Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
44, 261–268 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Régularité et continuité des processus

Jean-Michel Bismut

Dept. Math., Université Paris-Sud (Orsay), F-91405 Orsay

Summary. The purpose of this paper is to prove that any right continuous process with left hand limits, which is of class (D) and regular is the optional projection of a continuous process.

Baxter et Chacon [1] et Meyer [5] ont mis une topologie sur l'ensemble des temps d'arrêt d'un espace probabilisé filtré.

Ils considèrent en effet l'ensemble C des processus continus bornés, et ils mettent sur l'ensemble $\mathscr{T}$ des temps d'arrêt la topologie la moins fine rendant continues les applications

$$X \in C: \; T \to E(X_T)$$

Ils montrent alors que si X est un processus optionnel cadlag borné régulier, i.e. tel que, si ^{3} est l'opérateur de projection prévisible

$$^3X = X^- \tag{1}$$

alors l'application

$$T \to E(X_T) \tag{2}$$

est encore continue pour cette topologie.

Nous allons montrer ici une «réciproque» de ce résultat, à savoir que tout processus X optionnel cadlag de classe (D) régulier est projection optionnelle d'un processus Y continu tel que

$$E(\sup_{0 \leqq t \leqq +\infty} |Y_t|) < +\infty. \tag{3}$$

Ce résultat est à rapprocher des résultats obtenus dans [2, 3], sur l'existence d'un temps d'arrêt $T \in \mathscr{T}$ maximisant sur $\mathscr{T}$ la fonction $T' \to E(X_{T'})$ quand X est un processus optionnel cadlag de la classe (D) régulier.

Nous utilisons pour cela des techniques d'analyse fonctionnelle sur des espaces de Banach exposées dans le livre de Schaeffer [7].

Plus précisément, on montre, en utilisant un théorème de Krein-Smulian, que la continuité de $T \to E(X_T)$ sur l'ensemble des temps d'arrêt flous au sens de Meyer [5] implique le résultat cherché.

0044-3719/78/0044/0261/$01.60

Ces résultats ont été étendus par Emery dans [8] aux processus optionnels quelconques avec une techniquetrès simple. La difficulté essentielle vient en effet ici du fait qu'on demande que Y soit continu.

L'auteur remercie P.A. Meyer pour ses observations, qui ont en particulier permis une simplification de la preuve de la Proposition 1.

Préliminaires

$(\Omega, F, P; (F_t)_{t \geqq 0})$ est un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles.

Tous les processus seront définis sur $[0, +\infty]$. On ajoutera à $[0, +\infty]$ un deuxième infini, noté ∞^+, $> +\infty$, où les temps d'arrêt peuvent s'évanouir.

$\mathscr{T}$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty]$.

C (resp. D) est l'ensemble des processus X continus (resp. cadlag) sur $[0, +\infty]$, tels que

$$\|X\| = E(\sup_{0 \leqq t \leqq +\infty} |X_t|) < +\infty. \tag{4}$$

C et D sont des espaces de Banach. Soient C' et D' les espaces duaux de C et D. Les parties bornées non vides de C' et D' sont alors $\sigma(C', C)$ ou $\sigma(D', D)$ relativement compactes. De plus C se plongeant isométriquement dans D, l'application qui à tout élément de D' associe sa restriction à C est une application linéaire surjective de norme 1.

On a alors un résultat de [4].

Théorème 1. *Pour $\mu \in D'$, on peut trouver un et un seul couple (A, B) de processus continus à droite à variation finie tels que:*

a) *B ne charge pas 0 et ne charge qu'une famille dénombrable de graphes de variables aléatoires.*

b) $$\left\| \int_0^{+\infty} |dA| + \int_0^{+\infty} |dB| \right\|_{L_\infty} = \|\mu\|. \tag{5}$$

c) *Pour tout $X \in D$, on a:*

$$\langle \mu, X \rangle = E\left(\int_0^{+\infty} X_t dA + X_t^- dB_t \right) \tag{6}$$

Preuve. En effet si μ est $\geqq 0$, l'existence de A et B croissants uniques à variation dans L_∞ et vérifiant les conditions a) et c) resulte de [4] Théorème 27 (p. 380).

