_\alpha \in \mathscr{D}_\alpha' : \sup_{1\leq i\leq n} |\langle f_\alpha, \varphi_i\rangle| < \varepsilon,\ \varphi_i \in \mathscr{D}_\alpha \right\}$, dann gilt die folgende umkehrbar eindeutige Zuordnung:

$$\breve{P}_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \{\breve{f} = (f_\beta)_{\beta\in\mathsf{A}} : f_\alpha \in U_\alpha\} \leftrightarrow \{f \in \mathscr{D}' : f \,|\, \mathscr{D}_\alpha \in U_\alpha\} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \{f \in \mathscr{D}' : |\langle f, \varphi_i\rangle| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Wir wollen nun in den Räumen $\mathscr{D}_\alpha'$ auf analoge Weise, wie wir es für das Dualsystem $\langle \mathscr{D}', \mathscr{D}\rangle$ getan haben, Zylindermengen definieren. Der Unterschied gegenüber früher besteht gleichsam darin, daß wir uns jeweils auf Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}$ beschränken mit $\mathrm{Tr}\varphi \subset \alpha$. Das System der Zylindermengen in $\mathscr{D}_\alpha'$, welches wir auf diese Weise erhalten, bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}_\alpha$.

Wenn wir dann wie oben davon ausgehen, daß zu beliebigen Elementen $\psi_1, \ldots, \psi_m$ aus $\mathscr{D}$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen $Q_{\{\psi_1,\ldots,\psi_m\}}$ auf $\mathfrak{B}_m$ vorgegeben sind, welche die Bedingungen (1.4)—(1.7) erfüllen, so sind damit automatisch für jedes $\alpha \in \mathsf{A}$ bei beliebiger Wahl von Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_m$ aus $\mathscr{D}_\alpha$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen $Q_{\{\psi_1,\ldots,\psi_m\}}^\alpha$ auf $\mathfrak{B}_m$ vorgegeben, welche die Bedingungen (1.4)—(1.7) erfüllen. Hieraus folgt analog, wie es für $\langle \mathscr{D}', \mathscr{D}\rangle$ gezeigt wurde, daß die Q^α eindeutig eine schwache Verteilung μ_α in $\mathscr{D}_\alpha'$ definieren, welche auf $\mathfrak{Z}_\alpha$ σ-additiv ist, sich also fortsetzen läßt zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(\mathfrak{Z}_\alpha)$ (MINLOS [18], GELFAND-VILENKIN [9], IV, § 2, Satz 3).

Da es sich nun aber bei $\mathscr{D}_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ um einen *metrisierbaren* lokalkonvexen Raum handelt, existiert eine abzählbare Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen offenen Mengen $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$, und wegen der Separabilität von $\mathscr{D}_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ gilt für die Polaren der U_i

$$U_i^0 = \left\{ f_\alpha \in \mathscr{D}_\alpha' \colon \sup_{\varphi \in U_i} |\langle f_\alpha, \varphi \rangle| \leqq 1 \right\} \in \sigma(\mathfrak{Z}_\alpha);$$

denn mit $\mathscr{D}_\alpha$ ist auch jedes U_i separabel, d. h. es existiert eine abzählbare Teilmenge $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$, welche dicht ist in U_i bezüglich der in U_i durch $\mathfrak{T}_\alpha$ induzierten Topologie, und deshalb ist

$$U_i^0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ f_\alpha \in \mathscr{D}_\alpha' \colon |\langle f_\alpha, \varphi_j \rangle| \leqq 1 \}, \quad \text{also} \quad U_i^0 \in \sigma(\mathfrak{Z}_\alpha).$$

Da nun andererseits $\mathscr{D}_\alpha' = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i^0$ und die U_i^0 schwach kompakt sind (vgl. KÖTHE [15], § 20, 9. (4)), folgt aus der σ-Additivität von μ_α, daß $\lim_{i \to \infty} \mu_\alpha(U_i^0) = \mu_\alpha(\mathscr{D}_\alpha') = 1$, d. h. zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert eine σ_α-kompakte Teilmenge $U_{i_0(\varepsilon)}^0$ von $\mathscr{D}_\alpha'$, so daß $\mu_\alpha(\mathscr{D}_\alpha' - U_{i_0(\varepsilon)}^0) \leqq \varepsilon$ ist. Da μ_α bzw. $\sigma(\mathfrak{Z}_\alpha)$ die Bedingung (a) bzw. (b), und μ_α auf Grund seiner Definition offenbar auch die Bedingung (d) der Definition 1.1 erfüllt, bedeutet dies, daß μ_α straff ist bezüglich der schwachen Topologie σ_α in $\mathscr{D}_\alpha'$. Hieraus folgt, daß es sich bei den Maßräumen $(\mathscr{D}_\alpha'[\sigma_\alpha], \sigma(\mathfrak{Z}_\alpha), \mu_\alpha)$ um *straffe* Wahrscheinlichkeitsräume handelt, denn beim Übergang von $\mathfrak{Z}_\alpha$ auf $\sigma(\mathfrak{Z}_\alpha)$ überträgt sich die Regularität und die Ausschöpfeigenschaft.

Sei nun $\hat{\mathfrak{B}}_\alpha$ das System der Borelschen Teilmengen von $\mathscr{D}_\alpha'[\sigma_\alpha]$. Dann gilt der

Satz 1.3. *Es ist* $\sigma(\mathfrak{Z}_\alpha) \equiv \hat{\mathfrak{B}}_\alpha$.

Beweis. Sei $\mathfrak{A}_s = \{A \subset \mathscr{D}_\alpha' \colon A \ \sigma_\alpha\text{-abgeschlossen}\}$, $\mathfrak{C}_s = \{C \subset \mathscr{D}_\alpha' \colon C \ \sigma_\alpha\text{-kompakt}\}$. Dann ist $\sigma(\mathfrak{C}_s) \subset \sigma(\mathfrak{A}_s)$. Sei $A \in \mathfrak{A}_s$; da $\mathscr{D}_\alpha' = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i^0$, ist $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap U_i^0)$, wobei $A \cap U_i^0 \in \mathfrak{C}_s$. Also ist $A \in \sigma(\mathfrak{C}_s)$, d. h. $\hat{\mathfrak{B}}_\alpha \equiv \sigma(\mathfrak{A}_s) \equiv \sigma(\mathfrak{C}_s)$. Sei nun $C \in \mathfrak{C}_s$; $p_\varphi(\cdot) = \langle \cdot, \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathscr{D}_\alpha$, ist eine σ_α-stetige Abbildung von $\mathscr{D}_\alpha'$ auf $\boldsymbol{R}$, also $p_\varphi(C)$ kompakt in $\boldsymbol{R}$ für jedes $\varphi \in \mathscr{D}_\alpha$. Sei $A_\varphi = p_\varphi(C)$, also $A_\varphi \in \mathfrak{B}_1$. Dann ist $C = \bigcap_{\varphi \in \mathscr{D}_\alpha} p_\varphi^{-1}(A_\varphi)$, und infolge der Separabilität von $\mathscr{D}_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ gilt sogar, daß $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} p_{\varphi_i}^{-1}(A_{\varphi_i})$, wo $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ dicht ist in $\mathscr{D}_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$. Also ist $C \in \sigma(\mathfrak{Z}_\alpha)$ und damit $\sigma(\mathfrak{C}_s) \equiv \sigma(\mathfrak{Z}_\alpha)$, also $\hat{\mathfrak{B}}_\alpha \equiv \sigma(\mathfrak{Z}_\alpha)$.

Wenn wir nun die oben eingeführten stetigen linearen Abbildungen

$$A_\alpha^\beta \colon \mathscr{D}_\beta'[\sigma_\beta] \to \mathscr{D}_\alpha'[\sigma_\alpha], \ \alpha \subset \beta,$$

betrachten, erhalten wir den

Satz 1.4. A_α^β, $\alpha \subset \beta$, *ist eine maßtreue Abbildung von* $(\mathscr{D}_\beta'[\sigma_\beta], \sigma(\mathfrak{Z}_\beta), \mu_\beta)$ *auf* $(\mathscr{D}_\alpha'[\sigma_\alpha], \sigma(\mathfrak{Z}_\alpha), \mu_\alpha)$, *d. h.* A_α^β *ist* $\sigma(\mathfrak{Z}_\beta) - \sigma(\mathfrak{Z}_\alpha)$*-meßbar und für jedes* $X \in \sigma(\mathfrak{Z}_\alpha)$ *ist* $(A_\alpha^\beta)^{-1}(X) \in \sigma(\mathfrak{Z}_\beta)$ *und* $\mu_\alpha(X) = \mu_\beta((A_\alpha^\beta)^{-1}(X))$.

