Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
44, 227–251 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Frontiere de Martin d'un processus recurrent au sens de Harris

François Bronner*
Universite Paris Nord, C.S.P., Departement de Mathématiques, F-93430 Villetaneuse

Introduction

Soit P une probabilité de transition sur un espace mesurable séparable $(E, \mathscr{E})$ récurrente au sens de Harris et de mesure invariante μ. Nous construisons ici la frontière de Martin de P par des théorèmes de représentation.

La méthode consiste à «tuer» la chaîne canonique associée à P par des fonctions spéciales de Neveu non μ-négligeable, de manière à obtenir une famille de chaînes transientes et montrer ensuite que les cônes de mesures excessives associés aux chaînes tuées sont isomorphes. Le théorème de représentation de Choquet donne alors à ces cônes une frontière «commune» que l'on appellera la frontière de Martin de P.

Dans le cadre d'un espace *discret* Kemeny et Snell avaient montré que les cônes des fonctions harmoniques obtenus en retirant un point quelconque de l'espace étaient tous isomorphes. On trouvera dans Neveu [6], la théorie de la frontière d'une chaine récurrente discrête écrite de manière complête, notamment en étendant non à un point mais à un nombre fini quelconque de points et en appliquant la notion de frontière à la construction de certaines matrices potentielles.

La première partie donne l'isomorphisme entre les differents cônes de mesures excessives associées aux «chaînes tuées». Les résultats sont purement algébriques.

Dans la seconde, nous construisons pour une chaîne de Feller une topologie sur ces cônes permettant d'appliquer à des chapeaux le théorème de Choquet et donnant ainsi des représentations intégrales à la frontière.

La troisième partie donne des représentations intégrables pour les fonctions sous certaines hypothèses permettant de construire notamment un noyau dual $\hat{P}$.

Dans la quatrième partie, nous faisons le lien avec le problème classique de la frontière de Martin, à savoir la représentation intégrale des solutions de l'équation de Poisson, et nous construisons, de manière analogue aux résultats

* Membre du laboratoire de Calcul des Probabilités L.A. n° 224 associé au CNRS

0044-3719/78/0044/0227/$05.00

de [6] pour E discret, certain noyau potentiels W vérifiant notamment $P+WP=W$. Ces noyaux sont associés aux mesures portées par la frontière

Notations: Dans toute la suite, $(E,\mathscr{E})$ est un espace mesurable séparable
– toutes les fonctions sont mesurables, nous notons simplement $\mathscr{E}_+$ l'ensemble des fonctions numériques positives.
– Pour tout $f\in\mathscr{E}_+$ nous désignerons par M_f le noyau de multiplication par f
– D'une manière générale les notations sont celles de l'article de Neveu [7] en particulier.

Nous désignons par H l'ensemble des fonctions de E dans $[0,1]$. Pour tout $h\in H$ nous avons le noyau de Neveu

$$U_h=\sum_{n\geqq 0} P(M_{1-h}P)^n=\sum_{n\geqq 0}(PM_{1-h})^n P.$$

– La probabilité P (irréductible) est récurrente au sens de Harris et de mesure invariante μ (ce qui signifie $U_h(h)=1$ dès que $h\in H$ vérifie $\mu(h)\neq 0$).

Les fonctions spéciales dont l'ensemble est noté S, sont les fonctions positives f telles que pour tout $h\in H$, avec $\mu(h)\neq 0$, $U_h(f)$ soit une fonction bornée.

Nous notons S_1 l'ensemble des fonctions spéciales *non μ-négligeables* de H, S_b l'ensemble des fonctions spéciales bornées.

Nous utiliserons systématiquement, sans les rappeler, les propriétes des fonctions spéciales, des opérateurs $U_h, \ldots$, que l'on trouvera dans [7] ainsi que dans le livre de Revuz [8]. Certaines propriétés complémentaires, notamment topologiques et de dualité, dues à Brunel et Revuz [1] et [2] seront aussi automatiquement utilisées.

Certaines égalités dans le texte feront apparaître des mesures ou noyaux non positifs. Elle seront supposées écrites, sans que cela soit précisé sur le moment, appliquées à des fonctions, en particulier les fonctions de S_b, telles que les quantités intervenant soient toutes finies. Notamment nous utiliserons le noyau M_f pour des fonctions *f non positives* à condition de n'appliquer à gauche que des mesures v telles que l'expression $vM_f=f\cdot v$ ait un sens.

Rappelons enfin que les fonctions de S engendre la tribu $\mathscr{E}$.

I. Cônes de mesures *h*-excessives

Dans cette partie $(E,\mathscr{E})$ est un espace séparable, P une probabilité de transition sur $(E,\mathscr{E})$ récurrente au sens de Harris et de mesure invariante μ.

1) Pour toute fonction h de S_1, une mesure positive v est h-excessive si $vM_{1-h}P\leqq v$. Elle est h-invariante si $vM_{1-h}P=v$. Considérons les cônes suivants,

$$C_h=\{v\geqq 0\,|\,v(h)<\infty \text{ et } v\geqq vM_{1-h}P\}$$
$$I_h=\{v\in C_h\,|\,v=vM_{1-h}P\}.$$

Il est bien connu que C_h est un cône réticulé, stable par addition, d'autre part la mesure invariante μ est dans C_h. Nous allons montrer dans cette partie 1 que les cônes C_h sont isomorphes entre eux. Nous allons pour cela montrer deux lemmes préliminaires, qui ont leur intérêt propre.

Lemme (I,1). *Pour tout couple (h, h') de S_1, il existe une constante c positive telle que*

$$(\forall \nu \in C_h) \qquad \nu(h') \leqq c\,\nu(h). \tag{I,1,1}$$

En particulier, les éléments de C_h sont des mesures σ-finies, finies sur S_b. De plus, tout élément de I_h est fini sur S.

Démonstration. Il suffit de supposer $h' \geqq h$. Dans ces conditions, remarquons d'abord que pour tout ν de C_h,

$$\nu M_{h'-h} U_{h'} \leqq \nu. \tag{I,1,2}$$

En effet,

$$\nu \geqq \nu M_{1-h'} P + \nu M_{h'-h} P \geqq \nu M_{h'-h} P;$$

par récurrence

$$\nu \geqq M_{h'-h} \sum_{p=0}^{n} P(M_{1-h'} P)^p,$$

et il suffit de faire tendre n vers l'infini.

Maintenant, la fonction h' étant dans S_1, il existe un réel $\lambda \in]0, 1[$ et une mesure positive μ' équivalente à μ tels que $U_{\lambda h'} \geqq 1 \otimes \mu'$. Soit ν un élément de C_h posons,

$$\nu' = \nu + \nu M_{(1-\lambda)h} U_{\lambda h}.$$

La mesure ν' appartient au cône $C_{\lambda h}$ puisque,

$$\nu'(\lambda h) = \lambda\,\nu(h) + \nu[(1-\lambda)\, U_{\lambda h}(\lambda h)] = \nu(h) < \infty$$

et que

$$\nu' M_{1-\lambda h} P = \nu M_{1-h} P + \nu M_{(1-\lambda)h} U_{\lambda h} \leqq \nu'.$$

La formule (I,1,2) appliquée à λh, $\lambda h'$ et ν' donne donc

$$\nu' \geqq \nu' M_{\lambda(h'-h)} U_{\lambda h'} \geqq \nu' M_{\lambda(h'-h)}(1 \otimes \mu').$$

Il résulte donc de tout ce qui précède que

$$\nu(h) = \nu'(\lambda h) \geqq \nu'[\lambda(h'-h)]\, \mu'(\lambda h) \geqq \lambda\, \nu(h'-h)\, \mu'(\lambda h),$$

puisque $\nu \leqq \nu'$. Mais $\mu'(\lambda h)$ est non nulle puisque h est dans S_1 et que μ' est équivalente à μ. Et par suite,

$$\nu(h') \leqq \left(\frac{1}{\lambda\, \mu'(\lambda h)} + 1\right) \nu(h).$$

La constante $c = \dfrac{1}{\lambda\, \mu'(\lambda h)} + 1$ ne dépend pas de la mesure ν.

Pour montrer que les éléments de C_h sont finis sur S_b, il suffit pour toute fonction $f \in S_b$ de considérer $h' = f/\alpha \vee h$ où $\alpha > \sup_E f$. En particulier si h_0 est une fonction strictement positive de S_1, la considération des ensembles $A_n = \left\{h_0 \geqq \frac{1}{n}\right\}$ montre que les mesures de C_h sont σ-finies. Enfin si ν est un élément de I_h et f une fonction spéciale, Pf est une fonction spéciale bornée et par suite

$$\nu(f) = \nu M_{1-h} Pf \leqq \nu Pf < \infty.$$

Ce qui démontre le lemme.

Ce lemme nous permettra non seulement d'assurer des finitudes dans les formules mais nous permettra plus loin d'obtenir des résultats de compacité. Donnons maintenant le second lemme:

Lemme (I,2). *Soit $h \in S_1$, tout élément ν de C_h vérifiant $\nu(h) = 0$ est la mesure nulle. Par conséquent la partie $C_h^1 = \{\nu \in C_h \mid \nu(h) = 1\}$ est une base du cône C_h.*

Démonstration. Puisque $\mu(h)$ est non nulle, la fonction $U_h(h)$ est la constante 1. Soit $\nu \in C_h$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu P(M_{1-h}P)^n = \nu(M_{1-h}P)^{n+1} + \nu M_h P(M_{1-h}P)^n \leqq \nu + \nu M_h P(M_{1-h}P)^n;$$

donc, si $\nu(h) = 0$,

$$[\nu P(M_{1-h}P)^n](h) \leqq \nu M_h P(M_{1-h}P)^h(h).$$

En sommant sur $\mathbb{N}$ il vient donc

$$\nu(1) = \nu(U_h(h)) \leqq \nu(h\, U_h(h)) = \nu(h) = 0.$$

D'où le lemme.

