Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 3, 247—270 (1964)

Verteilungsfunktionen mit gegebenen Marginalverteilungen

Von

HANS G. KELLERER

Einleitung

Jede Verteilungsfunktion $F(y_1, \ldots, y_n)$ definiert den nicht-trivialen Teilmengen T von $\{1, \ldots, n\}$ entsprechend $2^n - 2$ Marginalverteilungen $F(y_T, \infty)$. Ist nun $\mathfrak{T}$ eine beliebige Gesamtheit derartiger Mengen T, so läßt sich das folgende Problem formulieren:

Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Verteilungen $F(y_T, \infty)$, $T \in \mathfrak{T}$, d.h. welchen Bedingungen unterliegen Verteilungen $F_T(y_T)$, $T \in \mathfrak{T}$, um Marginalverteilungen einer Verteilung $F(y_1, \ldots, y_n)$ zu sein?

Dabei bedeutet die Annahme $\cup\, \mathfrak{T} = \{1, \ldots, n\}$ offenbar keine Einschränkung. In einem besonderen Fall ist die Frage dann sofort zu beantworten: Sind die Mengen $T \in \mathfrak{T}$ disjunkt, so wird die Forderung stets erfüllt von

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{T \in \mathfrak{T}} F_T(y_T).$$

Allgemein läßt sich zunächst lediglich sagen, daß die Verteilungen $F_T(y_T)$, $T \in \mathfrak{T}$, jedenfalls verträglich sein müssen. Daß diese Bedingung jedoch nicht genügen wird, läßt bereits eine Überlegung im Fall $n = 3$ und $\mathfrak{T} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ vermuten: Ist $F(y_1, y_2, y_3)$ eine beliebige Verteilung, so führt jede Überdeckung

$$(A_1, R, A_3) \subset (B_1, B_2, R) \dotplus (R, C_2, C_3)$$

zu der folgenden Ungleichung für die Marginalverteilungen:

$$\int_{(A_1, A_3)} dF(y_1, \infty, y_3) \leqq \int_{(B_1, B_2)} dF(y_1, y_2, \infty) + \int_{(C_2, C_3)} dF(\infty, y_2, y_3).$$

Mit Hilfe der Ergebnisse einer früheren Arbeit wird in § 2 als notwendige und hinreichende Bedingung abgeleitet:

Für stetige beschränkte Funktionen $g_T(x_T)$, $T \in \mathfrak{T}$, gilt stets

$$\sum_{T \in \mathfrak{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_T \, dF_T \geqq 0, \quad \text{falls} \inf_{x_1, \ldots, x_n} \sum_{T \in \mathfrak{T}} g_T(x_T) \geqq 0.$$

Dieses Kriterium ermöglicht eine einfache kombinatorische Charakterisierung jener Gesamtheiten $\mathfrak{T}$, bei denen bereits die Verträglichkeit der Verteilungen $F_T(y_T)$, $T \in \mathfrak{T}$, genügt. Außerdem lassen sich in diesem Fall Verteilungen mit den geforderten Marginalverteilungen explizit angeben (§ 3).

In § 4 werden die Überlegungen auf unendlich-dimensionale Verteilungen ausgedehnt; das ergibt eine Möglichkeit zur Verallgemeinerung des Satzes von Kolmogorov, der für den Fall, daß alle endlich-dimensionalen Marginalverteilungen gegeben und verträglich sind, die Existenz einer zugehörigen Verteilung im entsprechenden Produktraum beweist.

Abschließend wird in § 5 untersucht, inwieweit die Ergebnisse auf normierte Maße $\nu_T | \mathfrak{K}_T$ über beliebigen Grundmengen $M_T = (M_i, i \in T)$ ausgedehnt werden können; es zeigt sich, daß dabei topologische Eigenschaften der Mengen M_i eine wesentliche Rolle spielen. Schließlich wird noch der Zusammenhang mit Marginalproblemen, die in einer früheren Arbeit behandelt wurden, hergestellt.

Die vorliegende Arbeit stützt sich auf die Ergebnisse einer früheren Arbeit des Verfassers ([*3*]). Daher werden allgemein die dort benutzten Bezeichnungen verwendet, wobei besonders auf die in § 0 zusammengestellten Definitionen und Hilfssätze verwiesen sei.

§ 1. Die Konvergenz von Verteilungen

Zunächst werden drei im folgenden benötigte Sätze angegeben, deren Beweise sich ohne Schwierigkeit aus den — den eindimensionalen Fall betreffenden — Bemerkungen in [*6*] (Seite 179 und 215) ableiten lassen; hinsichtlich analoger Aussagen in allgemeinen topologischen Räumen sei auf [*7*] verwiesen. Dabei bezeichnet $\mathscr{F}^n$ die Gesamtheit der n-dimensionalen Verteilungen F, d.h. der durch die zugehörige Verteilungsfunktion $F(y) = \nu(\{x \in R : x \leqq y\})$ charakterisierten normierten Maße $\nu | \mathfrak{B}^n$; für diese Zuordnung wird kurz $F \leftrightarrow \nu$ bzw. $\nu \leftrightarrow F$ geschrieben*.

Die Gesamtheit $\mathscr{F}^n$ wird zu einem topologischen Raum durch die Einführung der sogenannten Verteilungskonvergenz:

Definition. Es gilt $\mathscr{F}^n \ni F_k \rightsquigarrow F_0 \in \mathscr{F}^n$ genau dann, wenn

$$\lim_{k\to\infty} F_k(y) = F_0(y) \qquad \text{für alle Stetigkeitsstellen } y \text{ von } F.$$

Dabei bestehen die folgenden Konvergenzkriterien:

Satz 1.1. *Es sei $\nu_k \leftrightarrow F_k \in \mathscr{F}^n$ für $k = 0, 1, \ldots$. Dann ist jede der folgenden Aussagen mit $F_k \rightsquigarrow F_0$ gleichwertig:*

(a) *Es existiert eine dichte Teilmenge C von R derart, daß*

$$\lim_{k\to\infty} \nu_k(J) = \nu_0(J) \qquad \textit{für alle } J = \{x : u_i < x_i \leqq v_i\} \textit{ mit } u_i, v_i \in C;$$

(b) $\nu_0(B^\iota) \leqq \varliminf_{k\to\infty} \nu_k(B) \leqq \varlimsup_{k\to\infty} \nu_k(B) \leqq \nu_0(B^\alpha)$ *für alle* $B \in \mathfrak{B}^n$;

(c) $\lim_{k\to\infty} \nu_k(B) = \nu_0(B)$ *für alle* $B \in \mathfrak{B}^n$ *mit* $\nu_0(B^\varrho) = 0$**.

Eine Folge von Verteilungen enthält nicht notwendig eine verteilungskonvergente Teilfolge; doch gilt das folgende Kriterium:

Satz 1.2. *Eine nicht-leere Teilmenge $\mathscr{F}$ von $\mathscr{F}^n$ ist genau dann bedingt kompakt, wenn*

$$\lim_{\gamma\to\infty} \sup_{\nu \leftrightarrow F \in \mathscr{F}} \nu(\{x : |x| > \gamma\}) = 0.$$

---

* Ist R die Gesamtheit der reellen Zahlen und $\mathfrak{B}$ der σ-Körper der Borelschen Teilmengen von R, so bezeichnet $\mathfrak{B}^n | R^n$ den zugehörigen n-fachen Produktkörper.

** Für Teilmengen B eines topologischen Raumes bezeichnen B^ι, B^α und B^ϱ den offenen Kern, die abgeschlossene Hülle und den Rand von B.

Ferner wird benötigt, daß der topologische Raum $\mathscr{F}^n$ metrisierbar ist. Dazu wird die folgende Funktion eingeführt:

Definition. Für $F, G \in \mathscr{F}^n$ ist

$$d(F, G) := \inf\{\delta : F(y - \delta e_n) - \delta \leqq G(y) \leqq F(y + \delta e_n) + \delta \text{ für alle } y \in R^n\}$$

mit $e_n := (1, \ldots, 1) \in R^n$.

Nun gilt:

Satz 1.3. *Die Funktion d definiert eine Metrik in $\mathscr{F}^n$ derart, daß die zugehörige Konvergenz mit der Verteilungskonvergenz äquivalent ist.*

Ist $\emptyset \subsetneqq T \subsetneqq \{1, \ldots, n\}$, so liefert ein einfacher Grenzübergang für die zu Verteilungen $F, G \in \mathscr{F}^n$ gehörigen Marginalverteilungen $F'(y_T) := F(y_T, \infty)$ und $G'(y_T) := G(y_T, \infty)$ die Ungleichung $d(F', G') \leqq d(F, G)$. Daraus folgt unter Anwendung von [1.3] die später wiederholt benötigte Tatsache, daß die Konvergenz von Verteilungen die Konvergenz aller Marginalverteilungen mit einschließt.

§ 2. Der Beweis des Hauptsatzes

Zur Untersuchung des in der Einleitung formulierten Problems erweisen sich einige Bezeichnungen als zweckmäßig:

Definition. Für eine beliebige Indexmenge I ist

$$R_I := (M_i, i \in I) \quad \text{mit} \quad M_i := R \text{ für } i \in I,$$
$$\mathfrak{B}_I := \mathop{X}_{i \in I} \mathfrak{K}_i \quad \text{mit} \quad \mathfrak{K}_i := \mathfrak{B} \text{ für } i \in I$$

und $\mathscr{C}_I$ die Gesamtheit aller beschränkten (bezüglich der Produkttopologie) stetigen Funktionen auf R_I.

Ist $\mathfrak{T}$ eine endliche Gesamtheit von Teilmengen von I, so ist also offenbar $\{\sum_{T \in \mathfrak{T}} g_T : g_T \in \mathscr{C}_T\}$ ein linearer Teilraum von $\mathscr{C}_I$.

Daneben werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

Definition. Für eine endliche Indexmenge I ist $\mathscr{F}_I$ die Gesamtheit der den normierten Maßen auf $\mathfrak{B}_I$ entsprechenden Verteilungen. Die einer Teilmenge T von I zugeordnete Marginalverteilung einer Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ wird mit F^T bezeichnet.

Dabei kann $F^\emptyset$ als die Konstante 1 interpretiert werden, während F^I mit F identisch ist.

Nun sei $I \neq \emptyset$ endlich und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$*. Dann lautet das in der Einleitung formulierte Problem:

Wann existiert zu Verteilungen $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, eine Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ mit

$$F^T = F_T \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}.$$

Der einfachste Fall liegt dann vor, wenn alle Verteilungen F_T diskret sind, d.h. die zugehörigen Maße ν_T auf eine endliche Menge konzentriert sind. Hier existieren endliche Mengen $M_i \subset R_i$ derart, daß

$$\nu_T(\{x_T : x_i \notin M_i\}) = 0 \quad \text{für alle } i \in T \text{ und } T \in \mathfrak{T}.$$

* $\mathfrak{P}(A)$ bezeichnet die Gesamtheit aller Teilmengen einer beliebigen Menge A.

Beim Übergang von R_I zu $M := (M_i, i \in I)$ entsprechen den gegebenen Verteilungen F_T, $T \in \mathfrak{T}$, die Funktionen

$$r_T(x_T) := \nu_T(\{x_T\}) \quad \text{für} \quad x_T \in M_T$$

und der gesuchten Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ eine nicht-negative Funktion r auf M mit

$$r^T(x_T) := \sum_{x_{\bar{T}} \in M_{\bar{T}}} r(x_T, x_{\bar{T}}) = r_T(x_T) \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}.$$

In diesem Fall endlicher Grundmengen läßt sich das Problem mit Hilfe eines Ergebnisses aus [*3*] lösen:

Satz 2.1. *Es sei* $M := (M_i,\ i \in I)$ *mit* $M_i := \{1, \ldots, m_i\}$, $i \in I$ $(I \neq \emptyset$ *endlich), und* $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$. *Notwendig und hinreichend dafür, daß zu Funktionen* r_T *auf* M_T, $T \in \mathfrak{T}$, *eine nicht-negative Funktion* r *auf* M *mit*

$$r^T = r_T \quad \textit{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}$$

existiert, ist dann die Bedingung:

$$\sum_{T \in \mathfrak{T}} \sum_{x_T \in M_T} s_T r_T \geqq 0$$

für alle Systeme von Funktionen s_T *auf* M_T *mit* $\sum_{T \in \mathfrak{T}} s_T \geqq 0$.

Beweis. Mit den Funktionen $\underline{r} := 0$ und $\bar{r} := \infty$ auf M ergibt [*3*] (Satz 3.7) für die Existenz von r als notwendige und hinreichende Bedingung:

$$\sum_{T \in \mathfrak{T}} \sum_{x_T \in M_T} s_T(x_T) r_T(x_T) \leqq \sum_{x \in M} [(\sum_{T \in \mathfrak{T}} s_T(x_T))^+ \bar{r}(x) - (\sum_{T \in \mathfrak{T}} s_T(x_T))^- \underline{r}(x)]$$

für alle Funktionen s_T auf M_T.

Das ist nach Definition von $\underline{r}$ und $\bar{r}$ gleichwertig mit

$$\sum_{T \in \mathfrak{T}} \sum_{x_T \in M_T} s_T r_T \leqq 0$$

für alle Funktionen s_T auf M_T mit $\sum_{T \in \mathfrak{T}} s_T \leqq 0$.