Damit haben wir die nötigen Hilfsmittel zusammengestellt und kommen nun zur Formulierung des Hauptsatzes.

Satz 1.5. *Sei* μ *eine schwache Verteilung auf dem Ring* $\mathfrak{Z}$ *der Zylindermengen des Raumes* $\mathscr{D}'$, *definiert durch ein System endlichdimensionaler Randverteilungen Q, welche die Bedingungen* (1.4)—(1.7) *erfüllen, Dann ist* μ *straff auf* $\mathfrak{Z}$ *in* $\mathscr{D}'[\sigma]$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß μ die Ausschöpfeigenschaft (c) von Definition 1.1 besitzt, denn (a) ist offenbar erfüllt, ebenso (b) und (d) auf Grund der Konstruktion von $\sigma(\mathfrak{Z})$ und μ. Wir haben in Satz 1.2 gesehen, daß $\mathscr{D}'[\sigma] \cong \breve{F}[\breve{\mathfrak{T}}]$. Auf Grund der einfachen Maximalität der Familie $(\mathscr{D}'_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ erzeugt jedes $\breve{P}_\alpha: \breve{F} \to \mathscr{D}'_\alpha$ einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\breve{F}, \breve{\mathfrak{F}}_\alpha, \breve{\nu}_\alpha)$, wobei $\breve{\mathfrak{F}}_\alpha = \breve{P}_\alpha^{-1}(\sigma(\mathfrak{Z}_\alpha))$, $\breve{\nu}_\alpha = \mu_\alpha \circ \breve{P}_\alpha$. Sei $\breve{\mathfrak{F}} = \bigcup_{\alpha\in\mathsf{A}} \breve{F}_\alpha$. $\breve{\mathfrak{F}}$ ist ein Ring von Teilmengen von $\breve{F}$, denn für $\alpha \subset \beta$ ist $\breve{\mathfrak{F}}_\alpha \subset \breve{\mathfrak{F}}_\beta$, sowie $\breve{\nu}_\alpha(\breve{X}) = \breve{\nu}_\beta(\breve{X})$ für jedes $\breve{X} \in \breve{\mathfrak{F}}_\alpha$, wie man mit Hilfe von (1.9) und Satz 1.4 leicht verifiziert. Für beliebiges α, β, $\breve{X} \in \breve{\mathfrak{F}}_\alpha$ und $\breve{X} \in \breve{\mathfrak{F}}_\beta$ existiert ein $\gamma \in \mathsf{A}$, so daß $\alpha \subset \gamma$, $\beta \subset \gamma$, $\nu_\alpha(\breve{X}) = \breve{\nu}_\gamma(\breve{X})$ und $\nu_\beta(\breve{X}) = \breve{\nu}_\gamma(\breve{X})$; also ist folgende Definition sinnvoll: Für $\breve{X} \in \breve{\mathfrak{F}}$, also $\breve{X} \in \breve{\mathfrak{F}}_\alpha$ für geeignetes α, definieren wir $\breve{\nu}(\breve{X}) = \breve{\nu}_\alpha(\breve{X})$. Offenbar ist $\breve{\nu}$ additiv auf $\breve{\mathfrak{F}}$ und σ-additiv auf jedem $\breve{\mathfrak{F}}_\alpha$.

Den Maßraum $(\breve{F}[\breve{\mathfrak{T}}], \breve{\mathfrak{F}}, \breve{\nu})$ bezeichnen wir als *projektiven Limes der straffen Maßräume* $(\mathscr{D}'_\alpha[\sigma_\alpha], \sigma(\mathfrak{Z}_\alpha), \mu_\alpha)$ *bezüglich der Abbildungen* A_α^β, $\alpha \subset \beta$, und schreiben

$$(\breve{F}[\breve{\mathfrak{T}}], \breve{\mathfrak{F}}, \breve{\nu}) = \lim_{\alpha} \operatorname{proj} (\mathscr{D}'_\alpha[\sigma_\alpha], \sigma(\mathfrak{Z}_\alpha), \mu_\alpha)\,.$$

Satz 1.5 ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß $\breve{\nu}$ auf $\breve{\mathfrak{F}}$ in $\breve{F}[\breve{\mathfrak{T}}]$ die Ausschöpfeigenschaft (c) besitzt. Denn dann ist (c) auch für die auf $\mathfrak{R} = \bigcup_{\alpha\in\mathsf{A}} \mathfrak{R}_\alpha$, mit $\mathfrak{R}_\alpha = \breve{P}_\alpha^{-1}(\mathfrak{Z}_\alpha)$, eingeschränkte Mengenfunktion in $\breve{F}[\breve{\mathfrak{T}}]$ erfüllt, woraus sich wegen der Isomorphie der Maßräume $(\mathscr{D}'[\sigma], \mathfrak{Z}, \mu)$ und $(\breve{F}[\breve{\mathfrak{T}}], \mathfrak{R}, \breve{\nu})$ die Behauptung des Satzes ergibt; die Tatsache, daß $(\mathscr{D}'[\sigma], \mathfrak{Z}, \mu) \cong (\breve{F}[\breve{\mathfrak{T}}], \mathfrak{R}, \breve{\nu})$, ergibt sich aus Satz 1.2 und der umkehrbar eindeutigen Zuordnung

$$\begin{gathered}
\mathfrak{Z} \ni Z = \{f \in \mathscr{D}' : (\langle f, \varphi_1\rangle, \ldots, \langle f, \varphi_n\rangle) \in B\} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow Z_\alpha = \{f_\alpha \in \mathscr{D}'_\alpha : (\langle f_\alpha, \varphi_1\rangle, \ldots, \langle f_\alpha, \varphi_n\rangle) \in B\} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow \breve{P}_\alpha^{-1}(Z_\alpha) = \breve{X} \in \mathfrak{R}, \quad \text{wobei} \quad \mu(Z) = \mu_\alpha(Z_\alpha) = \breve{\nu}_\alpha(\breve{P}_\alpha^{-1}(Z_\alpha)) = \breve{\nu}(\breve{X})\,.
\end{gathered}$$

Um zu zeigen, daß $\breve{\nu}$ auf $\breve{\mathfrak{F}}$ in $\breve{F}[\breve{\mathfrak{T}}]$ die Ausschöpfeigenschaft besitzt, benötigen wir das folgende

Lemma. Für eine konfinale Teilmenge Γ von A ist

$$(\breve{F}[\breve{\mathfrak{T}}], \breve{\mathfrak{F}}, \breve{\nu}) \cong (F^+[\mathfrak{T}^+], \mathfrak{F}^+, \nu^+)\,,$$

wo $(F^+[\mathfrak{T}^+], \mathfrak{F}^+, \nu^+) = \lim_{\gamma} \operatorname{proj} (\mathscr{D}'_\gamma[\sigma_\gamma], \sigma(\mathfrak{Z}_\gamma), \mu_\gamma)$ *bezüglich der Abbildungen* A_γ^δ, $\gamma \subset \delta$, $\gamma, \delta \in \Gamma$.

Den Beweis für die toplogische Isomorphie der Räume $\breve{F}[\breve{\mathfrak{T}}]$ und $F^+[\mathfrak{T}^+]$ findet man bei KÖTHE [14], § 19, 8. (2); der Beweis der Isomorphie der mit den Maßen ν bzw. ν^+ versehenen meßbaren Strukturen $\breve{\mathfrak{F}}$ bzw. $\mathfrak{F}^+$ verläuft analog und soll hier übergangen werden.

Im folgenden sei $\Gamma = \{[-n, n]: n = 1, 2, \ldots\}$. Auf Grund des Lemmas genügt es dann zu zeigen:

(1.10) $\qquad \nu^+$ auf $\mathfrak{F}^+$ besitzt in $F^+[\mathfrak{T}^+]$ die Ausschöpfeigenschaft (c).

