Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
49, 211–220 (1979)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Relation entre théorème central-limite et loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach

B. Heinkel

Institut de Mathématique, Université Louis Pasteur,
7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex

Depuis plusieurs années les travaux de recherche relatifs aux variables aléatoires (v.a.) à valeurs dans les espaces de Banach se sont considérablement développées. Une partie importante de ces travaux a été consacrée au théorème central-limite et à la loi du logarithme itéré. Ces lois limites sont toutes deux des propriétés de compacité; d'autre part, on sait qu'une v.a. réelle vérifiant le théorème central-limite satisfait également à la loi du logarithme itéré. Ces deux observations donnent un sens naturel au problème: «Quand une v.a. à valeurs dans un espace de Banach B, vérifiant le théorème central-limite, satisfait-elle également à la loi du logarithme itéré?»

Jusqu'en 1978, on ne savait résoudre ce problème que pour des v.a. dont la norme est de carré intégrable. En 1978, nous l'avons résolu sous des hypothèses d'intégrabilité nettement plus faibles [1], [2]. Malgré le très net progrès que représentent les deux résultats de [1] et [2] par rapport aux énoncés antérieurs, il restait une petite classe de v.a. pour lesquelles on ne savait pas conclure quand la propriété de limite centrale implique la loi du logarithme itéré.

Nous nous proposons maintenant de donner la solution complète de ce problème de liaison entre théorème central-limite et loi du logarithme itéré.

Dans toute la suite, on ne considèrera que des v.a. X centrées, à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(B, \|\cdot\|)$, muni de sa tribu borélienne $\mathfrak{B}$; on dira pour simplifier que ces v.a. sont à valeurs dans B.

Si X est une telle v.a. et si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de copies indépendantes de X, on note pour tout entier n:

$$S_n(X)=\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad T_n(X)=n^{-\frac{1}{2}} S_n(X), \qquad V_n(X)=(1/a_n)\, S_n(X),$$

où, pour tout n:

$$a_n=(2nL_2\, n)^{\frac{1}{2}},$$

et L_2 désigne la fonction sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives, définie par:

$$\forall x \geqq e^e, \qquad L_2(x)=\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, x),$$
$$\forall x \in [0, e^e[, \qquad L_2(x)=1.$$

0044-3719/79/0049/0211/$02.00

Nous n'allons pas préciser ici en détails ce que sont le théorème central-limite et la loi du logarithme itéré. Nous nous contenterons de rappeler:

i) On dit qu'une v.a. X vérifie le théorème central-limite (ce que nous noterons dorénavant TCL) si la suite $(T_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi;

ii) On dit qu'une v.a. X vérifie la loi du logarithme itéré (ce que nous noterons dorénavant LLI) si:

$$P\{(V_n(X))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est } \|\cdot\|\text{-relativement compact}\}=1.$$

Les premiers résultats généraux qui précisaient les relations entre ces deux propriétés ont été les suivants:

Théorème 1 (G. Pisier [7], Théorème 4.3). *Soit X une v.a. à valeurs dans B, centrée, vérifiant le TCL et dont la norme est de carré intégrable. Alors X vérifie également la LLI.*

Théorème 2 (J. Kuelbs [5], Théorème 4.1). *Soit X une v.a. à valeurs dans B, centrée et telle que:*

i) $E(\|X\|^2)<+\infty$,

ii) $V_n(X)\xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

Alors X vérifie la LLI.

Ces deux énoncés étaient insuffisants pour décrire complètement la relation entre TCL et LLI; en effet G. Pisier [7] a donné des exemples de v.a. à valeurs dans $l^\alpha(2<\alpha<+\infty)$ dont la norme n'est pas de carré intégrable et qui vérifient à la fois le TCL et la LLI.

En 1978 nous avons établi successivement les deux énoncés suivants qui améliorent substantiellement les Théorèmes 1 et 2:

Théorème 3 [1]. *Soit X une v.a. à valeurs dans B, centrée, vérifiant le TCL et telle que:*

$$\exists\alpha\in]0,1[: E(\|X\|^2(L_2\|X\|)^{-\alpha})<+\infty.$$

Alors X vérifie également la LLI.