Diese Bedingung ist mit der angegebenen gleichbedeutend. $\square$

Wie in [*3*] (Satz 3.7) gezeigt wurde, genügt es, das Bestehen der angegebenen Ungleichung lediglich für jene Funktionen s_T mit $\sum_{T \in \mathfrak{T}} s_T \geqq 0$ zu fordern, für die

$$s_T(x_T) \text{ ganzzahlig und } |s_T(x_T)| \leqq \gamma := (d-1)!$$

Dabei ist d die Dimension eines durch $\mathfrak{T}$ bestimmten linearen Teilraums des R^m mit $m := \prod_{i \in I} m_i$, also die Schranke γ durch $m!$ ersetzbar. Eine Einschränkung der Funktionswerte $s_T(x_T)$ auf 0 und ± 1 ist dagegen im allgemeinen nicht möglich.

Mit Hilfe von [2.1] läßt sich nun der folgende Hauptsatz beweisen:

Satz 2.2. *Es sei* $I \neq \emptyset$ *endlich und* $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$. *Notwendig und hinreichend dafür, daß zu Verteilungen* $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, *eine Verteilung* $F \in \mathscr{F}_I$ *mit*

$$F^T = F_T \quad \textit{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}$$

existiert, ist dann die Bedingung

$$(V^*) \qquad \begin{cases} \sum_{T \in \mathfrak{T}} \int_{R_T} g_T \, dF_T \geqq 0 \\ \textit{für alle Systeme von Funktionen } g_T \in \mathscr{C}_T \quad \textit{mit} \quad \sum_{T \in \mathfrak{T}} g_T \geqq 0. \end{cases}$$

Beweis. 1. Ist $F \in \mathscr{F}_I$ eine Verteilung mit den Marginalverteilungen F_T, so gilt für Funktionen $g_T \in \mathscr{C}_T$ stets

$$\sum_{T \in \mathfrak{T}} \int_{R_T} g_T \, dF_T = \int_{R_I} \Big(\sum_{T \in \mathfrak{T}} g_T\Big) dF \geqq 0, \quad \text{falls} \quad \sum_{T \in \mathfrak{T}} g_T \geqq 0 .$$

Die Bedingung (V^*) ist also jedenfalls notwendig.

2. Nun sei für die Verteilungen $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, die Bedingung (V^*) erfüllt.

Dann gilt die angegebene Ungleichung — statt für $g_T \in \mathscr{C}_T$ — allgemeiner für Grenzwerte monoton fallender Folgen derartiger Funktionen, d.h. für beschränkte nach oben halbstetige Funktionen, und daher für alle Funktionen

$$g = \sum_{1 \leqq k \leqq l} \beta_k \chi_{B_T^k} \quad \text{mit} \quad B_T^k \in \mathfrak{B}_T \quad \text{und} \quad \nu_T((B_T^k)^\varrho) = 0 \qquad (\nu_T \leftrightarrow F_T)^\star .$$

Daneben läßt sich ohne Einschränkung $\cup \mathfrak{T} = I$ annehmen, da die Konstruktion einer Verteilung $F_{\cup \mathfrak{T}} \in \mathscr{F}_{\cup \mathfrak{T}}$ mit den Marginalverteilungen F_T genügt.

3. Jeder endlichen Menge $A \subset R$ werden nun folgendermaßen Verteilungen $F_T^{(A)} \in \mathscr{F}_T$ bzw. normierte Maße $\nu_T^{(A)} \mid \mathfrak{B}_T$ zugeordnet:

Ist $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ mit $\alpha_1 < \cdots < \alpha_l$, so sei

$$\nu_T^{(A)}(\{(\alpha_{k_i}, i \in T)\}) = \nu_T(A_{k_i}, i \in T) \qquad \text{für} \qquad k_i = 1, \ldots, l,$$
$$\nu_T^{(A)}\Big(\overline{\sum_{1 \leqq k_i \leqq l}{}^{\cdot} \{(\alpha_{k_i}, i \in T)\}}\Big) = 0$$

mit den Mengen

$$A_1 := (-\infty, \alpha_1], \quad A_k := (\alpha_{k-1}, \alpha_k] \quad \text{für} \quad 1 < k < l, \quad A_l := (\alpha_{l-1}, +\infty) .$$

Es gilt also

$$F_T^{(A)}(y_T) = F_T(y_T), \quad \text{falls} \quad \max A \neq y_i \in A \text{ für alle } i \in T.$$

4. Nun sei $C := \{\alpha_k : k \in Z\}$ eine dichte Teilmenge von R mit

$$\nu_T(\{x_T : x_i \in C\}) = 0 \quad \text{für alle} \quad i \in T \quad \text{und} \quad T \in \mathfrak{T} .$$

Für die gemäß Teil 3 definierten Verteilungen $F_T^k := F_T^{(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\})}$ gilt dann zunächst nach [1.1]:

$$F_T^k \rightsquigarrow F_T \quad \text{für} \quad \text{alle} \quad T \in \mathfrak{T} . \tag{1}$$

Da nach Teil 2 für festes k auch die Verteilungen F_T^k, $T \in \mathfrak{T}$, der Bedingung (V^*) genügen, folgt ferner aus [2.1] die Existenz von Verteilungen $F^k \in \mathscr{F}_I$ mit

$$(F^k)^T = F_T^k \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T} \quad \text{und jedes} \quad k \in Z . \tag{2}$$

Ist $\mathscr{F} := \{F^k : k \in Z\}$, so führt die Voraussetzung $\cup \mathfrak{T} = I$ wegen (2) zu

$$\begin{aligned}
\sup_{\nu \leftrightarrow F \in \mathscr{F}} \nu(\{x_I : |x_I| > \gamma\}) &\leqq \sup_{\nu \leftrightarrow F \in \mathscr{F}} \nu\Big(\sum_{T \in \mathfrak{T}} \{x_I : |x_T| > \gamma / \sqrt{|\mathfrak{T}|}\}\Big) \\
&\leqq \sum_{T \in \mathfrak{T}} \sup_{\nu \leftrightarrow F \in \mathscr{F}} \nu(\{x_I : |x_T| > \gamma / \sqrt{|\mathfrak{T}|}\}) \\
&= \sum_{T \in \mathfrak{T}} \sup_{k \in Z} \nu_T^k(\{x_T : |x_T| > \gamma / \sqrt{|\mathfrak{T}|}\}) \qquad (\nu_T^k \leftrightarrow F_T^k)^{\star\star} .
\end{aligned}$$

---

* χ_A bezeichnet die Indikatorfunktion zur Menge A.

** $|A|$ bezeichnet die Mächtigkeit einer endlichen Menge A.

Das ergibt wegen (1) durch zweimalige Anwendung von [1.2], daß $\mathscr{F}$ bedingt kompakt ist. Es existiert also eine Teilfolge $((k_j))$ derart, daß

$$F_{kj} \rightsquigarrow F \in \mathscr{F}_I. \tag{3}$$

Aus (1) — (3) folgt schließlich:

$$F^T \leftsquigarrow (F^{k_j})^T = F_T^{kj} \rightsquigarrow F_T \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes besitzt die Verteilung F also für $T \in \mathfrak{T}$ die Marginalverteilungen F_T. _|

Daß die Bedingung (V^*) in der Tat die Verträglichkeit der Verteilungen zur Folge hat, läßt sich formal folgendermaßen einsehen: Sind $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}$ beliebig, so folgen aus dem Bestehen von (V^*) für

$$g_{T_1} := \pm g, \quad g_{T_2} := \mp g \text{ und } \quad g_T := 0 \text{ sonst}$$

mit beliebigem $g \in \mathscr{C}_{T_1 T_2}$ die Ungleichungen

$$\int_{R_{T_1}} g\, dF_{T_1} \geqq \int_{R_{T_2}} g\, dF_{T_2} \geqq \int_{R_{T_1}} g\, dF_{T_1};$$

das ergibt

$$\int_{R_{T_1 T_2}} g\, d(F_{T_1})^{T_1 T_2} = \int_{R_{T_1 T_2}} g\, d(F_{T_2})^{T_1 T_2} \quad \text{für alle} \quad g \in \mathscr{C}_{T_1 T_2}$$

und damit

$$(F_{T_1})^{T_1 T_2} = (F_{T_2})^{T_1 T_2} \quad \text{für alle} \quad T_1, T_2 \in \mathfrak{T}.$$

Die Bedingung (V^*) ist offenbar gleichwertig mit

$$\sum_{T \in \mathfrak{T}} \int_{R_T} g_T\, dF_T \geqq \inf_{x_I \in R_I} \sum_{T \in \mathfrak{T}} g_T \quad \text{für alle} \quad g_T \in \mathscr{C}_T,$$

wobei ohne Einschränkung $g_T \geqq 0$ vorausgesetzt werden kann. Daraus und aus der Tatsache, daß jede Funktion $g_T \in \mathscr{C}_T$ Grenzwert einer monoton fallenden Folge von Treppenfunktionen ist, ergibt sich für $\nu_T \leftrightarrow F_T$ die folgende Form der Bedingung:

$$\sum_{T \in \mathfrak{T}} \sum_{1 \leqq k \leqq l} \nu_T(B_T^k) \geqq \min_{x_I \in R_I} \sum_{T \in \mathfrak{T}} \sum_{1 \leqq k \leqq l} \chi_{B_k^T}$$

für beliebige Mengen $B_T^k \in \mathfrak{B}_T$ und $l \in Z$.

Durch [2.2] wird die Frage nach der Existenz einer Verteilung mit gegebenen Marginalverteilungen beantwortet, jedoch nichts über die Eindeutigkeit ausgesagt. Es ist leicht einzusehen, daß die Lösung normalerweise mehrdeutig ist; allgemein gilt sogar:

Ist die Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ marginalstetig* und sind alle Marginalverteilungen $F^{\{i\}}$ stetig, so existiert stets eine Verteilung $G \in \mathscr{F}_I$ mit

$$F \neq G \quad \text{und} \quad F^T = G^T \quad \text{für alle} \quad T \neq I.$$

Zum Nachweis dieser Behauptung sei ν das zu F gehörige Maß. Da die Maße $\nu^{\{i\}}$ atomlos sind, läßt sich [5] (Satz 5.1) auf die Maße $\nu = 0$ und $\bar{\nu} = 2\nu$ anwenden; es existiert also eine Menge $A \in \mathfrak{B}_I$ derart, daß $\varrho(B) := 2\,\nu(A\,B)$ ein Maß mit $\varrho^T = \nu^T$ für alle $T \neq I$ definiert. Wegen $\varrho(R_I) = 1$ gehört zu diesem Maß eine

* Der Begriff der Marginalstetigkeit wird in [3] (§ 0) definiert.

Verteilung $G \in \mathscr{F}_I$, die wegen $\varrho(A) = 2\nu(A)$ die geforderten Eigenschaften besitzt.

Die Gesamtheit der Lösungen hat allgemein die folgenden Eigenschaften:

Satz 2.3. *Es sei $I \neq \emptyset$ endlich und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$. Dann ist die Gesamtheit*

$$\mathscr{F} := \{F \in \mathscr{F}_I : F^T = F_T \quad \textit{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}\}$$

für feste Verteilungen $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von $\mathscr{F}_I$, die unter der Voraussetzung $\cup\, \mathfrak{T} = I$ auch kompakt ist.

Beweis. Es ist unmittelbar einzusehen, daß $\mathscr{F}$ stets konvex und abgeschlossen ist. Unter der Voraussetzung $\cup\, \mathfrak{T} = I$ gilt $|x_I|^2 \leqq \sum\limits_{T \in \mathfrak{T}} |x_T|^2$ und daher für $\nu \leftrightarrow F \in \mathscr{F}$ stets

$$\begin{aligned}\nu(\{x_I : |x_I| > \gamma\}) &\leqq \sum_{T \in \mathfrak{T}} \nu(\{x_I : |x_T| > \gamma/\sqrt{|\mathfrak{T}|}\}) \\ &= \sum_{T \in \mathfrak{T}} \nu_T(\{x_T : |x_T| > \gamma/\sqrt{|\mathfrak{T}|}\}) \qquad (\nu_T \leftrightarrow F_T),\end{aligned}$$

so daß $\mathscr{F}$ nach [1.2] in diesem Fall auch kompakt ist. $\lrcorner$

Daß zu marginalstetigen Verteilungen F_T, $T \in \mathfrak{T}$, nicht notwendig eine marginalstetige Lösung existiert, zeigt das folgende Gegenbeispiel:

Es sei $|I| = 3$ und $F \in \mathscr{F}_I$ die — nicht marginalstetige — Gleichverteilung auf dem Simplex $\{x_I : x_i \geqq 0$ und $\sum\limits_{i \in I} x_i = 1\}$, also F_T für $|T| = 2$ die Gleichverteilung auf dem Dreieck $\{x_T : x_i \geqq 0$ und $\sum\limits_{i \in T} x_i \leqq 1\}$ und daher marginalstetig.

