Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 14, 331–343 (1970)

Strenge Tests und ungünstigste Verteilungen*

D. PLACHKY

Summary. It is proved that most stringent tests as introduced in [19] are closely connected with least favorable distributions. By a generalization of the fundamental lemma of Neyman and Pearson to finitely additive set functions it is shown that most stringent tests have a 0-1-structure.

1. Bezeichnungen und Definitionen

Es seien $\mathfrak{W}_i$, $i=1,2$, Klassen von Wahrscheinlichkeitsmaßen über einem meßbaren Raum $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, die durch ein σ-finites Maß μ dominiert sind. Die zugehörigen Klassen der μ-Dichten $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, lassen sich dann auf natürliche Weise in den bidualen Raum $\mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*, \mu)$ von $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ einbetten (vgl. [5], II.3.18). Im folgenden sollen daher $\mathfrak{W}_i$ und $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, identifiziert werden. Dabei ist $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ der Raum der μ-integrablen Funktionen und $\mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*, \mu)$ die Menge der beschränkten, endlich additiven Mengenfunktionen über $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*)$, die durch μ dominiert sind, mit $\mathfrak{B}^*$ als Vervollständigung von $\mathfrak{B}$ bezüglich μ (vgl. [5], IV.8.16). Ferner bezeichnet $\overline{\mathfrak{P}}_i$ bzw. $\overline{k(\mathfrak{P}_i)}$, $i=1,2$, die abgeschlossene bzw. die abgeschlossene, konvexe Hülle von $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, in der schwachen* Topologie von $\mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*, \mu)$ und $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$, den Borelschen σ-Körper über $\overline{\mathfrak{P}}_i$, $i=1,2$, bezüglich dieser (Relativ-) Topologie von $\overline{\mathfrak{P}}_i$, $i=1,2$. Schließlich sei $\mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i) := \{\mu : \mu$ reguläres Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\overline{\mathfrak{P}}_i, \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_i))\}$, $i=1,2$, wobei $\mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$, als Teilraum des dualen Raumes von $C(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$, (vgl. [5], IV.6.3) mit der (relativen) schwachen* Topologie versehen ist. Dabei ist $C(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$, der Raum der schwach* stetigen und damit auch beschränkten Funktionen auf $\overline{\mathfrak{P}}_i$, $i=1,2$, (vgl. [5], V.4.3), mit der üblichen Normtopologie. Ferner soll das zu $\mu_i \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$, wegen der schwachen* Kompaktheit von $\overline{k(\mathfrak{P}_i)}$, $i=1,2$, (vgl. [5], V.4.3) gemäß [16], 1.1 eindeutig bestimmte $\lambda_i \in \overline{k(\mathfrak{P}_i)}$ mit

$$\int_{\overline{\mathfrak{P}}_i} f(\lambda)\, d\mu_i(\lambda) = f(\lambda_i), \tag{1.1}$$

$i=1,2$, für jede über $\mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*, \mu)$ schwach* stetige (affin) lineare und auf $\overline{\mathfrak{P}}_i$, $i=1,2$, eingeschränkte Funktion f Schwerpunkt von $\mu_i \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$, heißen. Bezeichnet nun $\mathrm{ba}_1^+(\overline{\mathfrak{P}}_i)$ den positiven Teil des Randes der Einheitskugel des Raumes $\mathrm{ba}(\overline{\mathfrak{P}}_i, \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_i))$ der endlich additiven und beschränkten Mengenfunktionen über $(\overline{\mathfrak{P}}_i, \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_i))$, $i=1,2$, mit der totalen Variation als Norm, so definiert jedes $\tilde{\mu}_i \in \mathrm{ba}_1^+(\overline{\mathfrak{P}}_i)$ ein stetiges lineares Funktional über dem Raum $B(\overline{\mathfrak{P}}_i, \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_i))$, $i=1,2$, der beschränkten und $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$-meßbaren Funktionen mit der üblichen Normtopologie, dessen Einschränkung auf $C(\overline{\mathfrak{P}}_i)$ eindeutig durch ein $\mu_i \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$,

* Die Arbeit entstand im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanzierten Forschungsvorhabens.

dargestellt werden kann (vgl. [5], IV.6.3), d.h. es gilt

$$\int_{\mathfrak{P}_i} f(\lambda)\, d\tilde{\mu}_i(\lambda) = \int_{\mathfrak{P}_i} f(\lambda)\, d\mu_i(\lambda) \tag{1.2}$$

für jedes $f \in C(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$. Das durch (1.1) und (1.2) eindeutig bestimmte λ_i möge Schwerpunkt von $\tilde{\mu}_i$, $i=1,2$, heißen.