Théorème 4 [2]. *Soit X une v.a. à valeurs dans B, centrée, vérifiant le TCL et telle que:*

$$E(\|X\|^2 L_3\|X\|/L_2\|X\|)<+\infty,$$

où L_3 est définie de façon analogue à L_2.

Alors X vérifie également la LLI.

Mais malgré le progrès important qu'il représente par rapport aux Théorèmes 1 et 2, le Théorème 4 ne permet toujours pas de conclure pour n'importe quelle v.a. quand le TCL implique la LLI. En effet, il est bien connu qu'une condition nécessaire pour que X vérifie la LLI est:

$$E(\|X\|^2/L_2\|X\|)<+\infty.$$

En un certain sens, c'est la meilleure possible car G. Pisier et J. Zinn [8] ont montré que, jointe à quelques hypothèses additionnelles, elle est suffisante pour qu'une v.a. à valeurs dans un espace de Hilbert H vérifie la LLI.

Une meilleure adaptation au problème étudié de la méthode que nous avons introduite pour démontrer les Théorèmes 3 et 4 nous a finalement permis de résoudre complétement le problème de la liaison entre TCL et LLI, en établissant le résultat suivant:

Théorème 5. *Soit X une v.a. à valeurs dans B, centrée, vérifiant le TCL et telle que:*

$$E(\|X\|^2/L_2\|X\|) < +\infty.$$

Alors X vérifie également la LLI.

Nous allons donner la démonstration de ce résultat; elle est basée essentiellement sur le Lemme suivant dû à G. Pisier ([7], Théorème 3.1):

Lemme 1. 1) *L'espace vectoriel $CL_\infty(B)$ des v.a. X à valeurs dans B telles que:*

$$\sup_n E\|T_n(X)\| < +\infty,$$

muni de la norme:

$$CL(X) = \sup_n E\|T_n(X)\|,$$

est un espace de Banach.

2) *L'espace vectoriel $LI_\infty(B)$ des v.a. X à valeurs dans B telles que:*

$$E\sup_n \|V_n(X)\| < +\infty,$$

muni de la norme:

$$LI(X) = E\sup_n \|V_n(X)\|,$$

est un espace de Banach.

3) *Une v.a. X centrée, à valeurs dans B, vérifie le TCL si et seulement si pour tout ε strictement positif il existe une v.a. étagée Y à valeurs dans B, centrée, telle que:*

$$CL(X-Y) < \varepsilon.$$

4) *Une v.a. X centrée, à valeurs dans B, vérifie la LLI si et seulement si pour tout ε strictement positif il existe une v.a. étagée Y à valeurs dans B, centrée, telle que:*

$$LI(X-Y) < \varepsilon.$$

Remarque. En fait la démonstration des points 3) et 4) précise la manière de construire Y.

Soit en effet une v.a. X définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, à valeurs dans B, centrée, vérifiant le TCL (resp. la LLI). Si l'on considère une suite croissante $(\mathscr{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus finies de $\mathscr{F}$, engendrant $\mathscr{F}$, on a:

$$\lim_{k\to+\infty} CL(X-E(X\mid\mathscr{F}_k))=0 \,(\text{resp.} \lim_{k\to+\infty} (X-E(X\mid\mathscr{F}_k))=0).$$

Désignons par φ une fonction de Young telle que:

$$\lim_{t\to+\infty} (t^{-2} L_2 t)\,\varphi(t)=1.$$

L'espace d'Orlicz L^φ des v.a. Y à valeurs dans B telles qu'il existe $a>0$ avec:

$$E(\varphi(\|Y\|/a))<+\infty$$

est un espace de Banach séparable.

Si X désigne à présent la v.a. considérée dans le Théorème 5, on vérifie aisément, qu'avec les notations précédentes, la suite $(E(X|\mathscr{F}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers X dans L^φ, muni de la norme de Luxemburg.