Nous noterons dans la suite G_h le noyau potentiel du noyau $M_{1-h}P$. Nous avons,

$$G_h = \sum_{n \geqq 0} (M_{1-h}P)^n = I + M_{1-h}\, U_h,$$

ainsi que $U_h = PG_h$. Remarquons que $G_h(h) \equiv 1$. De plus, les potentiels de C_h sont les potentiels des mesures positives de masse totale finie. Il est facile de voir qu'il existe dans C_h une décomposition de Riesz. Enfin la mesure μ est le h-potentiel de la mesure $h \cdot \mu$.

2) Nous allons maintenant construire les isomorphismes entre les differents cônes C_h. Par isomorphisme linéaire nous entendons une bijection stable par addition et multiplication par un réel positif.

Proposition (I,3). *Les cônes convexes C_h $(h \in S_1)$ sont isomorphes entre eux. De manière plus précise, pour tout couple (h, h') de S_1, l'application $u_{h'h} = I + M_{h-h'}\, U_{h'}$ est un isomorphisme de C_h sur $C_{h'}$ vérifiant*

$$u_{h,h} = \mathrm{id}_{C_h}$$

$$u_{h'',h'} \circ u_{h',h} = u_{h''h} \quad \text{sur } C_h.$$

De plus, pour tout ν de C_h, $u_{h'h}(\nu)\,[h'] = \nu(h)$, $u_{h',h}(I_h) = I_{h'}$.

Démonstration. Nous allons d'abord supposer que $h \leqq h'$ et construire $u_{h',h}$ et $u_{h,h'}$. Nous généraliseront ensuite à (h, h') quelconques dans S_1.

Si $h \leqq h'$, il résulte d'abord de l'equation résolvante sur les opérateurs U_h que

$$G_h = G_{h'} + G_h M_{h'-h} U_{h'}.$$

Soit maintenant v un élément de I_h, comme $(1-h') \leqq (1-h)$, v est aussi un élément de $C_{h'}$, $v(h')$ étant finie d'après le lemme (I,1). Considérons la décomposition de Riesz de v dans $C_{h'}$ et appelons v' la partie h'-invariante de v, $v' = \lim_n \downarrow v(M_{1-h'} P)^n$.

La relation suivante, qui se démontre facilement par récurrence,

$$(M_{1-h} P)^n = (M_{1-h'} P)^n + \sum_{m=0}^{n-1} (M_{1-h} P)^{n-m-1} M_{h'-h} P (M_{1-h'} P)^n \qquad (n \geqq 1)$$

permet d'écrire la relation

$$v = v' + v M_{h'-h} U_{h'},$$

(qui n'est autre que la décomposition de Riesz de v dans $C_{h'}$). Posons $u_{h',h}(v) = v'$. Nous définissons ainsi une application de I_h dans $I_{h'}$. Si maintenant v est une mesure quelconque de C_h sa décomposition de Riesz dans C_h s'écrit

$$v = v_0 G_h + v_1$$

où v_0 est une mesure positive de masse totale finie et v_1 un élément de I_h. En posant

$$u_{h',h}(v) = v_0 G_{h'} + u_{h',h}(v_1),$$

nous définissons une application $u_{h',h}$ de C_h dans $C_{h'}$, qui est manifestement un homomorphisme linéaire et qui vérifie en outre la relation

$$v = u_{h',h}(v) + v M_{h'-h} U_{h'},$$

ce qui est bien de la forme indiquée dans la proposition.

Appliquons les deux membres de cette égalité à h', comme $v(h')$ est fini d'après le lemme (I,1) il vient;

$$v(h) = [u_{h',h}(v)]\,(h').$$

Nous allons maintenant construire une application $u_{h,h'}$ de $C_{h'}$ dans $C_h (h \leqq h')$ en posant pour tout v' de $C_{h'}$,

$$u_{h,h'}(v') = v' + v' M_{h'-h} U_h.$$

Nous avons en effet d'une part

$$u_{h,h'}(v')\,(\lambda h) = v'(h) + v'(h'-h) = v'(h') < \infty;$$

et d'autre part, en posant $v = u_{h,h'}(v')$

$$\begin{aligned} v M_{1-h} P &= v' M_{1-h'} P + v'[M_{h'-h} P + M_{h'-h} U_h M_{1-h} P] \\ &= v' M_{1-h'} P + v' M_{h'-h} U_h. \end{aligned}$$

Ce qui montre que v est dans C_h et que si v' est dans $I_{h'}$ v appartient à I_h. L'application $u_{h,h'}$ est donc un homomorphisme linéaire de $C_{h'}$ dans C_h vérifiant la propriété de la proposition.

Il reste à montrer que $u_{h,h'}$ et $u_{h',h}$ sont réciproques l'une de l'autre. Montrons d'abord que $u_{h',h} \circ u_{h,h'} = \mathrm{id}_{C_{h'}}$. Soit $v' \in C_{h'}$ et $v = u_{h,h'}(v')$. Nous avons,

$$\begin{aligned} v' + v M_{h'-h} U_{h'} &= v' + v' M_{h'-h} U_{h'} + v' M_{h'-h} U_h M_{h'-h} U_{h'} \\ &= v' + v' M_{h'-h} U_h = v \end{aligned}$$

et par conséquent

$$u_{h',h}(v) = v'.$$

Montrons maintenant que $u_{h,h'} \circ u_{h',h} = \mathrm{id}_{C_h}$. Soit donc $v \in C_h$. La formule (I,1,2) du début de la démonstration du lemme (I,1) montre que la mesure v est excessive pour le noyau propre $M_{h'-h} U_{h'}$, les fonctions spéciales étant stables par $M_{h'} U_{h'}$ donc à fortiori par $M_{h'-h} U_h$. Il existe donc une décomposition de Riesz de v pour le noyau $M_{h'-h} U_{h'}$. Il est facile de voir que cette décomposition s'écrit,

$$v = u_{h',h}(v)\,[I + M_{h'-h} U_h] + \bar{v} \quad \text{où} \quad \bar{v} = \lim_n \downarrow v (M_{h'-h} U_h)^n. \tag{$*$}$$

Et, il suffit donc de montrer que $\bar{v} = 0$. Mais, toute mesure λ vérifiant $\lambda = \lambda M_{h'-h} U_{h'}$ est aussi h-invariante car

$$\begin{aligned} \lambda M_{1-h} P &= \lambda M_{1-h'} P + \lambda M_{h'-h} P \\ &= \lambda M_{h'-h} P + \lambda M_{h'-h} U_{h'} M_{1-h'} P = \lambda M_{h'-h} U_{h'} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Comme $\bar{v} \leqq v$, la mesure $\bar{v}$ est dans I_h. Maintenant en appliquant h aux deux membres de $(*)$ nous voyons que

$$v(h) = v'(h') + \bar{v}(h).$$

Par suite, $\bar{v}(h) = 0$, ce qui montre, d'aprés le lemme (I,2) que $\bar{v} = 0$, d'où nous déduisons que $u_{h,h'} \circ u_{h',h} = \mathrm{id}_{C_h}$.

L'isomorphisme est donc construit lorsque $h \leqq h'$. Pour passer à un couple quelconque (h, h') de S_1, on remarque que la fonction $h \vee h'$ est aussi dans S_1, puisque $h \vee h' \leqq 1$, est spéciale et non μ-négligéable. Il suffit alors de poser

$$\begin{aligned} u_{h'h} &= u_{h', h \vee h'} \circ u_{h \vee h', h} \\ u_{h,h'} &= u_{h, h \vee h'} \circ u_{h \vee h', h'}. \end{aligned}$$

pour obtenir deux isomorphismes linéaires, réciproques l'un de l'autre, entre les cônes C_h et $C_{h'}$ et il est facile de vérifier à l'aide de l'équation résolvante des opérateurs U_h que

$$(I+M_{h-h'\vee h}U_{h'\vee h})\circ(I+M_{h'\vee h-h}U_{h'})=I+M_{h-h'}U_h.$$

Pour tout $\nu\in C_h$

$$\nu(h)=u_{h'\vee h,h}(\nu)(h\vee h')=(u_{h',h\vee h'}\circ u_{h'\vee h,h})(h').$$

Il reste donc simplement à vérifier la propriété de composition de ces isomorphismes. Il suffit de le faire lorsque $h\leqq h'\leqq h''$ et de composer ensuite avec les résultats précédents. Soit donc h, h' et h'' rangées dans cet ordre et ν un élément de C_h, nous posons $\nu'=u_{h',h}(\nu)$ et $\nu''=u_{h',h}(\nu')$. Nous avons d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}\nu&=\nu'+\nu M_{h'-h}U_{h'}\\&=\nu''+\nu' M_{h''-h'}U_{h''}+\nu M_{h'-h}U_{h''}+\nu M_{h'-h}U_{h'}M_{h''-h'}U_{h''}\\&=\nu''+\nu M_{h''-h}U_{h''},\end{aligned}$$

ce qui démontre bien que $u_{h'',h'}\circ u_{h',h}=u_{h'',h}$ et achève la démonstration de la proposition.

Remarque. 1) Dans tout de qui précède on a utiliser qu'une mesure σ-finie est entièrement définie dès qu'elle est donnée sur les fonctions spéciales.

2) L'hypothèse $\mu(h)\neq 0$ est intuitive puisque l'on veut tuer à l'aide de la fonction h, la chaîne canonique associée, pour la rendre transiente.

Dans le cadre discret, Neveu [6], l'isomorphisme était obtenu pour les cônes associés aux ensembles finis. Ceux ci sont évidemment spéciaux et nous avons bien ici une généralisation.

II. Frontière d'une chaîne Harris de Feller

Dans cette partie E est un espace topologique localement compact de type dénombrable (l.c.d.), $\mathscr{E}$ est la tribu des boreliens $\mathscr{C}_K$ et $\mathscr{C}_b$ les espaces des fonctions numériques continues à support compact et continues bornées, $\mathscr{C}_K^+$ et $\mathscr{C}_b^+$ les cônes des fonctions positives de ces espaces.