Zu diesem Zweck betrachten wir den mit der Produkttopologie $\mathfrak{T}_\pi$ versehenen

Produktraum $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathscr{D}'_\gamma[\sigma_\gamma]$. Sei $D=\{\Delta\subset\Gamma:\Delta$ endlich$\}$ und $P_\Delta:\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathscr{D}'_\gamma\to\prod\limits_{\gamma\in\Delta}\mathscr{D}'_\gamma$. In $\prod\limits_{\gamma\in\Delta}\mathscr{D}'_\gamma$ betrachten wir den σ-Ring $\mathfrak{S}_\Delta=\bigotimes\limits_{\gamma\in\Delta}\sigma(\mathfrak{Z}_\gamma)$. Sei dann $\mathfrak{M}=\bigcup\limits_{\Delta\in D}\mathfrak{M}_\Delta$, mit $\mathfrak{M}_\Delta=P_\Delta^{-1}(\mathfrak{S}_\Delta)$, und sei $\mathfrak{N}=\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathfrak{M}_{\{\gamma\}}$, $\mathfrak{M}_{\{\gamma\}}=P_{\{\gamma\}}^{-1}(\mathfrak{S}_{\{\gamma\}})\equiv P_\gamma^{-1}(\sigma(\mathfrak{Z}_\gamma))$. Offenbar ist $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$. Auf $\mathfrak{S}_\Delta$ definieren wir das Maß $\mu_\Delta=\bigotimes\limits_{\gamma\in\Delta}\mu_\gamma$. Infolge der Straffheit der Wahrscheinlichkeitsräume $(\mathscr{D}'_\gamma[\sigma_\gamma],\sigma(\mathfrak{Z}_\gamma),\mu_\gamma)$ sind die μ_Δ straffe Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{S}_\Delta$ in dem ebenfalls mit der Produkttopologie versehenen Raum $\prod\limits_{\gamma\in\Delta}\mathscr{D}'_\gamma$. Da die $(\mu_\Delta)_{\Delta\in D}$ außerdem die natürlichen Verträglichkeitsbedingungen erfüllen, definieren sie auf $\mathfrak{M}$ eindeutig ein Maß m und es gilt (vgl. Hildenbrand [11], V):

Zu jedem $\varepsilon>0$ existiert eine $\mathfrak{T}_\pi$-kompakte Teilmenge K_ε von $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathscr{D}'_\gamma$, so daß für jedes $M\in\mathfrak{M}$, mit $M\cap K_\varepsilon=\emptyset$, $m(M)\leqq\varepsilon$ ist.

Hieraus folgt insbesondere

(1.11) Zu jedem $\varepsilon>0$ existiert eine $\mathfrak{T}_\pi$-kompakte Teilmenge $\tilde K_\varepsilon=\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}P_\gamma(K_\varepsilon)$, so daß für jedes $N\in\mathfrak{N}$, mit $N\cap\tilde K_\varepsilon=\emptyset$, $m(N)\leqq\varepsilon$ ist.

Nun ist (vgl. Köthe [15], § 19, 10. (3)) $F^+[\mathfrak{T}^+]$ ein *abgeschlossener* linearer Teilraum von $\left(\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathscr{D}'_\gamma\right)[\mathfrak{T}_\pi]$. Außerdem ist $\mathfrak{F}^+=\mathfrak{N}\cap F^+=\{N\cap F^+: N\in\mathfrak{N}\}$, denn es ist $N\cap F^+=P_\gamma^{-1}(Z_\gamma)\cap F^+$, $Z_\gamma\in\sigma(\mathfrak{Z}_\gamma)$, für geeignetes γ, also $N\cap F^+=\{f^+\in F^+:\overset{+}{P}_\gamma f^+\in Z_\gamma\}=\overset{+}{P}{}_\gamma^{-1}(Z_\gamma)=X^+\in\mathfrak{F}^+$, wobei $\overset{+}{P}_\gamma=P_\gamma|F^+$; ferner gilt

$$\nu^+(X^+)=\mu_\gamma(Z_\gamma)=m(N)\,. \tag{1.12}$$

Sei nun $\varepsilon>0$ vorgegeben. Dann ist $K_\varepsilon^+=\tilde K_\varepsilon\cap F^+$ wegen der Abgeschlossenheit von F^+ in $\left(\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathscr{D}'_\gamma\right)[\mathfrak{T}_\pi]$ eine kompakte Teilmenge von $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}\mathscr{D}'_\gamma$. Da ferner $\mathfrak{T}^+$ mit der durch $\mathfrak{T}_\pi$ auf F^+ induzierten Topologie übereinstimmt, ist K_ε^+ kompakt in $F^+[\mathfrak{T}^+]$. Sei jetzt $X^+\cap K_\varepsilon^+=\emptyset$, $X^+\in\mathfrak{F}^+$; dann ist $X^+\in\mathfrak{F}_\gamma^+$ für geeignetes γ, d.h. $X^+=\overset{+}{P}{}_\gamma^{-1}(Z_\gamma)$, $Z_\gamma\in\sigma(\mathfrak{Z}_\gamma)$, und außerdem $X^+=N\cap F^+$ mit $N=P_\gamma^{-1}(Z_\gamma)$. Wegen $X^+\cap K_\varepsilon^+=\emptyset$ ist nun aber auch $Z_\gamma\cap P_\gamma(\tilde K_\varepsilon)=\emptyset$; denn zu $f_\gamma\in Z_\gamma\cap P_\gamma(\tilde K_\varepsilon)$ würde ein f^+ in F^+ existieren mit $\overset{+}{P}_\gamma f^+=f_\gamma$, also $f^+\in X^+$, und auf Grund der Folgenmaximalität von $(\mathscr{D}'_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}_+}$ und der speziellen Wahl von Γ würde sich f^+ überdies so wählen lassen, daß $\overset{+}{P}_\delta f^+\in P_\delta(\tilde K_\varepsilon)$ für alle $\delta\in\Gamma$, also

$$f^+\in X^+\cap\tilde K_\varepsilon\cap F^+=X^+\cap K_\varepsilon^+$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Wegen $Z_\gamma\cap P_\gamma(\tilde K_\varepsilon)=\emptyset$ ist nun aber auch $N\cap\tilde K_\varepsilon=\emptyset$, woraus wegen (1.11) und (1.12) folgt, daß $\nu^+(X^+)=m(N)\leqq\varepsilon$ ist. Damit ist (1.10) und somit Satz 1.5 vollständig bewiesen.

Satz 1.6. $\sigma(\mathfrak{Z})$ *ist ein mit der Topologie* $\sigma(\mathscr{D}',\mathscr{D})$ *verträglicher und trennender* σ*-Ring in* $\mathscr{D}'$ (vgl. Hildenbrand [11], II).

Beweis. Nach Konstruktion ist $\sigma(\mathfrak{Z})$ mit der schwachen Topologie σ in $\mathscr{D}'$ verträglich. Daß $\sigma(\mathfrak{Z})$ trennend ist, sieht man so: Sei

$$H_{\sigma(\mathfrak{Z})}=\{h\in\mathscr{C}(\mathscr{D}'):h\ \sigma(\mathfrak{Z})\text{-meßbar}\},$$

$\mathscr{C}(\mathscr{D}')$ die Gesamtheit aller auf $\mathscr{D}'$ definierten stetigen und beschränkten reellwertigen Funktionen. Sei $f_1, f_2 \in \mathscr{D}'$, $f_1 \neq f_2$. Dann existiert mindestens ein $\alpha \in \mathsf{A}$, so daß $f_\alpha^{(1)} = f_1 | \mathscr{D}_\alpha$ und $f_\alpha^{(2)} = f_2 | \mathscr{D}_\alpha$ verschieden sind. Da nun aber $\sigma(\mathfrak{Z}_\alpha) \equiv \hat{\mathfrak{B}}_\alpha$ trennend ist, existiert eine $\sigma(\mathfrak{Z}_\alpha)$-meßbare stetige und beschränkte Funktion $h_\alpha\colon \mathscr{D}'_\alpha \to \boldsymbol{R}$, so daß $h_\alpha(f_\alpha^{(1)}) \neq h_\alpha(f_\alpha^{(2)})$. Die durch $h(f) = h_\alpha(f_\alpha)$, $f_\alpha = f | \mathscr{D}_\alpha$, definierte Funktion gehört dann zu $H_{\sigma(\mathfrak{Z})}$ und es ist $h(f_1) \neq h(f_2)$.

Aus den beiden Sätzen 1.5 und 1.6 folgt nun unmittelbar (vgl. HILDENBRAND [11], III, Satz 3.2)

Satz 1.7. *Sei μ eine schwache Verteilung auf der Gesamtheit $\mathfrak{Z}$ der Zylindermengen des Raumes $\mathscr{D}'[\sigma]$, definiert durch ein System endlichdimensionaler Randverteilungen Q, welche die Bedingungen* (1.4)—(1.7) *erfüllen. Dann existiert eine und nur eine straffe Mengenfunktion $\hat{\mu}$, welche auf dem System $\hat{\mathfrak{B}}$ der Borelschen Mengen von $\mathscr{D}'[\sigma]$ definiert ist und deren Einschränkung $\hat{\mu} | \mathfrak{Z} = \mu$ ist.*

Damit ist dann gezeigt, daß sich jeder VSP auffassen läßt als eine straffe Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Borelschen Mengen von $\mathscr{D}'[\sigma]$.