Si nous appliquons à présent le théorème du graphe fermé comme le fait G. Pisier dans la démonstration du Théorème 1, nous remarquons que la preuve du Théorème 5 se réduit à établir:

Proposition 2. *Si X est une v.a. centrée, à valeurs dans B telle que:*

1) $\sup_n E\|T_n(X)\|<+\infty$,

2) $E(\|X\|^2/L_2\|X\|)<+\infty$,

alors on a également:

$$E\sup_n \|V_n(X)\|<+\infty.$$

Démontrons cette Proposition:

Il est bien connu (Cf. [7], Proposition 2.2), que:

$$\sup_n \|V_n(X)\|<+\infty \text{ p.s.} \Rightarrow E\sup_n \|V_n(X)\|<+\infty. \tag{$*$}$$

Il suffit donc de démontrer la propriété $(*)$.

Nous nous restreindrons naturellement au cas où X est symétrique, le cas général s'en déduisant par symétrisation.

Notons $\chi(A)$ l'indicatrice de l'ensemble A et posons pour tout entier n:

$$\eta_1^n = X_n\,\chi(\|X_n\|\leqq n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^{-\frac{1}{2}}),$$
$$\eta_2^n = X_n\,\chi(n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^{-\frac{1}{2}}<\|X_n\|<(nL_2 n)^{\frac{1}{2}}),$$
$$\eta_3^n = X_n\,\chi(\|X_n\|\geqq(nL_2 n)^{\frac{1}{2}}).$$

La démonstration de la Proposition 2 va se borner à établir les 3 propriétés suivantes:

i) $P\left\{\sup_{n=1}^{\infty}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\eta_1^j\right\| \Big/ a_n\right) < +\infty\right\} = 1,$

ii) $\lim_{n\to+\infty}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\eta_2^j\right\| \Big/ a_n\right) = 0$ p.s.,

iii) $\lim_{n\to+\infty}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\eta_3^j\right\| \Big/ a_n\right) = 0$ p.s.

La propriété i) est la Proposition 4.3 de [7]; nous n'en donnerons donc pas la démonstration.

Remarquons d'autre part que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} P\{\|\eta_3^j\| \neq 0\} \leqq CE(\|X\|^2/L_2\|X\|).$$

D'où la propriété iii) par application du lemme de Borel-Cantelli. Il reste donc à établir ii).

Comme c'était déjà le cas pour la démonstration des Théorèmes 3 et 4, la preuve de cette propriété ii) est basée sur une adaptation appropriée des méthodes introduites par J. Kuelbs et J. Zinn [6] pour comparer loi forte et loi faible des grands nombres pour des v.a. vectorielles. Nous reprendrons d'ailleurs une partie des notations de leur article.

Comme il n'y a pas d'ambiguité, on écrira dorénavant η_n la suite η_2^n, pour simplifier les notations.

De plus, pour tout entier n:

$$\theta_n = (2^{n+1} L_2\, 2^{n+1})^{\frac{1}{2}}, \qquad I(n) = \{2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}\}.$$

Remarquons tout d'abord la propriété suivante:

Lemme 3.

$$\lim_{n\to\infty} (\|\sum_{j\in I(n)} \eta_j\|/\theta_n) = 0 \text{ p.s.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\eta_j\right\| \Big/ a_n\right) = 0 \text{ p.s.}$$

Posons à cet effet:

$$y_n = (\sum_{j\in I(n)} \eta_j/\theta_n), \qquad z_n = (1/\theta_n) \sup_{j\in I(n)} \left\|\sum_{k=2^n+1}^{j} \eta_k\right\|.$$

D'après le Lemme de Borel-Cantelli, on a:

$$\forall t > 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P\{\|y_n\| > t\} < +\infty.$$

D'autre part, par symétrie:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall t > 0, \qquad P\{z_n > t\} \leqq 2P\{\|y_n\| > t\}.$$

D'où l'on déduit, également par application du Lemme de Borel-Cantelli:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \text{ p.s.}$$

Remarquons à présent l'égalité:

$$(1/\theta_n)\sum_{j=1}^{2^{n+1}}\eta_j=y_n+2^{-\frac{1}{2}}c_1\,y_{n-1}+\ldots+2^{-\frac{n}{2}}c_n\,y_0+2^{-\frac{n+1}{2}}c_{n+1}\,\eta_1,$$

où les c_i sont des constantes positives, majorées par 1.

