Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
51, 95–100 (1980)

Zeitschrift für
**Wahrscheinlichkeitstheorie**
und verwandte Gebiete


# Un théorème de Vitali-Hahn-Saks pour les semimartingales

M. Emery

Institut de Mathématique, 7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex

**Summary.** Let $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ be a complete probability space; let $(\mathfrak{F}_t)_{t\geqq 0}$ be an increasing right-continuous family of $(\mathfrak{F}, P)$-complete sub-$\sigma$-fields of $\mathfrak{F}$; let $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of semimartingales. Assume that for all positive $t$ and for all bounded predictable processes $H$, the r.v.'s $\int_0^t H_s\,dX_s^n$ converge in probability to a limit $J(t,H)$ when $n$ tends to infinity. Then there exists a semimartingale $X$ such that, for all $t$ and $H$, $J(t,H)=\int_0^t H_s\,dX_s$.

Cet article est consacré au résultat suivant, qui, dans le cas déterministe où $\Omega$ n'a qu'un seul point, se confond avec le théorème de Vitali-Hahn-Saks pour les mesures de Radon sur $\mathbb{R}_+$:

**Théorème 1.** *Sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ muni d'une famille croissante et continue à droite $(\mathfrak{F}_t)_{t\geqq 0}$ de sous-tribus $(\mathfrak{F}, P)$-complètes de $\mathfrak{F}$, soit $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de semimartingales. On suppose que, pour chaque $t\geqq 0$ et chaque processus prévisible borné $H$, la suite de variables aléatoires $\int_0^t H_s\,dX_s^n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire limite $J(t,H)$. Il existe alors une semimartingale $X$ telle que, pour tous $t$ et $H$, $J(t,H)=\int_0^t H_s\,dX_s$.*

Pour éviter d'avoir à faire intervenir l'instant $t$, plaçons-nous sur $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$. Nous nous donnons une filtration $(\mathfrak{F}_t)_{0\leqq t\leqq\infty}$ satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus; tous les processus sont définis sur $[\![0,\infty]\!]$ et à valeurs réelles; les «semimartingales» le sont jusqu'à l'infini. On note $\mathfrak{P}$ la tribu prévisible sur $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$; un processus prévisible sera dit *étagé* si son image est finie, et *élémentaire* s'il est de la forme $\sum_{i=1}^n h^i I_{]\!]s_i,t_i]\!]}$, où chaque $h^i$ est une variable aléatoire $\mathfrak{F}_{s_i}$-measurable, $s_i$ et $t_i$ étant des temps constants. On désigne par $L^0$ l'espace vectoriel topologique des variables aléatoires p.s. finies, muni de la

0044-3719/80/0051/0095/$01.20

topologie de la convergence en probabilité par la quasi-norme $\|U\|_{L^0} = E[1 \wedge |U|]$. Avec ces notations, le théorème 1 devient

**Théorème 1$^{\text{bis}}$.** *Soit $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de semimartingales (jusqu'à l'infini) telle que, pour tout processus prévisible borné $H$, la suite $J^n(H)=\int_0^\infty H_s\,dX_s^n$ converge, dans $L^0$, vers une limite $J(H)$. Il existe alors une semimartingale $X$ telle que, pour tout processus prévisible borné $H$, $J(H)=\int_0^\infty H_s\,dX_s$.*

L'équivalence entre les théorèmes 1 et 1$^{\text{bis}}$ se vérifie immédiatement par localisation du théorème 1 à des intervalles finis $[\![0,N]\!]$, et bijection croissante de $[0,N]$ sur $[0,\infty]$.

Si $A$ est un ensemble prévisible, on notera $m^n(A)=J^n(I_A)$ et $m(A)=J(I_A)$. Avant de démontrer le théorème 1$^{\text{bis}}$, énonçons un lemme, que nous admettrons provisoirement.