Eine Verteilung $G \in \mathscr{F}_I$ mit $G^T = F^T$ für $|T| = 2$ definiert dann — entsprechend der Zerlegung $(0, 1] = \sum\limits_{1 \leqq k \leqq l} \left(\frac{k-1}{l}, \frac{k}{l}\right]$ — für festes $l \in Z$ eine Lösung des folgenden Problems für endliche Grundmengen:

$$r_T(k_T) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \sum\limits_{i \in T} k_i > l \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad \sum\limits_{i \in T} k_i = l \\ 1 & \text{für} \quad \sum\limits_{i \in T} k_i < l \end{cases} \quad \text{und } k_i = 1, \ldots, l.$$

Durch vollständige Induktion nach l ergibt sich hier als eindeutige Lösung die Funktion

$$r(k_I) = \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad \sum_{i \in I} k_i \in \{l-1, l\} \quad (= 0 \text{ sonst}).$$

Daraus folgt für das zu G gehörige Maß ν die Gleichung

$$\nu(\{x_I : x_i \geqq 0 \text{ und } |\sum_{i \in I} x_i - 1| \leqq 2/l\}) = 1 \quad \text{für alle} \quad l \in Z,$$

und der Grenzübergang $l \to \infty$ führt zu

$$\nu(\{x_I : x_i \geqq 0\} \text{ und } \sum_{i \in I} x_i = 1) = 1.$$

Die Übereinstimmung der zu $|T| = 2$ gehörigen Marginalverteilungen überträgt sich also auf F und G, d.h. die Lösung ist eindeutig bestimmt.

Dieses Gegenbeispiel ist auch für die Problemstellung von [4] von Bedeutung; denn es besagt: Ist $\mu_T := \mathop{X}_{i \in T} \mu_i$ mit beliebigen normierten Maßen $\mu_i \mid \mathfrak{B}_{\{i\}}$, so ist die Bedingung

$$\sum_{T \in \mathfrak{T}} \int_{R_T} f_T g_T d\mu_T \geqq 0 \quad \text{für} \quad \sum_{T \in \mathfrak{T}} g_T \geqq 0$$

für die Existenz einer Funktion $f \geqq 0$ mit

$$\int_{R_{\overline{T}}} f d\mu_{\overline{T}} = \underset{\mu_T}{f_T} \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}$$

zwar notwendig, aber nicht hinreichend.

Abschließend sei noch eine später benötigte Folgerung aus [2.2] angegeben:

Satz 2.4. *Es sei $I \neq \emptyset$ endlich und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$. Dann ist die Gesamtheit aller $|\mathfrak{T}|$-tupel $(F_T, T \in \mathfrak{T})$, zu denen eine Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ mit den Marginalverteilungen F_T für $T \in \mathfrak{T}$ existiert, abgeschlossen und konvex.*

Beweis. Die Abgeschlossenheit ist eine Folge von [2.2], da das Integral $\int_{R_T} g_T dF_T$ für festes $g_T \in \mathscr{C}_T$ eine stetige Funktion auf $\mathscr{F}_T$ ist. Die Konvexität ist unmittelbar einzusehen. ⌟

§ 3. Der auflösbare Fall

Zur Erläuterung der in diesem Abschnitt behandelten Frage werde zunächst der in § 2 bewiesene Hauptsatz auf das folgende Beispiel angewendet:

$$I = \{0, \ldots, l\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T} = \{\{0, k\} : 1 \leqq k \leqq l\} \qquad (l \in Z);$$

gegeben sind also verträgliche Verteilungen $F_k \in \mathscr{F}_{\{0,k\}}$, $1 \leqq k \leqq l$, und gesucht ist eine Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ mit diesen Marginalverteilungen.

Die Bedingung (V^*) lautet hier:

$$\sum_{1 \leqq k \leqq l} \int_{R_{\{0,k\}}} g_k dF_k \geqq 0 \quad \text{für} \quad g_k \in \mathscr{C}_{\{0,k\}} \quad \text{mit} \sum_{1 \leqq k \leqq l} g_k \geqq 0 .$$

Da die Funktion $g_k' := \inf_{x_k \in R_{\{k\}}} g_k$ für $g_k \in \mathscr{C}_{\{0,k\}}$ stets in $\mathscr{M}(\mathfrak{B}_{\{0\}})$* liegt und die Verteilung $F_0 := (F_k)^{\{0\}}$ wegen der Verträglichkeit eindeutig definiert ist, sind die folgenden Umformungen möglich:

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqq k \leqq l} \int_{R_{\{0,k\}}} g_k dF_k &\geqq \sum_{1 \leqq k \leqq l} \int_{R_{\{0,k\}}} g_k' dF_k \\
&= \int_{R_{\{0\}}} \Big(\sum_{1 \leqq k \leqq l} g_k' \Big) dF_0 \\
&\geqq \inf_{x_0 \in R_{\{0\}}} \sum_{1 \leqq k \leqq l} g_k' \\
&= \inf_{x_I \in R_I} \sum_{1 \leqq k \leqq l} g_k \geqq 0,
\end{aligned}$$

d.h. die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $F \in \mathscr{F}_I$ ist hier erfüllt.

* Ist $\mathfrak{K} \mid M$ ein beliebiger σ-Körper, so bezeichnet $\mathscr{M}(\mathfrak{K})$ den linearen Raum aller $\mathfrak{K}$-meßbaren beschränkten Funktionen $g \mid M$.

Dieses Beispiel führt zu der Frage, unter welchen allgemeinen Voraussetzungen das Bestehen von (V^*) eine Folge der Verträglichkeit ist, also mit der folgenden Bezeichnung zur Frage der Auflösbarkeit:

Definition. Eine Gesamtheit $\mathfrak{T} \neq \emptyset$ von Teilmengen von $I(I \neq \emptyset$ endlich) heißt auflösbar, wenn zu verträglichen Verteilungen $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, stets eine Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ mit diesen Marginalverteilungen existiert.

Zum Nachweis einer ersten wesentlichen Eigenschaft auflösbarer Gesamtheiten wird die Existenz der bedingten Verteilungen benötigt. Auf Grund der Definitionsgleichung

$$F_T(y_T) = \int\limits_{x_S \leqq y_S} F_T(y_{T-S} \mid x_S)\, d(F_T)^S \quad \text{für} \quad \emptyset \subsetneqq S \subsetneqq T$$

wird dabei allgemein vereinbart:

$$F_T(y_\emptyset \mid x_T) := 1 \quad \text{und} \quad F_T(y_T \mid x_\emptyset) := F_T(y_T).$$

Nun läßt sich zeigen:

Satz 3.1. *Ist $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$ auflösbar, so sind auch die Gesamtheiten*

$$S\mathfrak{T} := \{ST : T \in \mathfrak{T}\} \quad \textit{und} \quad S \dotplus \mathfrak{T} := \{S \dotplus T : : \in \mathfrak{T}\}$$

mit beliebigem $S \in \mathfrak{P}(I)$ auflösbar.

Beweis. 1. Sind die Verteilungen $F_{ST} \in \mathscr{F}_{ST}$, $T \in \mathfrak{T}$, verträglich, so gilt dies mit beliebigem $F_{\bar{S}} \in \mathscr{F}_{\bar{S}}$ auch für die Verteilungen

$$F_T := F_{ST}(F_{\bar{S}})^{\bar{S}T} \in \mathscr{F}_T \quad \text{für alle } T \in \mathfrak{T}.$$

Nach Voraussetzung existiert also eine Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ mit den Marginalverteilungen F_T, so daß

$$F^{ST} = (F^T)^{ST} = (F_T)^{ST} = F_{ST} \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}.$$

2. Wegen $S \dotplus \mathfrak{T} = S \dotplus \bar{S}\mathfrak{T}$ kann beim Beweis des zweiten Teils der Behauptung nach Teil 1 ohne Einschränkung $S \subset \overline{\cup\, \mathfrak{T}}$ vorausgesetzt werden.

Sind nun $F_{S \dotplus T} \in \mathscr{F}_{S \dotplus T}$, $T \in \mathfrak{T}$, verträgliche Verteilungen, so ist die Definition $F_S := (F_{S \dotplus T})^S$ eindeutig und für $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}$ gilt mit $D := T_1 T_2$ stets

$$\begin{aligned}\int\limits_{x_S \leqq y_S} F_{S \dotplus T_1}(y_D, \infty \mid x_S)\, dF_S &= (F_{S \dotplus T_1})^{S \dotplus D}(y_{S \dotplus D}) \\ &= (F_{S \dotplus T_2})^{S \dotplus D}(y_{S \dotplus D}) = \int\limits_{x_S \leqq y_S} F_{S \dotplus T_2}(y_D, \infty \mid x_S)\, dF_S.\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen der Eindeutigkeitseigenschaft der bedingten Verteilungen die Existenz einer F_S-Nullmenge $N_S \in \mathfrak{B}_S$ derart, daß

$$F_{S \dotplus T}(y_T \mid x_S), \quad T \in \mathfrak{T}, \quad \text{verträglich für} \quad x_S \notin N_S.$$

Für Funktionen $g_{S \dotplus T} \in \mathscr{C}_{S \dotplus T}$ mit $\sum\limits_{T \in \mathfrak{T}} g_{S \dotplus T} \geqq 0$ gilt daher nach Voraussetzung:

$$\sum_{T \in \mathfrak{T}} \int\limits_{R_T} g_{S \dotplus T}\, dF_{S \dotplus T}(y_T \mid x_S) \geqq 0 \quad \text{für} \quad x_S \notin N_S.$$

Daraus folgt nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\sum_{T \in \mathfrak{T}} \int\limits_{R_{S \dotplus T}} g_{S \dotplus T}\, dF_{S \dotplus T} &= \sum_{T \in \mathfrak{T}} \int\limits_{R_S} \Big(\int\limits_{R_T} g_{S \dotplus T}\, dF_{S \dotplus T}(y_T \mid x_S) \Big)\, dF_S \\ &= \int\limits_{\bar{N}_S} \Big(\sum_{T \in \mathfrak{T}} \int\limits_{R_T} g_{S \dotplus T}\, dF_{S \dotplus T}(y_T \mid x_S) \Big)\, dF_S \geqq 0.\end{aligned}$$

Nach [2.2] existiert also eine Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ mit

$$F^{S \dotplus T} = F_{S \dotplus T} \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}. \qquad \lrcorner$$

Da eine Gesamtheit disjunkter Teilmengen stets auflösbar ist, folgt aus diesem Satz insbesondere die Auflösbarkeit von $\mathfrak{T}$ im Fall $|\mathfrak{T}| = 2$.

Um ein allgemeines Kriterium angeben zu können, sind zunächst zwei Spezialfälle nicht auflösbarer Gesamtheiten zu untersuchen.

Für den ersten Fall ist der folgende Begriff erforderlich:

Definition. Ist $I \neq \emptyset$ endlich und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$, so bilden die paarweise verschiedenen Mengen $T_1, \ldots, T_k \in \mathfrak{T}$ eine Kette bezüglich $\mathfrak{T}$, falls

$$T_j T_{j+1} \prod_{T_j, T_{j+1} \neq T \in \mathfrak{T}} \bar{T} \neq \emptyset \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, k \text{ (Index modulo } k).$$

Als Beispiel sei der Fall $|I| = 3$ und $\mathfrak{T} = \{T \subset I : |T| = 2\}$ angeführt.

Allgemein ist hier die folgende Aussage möglich:

Satz 3.2. *Es sei $I \neq \emptyset$ endlich und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$. Enthält $\mathfrak{T}$ eine Kette $T_1, \ldots, T_k$ mit $k > 2$, so ist $\mathfrak{T}$ nicht auflösbar.*

Beweis. 1. Es sei $S := \{m_j : j = 1, \ldots, k\}$ mit

$$m_j \in T_j T_{j+1}, \quad m_j \notin T \quad \text{für} \quad T_j, T_{j+1} \neq T \in \mathfrak{T} \text{ (Index modulo } k).$$

Dann sind $m_1, \ldots, m_k$ wegen $k > 2$ paarweise verschieden, und — abgesehen von der leeren Menge — gilt:

$$S\mathfrak{T} = \{S_1, \ldots, S_k\} \quad \text{mit} \quad S_j := \{m_{j-1}, m_j\}.$$

Da nach [3.1] der Nachweis genügt, daß $S\mathfrak{T}$ nicht auflösbar ist, kann also von vornherein vorausgesetzt werden:

$$\mathfrak{T} = \{\{j-1, j\} : 1 \leqq j \leqq k\}.$$

2. Für $T \in \mathfrak{T}$ werden dann die folgenden Verteilungen $F_T \in \mathscr{F}_T$ definiert:

$$F_T(y_T) := \tfrac{1}{2}\Big[\prod_{i \in T} \chi_{[0,\infty)}(y_i) + \prod_{i \in T} \chi_{[1,\infty)}(y_i)\Big] \quad \text{für} \quad T \neq \{k, 1\},$$

$$F_T(y_T) := \tfrac{1}{2} \sum_{i \in T} \chi_{[0,\infty)}(y_i)\, \chi_{[1,\infty)}(y_{T-\{i\}}) \qquad \text{für} \quad T = \{k, 1\}.$$

Wegen $k > 2$ und auf Grund von

$$F_T^{\{i\}}(y_i) = \tfrac{1}{2}\big(\chi_{[0,\infty)}(y_i) + \chi_{[1,\infty)}(y_i)\big) \quad \text{für alle} \quad i \in T \quad \text{und} \quad T \in \mathfrak{T}$$

sind die Verteilungen F_T, $T \in \mathfrak{T}$, verträglich.