1) Nous supposons dans toute cette partie que P est une *probabilité de transition fellerienne* sur $(E,\mathscr{E})$, ce qui veut dire que pour tout $f\in\mathscr{C}_K$, $Pf\in\mathscr{C}_b$, (on montre facilement que P envoie $\mathscr{C}_b$ dans $\mathscr{C}_b$), P vérifie l'hypothése de récurrence de Harris et μ désigne la mesure invariante. Nous faisons en outre l'hypothèse suivante, *la mesure μ charge tous les ouverts non vides.* Sous ces conditions nous utiliserons les propriétés suivantes, démontrées par Brunel et Revuz dans [2],

- il existe des fonctions spéciales continues et strictement positives,
- la mesure μ est de Radon,
- les fonctions bornées à support compact sont spéciales; en particulier

$$K_1=\{f\in\mathscr{C}_K^+\,|\,\mu(f)\neq 0,\quad f\leqq 1\}$$

est contenu dans S_1.

Il résulte immédiatement de la seconde propriété et du lemme (I,1) que pour tout $h \in S_1$ le cône C_h est formé de mesures de Radon. Les opérateurs U_h, $(h \in H)$ possède en outre la propriété que si h est continue et $\mu(h) \neq 0$, les fonctions f de $K_h = \{f \in \mathscr{C}_b \mid \exists t \geqq 0 \mid f \mid \leqq t h\}$ sont telles que $U_h(f) \in \mathscr{C}_b$. On peut compléter ce résultat par le suivant,

Proposition (II,1). *Si $h \in S_1$ est continue, $U_h(f) \in \mathscr{C}_b$ dès que f est une fonction continue spéciale et bornée. En particulier $U_h(\mathscr{C}_K) \subset \mathscr{C}_b$.*

Démonstration. Pour toute fonction f spéciale bornée continue la formule $U_h f = \lim_n \uparrow \sum_0^n (PM_{1-h})^p Pf$ montre que $U_h(f)$ est s.c.i. On peut d'autre part supposer $f < 1$, la fonction $f \vee h$ est alors dans S_1. Il existe donc, pour tout $\lambda \in]0, 1[$ une mesure μ' equivalente à μ telle que $U_{\lambda(f \vee h)} \geqq 1 \otimes \mu'$. Il suffit de démontrer que $U_{\lambda h}(f \vee h)$ est continue. En effet d'une part

$$U_{\lambda h}(f) + 1 = U_{\lambda h}(f \vee h) + U_{\lambda h}(f \wedge h),$$

et le second membre sera une fonction continue puisque $f \wedge h \in K_{\lambda h}$. Et d'autre part si (λ_n) est une suite croissante de $]0, 1[$ vers 1,

$$U_h(f) = \lim_n \downarrow U_{\lambda_n h}(f)$$

sera une fonction s.c.s.

On peut donc supposer $f \vee h \in S_1$ telle que $U_{f \vee h} \geqq 1 \otimes \mu'$ où μ' est équivalente à μ. Comme

$$\begin{aligned} U_h &= \sum_{n \geqq 0} (U_{f \vee h} M_{f \vee h - h})^n U_{f \vee h}, \\ U_h(f \vee h) &= \sum_{n \geqq 0} (U_{f \vee h} M_{f \vee h - h})^n (1). \end{aligned} \tag{$*$}$$

La fonction $(U_{f \vee h} M_{f \vee h - h})^n (1)$ est continue, car, pour $n = 1$ $f \vee h - h \leqq f \vee h$ et la propriété est vraie par récurrence puisque

$$M_{f \vee h - h}(U_{f \vee h} M_{f \vee h - h})^{n-1}(1) < f \vee h.$$

Il reste donc à montrer que la série $(*)$ converge uniformément. Or comme μ' est une mesure équivalente à μ, $0 < \mu'(h) \leqq U_{f \vee h}(f \vee h) = 1$. Il en résulte que,

$$\sup_E (U_{f \vee h}(f \vee h - h) = \sup_E (1 - U_{f \vee h}(h)) \leqq 1 - \mu(h) < 1,$$

d'où la convergence uniforme. Ce qui achève de démontrer la proposition.

2) Nous nous proposons maintenant d'appliquer le théorème de Choquet aux chapeaux

$$\hat{C}_h = \{v \in C_h \mid v(h) \leqq 1\}.$$

Nous avons pour cela besoin des résultats topologiques donnés par les lemmes suivants:

Lemme (II,2). *Pour toutes fonctions $h \in K_1$, C_h est vaguement fermé, $\hat{C}_h$ est vaguement compact.*

Démonstration. Remarquons d'abord que dès que h est semi continue supérieurement, toute limite vague d'une famille $(v_i)_{i\in I}$ de mesures h-excessives ($h \in S_1$) est h-excessive puisque pour tout $g \in C_K$, $(1-h)Pg$ est s.c.i. et qu'alors

$$v(M_{1-h}P)\, g \leqq \liminf_I \int_E v_i(dx)\,(1-h(x))\, Pg(x) \leqq \liminf_I v_i(g) = v(g).$$

Il en résulte aussitôt que C_h et $\hat{C}_h$ sont vaguement fermés. Il reste donc à montrer que C_h est vaguement relativement compact. En d'autres termes il suffit de démontrer que pour tout compact K de E $\sup_{v\in\hat{C}_h} v(K)$ est fini.

Soit h_0 une fonction continue spéciale strictement positive et inférieure à 1 sur E. Comme, si K est compact $1_K \leqq \dfrac{1}{\inf_K h_0} h_0$, il suffit de montrer que $\sup_{v\in\hat{C}_h} v(h_0)$ est fini. Mais cela résulte du lemme (I,1) appliqué au couple (h_0, h),

$$(\forall\, v \in \hat{C}_h) \qquad v(h_0) \leqq c\, v(h) \leqq c.$$

Les chapeaux $\hat{C}_h$ sont donc munis d'une topologie métrisable compact.

Lemme (II,3). *Pour tout couple (h, h') de K_1, l'isomorphisme $u_{h',h}$ est vaguement continue de C_h sur $C_{h'}$.*

Démonstration. Il suffit de supposer $h \leqq h'$ et de montrer que $u_{h',h}$ et $u_{h,h'}$ sont vaguement continus. Dans ces conditions, pour toute famille filtrante $(v_i)_{i\in I}$ de C_h convergeant vaguement vers v, nous avons si $v_i' = u_{h',h}(v_i)$

$$(\forall f \in \mathscr{C}_K) \qquad v_i(f) = v_i'(f) + v_i[(h'-h)\, U_h f].$$

D'après la proposition (II,1) $(h'-h)\, U_h f \in \mathscr{C}_K$ et par suite

$$(\forall f \in \mathscr{C}_K) \qquad v(f) = \lim_I v_i'(f) + v[(h'-h)\, U_h f].$$

Ce qui montre que

$$\lim_I u_{h',h}(v_i) = u_{h',h}(\lim_I v_i).$$

Un raisonnement analogue montrerait que $u_{h,h'}$ est continue. Ce qui démontre la proposition.

Les isomorphismes entre les cônes C_h sont donc des homéomorphismes.

Pour appliquer le théorème de Choquet aux chapeaux $\hat{C}_h$, nous devons maintenant, rechercher les points extrémaux de $\hat{C}_h$.

Les mesures extrêmales *non nulles* de $\hat{C}_h$ vérifient $v(h) = 1$, sinon, on pourrait écrire

$$v = v(\mathrm{h}) \left(\frac{1}{v(h)}\, v \right) + (1 - v(h))\, 0$$

ce qui contredirait l'éxtrêmalité de v.

Il est d'autre part bien connu que ces mesures extrêmales non nulles sont soit des potentiels, soit de mesures invariantes. Il résulte enfin du principe d'égalité des masses que les potentiels extrêmaux sont les mesures,

$$G_h(x, \cdot) = \varepsilon_x G_h = \sum_{n \geqq 0} \varepsilon_x (M_{1-h} P)^n$$

pour tout x de E. Remarquons aussi que pour tout couple (h, h') de S_1, $u_{h'h}(G_h(x, \cdot)) = G_{h'}(x, \cdot)$. Ceci conduit à poser la notation suivante,

Notation: Nous désignerons par $\{G_h(s, \cdot), s \in S\}$ l'ensemble des mesures h-invariantes extrêmales non nulles de C_h, pour tout $h \in S_1$. L'ensemble S vérifiant la condition de compatibilité,

$$(\forall (h, h') \in S_1) \qquad u_{h'h}[G_h(s, \cdot)] = G_{h'}(s, \cdot).$$

L'ensemble S précédant s'appelle la frontière (récurrente) de la probabilité de transition P;

Il nous reste maintenant à munir l'espace $E+S$ d'une structure topologique telle que S soit un borélien. Notons pour cela, et pour tout $h \in S_1$

$$\begin{aligned} \phi_h \colon E+S &\longrightarrow \hat{C}_h \\ x &\longrightarrow G_h(x, \cdot). \end{aligned}$$

L'ensemble $E+S$ s'identifie à l'ensemble des points extrêmaux non nuls de $\hat{C}_h$. Si $h' \in S_1$, nous avons

$$\phi_{h'} = u_{h',h} \circ \phi_h.$$

D'un autre côté, les applications $x \to G_h(x, \cdot)$ sont vaguement continues de E dans C_h, pour tout $h \in K_1$ puisque pour tout $f \in \mathscr{C}_K$ d'après la proposition (II,1) l'application $x \mapsto G_h f(x) = f(x) + [1 - h(x)]\, U_h f(x)$ est continue.