**Lemme 1.** *Si $(A_k)$ est une suite d'ensembles prévisibles de limite $A$, $m(A_k)$ tend vers $m(A)$ dans $L^0$ (en particulier, $m$ est une mesure sur $\mathfrak{P}$ à valeurs dans $L^0$).*

*Démonstration du théorème 1$^{\text{bis}}$.* Pour tout $t$, on pose $X_t=m([\![0,t]\!])$. Ceci définit, à modification près, un processus adapté $X$ tel que, pour tout $H$ prévisible élémentaire, $J(H)=\int_0^\infty H_s\,dX_s$. Pour montrer que $X$ admet une modification semimartingale, nous allons utiliser la caractérisation des semimartingales donnée par Dellacherie [4]. Il suffit de vérifier

a) que $J$ est continue de l'espace de Banach des processus prévisibles bornés dans $L^0$. Mais ceci résulte de la propriété de Baire: $J$ est limite simple d'une suite de fonctions continues d'un espace de Baire dans un espace métrique, elle admet donc des points de continuité ([6] T2, XXI, 3; 2); étant linéaire, elle est continue.

b) que $X$ admet une version continue à droite. Le lemme 1 fournit seulement la continuité à droite en probabilité, mais ceci suffit pour conclure. En effet, la démonstration de [4] établit que, après un changement adéquat de probabilité, $X$ est une quasimartingale, et la démonstration du théorème 1.5 de [7] montre qu'une quasimartingale continue à droite en probabilité admet une version continue à droite.

Donc, après choix de la bonne version, $X$ est une semimartingale et l'égalité $J(H)=\int_0^\infty H_s\,dX_s$ a lieu pour tout processus prévisible élémentaire $H$. A l'aide du lemme 1 et du théorème de convergence dominée pour les intégrales stochastiques (voir par exemple [1], p. 56), on voit que l'ensemble des $A\in\mathfrak{P}$ qui vérifient $m(A)=\int_0^\infty I_A(s)\,dX_s$ est une classe monotone. Comme il contient les unions finies disjointes de rectangles prévisibles, cette égalité a lieu pour tout $A$ prévisible. Puis l'égalité $J(H)=\int_0^\infty H_s\,dX_s$ passe, par limite uniforme, des processus prévisibles étagés à tous les processus prévisibles bornés.

Modulo le lemme 1, ceci établit le théorème.

Pour démontrer le lemme 1, nous aurons besoin de quelques outils:

**Definition.** *Soit $Y$ une semimartingale (toujours jusqu'à l'infini). On définit des fonctions $\bar{Y}$ sur $\mathfrak{P}$ et $d_Y$ sur $\mathfrak{P}\times\mathfrak{P}$, à valeurs dans $[0,1]$ par*

$$\bar{Y}(A)=\sup_{A'\in\mathfrak{P},\,A'\subset A}\left\|\int_0^\infty I_{A'}(s)\,dY_s\right\|_{L^0};$$

$$d_Y(A,B)=\bar{Y}(A\,\Delta\,B).$$

**Lemme 2.** *Ces fonctions jouissent des propriétés suivantes:*

(i) *$\bar{Y}(A)=0$ si et seulement si $I_A\cdot Y=0$;*
(ii) *$\bar{Y}$ est croissante;*
(iii) *Si $A_n\to\emptyset$, $\bar{Y}(A_n)\to 0$;*
(iv) *$\bar{Y}(A\cup B)\leqq\bar{Y}(A)+\bar{Y}(B)$;*
(v) *$\bar{Y}(\bigcup_n A_n)\leqq\sum_n\bar{Y}(A_n)$;*
(vi) *$d_Y$ est un écart sur $\mathfrak{P}$;*
(vii) *Si $A_n\to A$, $d_Y(A_n,A)\to 0$;*
(viii) *Si $(A_n)$ est une suite de Cauchy pour $d_Y$, elle converge pour $d_Y$; plus précisément, on peut en extraire une sous-suite qui converge simplement à un ensemble $\bar{Y}$-négligeable près.*

*Démonstration du lemme 2.* (i) Si $\bar{Y}(A)=0$, on a pour tout $t\int_0^t I_A(s)\,dY_s=0$, d'où $I_A\cdot Y=0$. Si $I_A\cdot Y=0$, et si $A'$ est un sous-ensemble prévisible de $A$, $I_{A'}\cdot Y=I_{A'}\cdot(I_A\cdot Y)=0$.