Die Annahme, es existiere $F \in \mathscr{F}_I$ mit $F^T = F_T$ für alle $T \in \mathfrak{T}$, führt jedoch zu

$$\left.\begin{array}{ll} x_j \in \{0, 1\} & \text{für} \quad j = 1, \ldots, k \\ x_1 = \cdots = x_k, & x_1 + x_k = 1 \end{array}\right\} F\text{-fast}$$

und damit zu einem Widerspruch. $\lrcorner$

Neben dem Begriff einer Kette wird noch der folgende benötigt:

Definition. Ist $I \neq \emptyset$ endlich und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$, so ist I bezüglich $\mathfrak{T}$ zusammenhängend, falls zu jedem Paar $i_1, i_2 \in I$ eine Menge $T \in \mathfrak{T}$ mit $\{i_1, i_2\} \subset T$ existiert.

Ein Beispiel bildet wieder der Fall $|I| = 3$ und $\mathfrak{T} = \{T \subset I : |T| = 2\}$.

Allgemein ist hier die folgende Aussage möglich:

Satz 3.3. *Es sei $I \neq \emptyset$ endlich und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$. Ist I bezüglich $\mathfrak{T}$ zusammenhängend und $I \notin \mathfrak{T}$, so ist $\mathfrak{T}$ nicht auflösbar.*

Beweis. 1. Es sei $M := (M_i, i \in I)$ mit $M_i := \{0, 1\}$, $i \in I$, und

$$r(x) := \begin{cases} -1, & \text{falls} \quad \sum_{i \in I} x_i = 0 \\ +1, & \text{falls} \quad \sum_{i \in I} x_i = 1 \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann sind die Funktionen $r_T := r^T$, $T \in \mathfrak{T}$, verträglich, und es gilt:

$$r_T(x_T) = \begin{cases} |\bar{T}| - 1, & \text{falls} \quad \sum_{i \in T} x_i = 0 \\ 1, & \text{falls} \quad \sum_{i \in T} x_i = 1 \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wegen $I \notin \mathfrak{T}$ folgt daraus $r_T \geqq 0$ und $\sum_{x_T \in M_T} r_T = |I| - 1 > 0$.

Da somit in naheliegender Weise zu Verteilungen F_T übergegangen werden kann, genügt der Nachweis, daß keine nicht-negative Funktion r_0 auf M mit $r_0^T = r_T$ für alle $T \in \mathfrak{T}$ existiert.

2. Die gegenteilige Annahme führt zu

$$r_0(x) = 0, \quad \text{falls} \quad \sum_{i \in T} x_i > 1 \quad \text{für geeignetes} \quad T \in \mathfrak{T},$$

also nach Voraussetzung zu

$$r_0(x) = 0, \quad \text{falls} \quad \sum_{i \in T} x_i > 1,$$

und damit wegen $\cup\, \mathfrak{T} = I$ zu

$$r_0(x) = 1, \quad \text{falls} \quad \sum_{i \in T} x_i = 1.$$

Das ergibt $r_0 = r$ und damit einen Widerspruch. $\lrcorner$

Um nun die wesentliche Aussage über die Auflösbarkeit formulieren zu können, wird noch die folgende Bezeichnung eingeführt:

Definition. Für eine Gesamtheit von Teilmengen von I ($I \neq \emptyset$ endlich) ist

$$\mathfrak{T}^* := \{T \in \mathfrak{T} : \bar{S}\, T \neq \emptyset \quad \text{für alle} \quad S \in \mathfrak{T}\}.$$

Eine Gesamtheit $\mathfrak{T} \neq \emptyset$ heißt reduziert, wenn sie mit $\mathfrak{T}^*$ übereinstimmt.

Da $\mathfrak{T}$ endlich ist und beim Übergang zu $\mathfrak{T}^*$ genau jene $T \in \mathfrak{T}$ gestrichen werden, die echte Teilmenge einer Menge $S \in \mathfrak{T}$ sind, ist die Forderung

$$F^T = F_T \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}$$

bei verträglichen Verteilungen F_T, $T \in \mathfrak{T}$, gleichbedeutend mit

$$F^T = F_T \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}^*.$$

Die Annahme $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^*$ bedeutet also keine Einschränkung; hier gilt:

Satz 3.4. *Ist $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$ reduziert, so lautet eine notwendige Bedingung für die Auflösbarkeit:*

$$\min_{i\in I} v_{\mathfrak{T}}(i) \leqq 1 \quad \text{mit} \quad v_{\mathfrak{T}}(i) := \sum_{T\in\mathfrak{T}} \chi_T(i).$$

Beweis. 1. Für einen Induktionsbeweis nach $n = |I|$ ist die folgende schärfere — im Fall $n = 1$ triviale — Behauptung geeigneter:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ist } \mathfrak{T} \text{ reduziert und auflösbar sowie } |\mathfrak{T}| > 1, \text{ so gilt} \\ |E_{\mathfrak{T}}| > 1 \quad \text{mit} \quad E_{\mathfrak{T}} := \{i\in I : v_{\mathfrak{T}}(i) = 1\}. \end{array}\right. \tag{1}$$

Beim Nachweis der allgemeinen Richtigkeit von (1) läßt sich voraussetzen:

$$\cup\,\mathfrak{T} = I, \quad |\mathfrak{T}| > 2, \quad {}^K\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(I)^\star \tag{2}$$

denn zunächst kann I durch $I' := \cup\,\mathfrak{T}$ ersetzt werden, ferner gilt für eine reduzierte Gesamtheit $\mathfrak{T} = \{T_1, T_2\}$ stets $T_1\bar{T}_2 \neq \emptyset \neq \bar{T}_1 T_2$, und schließlich erfüllt mit einer Menge S, die aus jedem Atom von ${}^K\mathfrak{T}$ genau ein Element enthält, nach [3.1] auch $S\,\mathfrak{T}$ die Voraussetzungen von (1).

2. Es sei nun zunächst $\min_{i\in I} v_{\mathfrak{T}}(i) = 1$ angenommen. Es gelte etwa $i_0 \in T \in \mathfrak{T}$ genau für $T = T_0$, also insbesondere $i_0 \in E_{\mathfrak{T}}$. Wegen $|\mathfrak{T}| > 2$ erfüllt dann auch $\mathfrak{T}' := ((I - \{i_0\})\,\mathfrak{T})^*$ die Voraussetzungen von (1); nach Induktionsannahme gilt also $|E_{\mathfrak{T}'}| > 1$. Für $T' := T_0 - \{i_0\}$ bestehen nun zwei Möglichkeiten:

(a) ist $T' \in \mathfrak{T}'$, so folgt $E_{\mathfrak{T}'} \subset E_{\mathfrak{T}}$,

(b) ist $T' \notin \mathfrak{T}'$, so folgt $E_{\mathfrak{T}'} \not\subset T'$;

dabei findet im Fall (b) die Voraussetzung ${}^K\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(I)$ Verwendung. Die Annahme $\min_{i\in I} v_{\mathfrak{T}}(i) = 1$ liefert demnach in jedem Fall $|E_{\mathfrak{T}}| > 1$, d.h. es genügt, die Annahme $\min_{i\in I} v_{\mathfrak{T}}(i) > 1$ zu einem Widerspruch zu führen.

3. Zu diesem Zweck wird in Teil 4 unter den Voraussetzungen von (1) sowie den Annahmen (2) und $\min_{i\in I} v_{\mathfrak{T}}(i) > 1$ bewiesen:

$$\min_{i\in I} v_{\mathfrak{T}}(i) = 2, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{zu } i_0 \in I \text{ mit } v_{\mathfrak{T}}(i_0) = 2 \text{ existieren Mengen } T_1, T_2 \in \mathfrak{T} \text{ derart,} \\ \text{daß} \quad i_0 \in T_1 T_2 \quad \text{und} \quad \min_{i\in T_1\bar{T}_2} v_{\mathfrak{T}}(i) = 2 = \min_{i\in \bar{T}_1 T_2} v_{\mathfrak{T}}(i). \end{array}\right. \tag{4}$$

Daraus folgt ohne Schwierigkeit die Existenz einer Folge von Mengen $T_j \in \mathfrak{T}$ mit den Eigenschaften

$$T_j \neq T_{j+1}, T_{j+2} \quad \text{und} \quad \min_{i\in T_j T_{j+1}} v_{\mathfrak{T}}(i) = 2 \quad \text{für} \quad j \in Z.$$

Wegen der Endlichkeit enthält $\mathfrak{T}$ also eine Kette $T_j, T_{j+1}, \ldots, T_{j+k} = T_j$ mit $k > 2$, woraus nach [3.2] der erforderliche Widerspruch folgt.

4. Ist $v_{\mathfrak{T}}(i') = \min_{i\in I} v_{\mathfrak{T}}(i)$, so gilt für $\mathfrak{T}' := ((I - \{i'\})\,\mathfrak{T})^*$ notwendigerweise $|\mathfrak{T}'| > 1$; denn andernfalls wäre $I - \{i'\}$ in $\mathfrak{T}$ enthalten, wegen $\min_{i\neq i'} v_{\mathfrak{T}}(i) > 1$

$\star$ Ist $\mathfrak{C}$ eine Gesamtheit von Teilmengen einer festen Menge, so bezeichnet ${}^B\mathfrak{C}$ den kleinsten $\mathfrak{C}$ umfassenden Mengenkörper.

und $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}$ also I bezüglich $\mathfrak{T}$ zusammenhängend, was wegen $I \notin \mathfrak{T}$ im Widerspruch zu [3.3] steht.

Nach Induktionsannahme enthält $E_{\mathfrak{T}'}$ also zwei Elemente $i_1 \neq i_2$. Dann sind die Gesamtheiten

$$\mathfrak{T}_l := \{T \in \mathfrak{T} : i', i_l \in T\} \quad \text{für} \quad l = 1, 2$$

disjunkt, da sonst $\{i_1, i_2\} \subset T' \in \mathfrak{T}'$ gelten würde, was sich wegen $i_l \in E_{\mathfrak{T}'}$ nicht mit ${}^K\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(I)$ vereinbaren läßt. Wegen der Minimalität von i' gilt also

$$|\mathfrak{T}_l| + 1 \geqq v_{\mathfrak{T}}(i_l) \geqq v_{\mathfrak{T}}(i') \geqq |\mathfrak{T}_1| + |\mathfrak{T}_l| \quad \text{für} \quad l = 1, 2$$

und damit $\mathfrak{T}_l = \{T_l\}$.

Das ergibt zunächst $v_{\mathfrak{T}}(i') = 2$, womit (3) bewiesen ist. Aus $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 = \emptyset$ folgt ferner $i_1 \notin T_2$ und $i_2 \notin T_1$, und das führt wegen $v_{\mathfrak{T}}(i_l) = 2$ neben $i' \in T_1 T_2$ zu

$$\min_{i \in T_1 \bar{T}_2} v_{\mathfrak{T}}(i) = 2 = \min_{i \in \bar{T}_1 T_2} v_{\mathfrak{T}}(i).$$

Damit ist auch (4) bewiesen, da i' bei der Konstruktion von T_1 und T_2 durch jedes i_0 mit $v_{\mathfrak{T}}(i_0) = v_{\mathfrak{T}}(i')$ ersetzt werden kann. $\lrcorner$

Dieser Satz liefert das folgende Kriterium für die Auflösbarkeit:

Satz 3.5. *Ist $I \neq \emptyset$ endlich und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$, so ist $\mathfrak{T}$ genau dann auflösbar, wenn bei geeigneter Numerierung $\mathfrak{T} = \{T_1, \ldots, T_l\}$ folgendes gilt:*

$$T_k\Big(\sum_{j<k}^{\cdot} T_j\Big) \in \sum_{j<k}^{\cdot} \mathfrak{P}(T_j) \quad \text{für} \quad 1 < k \leqq l.$$

Beweis. 1. Es wird vollständige Induktion nach $l = |\mathfrak{T}|$ durchgeführt. Dabei ist im Fall $l = 1$ nichts zu beweisen.

2. Zunächst besitze $\mathfrak{T} = \{T_1, \ldots, T_l\}$ mit $l > 1$ die angegebene Eigenschaft. Es seien $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, verträgliche Verteilungen. Da $\{T_1, \ldots, T_{l-1}\}$ nach Induktionsannahme auflösbar ist, existiert also eine Verteilung $G \in \mathscr{F}_I$ mit

$$G^{T_k} = F_{T_k} \quad \text{für} \quad 1 \leqq k < l. \tag{5}$$

Ist dann $S := \sum_{1 \leqq k < l}^{\cdot} T_k$, so sind die Verteilungen G^S und F_{T_l} auf Grund der Voraussetzung $T_l S \in \sum_{1 \leqq k < l}^{\cdot} \mathfrak{P}(T_k)$ verträglich. Da $\{S, T_l\}$ nach der Bemerkung im Anschluß an [3.1] auflösbar ist, existiert also eine Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ mit

$$F^S = G^S \quad \text{und} \quad F^{T_l} = F_{T_l}. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt

$$F^T = F_T \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}$$

und damit die Auflösbarkeit von $\mathfrak{T}$.