Als Test φ wird jede reellwertige, $\mathfrak{B}$-meßbare Funktion bezeichnet mit $0 \leqq \varphi(x) \leqq 1$, $x \in \mathfrak{X}$. Sind Ψ, Ψ^* Teilmengen von $\Phi := \{\varphi\colon \varphi \text{ Test}\}$, so heißt ein Test $\varphi^* \in \Psi^*$ nach Schaafsma ([19], S. 16–17) strenger Test in Ψ^* bezüglich Ψ für das Testen gegen $\mathfrak{W}_2$ genau dann, wenn

$$\sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p) = \inf_{\varphi \in \Psi^*} \sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi, \Psi}(p) \tag{1.3}$$

mit $\gamma_{\varphi,\Psi}(\lambda) := \beta^*_\Psi(\lambda) - E_\lambda \varphi$, $\beta^*_\Psi(\lambda) := \sup_{\varphi \in \Psi} E_\lambda \varphi$, $E_\lambda \varphi := \int \varphi\, d\lambda$ für $\varphi \in \Phi$ und $\lambda \in \mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*, \mu)$ gilt. Ist speziell $\Psi^* = \Phi_\alpha := \{\varphi\colon \varphi \in \Phi,\ E_p \varphi \leqq \alpha \text{ für } p \in \mathfrak{P}_1\}$ mit $0 < \alpha < 1$, so soll im Anschluß daran ein strenger Test φ^* in Φ_α bezüglich Ψ für das Testen gegen $\mathfrak{W}_2$ ein strenger Test bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ heißen. Die Menge dieser Tests sei Φ^*_α.

Für $\Psi = \Phi_\alpha$ erhält man die von Wald eingeführten strengen Tests zum Niveau α (vgl. [20], S. 277) und für $\Psi = \Phi$ die Maximin-Tests zum Niveau α (vgl. [21], S. 42).

Bevor die weiteren Untersuchungen auf den Fall $\Psi^* = \Phi_\alpha$ beschränkt werden, soll ein Existenzsatz für strenge Tests in Ψ^* bezüglich Ψ für das Testen gegen $\mathfrak{W}_2$ bewiesen werden, aus dem unmittelbar die bekannte Existenzaussage über strenge Tests bzw. Maximin-Tests zum Niveau α folgt.

2. Ein Existenzsatz

Ist $\Psi^* \subset \Phi$ in der schwachen* Topologie des dualen Raumes $\mathfrak{L}_\infty(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ von $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ abgeschlossen, so möge Ψ^* schwach* abgeschlossen heißen. Dann gilt der

2.1. Satz. *Ist Ψ^* schwach* abgeschlossen, so existiert ein strenger Test φ^* in Ψ^* bezüglich Ψ für das Testen gegen $\mathfrak{W}_2$.*

Beweis. Es gibt eine Folge $\{\varphi_n\}_{n=1,2\ldots}$ von Tests aus Ψ^* mit

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi_n, \Psi}(p) \to \gamma := \inf_{\varphi \in \Psi^*} \sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi, \Psi}(p). \tag{2.1}$$

Nach dem Satz von der schwachen Folgenkompaktheit von Testfunktionen (vgl. [12], S. 182) existiert eine Teilfolge $\{\varphi_{n'}\}_{n'=1,2,\ldots}$ von $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ und ein Test φ^* mit

$$\lim_{n'\to\infty} \int \varphi_{n'} f\, d\mu \to \int \varphi^* f\, d\mu \tag{2.2}$$

für jedes $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$. Da Ψ^* schwach* abgeschlossen ist, gilt $\varphi^* \in \Psi^*$. Damit φ^* ein strenger Test in Ψ^* bezüglich Ψ für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ ist, braucht nur noch $\gamma \geqq \delta := \sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p)$ gezeigt werden, denn es ist $\gamma \leqq \delta$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $p_\varepsilon \in \mathfrak{P}_2$ mit $\delta \leqq \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p_\varepsilon) + \varepsilon/3$ und wegen (2.2) existiert ein $n_1(\varepsilon)$, so daß für $n' \geqq n_1(\varepsilon)$ gilt $\gamma_{\varphi^*, \Psi}(p_\varepsilon) \leqq \gamma_{\varphi_{n'}, \Psi}(p_\varepsilon) + \varepsilon/3$. Schließlich gibt es wegen (2.1) ein $n_2(\varepsilon)$ mit $\sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi_{n'}, \Psi}(p) \leqq \gamma + \varepsilon/3$ für $n' \geqq n_2(\varepsilon)$. Wählt man also $n' \geqq n_0(\varepsilon) := \max_{i=1,2} \{n_i(\varepsilon)\}$, so erhält man $\delta \leqq \gamma + \varepsilon$, d.h. $\delta \leqq \gamma$.