On vérifie alors trivialement la condition b). Pour $\mu \in D'$ quelconque, on décompose μ en une différence

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

comme en [4] p. 380, en identifiant μ à une mesure sur la tribu W de [4], et μ^+ et μ^- à la décomposition de Jordan de μ sur W.

Si A^+, B^+, A^-, B^- sont les processus croissants associés à μ^+ et μ^-, si on pose

$$A = A^+ - A^-$$
$$B = B^+ - B^- \tag{7}$$

on a vérifié les conditions a) et c).

Si $|\mu|$ est l'élément de D' défini sur les $X \geqq 0$ de D par

$$\langle |\mu|, X \rangle = \sup_{\substack{|Y| \leqq X \\ Y \in D}} \langle \mu, Y \rangle \tag{8}$$

on a nécessairement:

$$\| |\mu| \| = \|\mu\|. \tag{9}$$

Or par le lemme p. 381 de [4], on a:

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-. \tag{10}$$

Donc:

$$\| |\mu| \| = \left\| \int_0^{+\infty} (dA^+ + dA^-) + \int_0^{+\infty} (dB^+ + dB^-) \right\|_{L_\infty}. \tag{11}$$

Or:

$$A = A^+ - A^-$$
$$B = B^+ - B^- \tag{12}$$

sont p.s. les décompositions de Jordan de A et B sur $\mathscr{B}(R^+)$. En effet, par (8), on a:

$$\langle |\mu|, 1 \rangle \leqq E \int_0^{+\infty} (|dA| + |dB|) \tag{13}$$

et comme

$$\langle |\mu|, 1 \rangle = \langle \mu^+, 1 \rangle + \langle \mu^-, 1 \rangle \tag{14}$$

on a:

$$E\left(\int_0^{+\infty} (dA^+ + dA^-) + \int_0^{+\infty} dB^+ + dB^- \right) \leqq E \int_0^{+\infty} |dA| + |dB| \tag{15}$$

ce qui implique bien que $dA = dA^+ - dA^-, dB = dB^+ - dB^-$. Donc:

$$\| |\mu| \| = \left\| \int_0^{+\infty} |dA| + |dB| \right\|_{L_\infty}. \tag{16}$$

(5) résulte alors de (9) et (16).

L'unicité résulte du Théorème 27 de [4] (p. 380) $\square$.

On a de même:

Théorème 2. *Pour tout $\mu \in C'$, il existe un processus à variation finie unique A tel que:*

a) $\|\mu\| = \|\int |dA|\,\|_{L_\infty}$. (17)

b) *Pour tout $X \in C$, on a:*

$$\langle \mu, X \rangle = E \int_0^{+\infty} X\,dA. \tag{18}$$

Preuve. On procède comme pour le Théorème 27 de [4] (p. 380) en raisonnant sur la tribu $F \otimes \mathscr{B}([0, +\infty])$. □

Le résultat d'existence

^{1} désigne l'opérateur de projection optionnelle. On a alors le résultat suivant, qui est l'objet de l'article:

Théorème 3. *Soit Y un processus optionnel cadlag sur $[0, +\infty]$ de la classe (D), tel que sur $]0, +\infty]$, on ait:*

$$^3Y = Y^-. \tag{19}$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Z \in C$ tel que:

$$Y = {}^1Z \tag{20}$$

$$\|Z\| \leqq \sup_{T \in \mathscr{T}} E|Y_T| + \varepsilon. \tag{20'}$$

Preuve. On démontre le résultat en plusieurs étapes. Tout $\mu \in C'$ s'exprime à l'aide d'un processus A par la formule (18). A $\mu \in C'$, on peut associer canoniquement $f(\mu) \in D'$, en posant, pour $X \in D$:

$$\langle f(\mu), X \rangle = E \int_0^{+\infty} X\,dA \tag{21}$$

Soit $\tilde{C}'$ le sous-espace de C' formé des $\mu \in C'$ tels que, pour tout $X \in C$ borné, on ait:

$$\langle f(\mu), X \rangle = \langle f(\mu), {}^1X \rangle \tag{22}$$

i.e.

$$E \int_0^{+\infty} X\,dA = E \int_0^{+\infty} {}^1X\,dA. \tag{23}$$

Comme la tribu engendrée par les éléments de C est égale à $F \otimes B([0, +\infty])$, pour que $\mu \in \tilde{C}'$, il faut et il suffit que A soit optionnel. On a alors:

