Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
44, 177–190 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Processus Gaussiens, equivalence d'ensembles et specification locale

Philippe Blanchard et Charles Pfister*
Fakultät für Physik – Z.I.F., Universität Bielefeld, D 4800 Bielefeld

I. Introduction

Afin de rendre plus facile la lecture de cette note, nous avons séparé les résultats purement mathématiques de ceux ayant trait à leur interprétation physique. Ainsi, dans une première partie, nous établissons que la mesure de Wiener ainsi que d'autres mesures associées à des processus stochastiques gaussiens à incréments indépendants sont des champs stochastiques déterminés par des probabilités conditionnelles au sens de Dobrushin ([1] et paragraphe II). Le paragraphe III est consacré à l'introduction de deux spécifications locales dont nous construisons au paragraphe suivant tous les champs stochastiques associés par la méthode de Föllmer [2], nous inspirant pour ce faire d'un travail récent de Nyguyen et Zessin [3]. Dans la seconde partie, qui fait l'objet du paragraphe V, nous discutons et interprétons physiquement les résultats obtenus; en particulier, nous montrons comment les résultats du paragraphe IV sont en relation avec le problème classique de l'équivalence des ensembles de la mécanique statistique. Enfin, nous expliquons aussi comment la méthode utilisée peut se généraliser et permet de traiter des processus de diffusion généraux sur la droite, associés à l'équation de la chaleur avec un terme de potentiel. Dans une remarque finale, l'application de ces idées à certains modèles à deux dimensions de la théorie quantique des champs est mentionnée.

Que soient ici remerciés nos amis Sergio Albeverio, Rheinhardt Lang, Nguyen Xuan Xanh et Hans Zessin pour les réponses qu'ils ont su donner à nos nombreuses questions. Nous remercions aussi R. Høegh-Krohn pour une intéressante discussion.

II. Champs stochastiques

Pour la convenance du lecteur nous allons, après avoir rappelé quelques définitions, décrire les résultats de Föllmer, renvoyant à son séminaire [2] pour la plupart des détails techniques et pour les démonstrations.

* C.N.R.S., Centre de Physique Théorique – F13274 Marseille

0044-3719/78/0044/0177/$02.80

Soient (Ω, F) un espace polonais et $(\hat{\mathsf{F}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille décroissante de sous-tribus de F. Une *spécification locale* $\Pi=(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de noyaux de probabilité Π_n sur $\Omega\times F$ vérifiant les conditions suivantes:

$$\Pi_n(.,A) \text{ est } \hat{\mathsf{F}}_n\text{-mesurable } \forall A\in\mathsf{F}, \tag{2.1}$$

$$\Pi_n(.,A)=\mathbb{1}_A(.)\ \forall A\in\hat{\mathsf{F}}_n, \tag{2.2}$$

$$\Pi_n(\omega,A)=\int_{\forall n\geqq m\ \forall\omega\in\Omega,\ \forall A\in\mathsf{F}} \Pi_n(\omega,d\eta)\,\Pi_m(\eta,A), \tag{2.3}$$

Un *champ stochastique associé* à la spécification locale Π, appelé aussi *état de Gibbs*, est une loi de probabilité P sur (Ω, F) telle que

$$E_P[A\,|\,\hat{\mathsf{F}}_n](\omega)=\Pi_n(\omega,A) \qquad P\text{ p.s.} \tag{2.4}$$

Nous désignerons par $\mathscr{G}(\Pi)$ l'ensemble des champs stochastiques associés à Π. $\mathscr{G}(\Pi)$ peut être vide; dans le cas contraire, c'est un ensemble convexe et Föllmer a montré que tout état de Gibbs $P\in\mathscr{G}(\Pi)$ peut être décomposé en états extrémaux. Sa démonstration repose sur des propriétés générales des espaces polonais et sur le théorème de convergence des martingales. En particulier, elle ne suppose aucune propriété de compacité pour $\mathscr{G}(\Pi)$. Soit $E(\Pi)$ l'ensemble des limites étroites $\rho_\omega(.)=\lim_n \Pi_n(\omega,.)$, que l'on peut construire en faisant varier ω. L'ensemble $E(\Pi)$ s'appelle la *frontière de Dynkin-Martin* associée à Π. Supposons maintenant que $\mathscr{G}(\Pi)$ n'est pas vide et soit alors $P\in\mathscr{G}(\Pi)$. Alors on montre que $\lim_n \Pi_n(\omega,.)=\rho_\omega(.)$ existe P p.s. et que si $\varphi\in L^1(P)$

$$\rho_\omega(\varphi)=E_P[\varphi\,|\,\hat{\mathsf{F}}_\infty](\omega) \quad P\text{ p.s.} \tag{2.5}$$

avec $\hat{\mathsf{F}}_\infty=\bigcap_1 \hat{\mathsf{F}}_n$. Il résulte immédiatement de (2.5) d'une part, que $\rho_\omega(.)\in\mathscr{G}(\Pi)$ P p.s. et, d'autre part, que:

$$\rho_\omega(\{\omega'\in\Omega\,|\,\rho_{\omega'}=\rho_\omega\})=1 \quad P\text{ p.s.} \tag{2.6}$$

Désignons enfin par $E^*(\Pi)$ le sous-ensemble suivant de $E(\Pi)$:

$$E^*(\Pi)=\{\rho_\omega\in E(\Pi)\,|\,\rho_\omega\in\mathscr{G}(\Pi)\,\rho_\omega \text{ vérifie (2.6)}\},$$

$E^*(\Pi)$ est appelée la *partie essentielle de la frontière Dynkin-Martin.*

Pour chaque état de Gibbs $P\in\mathscr{G}(\Pi)$ on obtient ainsi que: $\rho_\omega(.)\in E^*(\Pi)$ P p.s. et la propriété (2.5) implique que P possède une représentation intégrale sur $E^*(\Pi)$. En particulier on peut identifier $E^*(\Pi)$ avec $\mathscr{G}_{\text{ex}}(\Pi)$, l'ensemble des états extrémaux de $\mathscr{G}(\Pi)$.