II. Äquivalenz und Singularität zweier Normalverteilungen im Raum $\mathscr{D}'$

Wie in Kapitel I nehmen wir wieder an, daß zu je endlich vielen beliebigen Elementen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ aus einer algebraischen Basis B von $\mathscr{D}$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen $Q_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}}$ auf $\mathfrak{B}_n$ vorgegeben sind, welche die Bedingungen (1.4) bis (1.7) erfüllen. Wir haben gesehen, daß dadurch auf dem System $\mathfrak{Z}$ der Zylindermengen von $\mathscr{D}'$ eine schwache Verteilung μ definiert wird, und nach Satz 1.7 wissen wir, daß sich μ eindeutig fortsetzen läßt zu einem straffen Maß auf den Borelschen Mengen $\hat{\mathfrak{B}}$ von $\mathscr{D}'[\sigma]$. Wir bezeichnen im folgenden das so fortgesetzte Maß wieder mit μ und nennen es eine *zufällige Distribution*.

Definition 2.1. Eine zufällige Distribution μ heißt *quadratisch*, wenn

$$\int_{\boldsymbol{R}} |x|^2 \, Q_{\{\varphi\}}(dx) < \infty \text{ ist, für jedes } \varphi \in \mathscr{D}. \tag{2.1}$$

Für solche zufällige Distributionen betrachten wir dann die auf $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ definierte reellwertige Funktion

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\mathscr{D}'} \langle f, \varphi \rangle \langle f, \psi \rangle \, d\mu(f) = \int_{\boldsymbol{R}} \int_{\boldsymbol{R}} x y \, Q_{\{\varphi,\psi\}}(dx, dy)\,. \tag{2.2}$$

Man sieht unmittelbar, daß B in beiden Argumenten linear ist, daß außerdem B positiv semidefinit und wegen (1.4) symmetrisch ist.

Wir bezeichnen B als die *Kovarianz der zufälligen Distribution* μ (vgl. DUDLEY [6]).

Satz 2.1. *$B(\varphi, \varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, ist stetig auf $\mathscr{D}[\mathfrak{T}]$.*

Beweis. B ist hypostetig auf $\mathscr{D}[\mathfrak{T}] \times \mathscr{D}[\mathfrak{T}]$ (vgl. DUDLEY[7]), also insbesondere getrennt stetig in jedem Argument, woraus folgt, daß $B(\varphi, \varphi)$ stetig ist auf $\mathscr{D}_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ für jedes $\alpha \in \mathsf{A}$ (vgl. KÖTHE [15], § 15, 14. (3)). Nun ist $\mathscr{D}[\mathfrak{T}]$ der induktive Limes der $\mathscr{D}_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$, eine konvexe Menge U in $\mathscr{D}$ also eine Nullumgebung, wenn $U \cap \mathscr{D}_\alpha$ für jedes $\alpha \in \mathsf{A}$ eine Nullumgebung in $\mathscr{D}_\alpha$ ist (vgl. SCHWARTZ [23], III, Théorème II). Da aber $\{\varphi \in \mathscr{D}\colon B(\varphi, \varphi) \leqq \varepsilon\}$ konvex ist, ist diese Menge somit eine Nullumgebung der Topologie $\mathfrak{T}$ in $\mathscr{D}$, woraus sich die behauptete Stetigkeit von $B(\varphi, \varphi)$ auf $\mathscr{D}[\mathfrak{T}]$ ergibt (vgl. KÖTHE [15], § 15, 14. (1)).

Vermöge B wird nun auf $\mathscr{D}$ eine Halbnorm $|\cdot|_\mu$ definiert durch

$$(2.3) \qquad |\varphi|_\mu = (B(\varphi, \varphi))^{1/2}, \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Ist $B(\varphi, \varphi)$ positiv definit, d. h. $B(\varphi, \varphi) > 0$ für alle nicht identisch verschwindenden Funktionen $\varphi \in \mathscr{D}$, so wird durch (2.3) auf $\mathscr{D}$ eine Norm definiert.

Wegen der Stetigkeit von $B(\varphi, \varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, ist nun die dadurch definierte Topologie $\mathfrak{T}_\mu$ gröber als die Ausgangstopologie $\mathfrak{T}$ auf $\mathscr{D}$. Hieraus folgt wegen der Separabilität von $\mathscr{D}[\mathfrak{T}]$, daß auch der mit der Topologie $\mathfrak{T}_\mu$ versehene Raum $\mathscr{D}[\mathfrak{T}_\mu]$ separabel ist. Dies wird später entscheidend benützt.

Für eine zufällige Distribution μ sei nun weiter

$$(2.4) \qquad m(\varphi) = \int_{\mathscr{D}'} \langle f, \varphi\rangle \, d\mu(f) = \int_{R} x \, Q_{\{\varphi\}}(dx), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Es ist $m \in \mathscr{D}'$, denn m ist offensichtlich linear und aus

$$|m(\varphi)|^2 = \left|\int_R x \, Q_{\{\varphi\}}(dx)\right|^2 \leqq \int_R |x|^2 \, Q_{\{\varphi\}}(dx) = B(\varphi, \varphi)$$

und der oben bewiesenen Stetigkeit von $B(\varphi, \varphi)$ ergibt sich die Stetigkeit von $m(\varphi)$ auf $\mathscr{D}[\mathfrak{T}]$.

Wir nennen m den *Mittelwert der zufälligen Distribution* μ.

Wir wollen jetzt annehmen, daß die endlichdimensionalen Randverteilungen $Q_{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}}$ auf $\mathfrak{B}_n$ n-dimensionale Normalverteilungen sind, d. h. es sei

$$(2.5) \qquad Q_{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}}(B) = (2\pi)^{-n/2} (\det \Lambda)^{1/2} \int_B \exp\left[-\tfrac{1}{2}\langle \Lambda(x - \mathring{x}),\ x - \mathring{x}\rangle\right] dx,$$

wo $\Lambda = (\lambda_{ik})$ eine positiv semidefinite nicht singuläre Matrix ist, die von den Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ abhängt, und $\mathring{x}$ den Vektor mit den Komponenten $m(\varphi_1), \ldots, m(\varphi_n)$ bezeichnet; ferner ist

$$(2.6) \qquad \langle \Lambda x, x\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} \lambda_{ik} x_i x_k.$$

Die zugehörige (quadratische) zufällige Distribution nennen wir eine *Normalverteilung im Raum* $\mathscr{D}'$.

Die Existenz von Normalverteilungen in $\mathscr{D}'$ folgt aus der Tatsache, daß zu jeder getrennt stetigen Bilinearfunktion $B(\varphi, \psi)$ auf $\mathscr{D}[\mathfrak{T}] \times \mathscr{D}[\mathfrak{T}]$ und zu jedem stetigen linearen Funktional $m(\varphi)$ auf $\mathscr{D}[\mathfrak{T}]$, derart, daß $B(\varphi, \psi) - m(\varphi)\, m(\psi)$ positiv definit ist, eine Normalverteilung in $\mathscr{D}'$ existiert, für welche $B(\varphi, \psi)$ die Kovarianz und $m(\varphi)$ den Mittelwert darstellt (vgl. GELFAND-VILENKIN [9], III, § 2, 3). Dabei werden durch die Kovarianz und den Mittelwert die Verteilungen (2.5) eindeutig festgelegt, denn es ist (vgl. GELFAND-VILENKIN [9], III, § 2, 2).

$$(2.7) \qquad \Lambda = (B(\varphi_i, \varphi_k))^{-1}.$$

Wir betrachten nun zwei Normalverteilungen ν_1 und ν_2 in $\mathscr{D}'$, wobei wir voraussetzen wollen, daß der Mittelwert m_2 von ν_2 identisch verschwindet. B_1 und B_2 seien die zugehörigen Kovarianzen und $\mathfrak{T}\nu_i$ bezeichnet die durch B_i, $i = 1, 2$, auf $\mathscr{D}$ induzierte Topologie. Dann gilt das

Lemma 2.1. *Aus der Nichtsingularität der beiden straffen Maße ν_1 und ν_2 in $\mathscr{D}'[\sigma]$ folgt die Äquivalenz der beiden Topologien $\mathfrak{T}_{\nu_1}$ und $\mathfrak{T}_{\nu_2}$ in $\mathscr{D}$, d. h. die Homöomorphie der Räume $\mathscr{D}[\mathfrak{T}_{\nu_1}]$ und $\mathscr{D}[\mathfrak{T}_{\nu_2}]$.*

Der *Beweis* verläuft analog wie bei KALLIANPUR-OODAIRA [13], Lemma 1, und soll hier nicht weiter ausgeführt werden.