Il est donc possible de munir $E+S$ de la moins fine des topologies induisant sur E la topologie de E et rendant vaguement continue pour un $h \in K_1$ l'application ϕ_h. Pour tout $h \in K_1$, ϕ_h sera alors continue sur $E+S$. Enfin, l'espace $E+S$ est métrisable. Nous pouvons maintenant établir le résultat attendu.

Proposition (II,4). *La frontière S de P est une G_δ dans $E+S$. Pour tout $h \in S_1$ l'application*

$$\psi_h \colon m \to v_m = \int_{E+S} dm(y)\, G_h(y, \cdot)$$

definie sur l'espace $M_+(E+S)$ des mesures positives bornées sur $E+S$, est une bijection de $M_+(E+S)$ sur C_h. La mesure v_m est h-invariante si et seulement si m est portée par S. Enfin

$$v_m(h) = m(E+S)$$

$$\forall (h, h') \in S_1 \qquad u_{h',h} \circ \psi_h = \psi_{h'}.$$

Démonstration. Pour tout $h \in K_1$, $\hat{C}_h$ vérifie les hypothèses du théorème de

Choquet, l'isomorphisme ϕ_h entre les points extrêmaux non nuls de $\hat{C}_h$ et $E+S$ permet de transporter toute mesure positive bornée sur $E+S$ en une mesure positive bornée sur les points extrêmaux de C_h. Comme il est immédiat que pour tout $m \in M_+(E+S)$ v_m soit h-excessive l'application ψ_h est bien une bijection d'après le théorème de Choquet.

Si $h \leqq h'$ dans K_1, en intégrant sur $E+S$ la relation

$$G_h(y,\cdot)=G_{h'}(y,\cdot)+G_h(y,\cdot)\, M_{h'-h}\, U_{h'}$$

nous obtenons $\psi_{h'}=u_{h',h}\circ\psi_h$ qui s'étend aussitôt à un couple quelconque de K_1. Enfin comme $G_h(\cdot)\equiv 1$ sur $E+S$

$$v_m(h)=\int_{E+S} G_h(y,h)\, m(dy)=m(E+S).$$

Si maintenant h' est un élément quelconque de S_1 et h une fonction de K_1, il suffit de poser $\psi_{h'}=u_{h',h}\circ\psi_h$ pour étendre les résultats précédents à toutes les fonctions de S_1.

Nous allons maintenant préciser les propriétés de la topologie de $E+S$.

Proposition (II,5). *L'ensemble E est dense dans $E+S$. Pour qu'une suite (x_n) de points de E converge dans $E+S$ vers $s\in S$, il faut et il suffit que pour une fonction $h\in K_1$ les mesures $G_h(x,\cdot)$ convergent vaguement vers la mesure $G_h(s,\cdot)$. La suite (x_n) converge alors au sens de la topologie de E vers le point d'Alexendroff Δ de E.*

Démonstration. Si (x_n) est une suite de E convergeant dans $E+S$ vers $s\in S$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet dans le compact $E\cup\{\Delta\}$ une valeur adhérence x_0. Si $x_0\in E$, la continuité vague de $G_n(\cdot,\cdot)$ montre que $G_h(x_0,\cdot)=G_h(s,\cdot)$ ce qui est impossible puisque ces deux mesures sont non nulles. La seule valeur d'adhérence de (x_n) est donc Δ (dans $E\cup\{\Delta\}$) et la condition est nécéssaire. La condition est suffisante par la définition même de la topologie de $E+S$.

Le fait que E soit dense dans $E+S$ résulte du lemme suivant,

Lemme. *Toute mesure invariante de C_h est limite d'une suite croissante de potentiels de C_h.*

Soit en effet v une mesure h-invariante et ρ une mesure bornée équivalente à v, la mesure ρG_h majore ρ et donc $v\ll\rho G_h$; soit $f=\frac{dv}{d\rho G_h}$ les mesures $v_n=(f\wedge n)\cdot\rho G_h$ répondent à la question.

En particulier, si $s\in S$ $G_h(s,\cdot)$ est limite d'une suite de potentiel qui sont de la forme $G_h(x_n,\cdot)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors au sens de $E+S$ vers s.

Corollaire. *Parmi les valeurs d'adhérences vagues de l'ensemble $\{G_h(x,\cdot); x\in E\}$ lorsque $x\to\Delta$ il y a les mesures $G_h(s,\cdot)$, $s\in S$.*

Nous pouvons prolonger les noyaux U_h à $E+S$ en posant

$$(\forall s\in S)\qquad U_h(s,\cdot)=G_h(s,\cdot).$$

Dans ces conditions, l'application $y\to U_h(y,\cdot)$ est vaguement continue sur $E+S$ dès que $h\in K_1$. En effet pour tout $f\in\mathscr{C}_K$, si y_n est une suite de E convergeant vers $y\in S$, pour n assez grand $G_h(y_n,f)=U_h(y_n,f)$.

3) Nous terminons cette partie par des exemples.

Si la fonction 1 est spéciale, il n'y a pas de mesures h-invariantes et la frontière sera vide.

La promenade sur $\mathbb{Z}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a pour frontière deux points. Plus généralement Brunel et Revuz on montrer la conjecture de Kesten disant que toute promenade sur un groupe discret a une frontière réduite à un ou deux points.

L'exemple suivant, discret montre que la frontière peut-être infinie (lorsque la chaîne n'est pas une marche).

Soit dans le plan une famille dénombrable de demi droites D_n passant par 0 et $x_{n,p}$ le point de D_n situé à la distance p de 0. Posons $E=\{x_{n,p}; n, p\in\mathbb{N}^*\}$. La probabilité de transition définie par

$$x_{n,p} \neq 0, \qquad P(x_{n,p}, \cdot)=\tfrac{1}{2}\varepsilon_{x_{n,p-1}}+\tfrac{1}{2}\varepsilon_{x_{n,p+1}} \qquad (x_{n,0}=0)$$

$$P(0, \cdot)=\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}\,\varepsilon_{x_{n,1}}.$$

est récurrente irréductible puisque 0 est récurrent et qu'il n'y a qu'une classe de récurrence (par exemple d'après Borel Cantelli). Pour déterminer la frontière il suffit de considérer les mesures invariantes pour la chaîne tuée en 0. Elle sont de la forme

$$v=\sum_{n>0} \alpha_n 1_{D_n} \sum_{p>0} p\,\varepsilon_{x_{n,p}}.$$

Il y a donc autant de points frontières que de droites (D_n).

III. Représentation de fonctions

Dans cette partie, nous voulons donner des théorèmes de représentations pour des fonctions excessives relativement au noyau PM_{1-h}. Nous ferons pour cela sur P l'hypothèse supplémentaire d'absolu continuité.

Hypothèse. Il existe une fonction mesurable du couple (x, y) sur $E\times E$ p telle que

$$P(x, dy)=p(x, y)\,\mu(dy)$$

la fonction p vérifie en outre

$$\int_E p(x, \cdot)\,\mu(dx)=1 \quad \text{partout.}$$

Nous nous plaçons d'autre part sous les hypothèses de la partie II.

L'hypothèse à pour but d'éliminer les situations du genre suivant. Soit sur $\mathbb{R}$ le noyau de convolution Q associé à la fonction $\frac{1}{2}e^{-|x|}$

$$(\forall f\in\mathscr{C}_+) \qquad Q(f)\,x=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y)\,dy$$

et posons $P=\frac{1}{2}Q+\frac{1}{2}(\varepsilon_{x-1}+\varepsilon_{x+1})$. Le noyau P est récurrent au sens de Harris et de mesure invariante $\mu(dx)=dx$. Toutes les fonctions PM_{1-h} invariante g nulle μ presque partout vérifient $g(x)=\frac{1}{2}h(x-1)\,g(x-1)+h(x+1)\,g(x-1)$.

Il existe donc une infinité de telles fonctions non nulles seulement au point x_0+k, $k\in\mathbb{Z}$. Ces fonctions sont à éliminer pour une théorie des frontières.

Soit $\hat{P}$ le noyau défini sur $(E, \mathscr{E})$ par $\hat{P}(x, dy)=p(y, x)\,\mu(dy)$.

Les noyaux P et $\hat{P}$ sont alors en dualité. Il existe donc, comme l'ont montré Brunel et Revuz une modifiacation négligeable de $\hat{P}$ telle que $\hat{P}$ soit de Harris et de mesure invariante μ. Nous supposons faite cette modification.

Il est possible d'associér à $\hat{P}$ les noyaux et propriétés des parties I et II.

Tout ce qui se rapportera à $\hat{P}$ sera noté avec un «$\hat{}$» et précedé de «co». Par exemple, l'ensemble $\hat{I}_h$ de mesures h co-invariantes

$$\hat{I}_h=\{\nu\geqq 0 \mid \nu M_{1-h}\hat{P}=\nu,\ \nu(h)<\infty\}.$$

Proposition (III, 1). *Pour toute fonction h de S_1, les cônes*

$$J_h=\{f: E\to\overline{\mathbb{R}}_+ \mid \mu(fh)<\infty,\ PM_{1-h}f=f\}$$

sont isomorphes entre eux.

La démonstration de la proposition résulte du lemme suivant,

Lemme. *L'application $f\to f\cdot\mu$ est un isomorphisme de J_h sur $\hat{I}_h$.*

Démonstration du Lemme. Soit $\nu\in\hat{I}_h$ la mesure $\nu M_{1-h}\hat{P}$ est absolument continue par rapport à μ, il en est donc de même de ν. Posons $f_1=\dfrac{d}{d\mu}\nu$, f_1 est définie à un ensemble de mesure nulle près et pour toute fonction $g\in\mathscr{C}_K$

$$\begin{aligned}\int_E d(f_1\cdot\mu)\,M_{1-h}\hat{P}g&=\int_E g\,PM_{1-h}f_1\,d\mu\\&=\int_E g f_1\,d\mu.\end{aligned}$$

Par suite, $PM_{1-h}f_1=f_1\,\mu\cdot$p.p. La fonction $f=PM_{1-h}f_1$ est donc positive, PM_{1-h} invariante et $f\cdot\mu=\nu$. Comme d'autre part $\mu(fh)=\nu(h)<\infty$, c'est un élément de J_h. Inversement, il est clair que tout élément de J_h est tel que $f\cdot\mu$ soit dans $\hat{I}_h$.