III. Les specifications locales

A partir de maintenant Ω désignera l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ et nulles à l'origine, muni de la norme de la convergence uniforme, $\|\varphi\| = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$. Nous notons F la tribu borélienne de Ω; cette tribu est aussi engendrée par les fonctions continues π_t sur Ω, $\pi_t(\varphi)=\varphi(t)$ et t parcourant une suite dense dans $[0,1]$. Nous considérons alors la mesure de probabilité $W(\mu)$ sur (Ω, F) définie par le processus stochastique X_t gaussien à incréments indépendants tel que $X_0=0$ presque sûrement et que $X_t - X_s$ $0\leqq s<t\leqq 1$ soit une variable gaussienne centrée de variance $\mu([s,t])$, où μ désigne une mesure de Radon donnée, équivalente à la mesure de Lebesgue. En particulier si μ est égale à la mesure de Lebesgue, $W(\mu)$ n'est rien d'autre que la mesure de Wiener.

Afin de définir les deux spécifications locales annoncées Π^i $i=1,2$ nous allons commencer par introduire un espace (Ω', B) isomorphe à (Ω, F). La mesure μ étant une fois pour toutes fixée, pour chaque entier n positif ou nul nous considérons une partition de $[0,1]$ en 2^n intervalles consécutifs de même mesure, dont les extrémités sont notées $t_{n,0}=0, t_{n,1}, \ldots, t_{n,2^n}=1$. Soient alors $I_n = \{t_{n,k} | k=0,1,\ldots,2^n\}$, $I=\bigcup_n I_n$.

Nous définissons les applications suivantes sur Ω

$$D_{n,k}\colon\ \varphi \to (\sqrt{2})^n [\pi_{t_{n,k}}\varphi) - \pi_{t_{n,k-1}}(\varphi)] = D_{n,k}(\varphi), \qquad 1\leqq k\leqq 2^n, \quad n\geqq 0, \tag{3.1}$$

$$U_{n,k}\colon\ \varphi \to \frac{1}{\sqrt{2}}[D_{n,2k-1}(\varphi) - D_{n,2k}(\varphi)], \qquad 1\leqq k\leqq 2^{n-1},\ n\geqq 1$$

$$U_{0,1}\equiv D_{0,1}, \tag{3.2}$$

$$S_n\colon\ \varphi \to S_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{2^n} [D_{n,k}(\varphi)]^2. \tag{3.3}$$

Un calcul élémentaire permet de montrer que

$$S_n(\varphi) = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} [\pi_{t_{n,k}}(\varphi) - \pi_{t_{n,k-1}}(\varphi)]^2$$

$$S_n(\varphi) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{2^{m-1}} [u_{n,k}(\varphi)]^2 + [u_{0,1}(\varphi)]^2. \tag{3.4}$$

Toutes les applications que nous venons d'introduire dépendent de μ par l'intermédiaire de la suite I dans $[0,1]$. Il en sera de même pour l'isomorphisme Φ de Ω sur Ω' qui va faire l'objet de la proposition 1.

L'espace Ω' est le sous espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué par les suites réelles $C=(C(m))_{m\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les deux propriétés suivantes:

$$\lim_m C(m)\,p(m) = 0, \tag{3.5}$$

$$|||C||| \equiv \sup_{m\in\mathbb{N}} |p(m)\,C(m)| < +\infty. \tag{3.6}$$

Dans ces deux relations $(p(m))_{m\in\mathbb{N}}$ est défini par

$$p(m) = (\sqrt{2})^{-(n-1)} \qquad \text{si } 2^{n-1}<m\leqq 2^n,\ n\geqq 1\ \ p(1)=1. \tag{3.7}$$

Sur Ω' nous considérons la tribu B engendrée par les applications q_m: $C \to C(m)$ $m \in \mathbb{N}$.

Proposition 1. *Il existe une application linéaire bijective Φ de Ω sur Ω' telle que:*

a) *Φ et Φ^{-1} soient continues,*

b) *Φ et Φ^{-1} soient mesurables.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \Omega$; nous définissons Φ par

$$\Phi(\varphi) = (U_{0,1}(\varphi), U_{1,1}(\varphi), U_{2,1}(\varphi), \ldots). \tag{3.8}$$

Φ est linéaire et continue. On a en effet: $|||\Phi(\varphi)||| \leqq 4\|\varphi\|$. La continuité de Φ entraine que la condition (3.5) est satisfaite; elle implique aussi l'injectivité de Φ car les $U_{n,k}(\varphi)$ déterminent $\Pi_t(\varphi) = \varphi(t)$ pour $t \in I$. Pour établir que Φ est surjectif, il faut montrer qu'il existe un ensemble dense dans Ω dont l'image par Φ est un ensemble dense dans Ω'. A tout φ de Ω et pour chaque n nous définissons une approximation φ_n de φ par la relation

$$\varphi_n(t) = \varphi(t_{n,k-1}) + \frac{\mu([t_{n,k-1}, t])}{\mu([t_{n,k-1}, t_{n,k}])} [\varphi(t_{n,k}) - \varphi(t_{n,k-1})] \tag{3.9}$$

lorsque $t \in [t_{n,k-1}, t_{n,k}]$ $1 \leqq k \leqq 2^n$.