3. Nun sei umgekehrt $|\mathfrak{T}| = l > 1$ und $\mathfrak{T}$ auflösbar.

Da die zu beweisende Behauptung bei disjunkten Mengen $T \in \mathfrak{T}$ klar ist, kann ohne Einschränkung angenommen werden:

$$S := \{i \in I : \sum_{T \in \mathfrak{T}} \chi_T(i) > 1\} \neq \emptyset.$$

Nach [3.1] ist $S\,\mathfrak{T}$ auflösbar, also nach [3.4] nicht reduziert. Daher enthält $\mathfrak{T}$ eine Menge T_l mit $S\,T_l \in \sum_{T_l \neq T \in \mathfrak{T}}^{\cdot} \mathfrak{P}(S\,T)$, so daß

$$T_l\Big(\sum_{T_l \neq T \in \mathfrak{T}}^{\cdot} T\Big) \subset S\,T \in \sum_{T_l \neq T \in \mathfrak{T}}^{\cdot} \mathfrak{P}(S\,T) \subset \sum_{T_l \neq T \in \mathfrak{T}}^{\cdot} \mathfrak{P}(T). \tag{7}$$

Daraus folgt insbesondere die Auflösbarkeit von $\mathfrak{T}' := \mathfrak{T} - \{T_l\}$, so daß nach Induktionsannahme $\mathfrak{T}'$ und damit wegen (7) auch $\mathfrak{T}$ die behauptete Eigenschaft besitzt. $\lrcorner$

Zur Feststellung, ob eine Gesamtheit $\mathfrak{T}$ auflösbar ist, ist ausgehend von $\mathfrak{T}_0 := \mathfrak{T}$ rekursiv zu definieren:

$$\mathfrak{T}_{2k-1} := \mathfrak{T}^*_{2k-2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}_{2k} := \{i \in I : \sum_{T \in \mathfrak{T}_{2k-1}} \chi_T(i) > 1\}\, \mathfrak{T}_{2k-1}.$$

Dann folgt aus [3.5] und [3.4]:

(a) mit $\mathfrak{T}_{l-1}$ ist auch $\mathfrak{T}_l$ auflösbar und umgekehrt ($l \in Z$ beliebig);

(b) ist $\mathfrak{T}_{2k+1} \neq \{\emptyset\}$ und $|\mathfrak{T}_{2k+1}| = |\mathfrak{T}_{2k-1}|$, so ist $\mathfrak{T}_{2k+1}$ nicht auflösbar.

Daher ist $\mathfrak{T}$ genau dann auflösbar, wenn

$$\mathfrak{T}_l = \{\emptyset\} \quad \text{für} \quad l > 2|\mathfrak{T}|.$$

An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, daß im Fall $\emptyset \neq \mathfrak{S} \subset \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$ mit reduzierten Gesamtheiten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ die Auflösbarkeit von $\mathfrak{T}$ nicht notwendig die Auflösbarkeit von $\mathfrak{S}$ ergibt, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\mathfrak{S} := \{\{1,2,4\}, \{2,3,5\}, \{1,3,6\}\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T} := \mathfrak{S} \dotplus \{\{1,2,3\}\}.$$

Im Fall $|\mathfrak{T}| = 3$ ist $\mathfrak{T}$ genau dann auflösbar, wenn bei geeigneter Numerierung

$$\mathfrak{T} = \{T_0, T_1, T_2\} \quad \text{mit} \quad T_1 T_2 \bar{T}_0 = \emptyset,$$

da $\mathfrak{T}$ andernfalls eine Kette bildet.

Dieser Fall läßt sich verallgemeinern zu

$$\mathfrak{T} = \{T_0, T_1, \ldots, T_l\} \quad \text{mit} \quad T_{k_1} T_{k_2} \bar{T}_0 = \emptyset \quad \text{für} \quad 1 \leqq k_1 < k_2 \leqq 1;$$

nach [3.5] ist $\mathfrak{T}$ in der gegebenen Reihenfolge auflösbar.

Hier läßt sich eine einfache Lösung angeben:

Satz 3.6. *Es sei $I \neq \emptyset$ endlich und $\mathfrak{T} = \{T_0, T_1, \ldots, T_l\} \subset \mathfrak{P}(I)$ mit*

$$\cup\, \mathfrak{T} = I \quad \textit{und} \quad T_{k_1} T_{k_2} \bar{T}_0 = \emptyset \quad \textit{für} \quad 1 \leqq k_1 < k_2 \leqq l;$$

ferner seien $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, verträgliche Verteilungen. Dann definiert

$$F(y_I) := \int_{x_{T_0} \leqq y_{T_0}} \prod_{1 \leqq k \leqq l} F_{T_k}(y_{\bar{T}_0 T_k} | x_{T_0 T_k})\, dF_{T_0}$$

eine Verteilung aus $\mathscr{F}_I$ mit den Marginalverteilungen F_T für $T \in \mathfrak{T}$.

Beweis. 1. Da I die Vereinigung der disjunkten Mengen $T_0, \bar{T}_0 T_1, \ldots, \bar{T}_0 T_l$ ist, definieren die für festes $y_I \in R_I$ stets $\mathfrak{B}_{T_0}$-meßbaren Funktionen

$$f(y_I; x_{T_0}) := \prod_{i \in T_0} \chi_{\{x_i : x_i \leqq y_i\}} \prod_{1 \leqq k \leqq l} F_{T_k}(y_{\bar{T}_0 T_k} | x_{T_0 T_k})$$

für jedes $x_{T_0} \in R_{T_0}$ eine Verteilung aus $\mathscr{F}_I$. Wegen $|f(y_I; x_{T_0})| \leqq 1$ und $\int_{R_{T_0}} dF_{T_0} = 1$ definiert also

$$F(y_I) := \int_{R_{T_0}} f(y_I; x_{T_0})\, dF_{T_0}$$

eine Verteilung aus $\mathscr{F}_I$, die wegen der Verträglichkeit von F_{T_0} und F_{T_k} trotz der Mehrdeutigkeit von $F_{T_k}(y_{\bar{T}_0 T_k} | x_{T_0 T_k})$ eindeutig bestimmt ist.

2. Für diese Verteilung gilt

$$F^{T_0}(y_{T_0}) = \int\limits_{x_{T_0} \leqq y_{T_0}} dF_{T_0} = F_{T_0}(y_{T_0})$$

und wegen der Verträglichkeit

$$\begin{aligned} F^{T_k}(y_{T_k}) &= \int\limits_{x_{T_0T_k} \leqq y_{T_0T_k}} \int\limits_{R_{T_0\bar{T}_k}} F_{T_k}(y_{\bar{T}_0T_k} \mid x_{T_0T_k})\, dF_{T_0} \\ &= \int\limits_{x_{T_0T_k} \leqq y_{T_0T_k}} F_{T_k}(y_{\bar{T}_0T_k} \mid x_{T_0T_k})\, d(F_{T_0})^{T_0T_k} \\ &= \int\limits_{x_{T_0T_k} \leqq y_{T_0T_k}} F_{T_k}(y_{\bar{T}_0T_k} \mid x_{T_0T_k} \mid x)\, d(F_{T_k})^{T_0T_k} \\ &= F_{T_k}(y_{T_k}) \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, l. \end{aligned}$$

Die Verteilung F besitzt also die geforderten Marginalverteilungen. $\square$

Für das zu Beginn untersuchte Beispiel folgt aus diesem Satz:

Besitzen die Verteilungen $F_k \in \mathscr{F}_{\{0,k\}}$, $1 \leqq k \leqq l$, eine übereinstimmende Marginalverteilung $F_0 \in \mathscr{F}_{\{0\}}$, so definiert

$$F(y_0, \ldots, y_l) := \int\limits_{x_0 \leqq y_0} \prod_{1 \leqq k \leqq l} F_k(y_k \mid x_0)\, dF_0$$

eine Verteilung aus $\mathscr{F}_{\{0,\ldots,l\}}$ mit den Marginalverteilungen F_k.

Mittels [3.6] ist es allgemein möglich, im auflösbaren Fall eine Lösung des Problems explizit anzugeben:

Satz 3.7. *Es sei $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$ mit $\cup\, \mathfrak{T} = I$ auflösbar, d.h. bei geeigneter Numerierung $\mathfrak{T} = \{T_1, \ldots, T_l\}$ gelte*

$$S_k T_k \in \sum_{j<k}{}^{\cdot}\, \mathfrak{P}(T_j) \quad \textit{für} \quad 1 < k \leqq l \quad \textit{mit} \quad S_k := \sum_{j<k}{}^{\cdot}\, T_j .$$

Sind dann $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, verträgliche Verteilungen, so definiert

$$F(y_I) := \int\limits_{x_{\bar{S}_1T_1} \leqq y_{\bar{S}_1T_1}} \cdots \int\limits_{x_{\bar{S}_lT_l} \leqq y_{\bar{S}_lT_l}} dF_{T_l}(y_{\bar{S}_lT_l} \mid x_{S_lT_l}) \cdots dF_{T_1}(y_{\bar{S}_1T_1} \mid x_{S_1T_1})$$

eine Verteilung aus $\mathscr{F}_I$ mit den Marginalverteilungen F_T für $T \in \mathfrak{T}$.

Beweis. 1. Es wird vollständig Induktion nach l durchgeführt. Die Richtigkeit der Behauptung für $l = 1$ folgt dabei sofort aus $S_1 = \emptyset$ und $T_1 = I$.

Ist die Behauptung für $l - 1$ bereits bewiesen, so bestimmen $F_{T_1}, \ldots, F_{T_{l-1}}$ eine Verteilung $F_{S_l} \in \mathscr{F}_{S_l}$ mit

$$(F_{S_l})^{T_k} = F_{T_k} \quad \text{für} \quad 1 \leqq k < l .$$

Nun bezeichne $\mathscr{G}_{S_l}$ die Gesamtheit aller Funktionen $g_{S_l} \in \mathscr{M}(\mathfrak{B}_{S_l})$, für die

$$\int\limits_{R_{S_l}} g_{S_l}\, dF_{S_l} = \int\limits_{R_{\bar{S}_1T_1}} \cdots \int\limits_{R_{\overline{S_{l-1}}T_{l-1}}} g_{S_l}\, dF_{T_{l-1}}(y_{\overline{S_{l-1}}T_{l-1}} \mid x_{S_{l-1}T_{l-1}}) \cdots dF_{T_1}(y_{\bar{S}_1T_1} \mid x_{S_1T_1}),$$

für die also insbesondere die rechte Seite definiert und eindeutig ist.

Dann ist $\mathscr{G}_{S_l}$ ein bezüglich monotoner Konvergenz abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathscr{M}(\mathfrak{B}_{S_l})$, der nach Definition von F_{S_l} die charakteristischen Funktionen aller Mengen $\{x_{S_l} : x_{S_l} \leqq y_{S_l}\}$ enthält, d.h. $\mathscr{G}_{S_l}$ stimmt mit $\mathscr{M}(\mathfrak{B}_{S_l})$ überein.

2. Das führt zunächst zu

$$F(y_I) = \int_{x_{S_l} \leqq y_{S_l}} F_{T_l}(y_{\bar{S}_l T_l} \mid x_{S_l T_l})\, dF_{S_l}$$

und mit den Bezeichnungen $T_0 := S_l T_l$ und $F_{T_0} := (F_{S_l})^{T_0}$ zu

$$\begin{aligned} F(y_I) &= \int_{x_{T_0} \leqq y_{T_0}} \int_{x_{\bar{T}_0 S_l} \leqq y_{\bar{T}_0 S_l}} F_{T_l}(y_{\bar{S}_l T_l} \mid x_{T_0})\, dF_{S_l}(y_{\bar{T}_0 S_l} \mid x_{T_0})\, dF_{T_0} \\ &= \int_{x_{T_0} \leqq y_{T_0}} F_{T_l}(y_{\bar{T}_0 T_l} \mid x_{T_0})\, F_{S_l}(y_{\bar{T}_0 S_l} \mid x_{T_0})\, dF_{T_0}. \end{aligned}$$

Da $S_l T_l \bar{T}_0 = \emptyset$ und die Verteilungen F_{S_l}, F_{T_l} und F_{T_0} nach Voraussetzung verträglich sind, ergibt [3.6] nun neben $F \in \mathscr{F}_I$ die Gleichungen

$$F^{T_l} = F_{T_l} \quad \text{und} \quad F_{T_k} = (F^{S_l})^{T_k} = (F_{S_l})^{T_k} = F_{T_k} \quad \text{für} \quad 1 \leqq k < l.$$

Die Behauptung gilt also für jedes l. ⌋

In § 2 wurde gezeigt, daß zu marginalstetigen Verteilungen F_T, $T \in \mathfrak{T}$, die der Bedingung (V^*) genügen, nicht notwendig eine marginalstetige Lösung $F \in \mathscr{F}_I$ existiert; im auflösbaren Fall gilt dagegen:

Satz 3.8. *Die Verteilungen F_T in [3.7] seien marginalstetig, d.h. es sei*

$$F_T(y_T) = \int_{x_T \leqq y_T} f_T\, d\Big(\prod_{i \in T} F_T^{\{i\}}\Big) \quad \textit{mit } \mathfrak{B}_T\textit{-meßbarem} \quad f_T \geqq 0;$$

dann ist auch die dort definierte Verteilung F marginalstetig, d.h. es ist

$$F(y_I) = \int_{x_I \leqq y_I} f\, d\Big(\prod_{i \in I} F^{\{i\}}\Big) \quad \textit{mit } \mathfrak{B}_I\text{-meßbarem} \quad f \geqq 0.$$

Mit den Mengen

$$N_T := \{x_T : f_T = 0\} \quad \textit{für} \quad T \in \mathfrak{T}$$

und den wegen der Verträglichkeit $\big(\prod_{i \in I} F^{\{i\}}\big)$*-fast eindeutigen Funktionen*

$$f_S := \int_{R_{ST}} f_T\, d\Big(\prod_{i \in ST} F^{\{i\}}\Big) \quad \text{für} \quad S \subset T \in \mathfrak{T}$$

kann dabei gewählt werden:

$$f(x_I) := \prod_{T \in \mathfrak{T}} \chi_{\bar{N}_T}(x_T) \prod_{\emptyset \neq \mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}} f_{\cap \mathfrak{S}}(x_{\cap \mathfrak{S}})^{(-1)^{|\mathfrak{S}|-1}}.$$

Beweis. 1. Mit $G := \prod_{i \in I} F^{\{i\}} \in \mathscr{F}_I$ sind nach dem Satz von FUBINI

$$\{x_I : f_S(x_S) = \infty\} \quad \text{und} \quad \{x_I : f_S(x_S) = 0 \text{ und } f_T(x_T) > 0\}$$

für $S \subset T \in \mathfrak{T}$ stets G-Nullmengen, d.h. die Funktion f ist G-fast eindeutig bestimmt.