Sei jetzt $L_{\nu_i}^{(2)} = L^{(2)}(\mathscr{D}', \sigma(\mathfrak{Z}), \nu_i) = \{h: \mathscr{D}' \to \mathbf{R};\ h\ \sigma(\mathfrak{Z})$-meßbar und $\int_{\mathscr{D}'} |h(f)|^2 d\nu_i(f) < \infty\}, i = 1, 2$. $((h_1, h_2))_{\nu_i} = \int_{\mathscr{D}'} h_1(f)\, h_2(f)\, d\nu_i(f)$ bezeichne das innere Produkt und $\|h\|_{\nu_i} = [((h, h))]^{1/2}$ die zugehörige Halbnorm in $L_{\nu_i}^{(2)}$. Da sich jedes $\varphi \in \mathscr{D}$ auf Grund der Konstruktion von $\sigma(\mathfrak{Z})$ auffassen läßt als zufällige Variable $\varphi(f) = \langle f, \varphi\rangle$ über $(\mathscr{D}', \sigma(\mathfrak{Z}))$, und da hierbei $|\varphi|_{\nu_i} = \|\varphi\|_{\nu_i}$, $i = 1, 2$, ist, erhalten wir eine stetige Einbettung von $\mathscr{D}[\mathfrak{T}_{\nu_i}]$ in $L_{\nu_i}^{(2)}$.

Wir wollen nun voraussetzen, daß ν_1 und ν_2 nicht singulär sind. Dann existieren nach Lemma 2.1 Konstanten c_1 und c_2, so daß $\frac{1}{c_1}|\varphi|_{\nu_1} \leqq |\varphi|_{\nu_2} \leqq c_2|\varphi|_{\nu_1}$, nach dem zuvor Gesagten ist also

$$\frac{1}{c_1}\|\varphi\|_{\nu_1} \leqq \|\varphi\|_{\nu_2} \leqq c_2\|\varphi\|_{\nu_1} \quad \text{für jedes} \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{2.8}$$

Sei $\bar{\mathscr{D}} = \{h \in L_{\nu_1}^{(2)} \cap L_{\nu_2}^{(2)}$; so daß existiert $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in \mathscr{D}$, mit $\|h - \varphi_n\|_{\nu_1} \to 0$ und $\|h - \varphi_n\|_{\nu_2} \to 0$ für $n \to \infty\}$. Dann folgt aus (2.8)

$$\frac{1}{c_1}\|h\|_{\nu_1} \leqq \|h\|_{\nu_2} \leqq c_2\|h\|_{\nu_1} \quad \text{für jedes} \quad h \in \bar{\mathscr{D}}. \tag{2.9}$$

Wir setzen $N_{\nu_i} = \{h \in \bar{\mathscr{D}}: \|h\|_{\nu_i} = 0\}$. Wegen (2.9) ist $N_{\nu_1} = N_{\nu_2} = N$. Sei dann $\tilde{\mathscr{D}} = \bar{\mathscr{D}}/N$. Wir versehen $\tilde{\mathscr{D}}$ mit dem Skalarprodukt $((\cdot,\cdot))_{\nu_2}^{\sim}$ bzw. der Norm $\|\cdot\|_{\nu_2}^{\sim}$, und bezeichnen diesen Raum mit $\tilde{\mathscr{D}}_{\nu_2}$ und seine Elemente mit $\tilde{h}$; dabei ist $((\tilde{h}_1, \tilde{h}_2))_{\nu_2}^{\sim} = ((h_1, h_2))_{\nu_2}$, wo $h_1 \in \tilde{h}_1$, $h_2 \in \tilde{h}_2$.

Als Folge der im Anschluß an Satz 2.1 gemachten Bemerkung, wonach die Räume $\mathscr{D}[\mathfrak{T}_{\nu_i}]$ separabel sind, ist nun $\tilde{\mathscr{D}}_{\nu_2}$ ein separabler Hilbertraum. Da ferner ν_1 und ν_2 Normalverteilungen in $\mathscr{D}'$ sind, ist die gemeinsame Verteilung je endlich vieler $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \mathscr{D}$, aufgefaßt als zufällige Variable über $(\mathscr{D}', \sigma(\mathfrak{Z}))$ normal bezüglich ν_1 und ν_2. Auf Grund der Definition von $\bar{\mathscr{D}}$ ist dann auch die gemeinsame Verteilung je endlich vieler Elemente $h_1, \ldots, h_m$ aus $\bar{\mathscr{D}}$ normal bezüglich ν_1 und ν_2. Für ein $h \in \bar{\mathscr{D}}$ ist ferner

$$m_1(h) = \int_{\mathscr{D}'} h(f)\, d\nu_1(f) = \lim_{n\to\infty} m_1(\varphi_n), \quad \text{wo} \quad \|h - \varphi_n\|_{\nu_i} \to 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.10}$$
$$\text{und} \quad \int_{\mathscr{D}'} h(f)\, d\nu_2(f) = \lim_{n\to\infty} m_2(\varphi_n) = 0.$$

Auf $\tilde{\mathscr{D}}_{\nu_2}$ definieren wir jetzt die folgende symmetrische Bilinearform:

$$B(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = ((h_1, h_2))_{\nu_1} - m_1(h_1)\, m_1(h_2), \quad \text{wo} \quad h_1 \in \tilde{h}_1, \quad h_2 \in \tilde{h}_2 \quad \text{und} \quad \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \tilde{\mathscr{D}}_{\nu_2}. \tag{2.11}$$

B ist nicht ausgeartet und es gilt

$$\begin{aligned}|B(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)| &= \Big|\int_{\mathscr{D}'} h_1(f)\, h_2(f)\, d\nu_1(f) - m_1(h_1)\, m_1(h_2)\Big| \\ &= \Big|\int_{\mathscr{D}'} [h_1(f) - m_1(h_1)]\,[h_2(f) - m_1(h_2)]\, d\nu_1(f)\Big| \leqq\end{aligned}$$

$$\leqq \left[\int_{\mathscr{D}'}[h_1(f) - m_1(h_1)]^2 d\nu_1(f)\right]^{1/2} \left[\int_{\mathscr{D}'}[h_2(f) - m_1(h_2)]^2 d\nu_1(f)\right]^{1/2}$$
$$= [\|h_1\|_{\nu_1}^2 - (m_1(h_1))^2]^{1/2} [\|h_2\|_{\nu_1}^2 - (m_1(h_2)^2]^{1/2}$$
$$\leqq \|h_1\|_{\nu_1} \|h_2\|_{\nu_1} \underset{(2.9)}{\leqq} c_1^2 \|h_1\|_{\nu_2} \|h_2\|_{\nu_2} = c_1^2 \|\tilde{h}_1\|_{\nu_2}^{\sim} \|\tilde{h}_2\|_{\nu_2}^{\sim};$$

also ist $B(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ als Funktion in $\tilde{h}_2$ eine stetige Linearfunktion auf $\tilde{\mathscr{D}}_{\nu_2}$. Folglich existiert ein beschränkter selbstadjungierter Operator S in $\tilde{\mathscr{D}}_{\nu_2}$, so daß

$$B(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = ((S\tilde{h}_1, \tilde{h}_2))_{\nu_2}^{\sim}. \tag{2.12}$$

Dann gilt das folgende

Lemma 2.2 (Kallianpur-Oodaira [13], Lemma 4). *Sind die beiden Maße ν_1 und ν_2 nicht singulär, so hat S ein reines Punktspektrum aus endlich oder abzählbar vielen Eigenwerten.*

Seien $\{\lambda_k\}$ die Eigenwerte von S (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt) und $\{\tilde{h}_k\}$ die zugehörigen Eigenvektoren mit $((\tilde{h}_i, \tilde{h}_k))_{\nu_2}^{\sim} = \delta_{ik}$. Die $\tilde{h}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $\tilde{\mathscr{D}}_{\nu_2}$ und es gilt das

Lemma 2.3 (Kallianpur-Oodaira [13], Lemma 5). *Aus der Nichtsingularität von ν_1 und ν_2 folgt, daß*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_k)^2 < \infty \quad \textit{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty}[m_1(h_k)]^2 < \infty, \quad \textit{wo} \quad h_k \in \tilde{h}_k. \tag{2.13}$$

Zusammenfassend erhalten wir damit den

Satz 2.2. *ν_1 und ν_2 seien zwei nicht singuläre Normalverteilungen im Raum $\mathscr{D}'$. Dann gilt*

(a) *$\mathfrak{T}_{\nu_1}$ äquivalent $\mathfrak{T}_{\nu_2}$, wo $\mathfrak{T}_{\nu_i}$ die durch die Kovarianz B_i von ν_i auf $\mathscr{D}$ induzierte Topologie bezeichnet,*

(b) *der durch* (2.12) *definierte Operator S besitzt ein reines Punktspektrum mit positiven Eigenwerten λ_k und es gilt* (2.13).