Notons i_h l'application $f\to f\cdot\mu$. Il suffit alors de poser, pour tout couple (h', h) de S_1

$$u'_{h',h}=i_{h'}^{-1}\circ u_{h',h}\circ i_h.$$

L'isomorphisme $u'_{h',h}$ a des propriétés analogues à l'isomorphisme $u_{h',h}$ de la proposition (I,3).

La proposition (III,3) permet de faire passer aux fonctions la représentation intégrale à la frontière des mesures de I_h. Notons pour cela $\hat{S}$ la frontière de la probabilité de transition $\hat{P}$. Nous avons le corollaire suivant.

Corollaire (III,2). *L'application $m\to\int_S dm(y)\,f_y$ définie sur l'ensemble des mesures* *positives bornées de $\hat{S}$, $M_+(\hat{S})$ est une bijection de $M_+(S)$ sur J_h où $(f_y)_{y\in S}$ est l'ensemble des fonctions extrêmales du chapeau*

$$J_h^1 = \{f \in J_h \mid \mu(hf) \leqq 1\}.$$

L'isomorphisme st la représentation précédente ne s'étend pas aux PM_{1-h}-potentiel. La raison étant qu'un h-co-potentiel n'est pas en général absolument continue par rapport à μ. On peut montrer que les fonctions PM_{1-h} excessives, f, avec $\mu(hf)$ finie admettent un décomposition de Riesz en remarquant que

$$(g\cdot\mu)\,\hat{G}_h = (G'_h g)\cdot\mu \quad \text{où} \quad \hat{G}_h = \sum_{n\geqq 0} (M_{1-h}\hat{P})^n \quad \text{et} \quad G'_h = \sum_{n\geqq 0} (PM_{1-h})^n.$$

Il est alors intéressant de préciser la forme des h-co-potentiels.

Proposition (III,3). *Pour tout $h \in S_1$, toute mesure h-co-potentiel de $\hat{C}_h$ se met sous la forme*

$$(G'_h f)\,\mu + \lambda$$

où $f \in L^1_+(\mu)$ et λ est une mesure positive étrangère à μ, finie et vérifiant $\lambda M_{1-h} P \leqq f\cdot\mu$.

Démonstration. Si v est un potentiel de C_h, $v = v_0 G_h$, où v_0 est une mesure finie. La décomposition de Lebesgue de v_0 par rapport à λ permet d'écrire;

$$v_0 \hat{G}_h = v_1 + v_0 \hat{G}_h + v_1 M_{1-h} \hat{U}_h \quad \text{où} \quad v'_0 \ll \mu \ \text{et} \ v_1 \perp \mu.$$

Mais $v_1 M_{1-h} \hat{U}_h = (v_1 M_{1-h} \hat{P})\,\hat{G}_h$ et aussi

$$v_0 \hat{G}_h = v_1 + (v'_0 + v_1 M_{1-h} \hat{P})\,\hat{G}_h, \quad \text{avec} \quad v'_0 + v_1 M_{1-h} \hat{P} \ll \mu$$

ce qui démontre la partie directe de la proposition.

Inversement, si $v = (G'_h f)\cdot\mu + \lambda$ avec les conditions indiquées, v est alors h-co-excessive car

$$v M_{1-h} \hat{P} = f\cdot\mu M_{1-h} \hat{U}_h + \lambda M_{1-h} \hat{P} \leqq f\cdot\mu M_{1-h} \hat{U}_h + f\cdot\mu \leqq (f\cdot\mu)\,\hat{G}_h \leqq v.$$

Montrons maintenant que v ne peut être qu'un potentiel; comme λ est fini, on peut écrire

$$\begin{aligned}(\lambda + f\cdot\mu)\,\hat{G}_h &= \lambda \hat{G}_h + (f\cdot\mu)\,\hat{G}_h \\ &= \lambda + \lambda M_{1-h} \hat{U}_h + f\cdot\mu \hat{G}_h \\ &= v + \lambda M_{1-h} \hat{U}_h.\end{aligned}$$

Les mesures $(\lambda + f\cdot\mu)\,\hat{G}_h$ et $\lambda M_{1-h} \hat{U}_h$ étant des h-potentiels, v ne peut qu'être un h-potentiel sinon $(\lambda + f\cdot\mu)\,\hat{G}_h$ contiendrait une partie h-co-invariante.

IV. Equation de Poisson, potentiels et frontieres

Danc cette partie, $(E, \mathscr{E})$ est un espace l.c.d., P une probabilité de transition fellerienne sur $(E, \mathscr{E})$. Les hypothèses et les notations sont celles de la partie II.

Une charge est une mesure bornée (resp. fonction mesurable bornée) v (resp. f) telle que $v(1)=0$ (resp. $\mu(f)=0$, $|f|\in S$). Nous notons $\mathcal{N}$ l'espace de charges (resp. $\mathcal{N}'$).

Un noyau propre W sur $(E, \mathscr{E})$, non nécéssairement positif, est un potentiel récurrent pour P si,

$$(\forall f \in S_b) \qquad W(f) < \infty,$$
$$(\forall f \in \mathcal{N}') \qquad (I-P)(I+W)f = f,$$
$$(\forall v \in \mathcal{N}) \qquad v(I+W)(I-P) = v.$$

Il est facile de démontrer que si W est un potentiel récurrent de P, tous les autres potentiels de P sont de la forme $W' = W + f \otimes \mu + 1 \otimes \eta$ où f est une fonction mesurable finie et η une mesure finie sur les fonctions de S.

En particulier, pour toute fonction h de H, telle que $U_h \geqq 1 \otimes \mu$, le noyau positif défini par Neveu

$$W_h = \sum_{n \geqq 0} (V M_h)^n V_h \quad \text{où} \quad V_h = U_h - 1 \otimes \mu,$$

est un noyau potentiel de P dont on trouvera les propriétés dans Neveu. (La fonction h n'a pas besoin d'être strictement positive, voir Revuz [8]).

Dans la suite nous supposons qu'il existe une fonction $h \in K_1$ telle que $U_h \geqq 1 \otimes \mu$. Ceci sera vrai en particulier sous des hypothéses de dualité. Pour ces fonctions, il existe donc un noyau potentiel associé W_h. Nous poserons pour faciliter les notations $\tilde{h} = \dfrac{h}{\mu(h)}$.

1) Proposition (IV,1). *Soit $h \in K_1$, telle que $U_h > 1 \otimes \mu$ et W_h le noyau potentiel associé. La formule*

$$W_h(s, \cdot) = [U_h(s, \cdot) - \mu](I + M_h W_h)$$

prolonge le noyau W_h sur $E+S$ de telle sorte que l'application $y \to W_h(y, \cdot)$ soit vaguement continue sur $E+S$. Pour toute fonction $h' \in K_1$

$$(\forall y \in E+S) \qquad W_h(y, \cdot) + U_{h'}(y, \tilde{h})\,\mu = U_{h'}(y, \cdot)(I + M_{h'} W_h).$$

Enfin $W_h(y, \cdot)$ est positive et finie sur les fonctions spéciales pour tout $y \in E+S$.

Démonstration. Puisque $U_h(y, \cdot)$ est vaguement continue en y sur $E+S$, que $U_h \geqq 1 \otimes \mu$ et que E est dense dans $E+S$, la mesure $W_h(s, \cdot)$ est positive. Si maintenant h' est une fonction de K_1, pour tout y de E,

$$W_h(y, \cdot) + U_{h'}(y. \tilde{h})\,\mu = U_{h'}(y, \cdot)(I + M_{h'} W_h).$$

Comme E est dense dans $E+S$, il existe une suite (y_n) de E convergeant vers tout point y de la frontière S. Il est d'autre part facile de voir que si h est dans K_1 $W_h f$ est une fonction continue bornées dès que $f \in \mathscr{C}_K$. Il résulte de là que, si h' est aussi dans K_1, la mesures $U_{h'}(y_n, \cdot)(I + M_{h'} W_h)$ converge vaguement vers la mesure $U_h(y, \cdot)(I + M_{h'} W_h)$ lorsque y_n tend vers y dans $E+S$. Il suffit donc de passer à la limite dans la formule ci dessus. Lorsque $h'=h$ on obtient la première formule de la proposition en remarquant que $W_h(h)$ est la constante $\frac{1-\mu(h)}{\mu(h)}$. Comme enfin $U_h(s,\cdot)$ est h-invariante lorsque $s\in S$, la mesure $W_h(s,\cdot)$ sera finie sur les fonctions spéciales.

La proposition précédente permet de relier la notion de frontière que nous avons introduite à celle de Brunel et Revuz, obtenue par compactification. Dans cette dernière méthode, les points frontières correspondent aux valeurs d'adhérence de l'ensemble de mesures relativement vaguement compact $\{W_h(x,\cdot), x\in E\}$ lorsque $x\to\Delta$. Il résulte des propriétés de II et de la proposition (IV,1) que tout point de la frontière S introduite en II est valeur d'adhérence de cet ensemble de mesures. La frontière S est donc homéomorphe à une partie de la frontière obtenue par compactification. Elle est strictement contenue en générale car une valeur d'adhérence quelconque de $\{W_h(x,\cdot), x\in E\}$ lorsque $x\to\Delta$ ne correspond pas nécéssairement à une mesure invariante h-*extremale.*

La proposition suivante donne une signification en prolongement de W_h à $E+S$.