Faisant alors varier φ et n l'ensemble ainsi obtenu $\tilde{\Omega}$ est dense dans Ω. L'image par Φ de $\tilde{\Omega}$ est l'ensemble des suites ayant un nombre fini d'éléments non nuls: c'est donc un ensemble dense. Il est clair aussi que Φ et Φ^{-1} sont mesurables car F est engendrée par les $U_{n,k}$. □

Désignant par Ω'_n l'ensemble des suites réelles finies comptant 2^n éléments, nous pouvons définir $\hat{\Omega}'_n$ par la relation:

$$\Omega' = \Omega'_n \times \hat{\Omega}'_n$$

et nous notons B_n (respectivement $\hat{\mathsf{B}}_n$) les tribus engendrées par les ensembles cylindriques à base dans Ω'_n (respectivement $\hat{\Omega}'_n$). Les images de ces tribus par ϕ^{-1} sont F_n et $\hat{\mathsf{F}}_n$. Mais comme F_n est engendrée par les applications π_t pour $t \in I_n$ cela revient à dire que F_n est la tribu engendrée par les évènements qui ne dépendent que des instants $t \in I_n$; il est clair alors que $\hat{\mathsf{F}}_n$ est la tribu complémentaire engendrée par les évènements qui ne dépendent pas des instants $t \in I_n$.

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire les spécifications locales Π^1 et Π^2. Remarquons encore que l'application S_n définie par (3.3) peut aussi s'écrire $S_n(\varphi) = \|\Phi_n(\varphi)\|^2$ en désignant par $\Phi_n(\varphi)$ la restriction de $\Phi\varphi)$ à Ω'_n et par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\Omega'_n \simeq \mathbb{R}^{2^n}$. Soit alors $\varphi \in \Omega$, $A_1 \in \mathsf{F}_n$ et $A_2 \in \hat{\mathsf{F}}_n$; nous définissons $\Pi^1 = (\Pi^1)_{n \in \mathbb{N}}$ par:

$$\Pi^1_n(\varphi, A_1 \cap A_2) = \varepsilon_{\hat{\Phi}_n(\varphi)}(\Phi(A_2)) \otimes \lambda^n_{S_n(\varphi)}(\Phi(A_1)). \tag{3.10}$$

Dans cette expression $\hat{\Phi}_n(\varphi)$ est déterminé par la relation:

$$\Phi(\varphi) = (\Phi_n(\varphi), \hat{\Phi}_n(\varphi)) \in \Omega'_n \times \hat{\Omega}'_n$$

$\lambda_R^n(.)$ désigne la mesure uniforme normalisée sur la sphère $S^{2^n-1}(0,\sqrt{R})$ centrée à l'origine et de rayon $\sqrt{R}$ et $\varepsilon_a(.)$ est la masse unité en a sur $(\hat{\Omega}'_n, \hat{\mathsf{B}}_n)$. Quant à la seconde spécification locale, nous la définissons par:

$$\Pi_n^2(\varphi, A_1 \cap A_2) = \varepsilon_{\hat{\Phi}_n(\varphi)}(\Phi(A_2)) \otimes \Lambda_n(\Phi(A_1)) \tag{3.11}$$

où φ, A_1, A_2 sont choisis comme précédemment et $\Lambda_n(\Phi(A_1))$ est cette fois-ci la mesure sur $(\Omega'_n, \mathsf{B}_n)$ définie par:

$$\Lambda_n(\Phi(A_1)) = c_n \int_{\Phi(A_1)} dx \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|x\|^2\right)$$

$$c_n = \left(\sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}\right)^{2^n}. \tag{3.12}$$

Dans cette dernière relation, dx désigne la mesure de Lebesgue sur $(\Omega'_n, \mathsf{B}_n)$, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et $\sigma^2 \equiv \mu([0,1])$.

Proposition 2. *Soit $(\hat{\mathsf{F}}_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille décroissante de soustribus $\hat{\mathsf{F}}_n^1$ de Ω engendrées par $\hat{\mathsf{F}}_n$ et $S_n(.)$. Alors $\Pi^1 = (\Pi_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une spécification locale.*

Démonstration. L'image par Φ de $\hat{\mathsf{F}}_n^1$ est la tribu engendrée par $\hat{\mathsf{B}}_n$ et $\|\cdot\|$. Il est clair que $\Pi_n^1(\varphi, .)$ est une loi de probabilité sur (Ω, F) et que (2.2) est vérifié. Il suffit de s'assurer que la condition (2.1) est satisfaite pour $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ où $\Phi(A_1)$ est un borélien de $\mathbb{R}^+$, $\Phi(A_2)$ un borélien de $S^{2^n-1}(0,1)$ et $\Phi(A_3) \in \hat{\mathsf{B}}_n$, puisque les ensembles de ce type forment une semi-algèbre de Boole et que la classe des ensembles pour laquelle (2.1) est satisfaite est monotone. Pour un A de ce type, la vérification de (2.1) est alors immédiate. Quant à la propriété de compatibilité (2.3), elle résulte du calcul élémentaire qui suit:

Soient $B_1 \in \mathsf{B}_n$ et $B_2 \in \mathsf{B}_{n+1}$ $B_2 \notin B_n$. Alors:

$$\begin{aligned}
\lambda_{R^2}^{n+1}(B_1 \cap B_2) &= \int \nu(dr)\, \lambda_{r^2}^n(B_1)\, \lambda_{R^2-r^2}^n(B_2) \\
&= \int \nu(dr) \frac{\lambda_{r^2}^n(B_1)}{\lambda_{r^2}^n(\Omega_n^1)} \lambda_{r^2}^n(\Omega_n^1)\, \lambda_{R^2-r^2}^n(B_2) \\
&= \int \nu(dr)\, \lambda_{R^2-r^2}^n(B_2)\, \lambda_{r^2}^n[\Pi_n^1(\cdot, \Phi^{-1}(B_1))] \\
&= \lambda_{R^2}^{n+1}[\Pi_n^1(\cdot, \Phi^{-1}(B_1) \cap \Phi^{-1}(B_2))]
\end{aligned}$$

où $\nu(dr)$ désigne une mesure connue sur $\mathbb{R}^+$. □

De manière élémentaire, on établit aussi la

Proposition 3. *Soit $(\hat{\mathsf{F}}_n)$ la famille décroissante de sous tribus définies plus haut. Alors $\Pi^2 = (\Pi_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une spécification locale.*