2. Im vorliegenden Fall läßt sich wählen

$$F_{T_k}(y_{\bar{S}_k T_k} \mid x_{S_k T_k}) = \int_{x_{\bar{S}_k T_k} \leqq y_{\bar{S}_k T_k}} \chi_{\bar{N}_{T_k}} \frac{f_{T_k}}{f_{S_k T_k}}\, d\Big(\prod_{i \in \bar{S}_k T_k} F^{\{i\}}\Big),$$

d.h. wegen $\cup\, \mathfrak{T} = I$ gilt für die in [3.7] definierte Verteilung

$$F(y_I) = \int_{x_I \leqq y_I} \prod_{T \in \mathfrak{T}} \chi_{\bar{N}_T} \prod_{1 \leqq k \leqq l} \frac{f_{T_k}}{f_{S_k T_k}}\, dG.$$

Es ist also die folgende Gleichung nachzuweisen:

$$f = \prod_{T \in \mathfrak{T}} \chi_{\bar{N}_T} \prod_{1 \leq k \leq l} \frac{f_{T_k}}{f_{S_k T_k}} \; G\text{-fast}.$$

3. Dazu wird vollständige Induktion nach l durchgeführt. Die Richtigkeit der Behauptung für $l = 1$ ist dabei unmittelbar einzusehen. Da mit $\mathfrak{T}$ auch $\mathfrak{T} - \{T_l\}$ auflösbar ist, folgt aus der Annahme, die Behauptung sei für $l - 1$ bereits bewiesen:

$$\prod_{T \in \mathfrak{T} - \{T_l\}} \chi_{\bar{N}_T} \prod_{\emptyset \neq \mathfrak{S} \subset \mathfrak{T} - \{T_l\}} f_{\cap \mathfrak{S}}^{(-1)^{|\mathfrak{S}|-1}} = \prod_{T \in \mathfrak{T} - \{T_l\}} \chi_{\bar{N}_T} \prod_{1 \leq k < l} \frac{f_{T_k}}{f_{S_k T_k}} \; G\text{-fast}.$$

Es genügt also, zu zeigen:

$$\chi_{\bar{N}_{T_l}} \prod_{T_l \in \mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}} f_{\cap \mathfrak{S}}^{(-1)^{|\mathfrak{S}|-1}} = \chi_{\bar{N}_{T_l}} \frac{f_{T_l}}{f_{S_l T_l}} \; G\text{-fast}.$$

4. Nach Voraussetzung gilt $S_l T_l \subset T_0$ für geeignetes $T_0 \in \mathfrak{T} - \{T_l\}$. Mit der Bezeichnung $\mathfrak{T}' := \mathfrak{T} - \{T_0, T_l\}$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
\prod_{T_l \in \mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}} f_{\cap \mathfrak{S}}^{(-1)^{|\mathfrak{S}|-1}} &= \prod_{T_l \notin \mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}} f_{T_l \cap \mathfrak{S}}^{(-1)^{|\mathfrak{S}|}} \\
&= \prod_{\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}'} f_{T_l \cap \mathfrak{S}}^{(-1)^{|\mathfrak{S}|}} \prod_{\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}'} f_{T_0 T_l \cap \mathfrak{S}}^{(-1)^{|\mathfrak{S}|+1}} \\
&= f_{T_l} \prod_{\emptyset \neq \mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}'} f_{T_l \cap \mathfrak{S}}^{(-1)^{|\mathfrak{S}|}} f_{T_0 T_l}^{-1} \prod_{\emptyset \neq \mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}'} f_{T_0 T_l \cap \mathfrak{S}}^{(-1)^{|\mathfrak{S}|+1}} \\
&= f_{T_l} \prod_{\emptyset \neq \mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}'} f_{T_0 T_l \cap \mathfrak{S}}^{(-1)^{|\mathfrak{S}|}} f_{S_l T_l}^{-1} \prod_{\emptyset \neq \mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}'} f_{T_0 T_l \cap \mathfrak{S}}^{(-1)^{|\mathfrak{S}|+1}} \\
&= \frac{f_{T_l}}{f_{S_l T_l}} \text{ für } G\text{-fast alle } x_I \in (\bar{N}_{T_l}, R_{\bar{T}_l}).
\end{aligned}$$

Die Behauptung gilt also für jedes l. $\square$

Es sei noch bemerkt, daß dieser Satz insbesondere auf den Fall diskreter Verteilungen angewendet werden kann.

Mittels [3.8] läßt sich außerdem zeigen:

Satz 3.9. *Die Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ in* [3.7] *ist unabhängig davon, welche Numerierung $\mathfrak{T} = \{T_1, \ldots, T_l\}$ mit der geforderten Eigenschaft zugrunde gelegt wird.*

Beweis. 1. Für σ-Körper $\mathfrak{H}_{S_k T_k} \subset \mathfrak{B}_{S_k T_k}$ werde allgemein definiert:

$$P(\mathfrak{H}_{S_k T_k}) := \{(A_{S_k T_k}, R_{\bar{S}_k T_k}) : A_{S_k T_k} \in \mathfrak{H}_{S_k T_k}\} \subset \mathfrak{B}_{T_k}.$$

Bezeichnet E_{T_k} den zur Verteilung F_{T_k} gehörigen Erwartungswert, so wurde in Teil 1 des Beweises zu [3.7] gezeigt, daß Integrale bezüglich der Verteilung F dann als iterierte Erwartungswerte dargestellt werden können:

$$\int_{R_I} g \, dF = E_{T_1}(\ldots E_{T_l}(g \mid P(\mathfrak{B}_{S_l T_l})) \ldots \mid P(\mathfrak{B}_{S_1 T_1})) \quad \text{für alle} \quad g \in \mathscr{M}(\mathfrak{B}_I).$$

2. Für $i \in I$ seien $\mathfrak{H}_i^m$ endliche σ-Körper mit

$$\mathfrak{H}_i^1 \subset \mathfrak{H}_i^2 \subset \cdots \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_i^0 := {}^B\Big(\sum_{m \in Z}{}^{\cdot} \mathfrak{H}_i^m\Big) = \mathfrak{B}_{\{i\}}.^\star$$

* Ist $\mathfrak{C}$ eine Gesamtheit von Teilmengen einer festen Menge, so bezeichnet ${}^B\mathfrak{C}$ den kleinsten $\mathfrak{C}$ umfassenden σ-Körper.

Da $\mathfrak{S} := \sum\limits_{m_i \in Z}^{\cdot} \underset{i \in I}{X} \mathfrak{H}_i^{m_i}$. einen Mengenkörper mit ${}^B\mathfrak{S} = \mathfrak{B}_I$ definiert, ist das Maß $\nu \leftrightarrow F$ durch die Werte auf $\mathfrak{S}$ eindeutig bestimmt.

Ferner wird in Teil 4 bewiesen:

$$\left\{\begin{array}{l} \int\limits_{R_I} g\, dF = \lim\limits_{m_i \to \infty}{}^* E_{T_1}(\cdots E_{T_l}(g \mid P(\underset{i \in S_l T_l}{X} \mathfrak{H}_i^{m_i}))\cdots \mid P(\underset{i \in S_1 T_1}{X} \mathfrak{H}_i^{m_i})) \\ \text{für alle} \quad g \in \sum\limits_{m_i \in Z}^{\cdot} \mathcal{M}(\underset{i \in I}{X} \mathfrak{H}_i^{m_i}), \end{array}\right. \tag{8}$$

wobei unter $\lim\limits_{m_i \to \infty}^*$ ein iterierter Grenzübergang in beliebiger Reihenfolge verstanden wird.

3. Nach Teil 2 genügt also der Nachweis, daß

$$E_{T_1}(\cdots E_{T_l}(\chi_B \mid P(\underset{i \in S_l T_l}{X} \mathfrak{H}_i^{m_i}))\cdots \mid P(\underset{i \in S_1 T_1}{X} \mathfrak{H}_i^{m_i}))$$

für feste $m_i \in Z$ ein Maß auf $\underset{i \in I}{X} \mathfrak{H}_i^{m_i}$ definiert, das von der gewählten Numerierung $\mathfrak{T} = \{T_1, \ldots, T_l\}$ unabhängig ist.

Da die σ-Körper $\mathfrak{H}_i^{m_i}$ endlich sind, lassen sich die Grundmengen $R_{\{i\}}$ hier durch endliche Mengen M_i ersetzen. Es kann also etwa angenommen werden:

$$x_i \in \{1, \ldots, m\}\, F_T\text{-fast} \quad \text{für alle} \quad i \in T \quad \text{und} \quad T \in \mathfrak{T},$$

so daß die Verteilungen F_T marginalstetig sind.

Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus der Darstellung in [3.8].

4. Es genügt, statt der Aussage (8) folgendes zu beweisen: Sind die Verteilungen F_{T_1} und F_{T_2} verträglich und ist $i \in T_1 T_2$ beliebig, so gilt für feste $m_k \geqq 0$ und $g \in \mathcal{M}(\mathfrak{B}_{T_1 \dot{+} T_2})$ stets

$$\lim_{m \to \infty} E_{T_1}(E_{T_2}(g \mid \mathfrak{H}_{T_2}^m)) = E_{T_1}(E_{T_2}(g \mid \mathfrak{H}_{T_2}^0))$$

mit

$$\mathfrak{H}_{T_2}^m := \mathfrak{H}_i^m \times \underset{i \neq k \in T_1 T_2}{X} \mathfrak{H}_k^{m_k} \times {}^B\{R_{\overline{T}_1 T_2}\} \quad \text{für} \quad m \geqq 0.$$

Zum Nachweis dieser Behauptung sei

$$g_m := E_{T_2}(g \mid \mathfrak{H}_{T_2}^m) \in \mathcal{M}(\mathfrak{B}_{T_1 \overline{T}_2} \times \mathfrak{H}_{T_2}^m) \subset \mathcal{M}(\mathfrak{B}_{T_1}).$$

Dann gilt wegen $\mathfrak{H}_{T_2}^0 = {}^B(\sum\limits_{m \in Z}^{\cdot} \mathfrak{H}_{T_2}^m)$ nach einem bekannten Satz über Martingale (vgl. [1], Seite 331)

$$\lim_{m \to \infty} g_m(x_{T_1 \overline{T}_2}, x_{T_1 T_2}) = g_0(x_{T_1 \overline{T}_2}, x_{T_1 T_2}) \quad F_{T_2}\text{-fast für jedes} \quad x_{T_1 \overline{T}_2} \in R_{T_1 \overline{T}_2},$$

also auf Grund der Verträglichkeit von F_{T_1} und F_{T_2} auch

$$\lim_{m \to \infty} g_m(x_{T_1}) = g_0(x_{T_1}) \quad F_{T_1}\text{-fast.}$$

Das führt wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Funktionen g_m zu

$$\lim_{m \to \infty} E_{T_1}(g_m) = E_{T_1}(g_0). \qquad \rfloor$$

Aus diesem Satz folgt beispielsweise, daß im Fall

$$I = \{1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T} = \{\{k, k+1\} : 1 \leqq k < n\}$$

die zu verträglichen Verteilungen $F_k \in \mathscr{F}_{\{k,k+1\}}$ gehörigen Lösungen

$$F(y_1, \ldots, y_n) := \int\limits_{x_1 \leqq y_1} \int\limits_{x_2 \leqq y_2} \cdots \int\limits_{x_{n-1} \leqq y_{n-1}} dF_{n-1}(y_n \,|\, x_{n-1}) \cdots dF_1(y_2 \,|\, x_1)\, dF_1^{\{1\}},$$

$$G(y_1, \ldots, y_n) := \int\limits_{x_n \leqq y_n} \int\limits_{x_{n-1} \leqq y_{n-1}} \cdots \int\limits_{x_2 \leqq y_2} dF_1(y_1 \,|\, x_2) \cdots dF_{n-1}(y_{n-1} \,|\, x_n)\, dF_{n-1}^{\{n\}}$$

stets übereinstimmen.