Proposition 1. *$\tilde{C}'$ est $\sigma(C', C)$ fermé dans C'.*

Preuve. On raisonne comme Meyer dans [5]. En effet on vérifie que pour que $\mu \in \tilde{C}'$, il faut et il suffit que pour toute variable aléatoire bornée a orthogonale à F_t, et pour toute fonction b continue à support dans $[0, t[$, si $X \in C$ est défini par $X_t(\omega) = a(\omega)\, b(t)$, on ait $\langle \mu, X \rangle = 0$. $\tilde{C}'$ est donc $\sigma(C', C)$ fermé. □

Soit $\tilde{C}$ l'ensemble des $X \in C$ tels que ${}^1X = 0$. $\tilde{C}$ est trivialement fermé dans C, donc $\sigma(C, C')$ fermé. De plus $\tilde{C}$ est l'orthogonal de $\tilde{C}'$. En effet $\tilde{C}$ est contenu dans l'orthogonal de $\tilde{C}'$. De plus si $X \in C$ est tel que pour tout $\mu \in \tilde{C}'$, $\langle \mu, X \rangle = 0$, pour tout temps d'arrêt T à valeurs dans $[0, +\infty] \cup \{\infty^+\}$ en considérant $\mu \in \tilde{C}'$ associé par (18) à $A = 1_{t \geqq T}$, on a

$$\langle \mu, X \rangle = E[1_{T < \infty^+} X_T] = 0 \tag{24}$$

et par le Théorème de section optionnel, ${}^1X = 0$. On en déduit:

Proposition 2. *$\tilde{C}'$ s'identifie au dual de l'espace de Banach $C/\tilde{C}$, et la topologie $\sigma(\tilde{C}', C/\tilde{C})$ coïncide avec la topologie induite par $\sigma(C', C)$ sur $\tilde{C}'$.*

Preuve. Ces résultats sont des conséquences du corollaire 1 du Théorème IV.4.1. de [7]. □

Soit $\tilde{D}'$ l'ensemble des $\mu \in D'$ tels que pour tout X borné$\in D$ on ait:

$$\langle \mu, X \rangle = \langle \mu, {}^1X \rangle. \tag{25}$$

$\tilde{D}'$ est $\sigma(D', D)$ fermé dans D'. On a alors:

Proposition 3. *Pour que $\mu \in \tilde{D}'$, il faut et il suffit que dans la représentation* (6) *de μ, A soit optionnel et B soit prévisible.*

Preuve. Soit U une variable aléatoire bornée orthogonale à F_s^-, La projection optionnelle de $1_{t<s} U$ est nulle. Donc de (25), on tire que si $\mu \in \tilde{D}'$

$$E((A_s^- + B_s)\, U) = 0 \tag{26}$$

$A_s^- + B_s$ est F_s^--mesurable. Donc $A_t^- + B_t$ est adapté, et en conséquence $B_t - B_t^-$ est adapté. Comme B est purement discontinu, B est adapté, et en conséquence A est aussi adapté.

Soit V_t une martingale bornée projection optionnelle de V_∞. De (25), on tire

$$E \int_0^{+\infty} V_t\, dB_t = E \int_0^{+\infty} V_t^-\, dB_t. \tag{27}$$

Par la démonstration du Théorème VII-T 49 de [6], B est prévisible. □

Soient $B_{C'}, B_{\tilde{C}'}, B_{D'}, B_{\tilde{D}'}$ les boules unités de $C', \tilde{C}', D', \tilde{D}'$. Soit Z un processus cadlag optionnel de la classe (D).

Proposition 4. *L'application*

$$\mu \to \langle \mu, z \rangle = E \int_0^{+\infty} (Z_t\, dA + Z_t^-\, dB)$$

est $\sigma(D', D)$ continue sur $B_{\tilde{D}'}$.

Preuve. On peut supposer $Z \geqq 0$. On pose $Z^m = Z \wedge m$. Alors $Z^m \in D$. Il suffit donc de montrer que $\mu \to \langle \mu, Z \rangle$ est limite uniforme sur $B_{\tilde{D}'}$ des applications $\mu \to \langle \mu, Z^m \rangle$.