Il est bon de noter encore une propriété des caractéristiques locales Π^1 et Π^2. Si $C_b(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions réelles continues et bornées sur Ω, alors il est facile de voir que si $f \in C_b(\Omega)$, c'est encore le cas pour $\Pi_n^1(.,f)$ et $\Pi_n^2(.,f)$. On exprime habituellement le fait que les $\Pi_n^i(.,f) \in C_b(\Omega)$ en disant que ces caractéristiques locales possèdent la *propriété de Feller*. Lorsque cette propriété est satisfaite, on montre alors facilement que la frontière de Dynkin-Martin $E(\Pi)$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathscr{G}(\Pi)$ des états de Gibbs [2].

IV. Construction de la frontière de Dynkin-Martin

Nous allons maintenant construire les frontières de Dynkin-Martin pour les deux spécifications locales définies en III. Puisque, aussi bien Π^1 que Π^2 possèdent la propriété de Feller, les frontières de Dynkin-Martin correspondantes sont formées uniquement d'états de Gibbs qui sont dans notre cas tous extrémaux. Nous reviendrons sur ce point plus loin. Rappelons que ces dernières sont formées de toutes les limites étroites $\lim_n \Pi_n^i(\varphi,.)$ $i=1,2$ pour autant, bien sûr, qu'elles existent.

Théorème 1. *Soit μ une mesure sur $[0,1]$ équivalente à la mesure de Lebesgue. Soit Π^2 la spécification locale correspondante. Alors la frontière de Dynkin-Martin se compose du seul élément $W(\mu)$. En particulier, on a $\mathscr{G}(\Pi^2)=\mathscr{G}_{\mathrm{ex}}(\Pi^2)$.*

Démonstration. Soit P un élément de la frontière de Dynkin-Martin. La restriction de P à F_n est égale à $\Phi^{-1}(\Lambda_n)$ (.); par conséquent, la frontière de Π^2 a, au plus, un seul élément. Soit alors $\varphi\equiv 0$ et $P_n(.)\equiv\Pi_n^2(0,.)$. Les trajectoires du processus stochastique $X_t=\pi_t$ associé à P_n sont les fonctions φ_n définies par (3.9). Soient $0\leqq s<t\leqq 1$, $t_{n,l}$ le plus petit élément de I_n tel que $s\leqq t_{n,l}$ et $t_{n,k}$ le plus grand élément de I_n tel que $t_{n,k}\leqq t$

$$X_t-X_s=X_{t_{n,l}}-X_s+X_{t_{n,k}}-X_{t_{n,l}}+X_t-X_{t_{n,k}}$$

est la somme de trois variables gaussiennes indépendantes dont les variances sont respectivement:

$$\frac{(\mu[s,t_{n,l}])^2}{\mu[t_{n,l-1},t_{n,l}]},\ \mu[t_{n,l},t_{n,k}],\ \frac{(\mu[t_{n,k},t])^2}{\mu[t_{n,k},t_{n,k+1}]}.$$

Par conséquent X_t-X_s est gaussienne de variance inférieure ou égale à $\mu([s,t])$. Donc:

$$\int (x_t-x_s)^4\,dP_n\leqq 3(\mu[s,t])^2$$

ce qui entraîne que la famille des P_n est équitendue et que les P_n convergent étroitement vers $W(\mu)$. □

Avant d'énoncer le théorème analogue pour la spécification Π^1 il est commode de faire la convention que si μ est une mesure $W(0\cdot\mu)\equiv W(0)$ est la masse unité en $\varphi\equiv 0$.

Théorème 2. *Soit μ une mesure de probabilité équivalente à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Soit Π^1 la spécification locale correspondante. Alors:*

a) $\lim_n \Pi_n^1(\varphi,.)$ *existe* $\Leftrightarrow \lim_n \frac{1}{2^n} S_n(\varphi)$ *existe,*

b) *si* $\lim \Pi^1_n(\varphi, .)$ *existe alors:*

$$\lim_n \Pi^1_n(\varphi, .) = W(\sigma^2(\varphi) \cdot \mu)$$

$$\text{où } \sigma^2(\varphi) = \frac{1}{\sigma^2} \lim_n \frac{1}{2^n} S_n(\varphi) \equiv \lim_n \sigma_n^2(\varphi),$$

c) $\mathscr{G}_{\mathrm{ex}}(\Pi^1) = \{W(\sigma^2 \cdot \mu) | 0 \leqq \sigma^2 < +\infty\}$.