(ii) Evident.

(iii) Supposons que $\overline{\lim_n}\,\bar{Y}(A_n)=2\varepsilon>0$. Quitte à remplacer $(A_n)$ par une sous-suite, on peut supposer que, pour tout $n$, $\bar{Y}(A_n)>\varepsilon$. Donc il existe $A_n'\subset A_n$ tel que

$$\left\|\int_0^\infty I_{A_n'}(s)\,dY_s\right\|_{L^0}>\varepsilon.$$

Mais, compte tenu du théorème de convergence dominée pour les intégrales stochastiques, ceci empêche la suite $(A_n')$ et a fortiori la suite $(A_n)$ de tendre vers $\emptyset$.

(iv) Pour $A$ et $B$ prévisibles,

$$\begin{aligned}\bar{Y}(A\cup B)=\bar{Y}(A\cup(B\setminus A))&=\sup_{\substack{A'\subset A\\ B'\subset B\setminus A}}\left\|\int_0^\infty I_{A'\cup B'}(s)\,dY_s\right\|_{L^0}\\ &\leqq\sup_{\substack{A'\subset A\\ B'\subset B\setminus A}}\left[\left\|\int_0^\infty I_{A'}(s)\,dY_s\right\|_{L^0}+\left\|\int_0^\infty I_{B'}(s)\,dY_s\right\|_{L^0}\right]\\ &=\bar{Y}(A)+\bar{Y}(B\setminus A)\leqq\bar{Y}(A)+\bar{Y}(B).\end{aligned}$$

(v) Pour une suite $(A_n)$ dans $\mathfrak{P}$, en posant $S=\bigcup_m A_m$, $S_n=\bigcup_{m\leqq n} A_m$,

$$\bar{Y}(S)=\bar{Y}(S_n\cup(S\setminus S_n))\leqq\sum_{m\leqq n}\bar{Y}(A_m)+\bar{Y}(S\setminus S_n).$$

Il suffit de faire tendre $n$ vers l'infini pour obtenir, en utilisant (iii), l'inégalité cherchée.

(vi) L'inégalité triangulaire pour $d_Y$ se déduit de (iv) et de

$$A\,\Delta\,C=(A\,\Delta\,B)\,\Delta(B\,\Delta\,C)\subset(A\,\Delta\,B)\cup(B\,\Delta\,C).$$

(vii) Conséquence immédiate de (iii).

(viii) Soit $(A_n)$ une suite de Cauchy dans $\mathfrak{P}$ pour $d_Y$. Par extraction d'une sous-suite, on se ramène au cas où la série $\sum_n d_Y(A_n, A_{n+1})$ converge. Posons $S=\limsup_n A_n$, $I=\liminf_n A_n$. Soit $\varepsilon>0$. De (v) et de

$$(\bigcup_{p\geqq n} A_p)\setminus(\bigcap_{p\geqq n} A_p)=\bigcup_{p\geqq n}(A_p\,\Delta\,A_{p+1})$$

(qui exprime que la suite $(I_{A_p})_{p\geqq n}$ est non constante si et seulement si elle présente un saut), on déduit que, pour $n$ assez grand,

$$\bar{Y}((\bigcup_{p\geqq n} A_p)\setminus(\bigcap_{p\geqq n} A_p))<\varepsilon,$$

et, a fortiori, $\bar{Y}(S\setminus I)<\varepsilon$. Ainsi, $S\setminus I$ est négligeable pour $\bar{Y}$. Il ne reste qu'à écrire, à l'aide de (iv),

$$d_Y(A_n, S)\leqq\bar{Y}(A_n\setminus S)+\bar{Y}(S\setminus A_n)=\bar{Y}(A_n\setminus S)+\bar{Y}(I\setminus A_n),$$

pour conclure, en utilisant (iii), que $A_n$ tend vers $S$ pour $d_Y$.