Proposition (IV,2). *Soit $h\in K_1$ telle que $U_h\geqq 1\otimes\mu$; les solutions positives η de l'équation de Poisson aux mesures*

$$\eta(I-P)=-(\tilde{h}\cdot\mu)P \tag{IV,2,1}$$

vérifiant $\eta(h)=1$ et finies sur les fonctions de S sont données par la formule

$$\eta=\frac{\mu(h)}{1-\mu(h)}\int_S W_h(s,\cdot)\,dm(s)$$

à un multiple de μ près où m est une probabilité quelconque sur S.

Démonstration. Nous allons montrer que les solutions positives η de (IV,2,1) finies sur les fonctions de S et telles que $\eta(h)=\frac{1}{\mu(h)}$ sont de la forme $v(I+M_h W_h)$ où $v\in I_h$ vérifie $v(h)=1$.

Remarquons d'abord que toutes les mesures de cette forme sont solutions de (IV,2,1). En effet,

$$\begin{aligned}(I+M_h W_h)(P&=M_{1-h}P+M_h[P+WP]\\&=M_{1-h}P+M_h[W+1\otimes(\tilde{h}\cdot\mu)P]\end{aligned} \tag{IV,2,2}$$

et $v(I+M_h W_h)h)=\frac{1}{\mu(h)}$ puisque $W_h(h)=\frac{1-\mu(h)}{\mu(h)}$ si $v(h)=1$.

Soit inversement η une solution de (IV,2,1) vérifiant les conditions indiquées. En multipliant par $\sum_{0\leqq m\leqq n}(M_{1-h}P)^m$ la formule

$$\eta+\tilde{h}\cdot\mu P=\eta P,$$

il vient,

$$\eta\Big(\sum_{0\leqq m\leqq n}(M_{1-h}P)^m\Big)+\tilde{h}\cdot\mu\sum_{m=0}^{n}P(M_{1-h}P)^m$$
$$=\eta\left[M_h\sum_{m=0}^{n}P(M_{1-h}P)^m+\sum_{m=1}^{n+1}(M_{1-h}P)^m\right]$$

en appliquant le deux membres de l'égalité précédente aux fonctions de $\mathscr{C}_K$, nous obtenons,

$$\eta+\tilde{h}\cdot\mu P\sum_{0\leqq m\leqq n}(M_{1-h}P)^m=\eta M_h\sum_{m=0}^{n}P(M_{1-h}P)^m+\eta(M_{1-h}P)^{n+1}$$

puisque $\eta(M_{1-h}P)^k f<\infty$ pour tout k dès que $f\in S$. Nous obtenons donc en faisant tendre η vers $+\infty$

$$\eta+\tilde{h}\cdot\mu U_h\geqq\eta M_h U_h.$$

En remarquant que $\tilde{h}\cdot\mu U_h=\dfrac{1}{\mu(h)}\mu=\eta(h)\otimes\mu$ si $\eta(h)=\dfrac{1}{\mu(h)}$ ce qui précède montre que la mesure positive η est excessive pour le noyau positif $M_h U_h-h\otimes\mu=M_h V_h$. La mesure η étant d'autre part finie sur les fonctions de S, elle est un $M_h V_h$ potentiel. En effet, il est possible de décomposer η suivant Riesz; soit η_1 la partie $M_h V_h$ invariante de η. Pour toute fonction positive f telle que $0<\eta_1(f)<\infty$, $\eta_1(I+M_h W_h)f=\infty$ puisque $I+M_h W_h=\sum_{n>0}(M_h V_h)^n$, mais pour tout $f\in S$,

$$\eta_1(I+M_h W_h)f<\eta(f)+(\sup_E W_h f)\,\eta_1(h)<\infty$$

et par conséquent $\eta(f)=0$. ce qui montre que $\eta_1=0$.

Soit donc η_0 une mesure positive telle que $\eta=\eta_0(I+M_h W_h)$. Comme,

$$\eta(h)=\eta_0(h)\left[1+\frac{1-\mu(h)}{\mu(h)}\right],$$

$\eta_0(h)=1$. D'autre part, $\eta_0\leqq\eta$ et η_0 est finie sur les fonctions de S. Mais, comme η est solution de (IV,2,1), la formule (IV,2,2) montre que,

$$\eta_0 M_{1-h}P+\eta M_h W_h+\tilde{h}\cdot\mu P=\eta_0+\eta_0 M_h W_h+\tilde{h}_0\mu P.$$

En appliquant les deux membres aux fonctions de S, nous obtenons,

$$\eta_0 M_{1-h}P=\eta_0.$$

La mesure η_0 est dans I_h.

Il suffit maintenant d'appliquer les formules de la proposition (IV,1) pour obtenir le résultat cherché.

2) Nous allons maintenant associer à chaque point de $E+S$ un noyau potentiel récurrent de P, W jouissant de propriétés intéressantes:

Proposition (IV,3). *Soit h une fonction de K_1 telle que $U_h \geqq 1 \otimes \mu$. La formule*

$$W_y = W_h - 1 \otimes [\delta_y + W_h(y, \cdot)] \quad avec \quad \delta_y = \begin{cases} y & si\ y \in E \\ 0 & si\ y \in S \end{cases}$$

défine pour tout y de $E+S$ un noyau potentiel récurrent vérifiant en outre

(1) $P + W_y P = W_y + 1 \otimes \delta_y$

(2) *Pour tout* $h' \in S_1$

$$U_{h'} + W_y M_{h'} U_{h'} = W_y + 1 \otimes G'_h(y, \cdot) \tag{$*$}$$

(3) *Si $y \in E$ la fonction $W_y(h)$ est la constante $-h(y)$*

(4) *Pour tout x de E, l'application $y \to W_y(x, \cdot)$ est vaguement continue sur $E + S$. De plus, tous les noyaux potentiels vérifiant 2) sont de la forme $W_y + f \otimes \mu$ où f est une fonction finie.*

($*$) *Remarque. Lorsque $y \in E$ on peut supposer dans* (2) *que $h \in H$ et n'est pas μ-négligeable.*

Démonstration. Pour tout y de $E+S$ la mesure $\delta_y + W_h(y, \cdot)$ est finie sur les fonctions finies de S, le noyau W_y est donc d'après de qui a été dit plus haut un noyau potentiel récurrent de P. Démontrons les relations (1) et (2). Supposons pour cela d'abord y dans E. La relation, pour tout $h \in H$ ($\mu(h) \neq 0$)

$$U_{h'} + W_{h'} M_{h'} = W_h + 1 \otimes \tilde{h} \cdot \mu U_{h'},$$

s'écrit encore,

$$G_{h'}(y, \cdot) + (\varepsilon_y + W_h(y, \cdot)) M_{h'} U_{h'} = \varepsilon_y + W_h(y, \cdot) + \tilde{h} \cdot \mu U_{h'}.$$

D'un autre côté, un noyau potentiel de la forme $W_h + 1 \otimes \eta$ vérifiera (2) si et seulement si η est solution de l'équation de Poisson

$$\eta(I - M_{h'} U_{h'}) = (\tilde{h}_0 \cdot \mu P - \varepsilon_x) G_{h'}$$

puisque toutes les mesures intervenant sont finies sur les fonctions de S. Ceci démontre que W_y vérifie la relation (2). La formule (1) résulte des relations précédentes lorsque $h = 1$. Enfin, lorsque $y \in E$ il est immédiat que $W_y(h)$ est la constante $-h(y)$.

Lorsque $y \in S$, la mesure $W_h(y, \cdot)$ est d'après la proposition (IV,2) solution de l'équation de Poisson (IV,2,1), par suite,

$$W_h(y, \cdot) + \tilde{h} \cdot \mu P = W_h(y, \cdot) P.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} P + W_y P &= P + W_h P - 1 \otimes W_h(y, \cdot) - 1 \otimes \tilde{h} \cdot \mu P \\ &= W_h - 1 \otimes W_h(y, \cdot) = W_y \end{aligned}$$

les mesures étant comme toujours finies sur les fonctions de S. Ceci montre la formule (1). Nous allons montrer la formule (2) par passage à la limite, nous devons montrer pour cela d'abord la propriété (4). Elle résulte simplement de la proposition (IV, 1). Maintenant si h' est une fonction de K_1, le noyau $M_{h'} U_{h'}$ considéré comme opérateur sur les mesures est vaguement continu. Par suite, E étant dense dans $E+S$, pour tout y de S, nous avons par passage à la limite,

$$G_{h'}(y, \cdot)+W_h(y, \cdot)\ M_{h'} U_{h'}=W_h(y, \cdot)+\tilde{h}\cdot\mu U_{h'}.$$

La mesure $-W_h(y, \cdot)$ est donc solution de l'équation de Poisson

$$\eta(I-M_{h'} U_{h'})=\tilde{h}\cdot\mu U_{h'}-G_{h'}(y, \cdot).$$

Le même raisonnement que précédemment montre donc que W_y vérifie (2) pour toute fonction h de K_1.

Etendons maintenant cette propriété à toutes les fonctions de S_1. Si h' et h'' sont deux fonctions de S_1, les relations, si $h''\geqq h'$,

$$\begin{aligned} W_h(y, \cdot)(I-M_{h'} U_{h'}) &= W_h(y, \cdot)\,[(I-M_{h''} U_{h''})+(I-M_{h'} U_{h'})\,M_{h''-h'} U_{h''}] \\ &= W_h(y, \cdot)\,[(I-M_{h''} U_{h''})+(I-M_{h''} U_{h''})\,M_{h''-h'} U_{h'}] \end{aligned}$$

montrent que si la relation (2) est vraie pour h' elle est vraie pour toute fonction h'', telle que $h''\geqq h$ ou $h''\leqq h'$, puisque

$$\begin{aligned} \tilde{h}\cdot\mu U_{h'}-G_{h'}(y, \cdot) &= \tilde{h}\cdot\mu U_{h''}-G_{h''}(y, \cdot)+[\tilde{h}\cdot\mu U_{h'}-G_{h'}(y, \cdot)]\,M_{h''-h'} U_{h'} \\ &= [\tilde{h}\cdot\mu U_{h''}-G_{h''}(y, \cdot)]\,[I+M_{h''-h'} U_{h'}]. \end{aligned}$$

La relation (2) donc est vraie pour une fonction quelconque de S_1.