Ceci implique:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{2^{n+1}}\eta_j/\theta_n\right)=0 \text{ p.s.}$$

Soit à présent un entier k, $2^n\leqq k<2^{n+1}$.

On a:

$$\left(\left\|\sum_{j=1}^{k}\eta_j\right\|\Big/a_k\right)\leqq(1/\theta_{n-1})\left\|\sum_{j=1}^{2^n}\eta_j\right\|+2z_n.$$

D'où l'on déduit:

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\left\|\sum_{j=1}^{k}\eta_j\right\|\Big/a_k\right)=0 \text{ p.s.}$$

Le deuxième outil fondamental dans la démonstration de la Proposition 2 est le suivant:

Lemme 4. *Si l'on pose pour tout entier n:*

$$\Lambda(n)=\theta_n^{-2}\sum_{j\in I(n)}E\|\eta_j\|^2,$$

On a:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda^2(n)<+\infty.$$

Démontrons ce résultat:

Posons tout d'abord pour simplifier:

$$Y_j=\eta_j\,\chi(j^{\frac{1}{2}}(L_2 j)^{-\frac{1}{2}}<\|\eta_j\|\leqq j^{\frac{1}{2}}),$$

$$Z_j=\eta_j\,\chi(j^{\frac{1}{2}}<\|\eta_j\|<(j\,L_2 j)^{\frac{1}{2}}).$$

On peut évidemment écrire, pour tout entier n:

$$\Lambda(n)=\Lambda_1(n)+\Lambda_2(n),$$

où:

$$\Lambda_1(n)=\theta_n^{-2}\sum_{j\in I(n)}E\,\|Y_j\|^2,\qquad \Lambda_2(n)=\theta_n^{-2}\sum_{j\in I(n)}E\,\|Z_j\|^2.$$

Comme pour tout n:

$$\Lambda^2(n)\leqq 2\Lambda_1^2(n)+2\Lambda_2^2(n),$$

il suffira d'établir:

$$\forall i=1,2, \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_i^2(n)<+\infty.$$

Commençons par traiter le cas $i=1$.

Toute la démonstration repose sur l'inégalité:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j \in I(n)} (1/j) \int_0^1 x\,dx \leqq 1. \tag{1}$$

(Remarquons au passage que des inégalités plus élaborées de ce type ont été utilisées avec succès par S. Karlin et Z. Ziegler [4] pour établir des inégalités entre moments de v.a. réelles.)

La suite $(T_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée en probabilité, on sait (cf. [3]) qu'il existe une constante strictement positive c telle que:

$$\forall x>0, \quad P\{\|X\|>x\} \leqq c\,x^{-2}.$$

De l'inégalité (1), nous déduisons:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j \in I(n)} \int_0^1 x^3\, c(x j^{\frac{1}{2}})^{-2}\,dx \leqq c,$$

d'où encore:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j \in I(n)} \int_0^1 x^3\, P\{(2^{n+1})^{-\frac{1}{2}} \|Y_j\|>x\}\,dx \leqq c, \tag{2}$$

et finalement:

$$\sum_{j \in I(n)} E(\|Y_j\|^4/2^{2n+2}) \leqq c/4.$$

Appliquons à présent l'inégalité de Schwarz aux termes de la somme $\Lambda_1(n)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(n) &\leqq \sum_{j \in I(n)} (1/L_2 j)\{P(\|X_j\|>j^{\frac{1}{2}}(L_2 j)^{-\frac{1}{2}})\, E(\|Y_j\|^4/2^{2n+2})\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq (c^{\frac{1}{2}}/2)\Big(\sum_{j \in I(n)} (L_2 j)^{-2} P(\|X_j\|>j^{\frac{1}{2}}(L_2 j)^{-\frac{1}{2}})\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'où:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_1^2(n) \leqq K E(\|X\|^2/L_2\|X\|).$$