Ceci achève le lemme 2.

*Démonstration du lemme 1.* Nous revenons donc sous les hypothèses du théorème. Pour $A$ et $B$ prévisibles, posons $x(A)=\sum_{n>0} 2^{-n}\,\overline{X^n}(A)$, $d(A,B)=x(A\,\Delta\,B)=\sum_{n>0} 2^{-n} d_{X^n}(A,B)$. Les ensembles $x$-négligeables sont les ensembles $\overline{X^n}$-négligeables pour tout $n$; l'espace quotient $\mathfrak{P}'$ formé des ensembles prévisibles définis à ensemble $x$-négligeable près est muni par $d$ d'une structure d'espace métrique complet, tel que si $A_n\to A$ au sens simple, $d(A_n, A)\to 0$.

Remarquons maintenant que chacune des applications $m^n$ est bien définie sur $\mathfrak{P}'$ et continue (et même lipschitzienne) de $\mathfrak{P}'$ dans $L^0$: pour $A$ et $B$ prévisibles,

$$\begin{aligned}\|m^n(A)-m^n(B)\|_{L^0}&\leqq\|m^n(A\setminus B)\|_{L^0}+\|m^n(B\setminus A)\|_{L^0}\\&\leqq\overline{X^n}(A\setminus B)+\overline{X^n}(B\setminus A)\\&\leqq 2\,\overline{X^n}(A\,\Delta\,B)\leqq 2^{n+1}\,d(A,B).\end{aligned}$$

Grâce à la propriété de Baire, la limite $m$ de la suite $(m^n)$ d'applications continues de l'espace de Baire $\mathfrak{P}'$ dans l'espace métrique $L^0$ possède des points de continuité; soit $C$ un tel point. Nous allons établir que $\emptyset$ est aussi un point de continuité pour $m$. Soit $(A_k)$ une suite d'ensembles prévisibles telle que $x(A_k)$ $(=d(A_k, \emptyset)) \to 0$. Pour la distance $d$, $A_k \cup C$ et $C \setminus A_k$ tendent vers $C$, donc $m(A_k \cup C)$ et $m(C \setminus A_k)$ tendent vers $m(C)$ dans $L^0$, et, par différence, $m(A_k) \to 0$ dans $L^0$.

Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $r > 0$ tel que $x(A) < r$ entraîne $\|m(A)\|_{L^0} < \varepsilon$. Maintenant, pour $A$ et $B$ prévisibles tels que $d(A, B) < r$, $x(A \setminus B)$ et $x(B \setminus A)$ sont plus petits que $r$, donc $\|m(A \setminus B)\|_{L^0}$ et $\|m(B \setminus A)\|_{L^0}$ sont majorés par $\varepsilon$, et, par différence, $\|m(A) - m(B)\|_{L^0} < 2\varepsilon$. Ceci montre que $m$ est continue (et même uniformément continue) de $\mathfrak{P}$ dans $L^0$, et établit du même coup le lemme 1.

*Remarques.* 1) Le lemme 2 est très proche de résultats de Mémin [3]; peut-être pourrait-on démontrer le lemme 1 en utilisant, au lieu de la distance $d_Y$ sur $\mathfrak{P}$, le fait que $\mathfrak{P}$ (ou plutôt l'ensemble des indicatrices de processus prévisibles) est fermé dans l'espace métrique complet $\mathbb{L}^0(Y)$ de Mémin. De toute façon, la distance de Mémin et la distance $d_Y$ définissent sur $\mathfrak{P}$ la même topologie.

2) On peut se demander si le théorème reste vrai lorsqu'on restreint l'hypothèse et la conclusion aux indicatrices d'ensembles prévisibles (ou, de manière équivalente, aux processus prévisibles à image finie). Le lemme 1 subsiste, avec la même démonstration. Pour conclure, on peut chercher à appliquer le théorème de Dellacherie (vérifier que si des processus prévisibles à image finie $H^k$ convergent uniformément vers 0, $J(H^k)$ tend vers 0 dans $L^0$ - la démonstration du théorème de Dellacherie s'adapte sans modification à ce cas) ou chercher à montrer que la mesure $m$ est bornée dans $L^0$ et construire $X$ par la méthode de Métivier et Pellaumail [2]. Je ne sais conclure par aucune de ces méthodes; en tout cas, un contre-exemple permettrait de répondre par la négative à une question de Turpin [8], en fournissant une mesure non bornée à valeurs dans $L^0$.