Il reste à déterminer les noyaux vérifiant (2). Nous avons vu qu'un noyau de la forme $W_h+1\otimes\eta$ vérifie (2) si et seulement si η est solution de l'équation de Poisson

$$\eta(I-M_{h'} U_{h'})=\tilde{h}\cdot\mu U_{h'}-G_{h'}(y, \cdot) \tag{$*$}$$

nous avons le petit lemme suivant:

Lemme. *Il existe une seule solution de l'équation, η, finie sur les fonctions de S_1, à l'addition d'un multiple de μ près, pour tout $h\in S_1$.*

Il suffit de démontrer le lemme pour $h>0$ vérifiant $U_h\geqq 1\otimes\mu$. Si η et η' sont deux solutions de $(*)$, la mesure $\lambda=\eta-\eta'$, qui est finie sur les fonctions de S_1 est $M_h U_h$ invariante. Par suite $\lambda^{\mp}\leqq\lambda^{\mp} M_h U_h$ ce qui s'écrit encore $\lambda^{\mp} M_h\leqq\lambda^{\mp} M_h U_h M_h$. La mesure $\lambda^{\mp} M_h$ étant bornée, c'est un multiple de μ. D'où le lemme.

(Il est facile de déduire le lemme pour toute fonction h de S_1.)

Il en résulte que W_y est le seul noyau potentiel de la forme $W_h+1\otimes\eta$ vérifiant (2) à un multiple de μ près.

Soit maintenant f une fonction finie, comme pour tout h' non μ négligéable $(f\otimes\mu)\,M_{h'} U_{h'}=f\otimes\mu$, tous les noyaux vérifiant (2) sont de la forme $W_y+f\otimes\mu$. Ceci achève la démonstration de la proposition.

Le noyau W_y dépend de la fonction h, soit h' une autre fonction de K_1 telle que $U_{h'}\geqq 1\otimes\mu$ et notons W_y' le noyau construit à partir de h' dans la proposition précédente. Alors,

$$(\forall y \in E+S) \qquad W_y = W'_y + [W_{h'}(y, \tilde{h}) - W_{h'}(\tilde{h})] \otimes \mu.$$

En effet, les noyaux W_h et $W_{h'}$ sont liés par

$$W_h + W_{h'}(\tilde{h}) \otimes \mu = W_{h'} + 1 \otimes \tilde{h}' \mu W_{h'}$$

et il suffit de remplacer W_y et W'_y par leurs valeurs.

Notons que si $y \in S$ $W_y(h) = 0$ si W_y est construit à partir de h. Il est possible de prolonger les noyaux W_y à $E+S$ en posant

$$W_y(s, \cdot) = W_h(s, \cdot) - [\delta_y + W_h(y, \cdot)].$$

Les fonctions $s \to W_y(s, \cdot)$ sont alors vaguement continues sur $E+S$. Notons en particulier la formule suivante:

$$(\forall s, s' \in S) \qquad W_s(s', \cdot) = W_h(s', \cdot) - W_h(s, \cdot).$$

On remarquera en particulier que $W_s(s, \cdot) \equiv 0$.

La proposition (IV,3) se généralise immédiatement de la façon suivante, $h \in K_1$ telle que $U_h \geqq 1 \otimes \mu$ étant fixée.

Proposition (IV,4). *Pour toute probabilité m sur $E+S$ la formule*

$$W_m = W_h - 1 \otimes (1_E \cdot m + m W_h)$$

défini un noyau potentiel récurrent vérifiant

(1) $P + W_m P = W_m + 1 \otimes 1_E \cdot m$

(2) *Pour tout $h \in S_1$*

$$U_{h'} + W_m M_{h'} U_{h'} = W_m + 1 \otimes v_m \quad \text{où} \quad v_m = \int_{E+S} m(dy)\, G_{h'}(y, \cdot)$$

(3) *la fonction $W_n(h)$ est la constante $-m(h)$.*

De plus, tous les noyaux potentiels vérifiant (2) *sont de la forme $W_m + f \otimes \mu$ où f est une fonction finie. Enfin*

$$W_m = \int_{E+S} W_y \, dm(y).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que la formule intégrale ci-dessus est équivalente à la définition de W_m. Les résultats s'obtiennent alors en intégrant par rapport à m ceux de la proposition (IV,3).

Bien entendu le noyau W_m dépend de la fonction h, si h' est une autre fonction de K_1 telle que $U_{h'} \geqq 1 \otimes \mu$ et si W'_m est le noyau construit comme dans la proposition à partir de $W_{h'}$, nous avons entre W_m et W'_m la relation $W_m = W'_m + m W_{h'}(\tilde{h}) \otimes \mu - W_{h'}(\tilde{h}) \otimes \mu$. Les noyaux W_m se prolongent naturellment à $E+S$. D'un autre côté pour tout de E la relation $W_m^+(x, \cdot) \leqq W_h(x, \cdot)$ montre que la partie positive de la mesure $W_m(x, \cdot)$ est une mesure spéciale. Nous allons voir maintenant que la proposition précédente donne tous les noyaux potentiels vérifiant cette propriété et l'égalité $P + WP = W$.

Proposition (IV,5). *Pour tout noyau potentiel W tel que*

(1) $(\forall x \in E)\, W^+(x, \cdot)$ *soit spéciale*

(2) $WP + P = W$

il existe une probabilité m sur S et une fonction mesurable finie p.s. f telles que

$$W = W_m + f \otimes \mu.$$

De plus pour toutes fonctions g de S et h de S_1,

$$\lim_{n\to\infty} W(M_{1-h}P)^n(g) = -\int_S m(ds)\, U_h(s, g).$$

Démonstration. Soit $h_0 \in K_1$ et W_{h_0} le potentiel positif associé. Il existe une fonction f finie partout et une mesure η intégrant les fonctions de S_b telles que

$$W = W_h + 1 \otimes \mu + f \otimes \mu.$$

Le noyau W vérifie la relation 2) si et seulement si $W_h + 1 \otimes \eta$ la vérifie. Il suffit donc de considérer les noyaux W de cette forme. Pour toute fonction h de S_1. Ces noyaux vérifient une relation de la forme

$$U_h + WM_h U_h = W + 1 \otimes \nu, \qquad (*)$$

où ν est une mesure finie sur les fonctions de S_b. Mais, compte-tenu de la relation (2)

$$\begin{aligned} U_h + WM_h U_h &= (I + WM_h)(P + U_h M_{1-h} P) \\ &= WM_{1-h}P + WM_h P + 1 \otimes \nu M_{1-h} P + P \\ &= W + 1 \otimes \nu M_{1-h} P. \end{aligned}$$

On en déduit que,

$$W + 1 \otimes \nu = W + 1 \otimes \nu M_{1-h} P.$$

Les mesures intervenant étant toutes finies sur les fonctions spéciales bornées, il suffit d'appliquer cette égalité à une fonction quelconque de S_b pour obtenir $\nu = \nu M_{1-h} P$.

Reprenons maintenant l'égalité $(*)$, écrite en tout x de E en la multipliant à droite par $(M_{1-h}P)^n$. Elle s'écrit,

$$\begin{aligned} &U_h(x, \cdot)(M_{1-h}P)^n + WM_h(x, \cdot)\, U_h(M_{1-h}P)^n \\ &\quad = W^+(x, \cdot)(M_{1-h}P)^n - W(x, \cdot)(M_{1-h}P)^n + \nu. \end{aligned}$$

Mais nous avons successivement

$$\lim_{n\to\infty} U_h(x, \cdot)(M_{1-h}P)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} WM_h(x, \cdot)\, U_h(M_{1-h}P)^n = 0$$

puisque $WM_h(x, \cdot)$ est une mesure bornée, enfin,

$$\lim_{n\to\infty} W^+(x, \cdot)(M_{1-h}P)^n = 0$$

puisque par hypothése la mesure $W^+(x, \cdot)$ est spéciale.

Il résulte donc de tout ceci que la suite de mesure positive, finie sur les fonctions de S_b, $W(x, \cdot)(M_{1-h}P)^n$ converge lorsque $n \to \infty$ et que

$$\lim_{n\to\infty} W(x, \cdot)(M_{1-h}P)^n = -\nu.$$

En particulier, ν est une mesure positive. Comme d'autre part $\nu(h)$ est fini, nous venons de montrer que ν est un élément de I_h. Mais la relation $(*)$ impose $\nu(h) = 1$. Il existe donc une probabilité unique sur S telle que

$$\nu = \int_S m(ds)\, U_h(s, \cdot).$$

La proposition (IV,4) montre qu'alors $W = W_m$, ce qui permet de conclure la démonstration de la proposition.

3) Nous reprenons maintenant les hypothéses de la partie III, le noyau P admet alors une densité bi-mesurable $p(\cdot, \cdot)$ et $\hat{P}$ désigne le noyau de Harris dual. Le résultats du paragraphe précédent nous permettent d'obtenir tous les noyaux potentiels W (resp $\hat{W}$) vérifiant,

$$\begin{aligned} &(\forall x \in E)\, W^+(x, \cdot) \text{ spéciale} \quad &&(\text{resp. } (\forall x \in E)\, \hat{W}^+(x, \cdot) \text{ spéciale}) \qquad \text{(IV,5,1)} \\ &P + WP = W &&(\text{resp. } \hat{P} + \hat{W}\hat{P} = \hat{W}). \end{aligned}$$

Ces noyaux étant définis à une expression de la forme $f \otimes \mu$ (resp. $\hat{f} \otimes \mu$) prés, il est possible de préciser les fonctions $\hat{f}$ et $\hat{f}$ en demandant aux noyaux potentiels W et $\hat{W}$ d'être en dualité par rapport à la mesure μ. Rappelons que $\hat{S}$ désigne la frontière de $\hat{P}$, d'autre part pour un noyau Q un noyau Q' est une modification négligéable de Q (par rapport à la mesure μ') si pour presque tout x de E les mesures $Q(x, \cdot)$ et $Q'(x, \cdot)$ sont égales.