Aus 2.1 läßt sich die Existenz eines strengen Tests φ^* in Ψ^* bezüglich Ψ für das Testen gegen $\mathfrak{W}_2$ folgern, der sich durch ein Netz von strengen Tests φ_E^* in Ψ^* bezüglich Ψ für das Testen gegen E im Sinne der schwachen* Topologie von $\mathfrak{L}_\infty(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ approximieren läßt. Dabei ist $E \in \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}$ das System der endlichen Teilmengen von $\mathfrak{W}_2$, das durch $\subset$ (nach oben) gerichtet ist. Nennt man nämlich ein Netz in Φ schwach* konvergent, wenn (2.2) mit Netzen statt Folgen gilt, so läßt sich beweisen

2.2. Hilfssatz. *Sei Ψ^* schwach* abgeschlossen. Dann gibt es ein Teilnetz von $\{\varphi_E^*: \varphi_E^*$ strenger Test in Ψ^* bezüglich Ψ für das Testen gegen E, $E \in \mathfrak{E}\}$, das gegen einen strengen Test in Ψ^* bezüglich Ψ für das Testen gegen $\mathfrak{W}_2$ schwach* konvergiert.*

Beweis. Aus 2.1 folgt zunächst die Existenz eines strengen Tests φ_E^* in Ψ^* bezüglich Ψ für das Testen gegen E für jedes $E \in \mathfrak{E}$. Da Φ eine schwach* kompakte Teilmenge von $\mathfrak{L}_\infty(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ ist (vgl. [5], V.4.3), gibt es ein Teilnetz $\{\varphi_{E'}^*: E' \in \mathfrak{E}'\}$ von $\{\varphi_E^*: E \in \mathfrak{E}\}$ und einen Test φ^* mit

$$\lim_{\mathfrak{E}'} \int \varphi_{E'}^* f \, d\mu = \int \varphi^* f \, d\mu \qquad \text{für jedes } f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu) \tag{2.3}$$

(vgl. [8], S. 136). Identifiziert man $\mathfrak{E}'$ mit der aufgrund der Definition des Begriffs „Teilnetz" korrespondierenden Teilmenge von $\mathfrak{E}$, so gilt mit

$$\gamma_1 := \sup_{E' \in \mathfrak{E}'} \sup_{p \in E'} \gamma_{\varphi_{E'}^*, \Psi}(p), \qquad \gamma_2 := \sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p),$$

$$\gamma_3 := \inf_{\varphi \in \Psi^*} \sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi, \Psi}(p) \qquad \gamma_1 \leqq \gamma_3 \leqq \gamma_2,$$

denn wegen der schwachen* Abgeschlossenheit von Ψ^* ist $\varphi^* \in \Psi^*$. Damit φ^* ein strenger Test in Ψ^* bezüglich Ψ für das Testen gegen $\mathfrak{W}_2$ ist, braucht nur noch $\gamma_1 \geqq \gamma_2$ gezeigt zu werden. Nun gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $E_1(\varepsilon) \in \mathfrak{E}'$ und $p_\varepsilon \in \mathfrak{P}_2$ mit $\gamma_1 \geqq \sup_{E' \in \mathfrak{E}'} \gamma_{\varphi_{E'}^*, \Psi}(p) - \varepsilon/3$ für $E' \supset E_1(\varepsilon)$ und $\gamma_{\varphi^*, \Psi}(p_\varepsilon) \geqq \gamma_2 - \varepsilon/3$. Da $\{\varphi_{E'}^*: E' \in \mathfrak{E}'\}$ ein Teilnetz von $\{\varphi_E^*: E \in \mathfrak{E}\}$ ist, existiert ein $E_2(\varepsilon) \in \mathfrak{E}'$ mit $w_\varepsilon \in E'$ für jedes $E' \in \mathfrak{E}$ mit $E' \supset E_2(\varepsilon)$, wobei $w_\varepsilon \in \mathfrak{W}_2$ das zu $p_\varepsilon \in \mathfrak{P}_2$ gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Zusammen mit (2.3) folgt hieraus schließlich $\gamma_1 \geqq \gamma_2 - \varepsilon$.