## Application aux semimartingales sur $]\!]0, \infty[\![$

Après Schwartz, Meyer [5] s'est interessé aux «semimartingales dans un ouvert aléatoire». Nous nous donnons un processus $X$, défini seulement sur $]\!]0, \infty[\![$, et dont nous supposons que, pour tout $n$, sa restriction à $\left[\!\!\left[\frac{1}{n}, \infty\right[\!\!\right[$ est une semimartingale au sens ordinaire sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F}_t)_{t \geqq \frac{1}{n}})$; en d'autres termes, $X$ est une semimartingale sur $]\!]0, \infty[\![$ au sens de [5]. Le théorème 1 fournit une condition suffisante pour que $X$ soit la restriction à $]\!]0, \infty[\![$ d'une vraie semimartingale:

**Proposition.** *Si, pour tout $H$ prévisible borné, la variable aléatoire* $\int_{]\!]\frac{1}{n}, 1]\!]} H_s \, dX_s$ *converge en probabilité vers une limite quand $n$ tend vers l'infini, alors $X$ est la restriction à $]\!]0, \infty[\![$ d'une vraie semimartingale sur $[\![0, \infty[\![$.*

*Démonstration.* Définissons des processus $Y^n$ sur $[\![0, \infty[\![$ par

$$Y^n = (X - X_{1/n}) I_{[\![\frac{1}{n}, \infty[\![}.$$

Chaque $Y^n$ est alors une semimartingale, et la suite $(Y^n)$ vérifie les hypothèses du théorème 1. Celui-ci fournit donc une semimartingale limite $Y$. Pour $0<s<t$, en prenant $H=I_{]s,t]}$, on voit que $\int_s^t dX_u=\int_s^t dY_u$; autrement, dit, la variable aléatoire $U=X_t-Y_t$ ne dépend pas de $t>0$. Elle est donc $\mathfrak{F}_0$-measurable, et la semimartingale $Y+U$ prolonge $X$.

*Remarque.* Cette proposition a été démontrée indépendamment par Stricker avec des méthodes plus élémentaires (n'utilisant pas le théorème de Baire).

## References


1. Jacod, J.: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lecture Notes in Math. **714**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1979
2. Métivier, M., Pellaumail, J.: Mesures stochastiques à valeurs dans des espaces $L_0$. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **40**, 101–114 (1977)
3. Mémin, J.: Espaces de semi martingales et changements de probabilité. Preprint
4. Meyer, P.A.: Caractérisation des semimartingales, d'après Dellacherie. Séminaire de Probabilités XIII. Lecture Notes in Math. **721**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1979
5. Meyer, P.A.: Sur un résultat de L. Schwartz. Preprint
6. Schwartz, L.: Topologie générale et analyse fonctionnelle. Paris: Hermann 1970
7. Stricker, C.: Mesure de Föllmer en théorie des quasimartingales. Séminaire de Probabilités IX, Lecture Notes in Math. **465**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1975
8. Turpin, P.: Une mesure vectorielle non bornée. C. R. Acad. Sci. Paris, 280 Série A, p. 509 (1975)


Reçu le 1er Juillet, 1979

**Note sur les epreuves.** Le lemme 1 est un cas particulier de théorèmes du type Vitali-Hahn-Saks pour des mesures vectorielles très générales: Voir L. Drewnowski, Topological rings of sets, continuous set functions, integration (Bull. Acad. Pol. Sci. Vol. 20, N° 4, 1972), qui m'a été signalé par Pellaumail et Turpin, et K. Bichteler, On sequences of measures (Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 80, N° 5, 1974).