§ 4. Unendlich-dimensionale Verteilungen

In diesem Abschnitt wird auf die Voraussetzung, die Indexmenge I sei endlich, verzichtet; $\mathfrak{T}$ sei jedoch weiterhin eine Gesamtheit endlicher Teilmengen von I, d.h. es gelte $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}_0(I)$ mit der folgenden Abkürzung:

Definition. Für eine beliebige Menge I ist

$$\mathfrak{P}_0(I) := \{T \in \mathfrak{P}(I) : T \text{ endlich}\}.$$

Das Problem lautet nun allgemein:

Wann existiert zu Verteilungen $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, ein normiertes Maß $\nu \,|\, \mathfrak{B}_I$ mit

$$\nu^T \leftrightarrow F_T \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}.$$

Zunächst seien zwei Beispiele angegeben:

(a) Sind die Mengen $T \in \mathfrak{T}$ disjunkt und ist $\cup\, \mathfrak{T} = I$, so kann für ν das Produktmaß der normierten Maße $\nu_T \leftrightarrow F_T$ gewählt werden.

(b) Ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}_0(I)$ und sind die Verteilungen F_T, $T \in \mathfrak{T}$, verträglich, so folgt die Existenz von ν aus dem Satz von Kolmogorov.

Im folgenden wird eine einfache Verallgemeinerung von Fall (b) benötigt:

Satz 4.1. *Es sei $I \neq \emptyset$ beliebig und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}_0(I)$; dabei gelte:*

(*) *zu jedem Paar $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}$ existiert eine Menge $T_0 \in \mathfrak{T}$ mit $T_1 \dotplus T_2 \subset T_0$.*
Dann existiert zu verträglichen Verteilungen $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, stets ein normiertes Maß $\nu \,|\, \mathfrak{B}_I$ mit

$$\nu^T \leftrightarrow F_T \quad \textit{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}.$$

Beweis. Die Annahme $I = \cup\, \mathfrak{T}$ bedeutet keine Einschränkung. In diesem Fall läßt sich (*) folgendermaßen verschärfen:

Ist $S \in \mathfrak{P}_0(I)$, so gilt $S \subset T$ für geeignetes $T \in \mathfrak{T}$. (1)

Wegen der Verträglichkeit der Verteilungen F_T, $T \in \mathfrak{T}$, werden durch

$$G_S := (F_T)^S \in \mathscr{F}_S \quad \text{für} \quad S \subset T \in \mathfrak{T}$$

eindeutig verträgliche und für $S \in \mathfrak{T}$ mit den gegebenen übereinstimmende Verteilungen definiert.

Wegen (1) läßt sich demnach $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}_0(I)$ voraussetzen, d.h. die Behauptung ist eine unmittelbare Folge des Satzes von Kolmogorov. ⌟

Nun läßt sich das Problem lösen, falls $\mathfrak{T}$ abzählbar ist:

Satz 4.2. *Es sei $I \neq \emptyset$ beliebig und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}_0(I)$ abzählbar. Notwendig und hinreichend dafür, daß zu Verteilungen $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, ein normiertes Maß $\nu \,|\, \mathfrak{B}_I$ mit*

$$\nu^T \leftrightarrow F_T \quad \textit{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}$$

existiert, ist dann, daß die Verteilungen F_S, $S \in \mathfrak{S}$, für jede endliche Teilmenge $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ von $\mathfrak{T}$ der Bedingung (V^*) genügen

Beweis. 1. Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung ist eine unmittelbare Folge von [2.2].

2. Ist $\mathfrak{T} = \{T_k : k \in Z\}$ und $S_k := \sum'_{1 \leq j \leq k} T_j$, so folgt umgekehrt bei ihrem Bestehen ebenfalls aus [2.2] die Existenz von Verteilungen $F_{S_k} \in \mathscr{F}_{S_k}$ mit

$$(F_{S_k})^{T_j} = F_{T_j} \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, k.$$

Nach [2.3] sind dann die Mengen

$$\{(F_{S_{k+l}})^{S_k} : l \in Z\} \subset \mathscr{F}_{S_k} \quad \text{für alle} \quad k \in Z$$

kompakt; nach dem Cantorschen Diagonalverfahren läßt sich also eine Teilfolge $((l_j))$ finden, derart, daß

$$(F_{S_{l_{k+j}}})^{S_k} \rightsquigarrow G_{S_k} \in \mathscr{F}_{S_k} \quad \text{für alle} \quad k \in Z.$$

Daraus folgt nach [2.3] zunächst

$$(G_{S_k})^{T_j} = F_{T_j} \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, k \tag{2}$$

und wegen $((F_{S_l})^{S_{k+1}})^{S_k} = (F_{S_l})^{S_k}$ für $l > k$ ferner

$$(G_{S_{k+1}})^{S_k} = G_{S_k} \quad \text{für alle} \quad k \in Z. \tag{3}$$

Die Existenz eines Maßes ν mit den geforderten Eigenschaften ist nun wegen (2) eine Folge von [4.1], da die Gesamtheit $\mathfrak{S} := \{S_k : k \in Z\}$ der dort geforderten Bedingung (*) genügt und die Verteilungen G_{S_k}, $k \in Z$, wegen (3) verträglich sind. ⌟

Mit transfiniten Hilfsmitteln läßt sich dieser Satz auf den Fall, daß $I \neq \emptyset$ und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}_0(I)$ völlig beliebig sind, ausdehnen:

Satz 4.3. *Die Behauptung von* [4.2] *gilt auch dann, wenn die Gesamtheit* $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}_0(I)$ *nicht als abzählbar vorausgesetzt wird.*

Beweis. 1. Ohne Einschränkung kann angenommen werden:

$$I = \cup\, \mathfrak{T} \quad \text{und} \quad \{\{i\} : i \in I\} \subset \mathfrak{T}.$$

Dann sind die Mengen

$$\mathscr{G}_S := \{G_S \in \mathscr{F}_S : (G_S)^{\{i\}} = F_{\{i\}} \text{ für alle } i \in S\}$$

als nach [2.3] kompakte Teilmengen eines nach [1.3] metrischen Raumes für jedes $S \in \mathfrak{P}_0(I)$ bikompakt.

2. Nun sei Φ die Gesamtheit aller Funktionen $\varphi \,|\, \mathfrak{P}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}_0(I)$ und $\varphi(P) \in \mathscr{G}_P$ für alle $P \in \mathfrak{P}$,

(b) $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{T}$ und $\varphi(T) = F_T$ für alle $T \in \mathfrak{T}$,

(c) die Verteilungen $\varphi(S)$, $S \in \mathfrak{S}$, genügen für jede endliche Teilmenge $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ von $\mathfrak{P}$ der Bedingung (V^*).

Die Gesamtheit Φ ist nach Voraussetzung nicht-leer und läßt sich teilweise ordnen durch die Festsetzung:

$$\varphi \,|\, \mathfrak{P} \prec \varphi' \,|\, \mathfrak{P}' \quad \text{genau dann, wenn}$$
$$\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}' \quad \text{und} \quad \varphi'(P) = \varphi(P) \quad \text{für alle} \quad P \in \mathfrak{P}.$$

3. Ist $\Phi' = \{\varphi_j \mid \mathfrak{P}_j : j \in J\}$ mit beliebigem $J \neq \emptyset$ eine linear geordnete Teilmenge von Φ, so wird durch

$$\mathfrak{P}' := \sum_{j \in J}^{\cdot} \mathfrak{P}_j \quad \text{und} \quad \varphi'(P) := \varphi_j(P) \quad \text{für} \quad P \in \mathfrak{P}_j$$

eindeutig eine Funktion $\varphi' \mid \mathfrak{P}'$ mit den Eigenschaften (a) — (c) definiert, die zugleich eine obere Schranke für Φ' bildet.

Die Gesamtheit Φ genügt demnach den Voraussetzungen des Zornschen Lemmas, enthält also ein maximales Element $\varphi_0 \mid \mathfrak{P}_0$. Es bleibt nun lediglich $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0(I)$ nachzuweisen; denn wegen der Verträglichkeit der Verteilungen $\varphi_0(P)$, $P \in \mathfrak{P}_0$, folgt die Behauptung dann sofort aus [4.1].

4. Für festes $S_0 \in \mathfrak{P}_0(I) - \mathfrak{P}_0$ und endliches $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}_0$ sei

$$\mathscr{G}(\mathfrak{S}) := \{G_{S_0} \in \mathscr{G}_{S_0} : \varphi_0(S),\ S \in \mathfrak{S},\ \text{und}\ G_{S_0}\ \text{erfüllen}\ (V^*)\}.$$

Da die Verteilungen $\varphi_0(S)$, $S \in \mathfrak{S}$, der Bedingung (V^*) genügen, existiert nach [2.2] eine Verteilung $F_{\cup\mathfrak{S}} \in \mathscr{F}_{\cup\mathfrak{S}}$ mit diesen Marginalverteilungen, so daß

$$(F_{\cup\mathfrak{S}})^{S_0 \cup \mathfrak{S}} \prod_{i \in S_0 - \cup\mathfrak{S}} F_{\{i\}} \in \mathscr{G}(\mathfrak{S}).$$

Daher sind die Mengen $\mathscr{G}(\mathfrak{S})$ nicht-leere und nach [2.4] abgeschlossene Teilmengen von $\mathscr{G}_{S_0}$, deren endliche Durchschnitte wegen

$$\prod_{1 \leq k \leq l}^{\cdot} \mathscr{G}(\mathfrak{S}_k) \supset \mathscr{G}\Big(\sum_{1 \leq k \leq l}^{\cdot} \mathfrak{S}_k\Big)$$

ebenfalls nicht-leer sind, so daß auf Grund der Bikompaktheit von $\mathscr{G}_{S_0}$ auch

$$\prod_{\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}_0\ \text{endlich}}^{\cdot} \mathscr{G}(\mathfrak{S}) \neq \emptyset.$$

Daraus folgt die Existenz einer Verteilung $G_{S_0} \in \mathscr{G}_{S_0}$ derart, daß

$$\varphi(P) := \varphi_0(P) \quad \text{für} \quad P \in \mathfrak{P}_0 \quad \text{und} \quad \varphi(S_0) := G_{S_0}$$

eine Funktion $\varphi \mid \mathfrak{P}$ mit $\varphi_0 \mid \mathfrak{P}_0 \prec \varphi \mid \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_0 \neq \mathfrak{P}$ definiert.

Die Annahme $\mathfrak{P}_0(I) - \mathfrak{P}_0 \neq \emptyset$ führt also zu einem Widerspruch. $\lrcorner$

Der in § 2 bewiesene Hauptsatz ist offenbar in diesem Satz enthalten.

Abschließend wird kurz die Frage der Auflösbarkeit bei beliebigem I behandelt. Beispielsweise besagt [4.1], daß jede Gesamtheit, die der dort geforderten Bedingung (*) genügt, auflösbar ist.

Allgemein läßt sich die Frage der Auflösbarkeit stets auf [3.5] zurückführen:

Satz 4.4. *Ist $I \neq \emptyset$ beliebig und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}_0(I)$, so ist $\mathfrak{T}$ genau dann auflösbar, wenn die Gesamtheiten $S\,\mathfrak{T}$ für alle $S \in \mathfrak{P}_0(I)$ auflösbar sind.*

Beweis. 1. Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung ergibt sich wie in Teil 1 des Beweises zu [3.1].

2. Zum Beweis der Umkehrung seien $F_T \in \mathscr{F}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, verträgliche Verteilungen und $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{T}$. Mit den Bezeichnungen

$$S_0 := \cup\,\mathfrak{S} \in \mathfrak{P}_0(I) \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}' := S_0\,\mathfrak{T},$$
$$F_{S'} := (F_T)^{S_0 T} \quad \text{für} \quad S' = S_0\,T \in \mathfrak{S}'$$

führen die Auflösbarkeit von $\mathfrak{S}'$ und die Verträglichkeit der Verteilungen $F_{S'}$,

$S' \in \mathfrak{S}'$, dann zu

$$\sum_{S' \in \mathfrak{S}'} \int_{R_{S'}} g_{S'} dF_{S'} \geqq 0 \quad \text{für} \quad g_{S'} \in \mathscr{C}_{S'} \quad \text{mit} \quad \sum_{S' \in \mathfrak{S}'} g_{S'} \geqq 0,$$

so daß wegen $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$ insbesondere

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}} \int_{R_S} g_S dF_S \geqq 0 \quad \text{für} \quad g_S \in \mathscr{C}_S \quad \text{mit} \quad \sum_{S \in \mathfrak{S}} g_S \geqq 0.$$

Da $\mathfrak{S}$ beliebig gewählt werden kann, existiert also nach [4.3] ein normiertes Maß $\nu | \mathfrak{B}_I$ mit $\nu^T \leftrightarrow F_T$ für alle $T \in \mathfrak{T}$.

Das ergibt die Auflösbarkeit von $\mathfrak{T}$.