2.3. *Bemerkung.* 2.1 folgt auch daraus, daß die nach unten schwach* stetige Funktion $\sup\{\gamma_{\varphi, \Psi}(p): p \in \mathfrak{P}_2\}$ das Infimum auf der schwach* abgeschlossenen und damit auch schwach* kompakten Menge Ψ^* annimmt. Auf diese Weise läßt sich in 2.1 die Annahme der Dominiertheit von $\mathfrak{W} := \mathfrak{W}_1 \cup \mathfrak{W}_2$ durch ein σ-finites Maß durch die nach [17] schwächere Forderung ersetzt werden, daß $B_\infty(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W})$ in der $\mathfrak{E}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W})$-Topologie kompakt und Ψ^* in dieser Topologie abgeschlossen ist. Für 2.2 gilt dasselbe.

3. Ungünstigste Verteilungen

Setzt man über Ψ nur voraus, daß die Einschränkung von β_Ψ^* auf $\overline{\mathfrak{P}}_2$ schwach* stetig ist, so läßt sich für strenge Tests bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ ein ähnliches Ergebnis herleiten wie bei Maximin-Tests zum

Niveau α (vgl. [2], 5.10). Insbesondere ist jeder Test $\varphi^* \in \Phi_\alpha^*$ „irgendwo optimal" bezüglich Φ_α im Sinne von [19], S. 11. Es gilt nämlich der

3.1. Satz. *Sei $\beta_\Psi^* | \overline{\mathfrak{P}}_2$ schwach* stetig. Dann gibt es $\mu_i \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$ mit dem Schwerpunkt $\lambda_i \in \overline{k(\mathfrak{P}_i)}$, $i=1,2$, so daß für jeden Test $\varphi^* \in \Phi_\alpha^*$ gilt:*

(a) *$E_\lambda \varphi^* = \alpha$ μ_1-fast überall oder $E_\lambda \varphi^* = 1$ μ_2-fast überall,*

(b) *$E_\lambda \varphi^* = \beta_\Psi^*(\lambda) - \sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p)$ μ_2-fast überall,*

(c) *φ^* ist bester Test[1] zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\{\lambda_2\}$,*

(d) *φ^* ist bester Test[1] zum Niveau α für das Testen von $\{\lambda_1\}$ gegen $\{\lambda_2\}$.*

Beweis. Es bezeichne $C(E)$, E endliche Teilmenge von $\mathfrak{P}_2$, den Raum der schwach* stetigen Funktionen auf $\underline{E}$ mit der üblichen Normtopologie. Ferner werden folgende Teilmengen von $C(\overline{\mathfrak{P}}_1) \times C(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ bzw. $C(\overline{\mathfrak{P}}_1) \times C(E)$ eingeführt:

$$P := \{(h,k) \colon \exists\, \varphi \in \Phi \text{ mit } h(p) \geqq E_p \varphi,\ p \in \overline{\mathfrak{P}}_1 \text{ und } k(p) \leqq E_p \varphi,\ p \in \overline{\mathfrak{P}}_2\},$$

$$Q := \{(r,s) \colon r(p) \leqq \alpha,\ p \in \overline{\mathfrak{P}}_1 \text{ und } s(p) \geqq \beta_\Psi^*(p) - \sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p),\ p \in \overline{\mathfrak{P}}_2\},$$

$$Q_E := \{(r,s) \colon r(p) \leqq \alpha,\ p \in \overline{\mathfrak{P}}_1 \text{ und } s(p) > \beta_\Psi^*(p) - \sup_{p \in E} \gamma_{\varphi_E^*, \Psi}(p),\ p \in E\}.$$

Dabei ist φ^* bzw. φ_E^* ein strenger Test in Ψ zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ bzw. gegen E. Die Mengen P und Q_E sind konvex und disjunkt, da E eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{P}_2$ ist. Ferner enthält P den Punkt (h,k) mit $h \equiv 2$, $k \equiv -1$ im Inneren, so daß nach einem Trennungssatz (vgl. [5], V.2.8), und da $\overline{\mathfrak{P}}_1$ (bzw. E) schwach* kompakt ist (vgl. [5], V.4.3), reguläre, beschränkte, σ-additive Mengenfunktionen $\mu_E^{(i)}$ über $(\overline{\mathfrak{P}}_i, \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_i))$, $i=1,2$, existieren (vgl. [9], 18.10 und [5], IV.6.3) mit

$$\int_{\overline{\mathfrak{P}}_1} h\, d\mu_E^{(1)} - \int_E k\, d\mu_E^{(2)} \geqq \int_{\overline{\mathfrak{P}}_1} r\, d\mu_E^{(1)} - \int_E s\, d\mu_E^{(2)} \tag{3.1}$$

für jedes $(h,k) \in P$, $(r,s) \in Q_E$.