Pour démontrer le théorème, nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme. *Soit* φ *donné. Posant* $P_n = \Pi^1_n(\varphi, .)$; *soient* $s, t \in I_n\, s < t$. *Alors la distribution* $Q_n(dx)$ *de* $X = \pi_t - \pi_s$ *calculée pour le processus défini par* P_n *est donnée par:*

$$Q_n(dx) = \begin{cases} \rho_n(x)\, dx & |x| \leqq [2^n \sigma_n^2 \mu([s,t])]^{\frac{1}{2}} \\ 0 & |x| > [2^n \sigma_n^2 \mu([s,t])]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

avec:

$$\rho_n(x) = \frac{c_n}{[\sigma_n^2 \mu([s,t])]^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{x^2}{2^n \sigma_n^2 \mu([s,t])}\right)^{\frac{2^n-3}{2}}$$

$$c_n^{-1} = 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2^{n-1} - \frac{1}{2})}{\Gamma(2^{n-1})} \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{\sigma^2 2^n} S_n(\varphi) \equiv \sigma_n^2(\varphi). \tag{4.3}$$

Démonstration. Soit

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{\substack{k \in I_n \\ s < k \leqq l}} D_{n,k};$$

cette somme contient exactement $\dfrac{2^n \mu([s,t])}{\mu([0,1])} = \dfrac{2^n}{\sigma^2} \mu([s,t])$ termes. $X(.) = a$ définit dans Ω'_n un hyperplan qui ne coupe la sphère $S^{2^n-1}(0, \sqrt{S_n(\varphi)})$ que si

$$|a| \leqq \left[\mu([s,t]) \frac{1}{\sigma^2} S_n(\varphi)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour ces valeurs de a nous avons:

$$\mathrm{Prob}\{|x| \leqq a\} = \frac{\int_\alpha^{\pi/2} (\sin\theta)^{2^n-2}\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2^n-2}\, d\theta}; \quad \cos\alpha = \frac{a}{[\mu([s,t])\, \sigma^2\, 2^n]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathrm{Prob}\{|x| \leqq a\} = \frac{c_n}{[\sigma_n^2 \mu([s,t)]^{\frac{1}{2}}} \int_0^a \left[1 - \frac{z^2}{2^n \sigma_n^2 \mu([s,t])}\right]^{\frac{2^n-3}{2}} dz \tag{4.4}$$

d'où l'on déduit immédiatement (4.2) et (4.3). □

Démonstration du Théorème 2. Si l'on suppose que les $P_n = \Pi_n^1(\varphi, .)$ convergent, alors les distributions $Q_n(dx)$ de $X = \pi_t - \pi_s$ convergent; utilisant alors la forme explicite de $Q_n(dx)$ il s'ensuit que la suite $(\sigma_n^2(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ possède au plus un point d'accumulation fini et donc $\lim_n \sigma_n^2(\varphi)$ existe. Inversement, supposons que $\lim \sigma_n^2(\varphi) = \sigma^2$ existe et considérons deux points s et t dans $[0,1]$. Le support de la mesure P_n est formé par les trajectoires ψ de la forme:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \psi(t_{n,k-1}) + [\varphi(t) - \varphi(t_{n,k-1})] \\ &\quad + \frac{\mu([t_{n,k-1}, t])}{\mu([t_{n,k-1}, t_{n,k}])}[\psi(t_{n,k}) - \psi(t_{n,k-1}) - \varphi(t_{n,k}) + \varphi(t_{n,k-1})]\end{aligned}$$

si $t \in [t_{n,k-1}, t_{n,k}]$.

La variable aléatoire $X = \pi_t - \pi_s$ se laisse aussi écrire:

$$\begin{aligned}X &= [\varphi(t) - \varphi(s)] + [\varphi(t_l) - \varphi(t_k)] \\ &\quad - \frac{\mu([s, t_k])}{\mu([t_{n-1}, t_k])}[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})] - \frac{\mu([t_l, t])}{\mu([t_l, t_{l+1}])}[\varphi(t_{l+1}) - \varphi(t_l)] \\ &\quad + \frac{\mu([s, t_k])}{\mu([t_{k-1}, t_k])}(\pi_{t_k} - \pi_{t_{k-1}}) + (\pi_{t_l} - \pi_{t_k}) + \frac{\mu([t_l, t])}{\mu([t_l, t_{l+1}])}(\pi_{t_{l+1}} - \pi_{t_l})\end{aligned}$$

avec $t_{k-1} < s < t_k < t_l < t < t_{l+1}$ (en n'écrivant pas explicitement l'indice n).

On démontre alors exactement comme dans le lemme précédent que X est distribuée selon la loi Q_n (avec pour σ_n une quantité toutefois légèrement différente). A l'aide du même critère que celui employé dans la démonstration du théorème 1, on montre alors que la famille des P_n est équitendue. La convergence de $\sigma_n^2(\varphi)$ implique que cette famille a, au plus, un point d'accumulation et admet donc une limite qui n'est autre que $W(\sigma^2(\varphi)\cdot\mu)$. La frontière de Martin-Dynkin ne contient dans notre case que des états de Gibbs qui sont tous extrémaux puisqu'ils ne se distinguent les uns des autres que par un changement d'échelle trivial. □

Corollaire. *Soit μ une mesure de probabilité sur $[0,1]$, équivalente à la mesure de Lebesgue. Alors:*

$$\mathcal{G}_{\mathrm{ex}}^1(\mu) = \bigcup_{0 \le \sigma^2 < +\infty} \mathcal{G}_{\mathrm{ex}}^2(\sigma^2 \mu)$$

où $\mathcal{G}_{\mathrm{ex}}^i = \mathcal{G}_{\mathrm{ex}}(\Pi^i)$ $i = 1, 2$.

Remarque. Soit φ une fonction de Ω telle que:

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \le c(\mu([s,t]))^\alpha.$$

Il vient alors:

$$\sigma_n^2(\varphi) \le \frac{c}{\sigma^2} 2^n \left[\frac{\mu([0,1])}{2^n}\right]^{2\alpha}. \tag{4.6}$$

Par conséquent, la quantité $\sigma_n^2(\varphi)$ tend vers zéro si $\alpha > \frac{1}{2}$. Ceci correspond dans le cas où μ est la mesure de Lebesgue au résultat bien connu affirmant que seules sont contenues dans le support de la mesure de Wiener les fonctions Hölder-continues d'indice $\alpha \leqq \frac{1}{2}$ puisque le support de $W(\mu)$ est constitué par les fonctions φ de Ω telles que

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} |\varphi(t_{n,k+1}) - \varphi(t_{n,k})|^2 = \mu([0,1])$$

(cf. [2] et §II).