Umgekehrt gilt der

Satz 2.3. *Aus* (a) *und* (b) *folgt die Äquivalenz von ν_1 und ν_2 auf $\hat{\mathfrak{B}}$ in $\mathscr{D}'[\sigma]$.*

Beweis. Analog wie bei Kallianpur-Oodaira [13], Theorem 2, beweist man die Äquivalenz von ν_1 und ν_2 auf $\sigma(\mathfrak{Z})$ in $\mathscr{D}'$, d.h. man zeigt, daß $\nu_1 \ll \nu_2$ und $\nu_2 \ll \nu_1$ auf $\sigma(\mathfrak{Z})$. Dann existiert aber eine $\sigma(\mathfrak{Z})$-meßbare, bezüglich ν_2 integrierbare Funktion $g\colon \mathscr{D}' \to \boldsymbol{R}$, $g \geqq 0$, so daß

$$\nu_1(Z) = \int_Z g(f)\, d\nu_2(f) \quad \text{für jedes} \quad Z \in \sigma(\mathfrak{Z}).$$

Sei $\hat{\nu}_1(B) = \int_B g(f)\, d\nu_2(f)$, $B \in \hat{\mathfrak{B}}$. Wir zeigen: $\hat{\nu}_1$ ist straff auf $\hat{\mathfrak{B}}$, d.h. zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Teilmenge K_ε in $\mathscr{D}'[\sigma]$, so daß $\hat{\nu}_1(\mathscr{D}' - K_\varepsilon) \leqq \varepsilon$ ist. Es ist nämlich

$$\hat{\nu}_1(\mathscr{D}' - K_\varepsilon) = \int_{\mathscr{D}' - K_\varepsilon} g(f)\, d\nu_2(f) \leqq \int_{\mathscr{D}' - K_\varepsilon} g_{n_0(\varepsilon)}(f)\, d\nu_2(f) + \frac{\varepsilon}{2},$$

wo $g_{n_0(\varepsilon)}$ eine nichtnegative beschränkte $\hat{\mathfrak{B}}$-meßbare Funktion auf $\mathscr{D}'$ ist. Sei $M = \sup_{f \in \mathscr{D}'} g_{n_0(\varepsilon)}(f)$; dann folgt

$$\hat{\nu}_1(\mathscr{D}' - K_\varepsilon) \leqq M \nu_2(\mathscr{D}' - K_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

falls K_ε so gewählt wird, daß $\nu_2(\mathscr{D}' - K_\varepsilon) \leqq \varepsilon/M$ ist, was wegen der Straffheit von ν_2 auf $\hat{\mathfrak{B}}$ möglich ist. Da aber $\hat{\nu}_1 | \sigma(\mathfrak{Z}) = \nu_1$, folgt auf Grund der eindeutigen Fortsetzbarkeit für straffe Mengenfunktionen (vgl. HILDENBRAND [11], III, Satz 3.2), daß $\hat{\nu}_1 \equiv \nu_1$ auf $\hat{\mathfrak{B}}$, also $\nu_1 \ll \nu_2$ auf $\hat{\mathfrak{B}}$. Analog zeigt man, daß $\nu_2 \ll \nu_1$ auf $\hat{\mathfrak{B}}$.

Kriterium. *Zwei Normalverteilungen ν_1 und ν_2 in $\mathscr{D}'$, mit $m_2 \equiv 0$, sind entweder äquivalent oder singulär, und die Bedingungen* (a) *und* (b) *sind notwendig und hinreichend für Äquivalenz.*

Folgerungen

Bezeichne wieder ν eine Normalverteilung in $\mathscr{D}'$ mit Mittelwert $m \equiv 0$, $\mathfrak{T}_\nu$ die durch die Kovarianz B von ν auf $\mathscr{D}$ induzierte Topologie. Für ein beliebiges $f_0 \in \mathscr{D}'$ definieren wir

$$\nu_{f_0}(Z) = \nu(Z - f_0), \quad Z \in \mathfrak{Z}.$$

Dann gilt (vgl. GELFAND-VILENKIN [9], IV, § 5, Theorem 3, und DUDLEY [6], Theorem 3) der

Satz 2.4. *ν_{f_0} ist eine zu ν äquivalente Normalverteilung in $\mathscr{D}'$, falls f_0 $\mathfrak{T}_\nu$-stetig ist.*

Beweis. Daß ν_{f_0} wieder eine Normalverteilung ist, ist klar; ferner hat sie den Mittelwert $m_{f_0} = f_0$. $\mathfrak{T}_{\nu_{f_0}}$ sei die durch ihre Kovarianz B_{f_0} auf $\mathscr{D}$ induzierte Topologie. Für jedes $\varphi \in \mathscr{D}$ ist

$$|\varphi|^2_{\nu_{f_0}} = B_{f_0}(\varphi, \varphi) = B(\varphi, \varphi) + |\langle f_0, \varphi\rangle|^2 \leqq (1 + M)\, B(\varphi, \varphi) = (1 + M)\, |\varphi|^2_\nu,$$

wegen der $\mathfrak{T}_\nu$-Stetigkeit von f_0; andererseits ist

$$|\varphi|^2_\nu = B(\varphi, \varphi) \leqq B_{f_0}(\varphi, \varphi) = |\varphi|^2_{\nu_{f_0}},$$

also gilt (a) mit $\nu_1 = \nu_{f_0}$ und $\nu_2 = \nu$. Da

$$(\varphi, \psi)_\nu = (\varphi, \psi)_{\nu_{f_0}} - \langle f_0, \varphi\rangle \langle f_0, \psi\rangle = (\varphi, \psi)_{\nu_{f_0}} - m_{f_0}(\varphi)\, m_{f_0}(\psi)$$

für beliebige $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$, folgt auf Grund der Definition von $\tilde{\mathscr{D}}$ und (2.10) leicht, daß hier $S = I$ ist, I der Einheitsoperator in $\tilde{\mathscr{D}}_\nu$. Wegen der Separabilität von $\tilde{\mathscr{D}}_\nu$ erhalten wir abzählbar viele Eigenwerte $\lambda_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$ von S und ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\tilde{h}_k\}$ in $\tilde{\mathscr{D}}_\nu$ bildet das zugehörige System der Eigenelemente. Da f_0 $\mathfrak{T}_\nu$-stetig ist, existiert ferner ein $\tilde{h}_0 \in \tilde{\mathscr{D}}_\nu$, so daß $\langle f_0, \varphi\rangle = ((\tilde{\varphi}, \tilde{h}_0))_\nu^\sim$, also ist wegen $m_{f_0}(h) = \lim_{n\to\infty} m_{f_0}(\varphi_n)$, wo $\|h - \varphi_n\|_\nu \to 0$,

$$m_{f_0}(h) = \lim_{n\to\infty} \langle f_0, \varphi_n\rangle = \lim_{n\to\infty} ((\tilde{\varphi}_n, \tilde{h}_0))_\nu = ((\tilde{h}, \tilde{h}_0))_\nu^\sim,$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} [m_{f_0}(h_k)]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} ((\tilde{h}_k, \tilde{h}_0))_\nu^\sim = ((\tilde{h}_0, \tilde{h}_0))_\nu^\sim < \infty.$$

Es gilt also auch (b), womit auf Grund des obigen Kriteriums der Satz 2.4 bewiesen ist.

Umgekehrt gilt (vgl. DUDLEY [6], Theorem 2) der

Satz 2.5. *Aus der Nichtsingularität von ν und ν_{f_0} folgt die $\mathfrak{T}_\nu$-Stetigkeit von f_0.*

Beweis. Nach Lemma 2.1 existieren positive Konstanten c_1 und c_2, wobei wir $c_1 > 1$ wählen können, so daß

$$\frac{1}{c_1^2} B_{f_0}(\varphi, \varphi) \leqq B(\varphi, \varphi) \leqq c_2^2 B_{f_0}(\varphi, \varphi) \quad \text{für jedes } \varphi \in \mathscr{D}.$$

Demnach ist

$$B_{f_0}(\varphi, \varphi) = B(\varphi, \varphi) + |\langle f_0, \varphi\rangle|^2 \leqq c_1^2 B(\varphi, \varphi), \text{ also } |\langle f_0, \varphi\rangle|^2 \leqq (c_1^2 - 1) B(\varphi, \varphi),$$

d. h. f_0 ist $\mathfrak{T}_\nu$-stetig.