Beispielsweise folgt aus diesem Satz ohne weiteres, daß zu verträglichen Verteilungen $F_{t,t+1} \in \mathscr{F}_{\{t,t+1\}}$, $t \in R$, stets ein zugehöriges normiertes Maß $\nu | \mathfrak{B}_R$ existiert.

§ 5. Verallgemeinerungen

Ist $\mathfrak{T} \neq \emptyset$ eine Gesamtheit von Teilmengen einer endlichen Menge $I \neq \emptyset$, so ergibt der Übergang von $\mathfrak{B} | R$ zu beliebigen σ-Körpern $\mathfrak{K}_i | M_i$, $i \in I$, mit dem Produktkörper $\mathfrak{K} | M$ das folgende Problem: Wann existiert zu normierten Maßen $\nu_T | \mathfrak{K}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, ein normiertes Maß $\nu | \mathfrak{K}$ mit

$$\nu^T = \nu_T \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}.$$

In einem besonderen Fall läßt sich diese Frage sofort beantworten:

Satz 5.1. *Es sei $\mathfrak{K} | M$ der Produktkörper der σ-Körper $\mathfrak{K}_i$ über $M_i \neq \emptyset$, $i \in I$ ($I \neq \emptyset$ endlich), und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$ mit disjunkten Mengen $T \in \mathfrak{T}$. Dann existiert zu normierten Maßen $\nu_T | \mathfrak{K}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, stets ein normiertes Maß $\nu | \mathfrak{K}$ derart, daß*

$$\nu^T = \nu_T \quad \textit{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}.$$

Beweis. Sind $\mu_i | \mathfrak{K}_i$ beliebige normierte Maße, so besitzt das Maß

$$\nu := \Big(\mathop{X}_{T \in \mathfrak{T}} \nu_T \Big) \times \Big(\mathop{X}_{i \notin \bigcup \mathfrak{T}} \mu_i \Big)$$

die geforderte Eigenschaft. $\square$

Das einfachste Beispiel einer reduzierten Gesamtheit nicht disjunkter Mengen lautet:

$$I = \{0, 1, 2\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T} = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}\}.$$

Wie sofort aus [2.2] folgt, genügt hier im Fall $\mathfrak{K}_i | M_i = \mathfrak{B} | R$ die Verträglichkeit der Maße ν_T, $T \in \mathfrak{T}$, für die Existenz von ν. Daß diese Aussage bereits im Fall separabler σ-Körper nicht allgemein richtig ist, zeigt das folgende Gegenbeispiel:

Ausgehend von einer Zerlegung von $J := (0, 1]$ in zwei disjunkte Mengen Q_i mit*

$$\lambda_* (Q_i) := \sup_{Q_i \supset B \in \mathfrak{B}} \lambda(B) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2 \tag{1}$$

(vgl. [2], Seite 70) werden auf $M_i := J$ die folgenden separablen σ-Körper definiert:

$$\mathfrak{K}_0 := J \mathfrak{B} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{K}_i := {}^B(\mathfrak{K}_0 \dotplus \{Q_i\}) = \{B_1 Q_1 \dotplus B_2 Q_2 : B_1, B_2 \in \mathfrak{K}_0\} \quad \text{für} \quad i = 1, 2.$$

* Im folgenden bezeichnet λ das Lebesguesche Maß.

Da aus der Gleichung $\sum_{i=1,2}^{\cdot} B_i Q_i = \sum_{i=1,2}^{\cdot} B_i' Q_i$ mit $B_i, B_i' \in \mathfrak{R}_0$ wegen (1) stets $\lambda(B_i \dotplus B_i') = 0$ folgt, wird durch

$$\mu_i(A_i) := \lambda(B_i), \quad \text{falls} \quad A_i = B_1 Q_1 \dotplus B_2 Q_2 \quad \text{mit} \quad B_i \in \mathfrak{R}_0$$

für $i = 1, 2$ eindeutig ein normiertes Maß auf $\mathfrak{R}_i$ definiert, das auf $\mathfrak{R}_0$ mit λ übereinstimmt.

Da die Gesamtheit

$$\{A_{0i} \in \mathfrak{R}_0 \times \mathfrak{R}_i : \{x \in J : (x, x) \in A_{0i}\} \in \mathfrak{R}_i\}$$

einen σ-Körper bildet, der alle Rechtecke $(A_0, A_i) \in \mathfrak{R}_0 \times \mathfrak{R}_i$ enthält, und daher mit $\mathfrak{R}_0 \times \mathfrak{R}_i$ übereinstimmt, werden für $i = 1, 2$ durch

$$\nu_{0i}(A_{0i}) := \mu_i(\{x \in J : (x, x) \in A_{0i}\}) \tag{2}$$

normierte Maße auf $\mathfrak{R}_0 \times \mathfrak{R}_i$ definiert, die die Marginalmaße

$$\nu_{0i}^{\{0\}} = \lambda \quad \text{und} \quad \nu_{0i}^{\{i\}} = \mu_i \tag{3}$$

besitzen, also insbesondere verträglich sind.

Ist nun ν ein normiertes Maß auf dem σ-Körper $\mathfrak{R} := \mathop{X}_{i \in J} \mathfrak{R}_i$ über der Grundmenge $M := (M_i, i \in I)$ mit diesen Marginalmaßen, so folgt aus (2) und (3):

$$\begin{aligned}
\nu(M) &\leqq \nu\Big(\sum_{i=1,2}^{\cdot} \{x \in M : x_0 \neq x_i\}\Big) + \nu\Big(\sum_{i=1,2}^{\cdot} \{x \in M : x_1 = x_2 \in Q_i\}\Big) \\
&\leqq \sum_{i=1,2} \nu(\{x \in M : x_0 \neq x_i\}) + \sum_{i=1,2} \nu(\{x \in M : x_i \in \bar{Q}_i\}) \\
&= \sum_{i=1,2} \nu_{0i}(\{x \in M : x_0 \neq x_i\}) + \sum_{i=1,2} \mu_i(\bar{Q}_i) = 0\,.
\end{aligned}$$

Die Annahme, es existiere eine Lösung, führt also zu einem Widerspruch.

Ohne Beweis sei bemerkt, daß die Aussage von [2.2] unter den folgenden topologischen Voraussetzungen richtig bleibt:

$$\left.\begin{array}{l} M_i \text{ lokal-kompakt und rational} \\ \mathfrak{R}_i = {}^{B}\{A_i \subset M_i : A_i \text{ offen}\} \\ \mu_T^{\{i\}} \text{ regulär} \end{array}\right\} \text{ für alle } \quad i \in T \in \mathfrak{T}\,.$$

Abschließend wird — unter Beschränkung auf den Fall $\mathfrak{R} \mid M = \mathfrak{B}_I \mid R_I$ — noch die folgende Verallgemeinerung untersucht:

An Stelle der Verteilungen $F_T \in \mathscr{F}_T$ sind beschränkte allgemeine Maße $\nu_T \mid \mathfrak{B}_T$ gegeben und statt einer Verteilung $F \in \mathscr{F}_I$ mit den Marginalverteilungen F_T ist ein beschränktes allgemeines Maß $\nu \mid \mathfrak{B}_T$ mit den Marginalmaßen ν_T gesucht.

Hier liegt es nahe, die Forderung $\nu \geqq 0$ durch die Forderung $\underline{\nu} \leqq \nu \leqq \bar{\nu}$ mit beliebig gewählten allgemeinen Maßen $\underline{\nu} \leqq \bar{\nu}$ auf $\mathfrak{B}_I$ zu ersetzen.

Dann läßt sich zusammenfassend zeigen:

Satz 5.2. *Es sei $I \neq \emptyset$ endlich und $\emptyset \neq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(I)$; ferner seien $\underline{\nu} \leqq \bar{\nu}$ allgemeine Maße auf $\mathfrak{B}_I$ mit $\underline{\nu}(R_I) < +\infty$ und $\bar{\nu}(R_I) > -\infty$ sowie $\nu_T \mid \mathfrak{B}_T$, $T \in \mathfrak{T}$, beschränkte allgemeine Maße. Dann ist die Bedingung*

$$(*) \qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{T \in \mathfrak{T}} \int_{R_T} g_T \, d\nu_T \leqq \int_{R_I} \Big(\sum_{T \in \mathfrak{T}} g_T\Big)^+ d\bar{\nu} - \int_{R_I} \Big(\sum_{T \in \mathfrak{T}} g_T\Big)^- d\underline{\nu} \\ \text{für alle Funktionen } g_T \in \mathscr{C}_T \end{array}\right.$$

notwendig und hinreichend für die Existenz eines beschränkten allgemeinen Maßes $\nu \mid \mathfrak{B}_I$ *mit den Eigenschaften*

$$\underline{\nu} \leqq \nu \leqq \bar{\nu} \quad \textit{und} \quad \nu^T = \nu_T \quad \textit{für alle} \quad T \in \mathfrak{T},$$

wenn mit den allgemeinen Maßen

$$\underline{\varrho}(B) := -\infty \quad \textit{und} \quad \bar{\varrho}(B) := +\infty \quad \textit{für} \quad \emptyset \neq B \in \mathfrak{B}_I$$

einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

(a) $\underline{\nu} = \underline{\varrho}$ *und* $\bar{\nu} = \bar{\varrho}$,

(b) $\underline{\nu}$ und $\bar{\nu}$ *beschränkt,*

(c) $\underline{\nu} = \underline{\varrho}$ *und* $\bar{\nu}$ *beschränkt bzw.* $\bar{\nu} = \bar{\varrho}$ *und* $\underline{\nu}$ *beschränkt.*

Beweis. 1. Im Fall (a) ist die Bedingung $(*)$ gleichwertig mit

$$\sum_{T \in \mathfrak{T}} \int_{R_T} g_T \, d\nu_T = 0 \quad \text{für} \quad g_T \in \mathscr{C}_T \quad \text{mit} \quad \sum_{T \in \mathfrak{T}} g_T = 0,$$

also nach [3] (Satz 2.1) mit der Verträglichkeit der allgemeinen Maße ν_T, $T \in \mathfrak{T}$. Die Behauptung folgt nun aus [3] (Satz 2.2).

2. Im Fall (b) folgt die Behauptung aus [3] (Satz 4.3); denn mit der Bezeichnung $\Rightarrow$ für die gleichmäßig beschränkte stellenweise Konvergenz wurde im Anschluß an den Beweis gezeigt, daß das Bestehen der Ungleichung in (N^*) für lineare Teilräume $\mathscr{G}_T$ von $\mathscr{M}(\mathfrak{B}_T)$ genügt, deren bezüglich $\Rightarrow$ abgeschlossene Hülle die zu einem Mengenkörper $\mathfrak{S}_T$ mit ${}^B\mathfrak{S}_T = \mathfrak{B}_T$ gehörigen charakteristischen Funktionen enthält.

3. Im Fall (c) kann ohne Einschränkung $\underline{\nu} = 0$ und $\bar{\nu} = \bar{\varrho}$ angenommen werden, da die Bedingung $(*)$ für ν_T, $T \in \mathfrak{T}$, und $\underline{\nu} \leqq \bar{\nu}$ stets mit der Bedingung $(*)$ für $-\nu_T$, $T \in \mathfrak{T}$, und $-\bar{\nu} \leqq -\underline{\nu}$ und bei beschränktem $\underline{\nu}$ außerdem mit der Bedingung $(*)$ für $\nu'_T := \nu_T - \underline{\nu}^T$, $T \in \mathfrak{T}$, und $\underline{\nu}' := 0 \leqq \bar{\nu} - \underline{\nu} =: \bar{\nu}'$ gleichwertig ist.

In diesem Fall ist die Bedingung gleichbedeutend mit

$$\sum_{T \in \mathfrak{T}} \int_{R_T} g_T \, d\nu_T \geqq 0 \quad \text{für} \quad g_T \in \mathscr{C}_T \quad \text{mit} \quad \sum_{T \in \mathfrak{T}} g_T \geqq 0.$$

Sie ist also jedenfalls notwendig. Umgekehrt folgt aus ihr

$$\nu_T \geqq 0 \quad \text{und} \quad \nu_T(R_T) = \gamma \quad \text{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}.$$

Im Fall $\gamma = 0$ kann $\nu = 0$ gewählt werden; andernfalls folgt die Existenz von ν durch Anwendung von [2.2] auf die normierten Maße $\gamma^{-1} \nu_T$, $T \in \mathfrak{T}$. $\square$

Literatur

[1] Doob, J. L.: Stochastic Processes. New York: Wiley 1953.
[2] Halmos, P. R.: Measure Theory. Princeton: Van Nostrand 1950.
[3] Kellerer, H. G.: Maßtheoretische Marginalprobleme. Math. Ann. **153**, 168—198 (1964).
[4] Kellerer, H. G.: Marginalprobleme für Funktionen. Math. Ann. **154**, 147—156 (1964).
[5] Kellerer, H. G.: Schnittmaß-Funktionen in mehrfachen Produkträumen. Math. Ann. **155**, 369—391 (1964).
[6] Loève, M.: Probability Theory. Princeton: Van Nostrand 1960.
[7] Varadarajan, V. S.: Measures on topological spaces (russisch). Mat. Sbornik n. Ser. **55**, 35—100 (1961).

Mathematisches Institut der Universität
8 München, Schellingstr. 2—8

(Eingegangen 6. September 1963)