V. Interprétation physique

Les phénomènes associés à la propagation de la chaleur et au mouvement brownien sont reliés par le fait qu'ils sont régis tous deux par l'équation de diffusion suivante de semi-groupe T_t.

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \tfrac{1}{2} \Delta f,$$

$$(T_t f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\, dy.$$

Pour fixer les idées, considérons le cas où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Le théorème 2 affirme que:

$$W(\sigma^2(\varphi))(.) = \lim_n \Pi_n^1(\varphi, .)$$

et il résulte de la définition de Π_n^1 que la mesure de Wiener $W(\sigma^2(\varphi))(.)$ est essentiellement obtenue comme limite d'une suite de mesures de Haar concentrées sur des sphères dans des espaces dont la dimension croît. A l'approximation d'ordre n on considère en effet la sphère contrée à l'origine de rayon $\sqrt{S_n(\varphi)}$ dans $\mathbb{R}^{2^n}$. On peut aussi remarquer que $2^n\, S_n(\varphi)$ n'est rien d'autre que l'action associée au chemin polygonal $\tilde{\varphi}$ tel que $\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(t_{n,k})\, \tau = t_{n,k}$ $k = 1, 2, \ldots, 2^n$. On a donc:

$$2^n\, S_n(\varphi) = \int_0^1 \dot{\tilde{\varphi}}^2(\tau)\, d\tau$$

avec $\dot{\tilde{\varphi}}(\tau) \equiv \frac{d}{d\tau} \tilde{\varphi}(\tau)$.

Or, puisque $\sigma_n^2(\varphi) = 2^{-n}\, S_n(\varphi)$, nous pouvons envisager $W(\sigma^2(\varphi))(.)$ comme limite d'une suite de mesures qui sont essentiellement de la forme $\delta[\frac{1}{2} \int_0^1 \dot{\tilde{\varphi}}^2(\tau)\, d\tau - E_n]$ avec $E_n \equiv \frac{1}{2} 2^n\, \sigma_n^2(\varphi)$.

Formellement, nous voyons ainsi qu'à la limite, la mesure de Wiener $W(\sigma^2(\varphi))(.)$ est de la forme:

$$W(\sigma^2(\varphi))(.) \sim \delta\left[\tfrac{1}{2}\int_0^1 \dot{\varphi}^2(\tau)\,d\tau - E\right] \tag{5.2}$$

où E est une quantité infinie (précisément comme E_n quand $n \to +\infty$). Dans cette interprétation, la spécification locale Π^1 est l'analogue de la distribution microcanonique de la mécanique statistique classique.

D'autre part, le théorème 1 affirme que l'autre spécification locale que nous avons envisagée $\Pi^2(\varphi,.)$ converge elle aussi vers la mesure de Wiener $W(\sigma^2(\varphi))(.)$, ce qui ne fait que traduire la propriété bien connue selon laquelle la mesure de Wiener $W(\sigma^2(\varphi)(.)$ n'est rien d'autre formellement que $e^{-\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{\varphi}^2 d\tau}\,d\varphi$, ce que nous écrirons:

$$W(\sigma^2(\varphi))(.) \sim e^{-\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{\varphi}^2\,d\tau\right)}\,d\varphi \tag{5.3}$$

en supposant φ tel que $\sigma^2(\varphi)=1$.

Sous cette forme, on reconnait l'analogue de la distribution canonique de la mécanique statistique.

On peut alors interprèter les théorèmes 1 et 2 comme exprimant une équivalence des ensembles de la mécanique statistique classique; le problème de l'équivalence des ensembles en mécanique statistique a été discuté dans de nombreux travaux, voir par exemple [4].

Nous allons maintenant envisager le cas d'une particule soumise à un champ de forces dérivant d'un potentiel V. On sait alors que sous des conditions assez générales sur V [5] un processus de ce type que nous noterons η satisfait à l'équation différentielle stochastique:

$$d\eta(t) = \beta(\eta(t)\,dt + dw(t)$$

dans laquelle $w(t)$ désigne le mouvement brownien ordinaire tel que nous l'avons défini précédemment et β est une fonction connue du potentiel V. Pour simplifier, nous supposons que la variance du mouvement brownien est égale à 1. Alors, les solutions d'une telle équation définissent des processus de diffusion, de générateur $-\frac{1}{2}\Delta - \beta\nabla$. Dans le cas où le processus est symétrique et admet une mesure invariante $d\mu$, le semi-groupe de Markov associé à ce processus se réalise convenablement dans l'espace de Hilbert $L^2(d\mu)$ et son générateur infinitésimal s'obtient à l'aide d'une réalisation auto-adjointe de l'opérateur différentiel $-\frac{1}{2}\Delta - \beta\nabla$. Plus spécifiquement dans la situation où $\beta = \frac{1}{2}\frac{\nabla\rho}{\rho}$ avec $d\mu = \rho\,dx$, la réalisation auto-adjointe que nous venons de mentionner n'est autre que l'opérateur autoajoint H associé à la forme de Dirichlet $\int \nabla f \cdot \nabla f\,d\mu$. Plutôt que d'envisager l'espace $L^2(d\mu) = L^2(\rho\,dx)$, on peut travailler aussi dans l'espace $L^2(\mathbb{R}, dx)$; H dans cet espace se réalise alors à l'aide de l'opérateur:

$$-\tfrac{1}{2}\Delta + V$$

avec: $V = \frac{1}{2}(\beta^2 + \operatorname{div}\beta)$.