Traitons à présent le cas $i=2$. Nous obtenons de façon analogue à ce qui précède:

$$\sum_{j \in I(n)} L_2 j \int_0^1 x^3\, P\{(\|Z_j\|/\theta_n)>x\}\,dx \leqq c. \tag{2'}$$

D'où:

$$\sum_{j \in I(n)} L_2 j\, E(\|Z_j\|^4/\theta_n^4) \leqq c/4.$$

Par application de l'inégalité de Schwarz:

$$\Lambda_2(n) \leqq \sum_{j\in I(n)} (P(\|X_j\| > j^{\frac{1}{2}})/L_2 j)^{\frac{1}{2}} \{E(\|Z_j\|^4/\theta_n^4) L_2 j\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqq (c^{\frac{1}{2}}/2)(\sum_{j\in I(n)} P(\|X_j\| > j^{\frac{1}{2}})/L_2 j)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_2^2(n) \leqq LE(\|X\|^2/L_2 \|X\|),$$

et ceci termine la démonstration du Lemme 4.

Un nombre réel strictement positif δ étant fixé, on pose pour tout entier n et tout $j\in I(n)$:

$$h_j = \eta_j \chi(\|\eta_j\| \leqq \Lambda^{\frac{1}{4}}(n)\,\theta_n\}, \qquad k_j = \eta_j \chi(\|\eta_j\| > (\delta\theta_n)/4), \qquad l_j = \eta_j - k_j - h_j;$$

de plus:

$$U_n^1 = \|\sum_{j\in I(n)} h_j\|, \qquad U_n^2 = \|\sum_{j\in I(n)} k_j\|, \qquad U_n^3 = \|\sum_{j\in I(n)} l_j\|.$$

En vertu du Lemme de Borel-Cantelli, on aura établi la propriété ii) si l'on montre que:

$$\forall\, \delta > 0, \qquad \forall\, j = 1, 2, 3, \text{ on a: } \quad (j) \sum_{n=1}^{\infty} P\{U_n^j > \delta\theta_n\} < +\infty.$$

Démontrons ces trois propriétés.

Démonstration du point (1)

Nous noterons pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$b_n = \delta\,\theta_n \Lambda(n)^{\frac{1}{8}}, \quad c_n = \Lambda(n)^{\frac{1}{8}}/\delta, \quad \delta_n = (\theta_n \delta/2 b_n) = \Lambda(n)^{-\frac{1}{8}}/2.$$

On aura alors pour tout $j\in I(n)$:

$$\|h_j\| \leqq \Lambda(n)^{\frac{1}{4}}\,\theta_n = b_n c_n.$$

On en déduit par application de l'inégalité exponentielle de J. Kuelbs ([5], Lemme 2.1):

$$P\{U_n^1 \geqq \delta\theta_n\} = P\{(U_n^1/2b_n) \geqq \delta_n\}$$
$$\leqq \exp\left(-\delta_n^2 + \frac{\delta_n^2}{2}\exp(\delta_n c_n) \sum_{j\in I(n)} \frac{E(\|h_j\|^2)}{b_n^2} + \frac{\delta_n}{2b_n} EU_n^1\right).$$

Par application de l'hypothèse 1) de la Proposition 2 et de la symétrie de X, nous obtenons:

$$\sup_{1}^{\infty}(2^{-\frac{n}{2}} EU_n^1) < +\infty.$$

D'où:

$$\lim_{n\to+\infty} (1/\theta_n) EU_n^1 = 0.$$

Il existe donc un entier k_1, tel que pour tout $k \geqq k_1$:

$$(\delta_k/2b_k) EU_k^1 < \delta_k^2/4.$$

D'autre part:

$$(1/b_n^2) \sum_{j\in I(n)} E\|h_j\|^2 \leqq \Lambda(n)^{\frac{3}{4}}/\delta^2.$$