Comme Z est de la classe (D), $\sup_{T \in \mathscr{T}} E|Z_T| < +\infty$ et de plus les variables aléatoires $\{Z_T\}_{T \in \mathscr{T}}$ et $\{Z_T^-\}$ (pour $T \in \mathscr{T}$ prévisible) sont uniformément intégrables. Pour $\mu \in B_{\tilde{D}'}$, soit $\mu = \mu^+ - \mu^-$ sa décomposition de Jordan, $|A|$ et $|B|$ les processus associés par (6) à $|\mu|$. Par la Proposition 3 et par le Théorème 1, $|A|$ est optionnel et $|B|$ est prévisible. On pose:

$$\begin{aligned} T_s &= \inf\{t; |A_t| \geqq s\} \\ T_s' &= \inf\{t; |B_t| \geqq s\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Pour tout s, T_s est un temps d'arrêt, et T_s' est un temps d'arrêt prévisible. Alors

$$\begin{aligned} |\langle \mu, Z - Z^m \rangle| &\leqq \langle |\mu|, Z - Z^m \rangle \\ &= E \int_0^1 (1_{T_s \leqq +\infty} 1_{Z_{T_s} > m} Z_{T_s} + 1_{T_s' \leqq +\infty} 1_{Z^-_{T_s'} > m} Z^-_{T_s'})\, ds \end{aligned} \tag{29}$$

De l'intégrabilité uniforme des Z_{T_s} et $Z^-_{T_s'}$, on tire bien que le membre de droite de (29) tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$. □

Y désigne maintenant un processus vérifiant les conditions énoncées au Théorème 3. On a:

Proposition 5. *L'application qui à $\mu \in \tilde{C}'$ associe*

$$\langle f(\mu), Y \rangle = E \int_0^{+\infty} Y_t\, dA$$

est $\sigma(C', C)$ continue sur $B_{\tilde{C}'}$.

Preuve. Soit U un ultrafiltre sur $B_{\tilde{C}'}$. C'est un filtre sur $B_{C'}$, qui converge vers $\lambda \in B_{\tilde{C}'}$ pour la topologie $\sigma(C', C)$, puisque $B_{\tilde{C}'}$ (ainsi que $B_{C'}$) est $\sigma(C', C)$ compacte. Or $f(U) \subset B_{\tilde{D}'}$. Donc $f(U)$ est une base d'ultrafiltre dans $B_{\tilde{D}'}$, qui a une limite $\bar{\lambda}$ dans $B_{\tilde{D}'}$, puisque $B_{\tilde{D}'}$ est $\sigma(\tilde{D}', D)$ compacte. La restriction de $\bar{\lambda}$ à C coincide nécessairement avec λ. De plus par la Proposition 4, on a

$$\langle \bar{\lambda}, Y \rangle = \lim_U \langle f(\mu), Y \rangle \tag{30}$$

Soit (A, B) les processus associés à $\bar{\lambda}$ par (6). Par la Proposition 3, A est optionnel et B est prévisible. Comme ${}^3Y = Y^-$, on a

$$E \int_0^{+\infty} Y_t^-\, dB = E \int_0^{+\infty} Y_t\, dB_t \tag{31}$$

ce qui s'écrit

$$\langle \bar{\lambda}, Y \rangle = \langle f(\lambda), Y \rangle \tag{32}$$

De (30), on tire donc

$$\langle f(\lambda), Y\rangle = \lim_U \langle f(\mu), Y\rangle \tag{33}$$

La proposition est bien démontrée. □

Preuve du Théorème 3. Par la Proposition 2, $\tilde{C}'$ s'identifie au dual de l'espace de Banach $C/\tilde{C}$. Par le corollaire du Théorème de Krein-Smulian [7] IV.6.4, puisque l'application $\mu \to \langle f(\mu), Y\rangle$ est $\sigma(\tilde{C}', C/\tilde{C})$ continue sur $B_{\tilde{C}'}$, elle est $\sigma(\tilde{C}', C/\tilde{C})$ continue sur $\tilde{C}'$. Il existe donc $\tilde{Z} \in C/\tilde{C}$ unique tel que pour $\mu \in \tilde{C}'$, $\langle \mu, \tilde{Z}\rangle = \langle f(\mu), Y\rangle$.

De plus, pour $\mu \in B_{\tilde{C}'}$, le processus A associé est tel que $\| |dA| \|_{L_\infty} \leqq 1$.