L'équation stochastique correspond alors à l'équation de la chaleur en présence d'un potentiel, c'est-à-dire l'équation du mouvement d'une particule soumise au mouvement brownien subissant de plus la force $-\nabla V$ et ayant $d\mu$ comme distribution invariante. Un tel mouvement est symétrique par rapport au temps et le processus est stationnaire ([6], [7]). On peut aussi remarquer que dans le cas stationnaire et puisque H peut aussi être considéré en tant qu'hamiltonien quantique, une interprétation quantique des solutions de l'équation stochastique est possible ([6, 7]).

Supposant $t>s$, il résulte de l'équation stochastique que:

$$\eta(t)-\eta(s)-\int_s^t \beta(\eta(\tau))\,d\tau = w(t)-w(s).$$

Supposons maintenant que les hypothèses habituelles de régularité de la théorie des équations différentielles stochastiques sont satisfaites ([8, 9]), à savoir continuité de Lipschitz et conditions à l'infini. De plus, nous supposons que nous sommes dans une situation où il existe un potentiel V [12]. Il est bon cependant de remarquer que la théorie des équation différentielles stochastiques se généralise, et, qu'en fait, on peut se débarasser de certaines de ces conditions, ce qui rend une extension au cas singulier possible ([5, 10]); en particulier β peut avoir des singularités locales et croître plus vite que linéairement à l'infini, ce qui permet de traiter par des généralisations de ces méthodes certains modèles de la théorie quantique des champs. Nous ferons plus tard une remarque à ce sujet.

Considérons maintenant la transformation T dans l'espace Ω définie par $T\varphi=\psi$ avec

$$\psi(t)=\varphi(t)+\int_0^t \beta(\psi(\tau))\,d\tau.$$

Cette transformation induit une transformation de la mesure de Wiener $dW(.)$; si nous désignons par $dW_T(.)$ la mesure normalisée induite par T, qui n'est autre sous les hypothèses faites que la mesure associée au processus stochastique

$$d\eta=\beta(\eta)+dw$$

la relation de Girsanov-Prohorov permet alors d'écrire:

$$\frac{dw_T}{dw}=\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^1 [\beta(\omega(t))]^2\,dt-\int_0^1 \beta(\omega(t))\,dt\right].$$

D'autre part posant $b(x)=\log\rho^{\frac{1}{2}}(x)$ on obtient grâce à la formule d'Ito

$$db(W)=\beta\,dw+\frac{\beta'}{2}\,dt$$

avec $\beta'(x)=\dfrac{d}{dx}\beta(x)$.

Soit en intégrant

$$b(w(1))-b(w(0))=\int_0^1 \beta\,dw+\tfrac{1}{2}\int_0^1 \beta'\,dt$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\log\frac{\rho^{\frac{1}{2}}[w(1)]}{\rho^{\frac{1}{2}}[w(0)]}=\int_0^1\beta\,dw-\tfrac{1}{2}\int_0^1\beta^2\,dt+\int_0^1 V(\omega)\,dt$$

puisque $V(x)=\frac{1}{2}[\beta'(x)+\beta^2(x)]$.

Donc conditionellement à $W(t)=x$ on a

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_0^1\beta(w(t))^2\,dt-\int_0^1\beta(w(t))\,dW(t)\\ =\int_0^1 V(\omega(t))\,dt+C\end{aligned}$$

avec $C=\log\dfrac{\rho^{\frac{1}{2}}[W(1)]}{\rho^{\frac{1}{2}}[W(0)]}$.

La quantité C est aussi égale par la formule de Feynman-Kac à

$$C=\frac{\int e^{-\int_0^1[V(\omega(t))+x]\,dt}\,dw(\omega)}{\int e^{-\int_0^1 V(\omega(t))\,dt}\,dw(\omega)}.$$

Nous avons déjà fait la remarque que formellement la mesure de Wiener dW s'écrivait $\delta\left[\frac{1}{2}\int_0^1\dot\varphi^2(t)\,dt-c^{\text{te}}\right]$ et que:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1\dot\varphi^2(t)\,dt=\lim_n 2^n S_n(\varphi).$$

Nous avons alors une caractérisation du même type pour W_T en remplacant φ par $T^{-1}\psi$ avec:

$$T^{-1}\colon\ \psi\to\varphi(t)=\psi(t)-\int_0^t\beta(\psi(\tau))\,d\tau.$$

Il reste à calculer alors $2^n S_n(T^{-1}\varphi)$:

$$\begin{aligned}2^n S_n(T^{-1}\varphi)&=\int_0^1\left[\frac{d}{d\tau}T^{-1}\tilde\varphi(\tau)\right]^2 d\tau\\ &=\int_0^1\left[\frac{d}{d\tau}(\tilde\varphi(\tau))-\beta(\tilde\varphi(\tau))\right]^2 d\tau\\ &=\int_0^1\dot{\tilde\varphi}^2(\tau)\,d\tau+\int_0^1[\beta(\tilde\varphi(\tau))]^2\,d\tau-2\int_0^1\dot{\tilde\varphi}(\tau)\,\beta[\tilde\varphi(\tau)]\,d\tau.\end{aligned}$$

Cette relation s'interprète aisément physiquement. En effet, les deux derniers termes du membres de droite:

$$\int_0^1[\beta(\tilde\varphi(\tau))]^2\,d\tau-2\int_0^1\dot{\tilde\varphi}(\tau)\,\beta[\tilde\varphi(\tau)]\,d\tau$$

lorsque l'on prend pour $\tilde{\varphi}$ l'approximation polygonale d'une trajectoire w du mouvement brownien tendent dW p.p. vers

$$\int_0^1 [(w(t))]^2\,dt - 2\int_0^1 \beta(w(t))\,dW(t)$$

La seconde intégrale étant à comprendre au sens des intégrales stochastiques.