Aus den Sätzen 2.4 und 2.5 ergibt sich schließlich noch folgende Verallgemeinerung (vgl. RAO-VARADARAJAN [21], Theorem 5.1.a):

Satz 2.6. *Stimmen die zu zwei Normalverteilungen ν_1 und ν_2 in $\mathscr{D}'$, mit Mittelwertsfunktionalen f_1 bzw. f_2 und Kovarianzen B_{ν_1} bzw. B_{ν_2} gehörenden nichtnegativ definiten bilinearen Funktionale*

$$\hat{B}_{\nu_i}(\varphi, \psi) = B_{\nu_i}(\varphi, \psi) - f_i(\varphi) f_i(\psi), \quad \varphi, \psi \in \mathscr{D}, \quad i = 1, 2$$

überein, so sind die beiden Maße ν_1 und ν_2 genau dann äquivalent ($\nu_1 \sim \nu_2$), wenn das Funktional $f_0 = f_1 - f_2$ $\hat{\mathfrak{T}}_\nu$-stetig ist, wo $\hat{\mathfrak{T}}_\nu$ die durch $\hat{B}_\nu$ auf $\mathscr{D}$ induzierte Topologie bezeichnet.

Beweis. Wir betrachten die beiden Maße $\nu_1'(A) = \nu_1(A + f_2)$ und $\nu_2'(A) = \nu_2(A + f_2)$, $A \in \hat{\mathfrak{B}}$. ν_1' und ν_2' sind dann zwei Normalverteilungen in $\mathscr{D}'$ mit dem Mittelwert f_0 bzw. Null. Nun ist $\hat{B}_{\nu_1} \equiv \hat{B}_{\nu_2} \equiv \hat{B}_{\nu_1'} \equiv \hat{B}_{\nu_2'}$, also $\nu_1' = (\nu_2')_{f_0}$, wo $(\nu_2')_{f_0}(A) = \nu_2'(A - f_0)$, $A \in \hat{\mathfrak{B}}$. Auf Grund der Sätze 2.4 und 2.5 gilt nun

$$\nu_2' \sim (\nu_2')_{f_0} \Leftrightarrow f_0 \ \mathfrak{T}_{\nu_2'}\text{-stetig}.$$

Da aber ν_2' den Mittelwert Null hat, ist $B_{\nu_2'} \equiv \hat{B}_{\nu_2'}$ und somit f_0 genau dann $\mathfrak{T}_{\nu_2'}$-stetig, wenn es $\hat{\mathfrak{T}}_\nu$-stetig ist, also

$$\nu_2' \sim \nu_1' \Leftrightarrow f_0 \ \hat{\mathfrak{T}}_\nu\text{-stetig}.$$

Hieraus folgt aber die Behauptung unseres Satzes, da $\nu_1 \sim \nu_2 \Leftrightarrow \nu_1' \sim \nu_2'$.

III. Ein Kriterium für die Äquivalenz zweier beliebiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Raum $\mathscr{D}'$

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, daß für zwei Normalverteilungen in $\mathscr{D}'$ entweder Äquivalenz oder Singularität vorliegt. Im folgenden wollen wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Äquivalenz zweier beliebiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen in $\mathscr{D}'$ ableiten, sowie ein hinreichendes Kriterium für Singularität.

Bei der Einführung des Systems $\mathfrak{Z}$ der Zylindermengen in $\mathscr{D}'$ (vgl. Kapitel I) gingen wir von einer algebraischen Basis B von $\mathscr{D}$ aus. $\sigma(\mathfrak{Z})$ ließ sich dann auffassen als der kleinste σ-Ring in $\mathscr{D}'$, bezüglich dessen alle $\varphi \in \mathsf{B}$, aufgefaßt als Linearfunktionen über $\mathscr{D}'$, meßbar sind, wobei diese Definition unabhängig war von der speziellen Wahl von B. Zugleich sahen wir, daß man $\sigma(\mathfrak{Z})$ auch erhalten kann als den kleinsten σ-Ring in $\mathscr{D}'$, bezüglich dessen alle $\varphi \in \mathscr{D}$, aufgefaßt als Linearfunktionen über $\mathscr{D}'$, meßbar sind.

Wir benützen die folgende Eigenschaft des Raumes $\mathscr{D}[\mathfrak{T}]$ (vgl. WINKELBAUER [27]):

(W) Es existiert eine abzählbare Teilmenge H von $\mathscr{D}$, d.h. $H = \{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\psi_i \in \mathscr{D}$, so daß für jede natürliche Zahl m und für jedes φ aus $\mathscr{D}_m$ eine Folge $\{\psi_{i_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$, mit $\psi_{i_\nu} \in H$ und $\operatorname{Tr} \psi_{i_\nu} \subset [-m, m]$, existiert, für die gilt, daß $\psi_{i_\nu} \xrightarrow[\mathscr{D}[\mathfrak{T}]]{} \varphi$ für $\nu \to \infty$. Dabei ist $\mathscr{D}_m = \{\varphi \in \mathscr{D}\colon \operatorname{Tr} \varphi \subset [-m, m]\}$.

Sei dann $\mathfrak{A}$ der kleinste σ-Ring in $\mathscr{D}'$, bezüglich dessen alle $\psi_i \in H$, aufgefaßt als Linearfunktionen über $\mathscr{D}'$, meßbar sind. Offensichtlich ist $\mathfrak{A} \subset \sigma(\mathfrak{Z})$. Zu beliebigem $\varphi \in \mathscr{D}$ existieren nun aber wegen (W) Funktionen $\psi_{i_\nu} \in H$, so daß $\varphi = \lim\limits_{\nu\to\infty} \psi_{i_\nu}$, also $\varphi(f) = \langle f, \varphi\rangle = \lim\limits_{\nu\to\infty} \langle f, \psi_{i_\nu}\rangle = \lim\limits_{\nu\to\infty} \psi_{i_\nu}(f)$, $f \in \mathscr{D}'$, woraus sich die $\mathfrak{A}$-Meßbarkeit von $\varphi(f)$ ergibt; damit ist $\sigma(\mathfrak{Z}) \subset \mathfrak{A}$, also $\sigma(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{A}$.

Seien nun μ_1 und μ_2 zwei straffe Wahrscheinlichkeitsverteilungen in $\mathscr{D}'[\sigma]$, jeweils definiert durch ein (1.4)—(1.7) erfüllendes System endlichdimensionaler Randverteilungen P bzw. Q. Sei $\mathfrak{A}_n$ der kleinste σ-Ring in $\mathscr{D}'$, der von den $\psi_1, \ldots, \psi_n$ aus H erzeugt wird. Dann ist $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}_{n+1}$ und $\sigma\left(\bigcup\limits_n \mathfrak{A}_n\right) = \sigma(\mathfrak{Z})$. Auf $\mathfrak{A}_n$ betrachten wir die Maße

$$\mu_1^{(n)} = \mu_1 \,|\, \mathfrak{A}_n = P_{\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}} \circ \pi_{\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}}$$
$$\text{bzw.}\quad \mu_2^{(n)} = \mu_2 \,|\, \mathfrak{A}_n = Q_{\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}} \circ \pi_{\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}},$$

wo $\pi_{\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}}$ die Abbildung von $\mathscr{D}'$ auf $\boldsymbol{R}^n$ bezeichnet, die jedem $f \in \mathscr{D}'$ den Vektor

$$(\langle f, \psi_1\rangle, \ldots, \langle f, \psi_n\rangle)$$

zuordnet. Wir nehmen an, daß $\mu_1^{(n)} \ll \mu_2^{(n)}$ und betrachten $F_n(f) = d\mu_1^{(n)}/d\mu_2^{(n)}(f)$, $f \in \mathscr{D}'$. Dann ist F_n $\mathfrak{A}_n$-meßbar, $F_n \geqq 0$, $\int\limits_{\mathscr{D}'} F_n(f)\,d\mu_2(f) = 1$ für jedes n, und $\{F_n, \mathfrak{A}_n, n \geqq 1\}$ ist ein Martingal über $(\mathscr{D}', \sigma(\mathfrak{Z}), \mu_2)$. Auf Grund des Konvergenzsatzes für Martingale folgt, daß der Grenzwert $F(f) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(f)$ μ_2-fast sicher existiert. Weiterhin folgt aus einem Satz von ANDERSEN-JESSEN [1] (vgl. auch DOOB [5], S. 630ff.), daß

(I) $\mu_1 \perp \mu_2 \Leftrightarrow F(f) = 0$ μ_2-fast sicher

und

(II) $\mu_1 \ll \mu_2 \Leftrightarrow \{F_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig integrierbar bezüglich μ_2.