Donc si T_s est le changement de temps associé à $|dA|$, on a:

$$|\langle f(\mu), Y\rangle| \leqq E \int_0^1 |Y_{T_s}| \, 1_{T_s \leqq +\infty} \, ds \leqq E \int_0^1 |Y_{T_s \wedge +\infty}| \, ds \tag{34}$$

On en déduit que

$$\|\tilde{Z}\| \leqq \sup_{T \in \mathscr{T}} E(|Y_T|). \tag{35}$$

On a d'ailleurs en fait égalité dans (35). En effet si $T \in \mathscr{T}$, soit A le processus défini par:

$$A_t^T = 1_{t \geqq T}(1_{(Y_T \geqq 0)} - 1_{(Y_T < 0)}). \tag{36}$$

Alors si $\mu \in B_{\tilde{C}'}$ est associé à A^T par (18), on a:

$$\langle f(\mu), Y\rangle = E|Y_T| \tag{37}$$

ce qui implique bien

$$\|\tilde{Z}\| = \sup_{T \in \mathscr{T}} E|Y_T|. \tag{38}$$

Or si $\tilde{Z}^*$ est un représentant de $\tilde{Z}$ dans C, on a:

$$\|\tilde{Z}\| = \inf_{Z' \in \tilde{C}} \|\tilde{Z}^* + Z'\|. \tag{39}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver Z dans C tel que:

$$\|Z\| \leqq \sup_{T \in \mathscr{T}} E|Y_T| + \varepsilon \tag{40}$$

et que si $\mu \in \tilde{C}'$,

$$\langle \mu, Z\rangle = \langle f(\mu), Y\rangle. \tag{41}$$

En réappliquant le Théorème de section optionnel on en déduit que:

$$Y = {}^1Z. \quad \square \tag{42}$$

On démontrera de la même manière les résultat suivants:

Théorème 4. *Soit Y un processus optionnel cadlag sur* $[0,+\infty]$ *de la classe* (D). *Alors, pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe* $Z\in D$ *tel que:*

$$Y={}^1Z, \tag{43}$$

$$\|Z\| \leqq \sup_{T\in\mathscr{T}} E|Y_T|+\varepsilon \tag{43'}$$

Preuve. Il suffit de raisonner comme précedemment, en n'utilisant que la Proposition 4. □

Théorème 5. *Soit Y un processus optionnel* laglad *de la classe* (D) *tel que sur* $]0,+\infty]$, *on ait:*

$$Y_t^- = {}^3Y_t. \tag{44}$$

Alors pour tout $\varepsilon>0$, *il existe un processus caglad Z tel que:*

$$E(\sup_{0\leqq t\leqq+\infty}|Z_t|) \leqq \sup_{T\in\mathscr{T}} E|Y_T|+\varepsilon, \tag{45}$$

$$Y={}^1Z. \tag{45'}$$

Preuve. On obtient ce résultat en explicitant le dual de l'espace de Banach des processus laglad X vérifiant $E(\sup_{0\leqq t\leqq+\infty}|X_t|)<+\infty$ et en raisonnant comme précédemment. □

Bibliographie

1. Baxter, J.R., Chacon, R.V.: Compactness of stopping times. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **40**, 169–181 (1977)
2. Bismut, J.M., Skalli, B.: Temps d'arrêt optimal, théorie générale des processus et processus de Markov. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. **39**, 301–313 (1977)
3. Bismut, J.M.: Temps d'arrêt optimal, quasi-temps d'arrêt et retournement du temps. Annals of Probability [A paraître]
4. Meyer, P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de probabilités X, pp. 245–400. Lecture Notes in mathematics n° 511. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
5. Meyer, P.A.: Convergence faible et compacité des temps d'arrêt d'après Baxter et Chacon. Séminaire de probabilités XII. Lecture Notes in Mathematics, n° **649**, pp. 411–423. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978
6. Meyer, P.A.: Probabilités et potentiels. 1° édition Paris: Hermann 1966
7. Schaeffer, H.H.: Topological Vector spaces. New York-London: Macmillan 1966
8. Emery, M.: Sur un théorème de J.M. Bismut. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **44**, 141–144 (1978)

Reçu le 20 Octobre 1977; en forme refondue le 4 Avril 1978