Le calcul qui vient d'être fait permet alors de conclure que la différence entre $2^n S_n(T^{-\prime}\tilde{\varphi})$ et $2^n S_n(\tilde{\varphi})$, qui n'est autre que:

$$2^n [S_n(T^{-\prime}\tilde{\varphi}) - S_n(\tilde{\varphi})] = \int_0^1 [\beta(\tilde{\varphi}(\tau))]^2\,d\tau - 2\int_0^1 \dot{\tilde{\varphi}}(\tau)\,\beta(\tilde{\varphi}(\tau))\,d\tau$$

converge vers

$$\int_0^1 V(\omega(t))\,dt + \log\frac{\rho^{\frac{1}{2}}(\omega(t))}{\rho^{\frac{1}{2}}(0)},$$

lorsque l'on prend pour φ la trajectoire du mouvement brownien. D'autre part, nous avons vu que $\frac{1}{2}2^n S_n(\tilde{\varphi})$ s'interprètait naturellement comme l'action associée au chemin $\tilde{\varphi}$ et que la mesure de Wiener s'obtenait comme limite de mesures concentrées sur des sphères dont le rayon n'était autre que l'action E_n. De manière analogue W_T s'inter prète à l'aide, cette fois-ci, des chemins transformés. On vient de calculer que dans ce cas l'action ne diffère de l'action associée à la mesure de Wiener que par la quantité $\int_0^1 V(\omega(t))\,dt + C$. Ce résultat est physiquement intuitif puisque cette quantité est précisément la contribution à l'action de l'énergie potentielle associée aux chemins transformés, qui correspondent à l'équation stochastique, c'est-à-dire à la situation dans laquelle on a à considerer l'équation de la chaleur avec un potentiel.

On a ainsi donc obtenu formellement, conditionellement à $\varphi(t)=x$ (repectivement $w(t)=x$), l'équivalence entre les mesures suivantes

$$\delta\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{\varphi}^2\,dt + \int_0^1 V(\varphi(t))\,dt - \text{const.}\right] d\varphi$$

$$\text{const.}\, e^{-\int_0^1 V(\omega(t))\,dt}\, dW(\omega).$$

L'argument de la «fonction» δ est l'action classique totale le long du chemin φ. Donc, en présence d'une perturbation V on peut aussi interprèter les résultats obtenus comme exprimant l'équivalence d'ensembles de la mécanique statistique classique.

Remarque 1. L'approximation que nous avons employée a fait clairement ressortir la propriété que, bien que les approximations de $\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{w}^2\,dt$ et $\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{\eta}^2\,dt$ divergent pour $n \to +\infty$, leur différence converge essentiellement vers la contribution à l'action de l'energie potentielle.

Remarque 2. La généralisation de la méthode que nous avons employée à l'étude des processus de diffusion dans $\mathbb{R}^n$ est immédiate.

Remarque 3. La théorie des équations différentielles stochastiques a été généralisée aux «processus généralisés» à valeurs distributions et cela tout particulièrement en vue des applications à la théorie quantique des champs. Nous renvoyons à [5] et [11] pour un exposé de ces méthodes. Disons seulement que l'équation stochastique:

$$d\eta(t) = \beta(\eta(t))\,dt + dw(t)$$

doit être comprise ici au sens faible. Après une intégration avec une fonction d'essai g, on obtient:

$$\langle d\eta(t) - \beta(\eta(t))\,dt, g\rangle = \langle dw(t), g\rangle$$

le membre de droite devient encore le mouvement brownien ordinaire tel que nous sommes en mesure de le discuter par la méthode des specifications locales, et on peut alors interpréter l'équation stochastique comme dans le cas précédent. Quand au membre de gauche, il est de la même forme que quand le nombre de dimensions est fini, à condition d'introduire une approximation de réseau et de considérer une interaction dans un volume fini V. Nous nous proposons d'expliciter cette construction dans un prochain article.

References

1. Dobrushin, R.L.: Description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity. Theor. Probability Appl. **13**, 197–224 (1968)
2. Föllmer, H.: Phase transitions and Martin Boundary. Séminaire de probabilités IX – Strasbourg. Lecture Notes in Math. 465. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
3. Nguyen, X.X., Zessin, H.: Martin-Dynkin boundary of mixed Poisson Processes and Phase transition. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **37**, 191–200 (1977)
4. Georgii, H.: Canonical Gibbs States, their Relation to Gibbs states and Applications to two-valued Markov Chains. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **32**, 277–300 (1975)
5. Albeverio, S., Høegh-Krohn, R.: Dirichlet forms and diffusion process on rigged Hilbert spaces. Oslo University Preprint (1975)
6. Nelson, E.: Dynamical theories of brownian motion. Princeton: Princeton University Press 1967
7. Albeverio, S., Høegh-Krohn, R.: A remark on the connection between stochastic mechanics and the heat equation. J. Mathematical Phys. **15**, 1745–1747 (1974)
8. Gilman, I.I., Skohorod, A.V.: Stochastic differential equation. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
9. Mac Kean, H.P.: Stochastic integrals. New York-London: Academic Press 1969
10. Albeverio, S., Høegh-Krohn, R., Streit, L.: Energy forms, Hamiltonians and distorted paths. Journal of Math. Phy. **18**, 907–917 (1977)
11. Albeverio, S., Høegh-Krohn, R.: Quasi invariant measures, symmetric diffusions processes and quantum fields. Dans: Les méthodes mathématiques de la théorie quantique des champs. Paris: Editions du C.N.R.S. 1976
12. Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics II. Fourier analysis and self-adjointness. New York-London: Academic Press 1975

Reçu le 13 Mai 1977; en forme révisée le 19 Février 1978