Il existe donc n_1 tel que $n \geqq n_1$ entraîne:

$$P\{U_n^1 \geqq \delta\theta_n\} \leqq \exp -(\delta_n^2/2),$$

d'où:

$$\sum_{n=n_1}^{+\infty} P\{U_n^1 \geqq \delta\theta_n\} \leqq \sum_{n=n_1}^{\infty} \exp -(1/8\,\Lambda(n)^{\frac{1}{4}}) \leqq d \sum_{n=n_1}^{\infty} \Lambda^2(n) < +\infty.$$

Démonstration du point (2)

L'hypothèse: $E(\|X\|^2/L_2\|X\|) < +\infty$ implique:

$$\forall\,\delta > 0: \sum_{n=1}^{\infty} P\{\|X_n\| > (\delta/4)(n L_2 n)^{\frac{1}{2}}\} < +\infty.$$

Pour presque tout ω, il existe donc un entier $N(\omega)$, tel que:

$$\forall j > N(\omega), \qquad k_j(\omega) = 0.$$

Pour presque tout ω, il existe donc également un entier $N'(\omega)$ tel que:

$$\forall n > N'(\omega), \qquad \|U_n^2(\omega)\| = 0.$$

D'où la propriété (2) par indépendance.

Démonstration du point (3)

Remarquons déjà qu'il existe un entier n_1, tel que pour tout $n \geqq n_1$ on ait:

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}(n)\,\theta_n < (\delta/4)\,\theta_n.$$

Nous en déduisons que pour tout $n \geqq n_1$:

$\{U_n^3 > \delta\theta_n\} \subset \{$il existe au moins 4 indices $j \in I(n)$, tels que: $\|l_j\| > \theta_n \Lambda^{\frac{1}{4}}(n)\}$.
La propriété (3) découle alors de la majoration:

$$\forall n \geqq n_1,$$

$$P\{U_n^3 > \delta\theta_n\} \leqq P\{\text{il existe au moins 4 indices } j \in I(n), \text{ tels que: } \|l_j\| > \theta_n \Lambda^{\frac{1}{4}}(n)\}$$

$$\leqq \Big(\sum_{j \in I(n)} P\{\|l_j\| > \theta_n \Lambda^{\frac{1}{4}}(n)\}\Big)^4 \leqq \Lambda^2(n).$$

Ceci termine la démonstration de la Proposition 2 et également celle du Théorème 5.

Remarque. Nous venons d'appendre par une lettre de J. Kuelbs, que lui-même et J. Zinn ont découvert indépendamment notre Théorème 5. Leur démonstration figurera dans un article actuellement en préparation.

Références

1. Heinkel, B.: Relation between central-limit theorem and law of the iterated logarithm in Banach spaces. Probability in Banach spaces 2 - Oberwolfach 1978. Lecture Notes in Math. **709**, 145–150. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979
2. Heinkel, B.: Sur la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **287**, 839–842 (1978)
3. Jain, N.C.: Central-limit theorem in a Banach space. Probability in Banach spaces – Oberwolfach 1975. Lecture Notes in Math. **526**, 113–130. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
4. Karlin, S., Ziegler, Z.: Some applications to inequalities of the method of generalized convexity. J. Analyse Math. **30**, 281–303 (1976)
5. Kuelbs, J.: Kolmogorov law of the iterated logarithm for Banach space valued random variables. Illinois J. Math. **21–4**, 784–800 (1977)
6. Kuelbs, J., Zinn, J.: Some stability results for vector valued random variables. Ann. Probability **7**, 75–84 (1979)
7. Pisier, G.: Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz 1975–76, exposés n^{os} 3 et 4
8. Pisier, G., Zinn, J.: On the limit theorems for random variables with values in the space L_p ($2 \leqq p < +\infty$). Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **41**, 289–304 (1978)

Reçu le 16 Octobre 1978, sous forme révisée le 6 Avril 1979