Dans la proposition qui se suit, h est un élément de K_1 vérifiant $U_h \geqq 1 \otimes \mu$ et $\hat{U}_h \geqq 1 \otimes \mu$; un couple $(W, \hat{W})$ de noyaux potentiels est un couple de noyaux tel que W (resp. $\hat{W}$) soit un potentiel de P (resp. $\hat{P}$).

Proposition (IV,6). *Pour tout couple de noyaux potentiels $(W, \hat{W})$ sur (E, ξ) vérifiant,*

(1) *Pour tout x de E les mesures $W^+(x, \cdot)$ (resp. $\hat{W}^+(x, \cdot)$) sont spéciales (resp. co-spéciales)*

(2) $P + WP = W \quad \hat{P} + \hat{W}\hat{P} = \hat{W}$

(3) *Les noyaux W et $\hat{W}$ sont en dualité par rapport à μ;*

il existe un couple unique de mesure $(m, \hat{m})$ sur $S \times \hat{S}$ tel que à une modification négligéable près

$$W = W_m + \hat{f} \otimes \mu$$
$$\hat{W} = \hat{W}_{\hat{m}} + f \otimes \mu$$

avec $m W_h = -f \cdot \mu$; $\hat{m} \hat{W}_h = -\hat{f} \cdot \mu$; à l'addition d'un même multiple de $1 \otimes \mu$ près.

(Par «addition d'un même multiple de $1\otimes\mu$» nous entendons que les autres noyaux associès à $(m, \hat{m})$ sont de la forme $W'=W+c\otimes\mu$ et $\hat{W}'=\hat{W}'+c\otimes\mu$ avec la même constante c.)

Démonstration. Soit h un élément de $\mathscr{C}_K$ vérifiant à la fois $U_h\geqq 1\otimes\mu$ et $\hat{U}_h\geqq 1\otimes\mu$, l'on peut construire les deux noyaux potentiels positifs de Neveu W_h et $\hat{W}_h$. Les noyaux W et $\hat{W}$ vérifiant les propriétés (1) et (2) sont de la forme,

$$W=W_h+1\otimes m\,W_h+f\otimes\mu \qquad \hat{W}=\hat{W}_h+1\otimes\hat{m}\,\hat{W}_h+\hat{f}\otimes\mu;$$

où f et $\hat{f}$ sont partout finies, et m et $\hat{m}$ deux mesures portées par S et $\hat{S}$.

Les mesures $m\,W_h=\int_S m(ds)\,U_h(s,\cdot)(I+M_h W_h)$ et $\hat{m}\hat{W}_h$ sont d'après les hypothéses sur P absolument continues par rapport à μ. Il existe donc deux fonctions g et $\hat{g}$ finies partout et uniques presque sûrement telles que

$$m\,W_h=g\cdot\mu \quad \text{et} \quad m\,\hat{W}_h=\hat{g}\cdot\mu.$$

Maintenant la formule générale,

$$(\forall h_1, h_2\in\mathscr{E}_+) \qquad \langle(g\otimes\mu)(h_1), h_2\rangle=\langle h_1, (1\otimes g\cdot\mu)\cdot(h_2)\rangle;$$

montre que si W et $\hat{W}$ sont en dualité, on doit avoir,

$$f\otimes\mu+1\otimes g\cdot\mu=1\otimes\hat{f}\cdot\mu+\hat{g}\otimes\mu \qquad [\mu]\ \text{p.s.}$$

Ceci implique que $f-\hat{g}$ est μ.p.s. une constante et qu'il en est donc aussi de même de $g-\hat{f}$. Cela signifie que les noyaux W et $\hat{W}$ sont μ presque sûrement de la forme,

$$W=W_h+1\otimes g\cdot\mu+\hat{g}\otimes\mu+c_1\otimes\mu$$
$$\hat{W}=\hat{W}_h+1\otimes\hat{g}\cdot\mu+g\otimes\mu+c_2\otimes\mu$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes. Mais la dualité impose $c_1=c_2$. Ce qui démontre la proposition.

Appendice

Frontière d'une résolvante de Harris

Les résultats précédents s'adaptent sans difficultés aux processus de Markov à temps continu. Soit E un espace l.c.d., munie de ses boréliens $\mathscr{E}$; $(U_p, p>0)$ une résolvante markovienne de Feller sur $(E, \mathscr{E})$, supposée vérifier la condition de récurrence de Harris et de mesure invariante μ. Nous conservons la terminologie des chapitres précédents. Le lien avec les chaines se fait à l'aide du noyau U_1 qui vérifie les hypothèses du II.

Par définition la frontière de la résolvante (U_p) sera la frontière au sens de la partie II de la probabilité de transition U_1.

Pour toute fonction h de S_1, les cônes de mesures $C_h=\{\nu\geqq 0|\nu M_{1-h}U_1=\nu, \nu(h)<\infty\}$; sont isomorphes entre eux, et si l'on pose $G_h=\sum_{n\geqq 0}(M_{1-h}U_1)^n=I+M_{1-h}U_h$ sur E, le noyau G_h se prolonge d'après II à $E+S$, de façon que toute mesure $\nu \in C_h$ s'écrive de manière unique

$$\nu = \int_{E+S} G_h(x, \cdot)\, m(dx).$$

Remarquons maintenant que si p est un réel positif tel que $h \leqq p$, la formule

$$M_{p-h} U_p = M_{1-h} U_1 + (1-p)(U_p - M_{1-h} U_1 U_p);$$

montre que les mesures h-invariantes de C_h sont les mesures vérifiant,

$$(\forall p \geqq h) \qquad \nu M_{p-h} U_p = \nu.$$

Nous dirons qu'un noyau propre W sur $(E, \mathscr{E})$ est un potentiel récurrent de la résolvante (U_p) si,

(1) pour toute fonction spéciale bornée f, Wf est finie.
(2) pour toute charge f,

$$(\forall p > 0) \qquad Wf = U_p f + p\, U_p W f,$$

(3) pour toute charge

$$(\forall p > 0) \qquad \nu W = \nu U_p + p\, \nu W U_p.$$

En notant tojours K_1 l'ensemble des fonctions h de $\mathscr{C}_k$, telles que $U_h > 1 \otimes \mu$, on peut construire le noyau potentiel positif $W_h = \sum_{n \geqq 0} (V_h M_h)^n V_h$, où $V_h = U_h - 1 \otimes \mu$.

Comme dans la proposition (IV,1), W_h se prolonge à $E+S$ de manière que $x \to W_h(x, \cdot)$ soit vaguement continue sur $E+S$; et l'on a,

Les solutions positives η, vérifiant $\eta(h) = 1$, de l'équation de Poisson

$$\eta(I - p\, U_p) = -\tilde{h} \cdot \mu\, p\, U_p, \qquad (p > 0)$$

sont toutes données par la formule

$$\eta = \frac{\mu(ph)}{1 - \mu(ph)} \int_S p\, W_{ph}(s, \cdot)\, m(ds).$$

De la même façon il est possible d'étendre les propositions (IV,4) et (IV,5), pour caractériser les noyaux potentiels W vérifiant,

1) pour tout x de E, $W^+(x, \cdot)$ est spéciale,
2) $W = U_p + p\, W U_p$, $p > 0$.

Il existe une seule mesure portée par S, m, et une fonction f finie partout telle que

$$W = W_m + f \otimes \mu,$$

avec $W_m = W_h - 1 \otimes m\, W_h$.

Par exemple, pour le mouvement brownien linéaire; si $h \in \mathscr{C}_K$, les mesures h-invariants sont absoluement continues par rapport à ux et de densité affine hors du support de h. Il y a donc deux points frontières.

Pour le mouvement brownien plan, la frontière est réduit à un seul point.

Enfin, on puet généraliser l'exemple de la partie II, en prenant une famille $(D_r)_{r\in\mathbb{R}_+}$ de demi droites du plan issues de l'origine 0; et, en considérant la diffusion continue, X_t suivante, sur chaque droite, X_t est un pont brownien, avec répartition uniforme en 0 sur les droites D_r. La diffusion est de Harris et sa frontière de Martin a la puissance du continu.

Bibliographie

1. Brunel, A., Revuz, D.: Marches récurrentes au sens de Harris sur les groupes localement compacts I. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Sér. **4**, 7, fasc. 1, pp. 273–310 (1974)
2. Brunel, A., Revuz, D.: Quelques applications probabilistes de la quasi compacité. Ann Inst. H. Poincaré **10**, 301–337 (1974)
3. Brunel, A., Revuz, D.: Marches récurrentes au sens de Harris sur les groupes localement compact. (à paraitre)
4. Kemeny, J.G., Snell, J.L.: Boundary theory for recurent Marcov chains. Trans. Amer. Math. Soc. **106**, 495–520 (1963)
5. Kemeny, J.G., Snell, J.L., Knapp, A.W.: Denumerable Markov chains. Princeton: Van Nostrand 1966
6. Neveu, J.: Potentiels markovien discrêt. Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont Ferrand, **24**, 37–89 (1964)
7. Neveu, J.: Potentiel recurrent des chaines de Harris. Ann. Inst. Fourier Grenoble, **2**, 85–130 (1972)
8. Revuz, D.: Markov chains. Amsterdam: North Holland 1975
9. Bronner, F.: Représentation à la frontière en théorie du potentiel récurrent. C.R. Acad. Sci., Paris, Série A, **281**, 1055–1057 (1975)
10. Bronner, F.: Sur la frontière d'un processus récurrent et l'équation de Poisson. C.R. Acad. Sci., Paris, Série A, **283**, 211–214 (1975)

Reçu le 11 Juin 1976; en forme finale le 21 Mai 1978