Mit Hilfe von (II) erhalten wir den folgenden

Satz 3.1. $\mu_1 \ll \mu_2 \Leftrightarrow$ *für jedes ganze* $p > 0$ *ist*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathscr{D}'} [F_n(f)\,F_{n+p}(f)]^{1/2}\,d\mu_2(f)\\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\boldsymbol{R}^{n+p}} \left[\frac{dP_{\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}}}{dQ_{\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}}}(x_1,\ldots,x_n)\,\frac{dP_{\{\psi_1,\ldots,\psi_{n+p}\}}}{dQ_{\{\psi_1,\ldots,\psi_{n+p}\}}}(x_1,\ldots,x_{n+p})\right]^{1/2} \times\\
&\times dQ_{\{\psi_1,\ldots,\psi_{n+p}\}}(x_1,\ldots,x_{n+p}) = 1\,.
\end{aligned}$$

Beweis (vgl. CHATTERJI [4]). Sei $\mu_1^{(n)} \ll \mu_2^{(n)}$ für jedes n und

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{D}'} [F_n(f)\, F_{n+p}(f)]^{1/2}\, d\mu_2(f) = 1$$

für jedes ganze $p > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{D}'} |F_n(f) - F_{n+p}(f)|\, d\mu_2(f) &= \int_{\mathscr{D}'} |F_n^{1/2} - F_{n+p}^{1/2}|\, |F_n^{1/2} + F_{n+p}^{1/2}|\, d\mu_2 \leqq \\
&\leqq \left[\int_{\mathscr{D}'} |F_n^{1/2} - F_{n+p}^{1/2}|^2\, d\mu_2\right]^{1/2} \left[\int_{\mathscr{D}'} |F_n^{1/2} + F_{n+p}^{1/2}|^2\, d\mu_2\right]^{1/2} \\
&= \left[\int_{\mathscr{D}'} \{F_n + F_{n+p} - 2(F_n F_{n+p})^{1/2}\}\, d\mu_2\right]^{1/2} \times \\
&\times \left[\int_{\mathscr{D}'} \{F_n + F_{n+p} + 2(F_n F_{n+p})^{1/2}\}\, d\mu_2\right]^{1/2} \leqq \\
&\leqq \left[2\left(1 - \int_{\mathscr{D}'} (F_n F_{n+p})^{1/2}\, d\mu_2\right) \cdot 4\right]^{1/2} = 8^{1/2}\left(1 - \int_{\mathscr{D}'} (F_n F_{n+p})^{1/2}\, d\mu_2\right),
\end{aligned}$$

woraus folgt, daß $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine $L_1(\mathscr{D}', \sigma(\mathfrak{Z}), \mu_2)$-Cauchyfolge, also bezüglich μ_2 gleichmäßig integrierbar ist. Aus (II) folgt dann $\mu_1 \ll \mu_2$.

Sei umgekehrt $\mu_1 \ll \mu_2$. Dann folgt aus (II), daß die Folge $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ bezüglich μ_2 gleichmäßig integrierbar ist. Da außerdem der Limes $(F(f))^{1/2} = \lim_{n\to\infty} (F_n(f))^{1/2}$ μ_2-fast sicher existiert, folgt, daß $(F_n)^{1/2}$ gegen $(F)^{1/2}$ im quadratischen Mittel konvergiert (vgl. KRICKEBERG [16], III, Satz 2.8). Aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathscr{D}'} (F_n F_{n+p})^{1/2}\, d\mu_2 - 1\right| &= \left|\int_{\mathscr{D}'} \{(F_n F_{n+p})^{1/2} - F_n\}\, d\mu_2\right| \\
&= \left|\int_{\mathscr{D}'} \{F_n^{1/2}(F_{n+p}^{1/2} - F_n^{1/2})\}\, d\mu_2\right| \leqq \\
&\leqq \left[\int_{\mathscr{D}'} \left|F_{n+p}^{1/2} - F_n^{1/2}\right|^2 d\mu_2\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

folgt dann unsere Behauptung, womit Satz 3.1 bewiesen ist.

Unter Verwendung von (I) erhalten wir das folgende hinreichende Kriterium für Singularität:

Satz 3.2. *Aus* $\liminf_n \int_{\mathscr{D}'} [F_n(f) F_{n+p}(f)]^{1/2} d\mu_2(f) = 0$ *für jede natürliche Zahl* p *folgt die Singularität von* μ_1 *und* μ_2 $(\mu_1 \perp \mu_2)$.

Beweis. Da $\lim_{n\to\infty} (F_n(f) F_{n+p}(f))^{1/2} = F(f)$ μ_2-fast sicher und

$$\liminf_n \int_{\mathscr{D}'} (F_n F_{n+p})^{1/2}\, d\mu_2 < \infty\,,$$

folgt nach dem Fatouschen Lemma, daß

$$\int_{\mathscr{D}'} F(f)\, d\mu_2(f) \leqq \liminf_n \int_{\mathscr{D}'} [F_n(f)\, F_{n+p}(f)]^{1/2}\, d\mu_2(f)\,,$$

also $F(f) = 0$ μ_2-fast sicher, wegen (I) also $\mu_1 \perp \mu_2$.

Abschließend möchte der Autor Herrn Professor Dr. K. KRICKEBERG (Heidelberg) für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für die Unterstützung während ihrer Durchführung herzlich danken.

Literatur

1. ANDERSEN, E. S., and B. JESSEN: Some limit theorems on integrals in an abstract set. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **22**, no. 14 (1946).
2. BOCHNER, S.: Harmonic analysis and the theory of probability. Berkeley 1955.
3. LE CAM, L.: Convergence in distribution of stochastic processes. Univ. California Publ. Statist. **2**, 207—236 (1957).
4. CHATTERJI, S. D.: Certain induced measures and the fractional dimensions of their supports. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **3**, 184—192 (1964).
5. DOOB, J. L.: Stochastic processes. New York: John Wiley 1953.
6. DUDLEY, R. M.: Singular translates of measures on linear spaces. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **3**, 128—137 (1964).
7. — Fourier analysis of substationary processes with a finite moment. Trans. Amer. math. Soc. **118**, 360—375 (1965).
8. GELFAND, I. M.: Verallgemeinerte Zufallsprozesse (russ.). Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **100**, 853—856 (1955).
9. —, u. N. J. VILENKIN: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), Band IV. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964.
10. GRENANDER, U.: Stochastic processes and statistical inference. Ark. Mat. **1**, 195—277 (1950).
11. HILDENBRAND, W.: Über straffe Funktionale. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **4**, 269—292 (1966).
12. JAGLOM, A. M.: On the equivalence or perpendicularity of two Gaussian probability measures in function space. Proc. Sympos. Time Series Analysis. Ed. ROSENBLATT, 327—346 (1962).
13. KALLIANPUR, G., and H. OODAIRA: The equivalence and singularity of Gaussian measures. Proc. Sympos. Time Series Analysis. Ed. ROSENBLATT, 279—291 (1962).
14. KÖNIG, H.: Theorie der Distributionen. Seminarausarbeitung SS 1963 — WS 1963/64.
15. KÖTHE, G.: Lineare topologische Räume I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
16. KRICKEBERG, K.: Mesure dans les espaces topologiques non localement compacts. Université de Rennes, 1963.
17. — Wahrscheinlichkeitstheorie. Stuttgart: Teubner 1963.
18. MINLOS, R. A.: Verallgemeinerte stochastische Prozesse und ihre Erweiterung zu Maßen (russ.). Trudy Moskov. mat. Obšč. **8**, 497—518 (1959).
19. MOURIER, E.: Random elements in linear spaces (to appear). Proc. Fifth Berkeley Sympos. math. Statist. Probability.
20. PROCHOROV, YU. V.: The method of characteristic functionals. Proc. Fourth Berkeley Sympos. math. Statist. Probability **2**, 403—419 (1961).
21. RAO, C. R., and V. S. VARADARAJAN: Discrimination of Gaussian processes. Sankhya **25**, 303—330 (1963).
22. ROZANOV, YU. A.: On the density of one Gaussian distribution with respect to another (russ.) Teor. Verojatn. Primen **7**, 84—89 (1962).
23. SCHWARTZ, L.: Theorie des distributions I. Paris: Hermann 1957.
24. URBANIK, K.: Generalized stochastic processes with independent values. Proc. Fourth Berkeley Sympos. math. Statist. Probability 569—580 (1961).
25. VARADARAJAN, V. S.: Maße auf topologischen Räumen (russ.). Mat. Sbornik, n. Ser. **55**, 35—100 (1961).
26. VARBERG, D. E.: On equivalence of Gaussian measures. Pacific J. Math. **11**, 751—762 (1961).
27. WINKELBAUER, K.: Zur Theorie der verallgemeinerten Zufallsprozesse (russ.). Czechosl. math. J. **6**, 517—521 (1956).

Institut für angewandte Mathematik
der Universität Heidelberg
69 Heidelberg, Tiergartenstraße