Aus (3.1) folgt bei geeigneter Wahl von $(h,k) \in P$ bzw. $(r,s) \in Q_E$, daß $\mu_E^{(i)}$ nicht negativ und hieraus, daß $\mu_E^{(2)}(\overline{\mathfrak{P}}_i) > 0$ ist, denn von vornherein galt nicht $\mu_E^{(i)} \equiv 0$ für $i=1,2$. Ferner erhält man aus (3.1)

$$\mu_E^{(1)}(\overline{\mathfrak{P}}_1) / \mu_E^{(2)}(\overline{\mathfrak{P}}_2) \leqq \frac{1}{\alpha}. \tag{3.2}$$

Da Q bzw. Q_E nicht von der speziellen Wahl von φ^* bzw. φ_E^* abhängt, kann man φ^* bzw. φ_E^* aus 2.2 wählen. Wegen 2.2 darf man noch ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\lim_{\mathfrak{E}} \int \varphi_E^* f\, d\mu = \int \varphi^* f\, d\mu$ für jedes $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ und falls $\mu_E^{(1)}(\overline{\mathfrak{P}}_1) > 0$ ist, $\lim_{\mathfrak{E}} (\int \mathfrak{l}\, d\mu_E^{(1)} / \mu_E^{(1)}(\overline{\mathfrak{P}}_1)) = \int \mathfrak{l}\, d\mu_1$ für jedes $\mathfrak{l} \in C(\overline{\mathfrak{P}}_1)$ sowie $\lim_{\mathfrak{E}} (\int t\, d\mu_E^{(2)} / \mu_E^{(2)}(\overline{\mathfrak{P}}_2)) = \int t\, d\mu_2$ für jedes $t \in C(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ annehmen, wobei $\mu_i \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$, ist, denn $\mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$, ist kompakt (vgl. [5], V.4.3). Aus (3.1) folgt dann

$$c \int_{\overline{\mathfrak{P}}_1} h\, d\mu_1 - \int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} k\, d\mu_2 \geqq c \int_{\overline{\mathfrak{P}}_1} r\, d\mu_1 - \int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} s\, d\mu_2 \tag{3.3}$$

[1] Beste Tests zum Niveau α bei einfacher Gegenhypothese sind hier im Sinne von Neyman und Pearson zu verstehen.

für jedes $(h, k) \in P$, $(r, s) \in Q$. Dabei ist

$$c := \lim_{\mathfrak{E}} \mu_E^{(1)}(\overline{\mathfrak{P}}_1)/\mu_E^{(2)}(\overline{\mathfrak{P}}_2) = \mu_1(\overline{\mathfrak{P}}_1)/\mu_2(\overline{\mathfrak{P}}_2),$$

denn man darf wegen (3.2) ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $c \geqq 0$ existiert. Setzt man $h(\lambda) := E_\lambda \varphi^*$ bzw. $r(\lambda) := \alpha$ für $\lambda \in \overline{\mathfrak{P}}_1$ und $k(\lambda) := s(\lambda) := E_\lambda \in \varphi^*$ für $\lambda \in \overline{\mathfrak{P}}_2$, falls $c > 0$ ist bzw. $k(\lambda) := 1$, $s(\lambda) := E_\lambda \varphi^*$ für $\lambda \in \overline{\mathfrak{P}}_2$, falls $c = 0$ ist, wobei φ^* ein beliebiger strenger Test zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ ist, so folgt (a). Wählt man h, k, r wie oben und setzt

$$s(\lambda) := \beta_\Psi^*(\lambda) - \sup_{\lambda \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(\lambda) \qquad \text{für } \lambda \in \overline{\mathfrak{P}}_2,$$

so folgt (b). Ist $\lambda_i \in \overline{k(\mathfrak{P}_i)}$ der Schwerpunkt von $\mu_i \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i = 1, 2$, so gilt wegen (1.1)

$$\int_{\overline{\mathfrak{P}}_i} E_\lambda \varphi \, d\mu_i(\lambda) = E_{\lambda_i} \varphi \tag{3.4}$$

für jedes $\varphi \in \Phi$, $i = 1, 2$. Zusammen mit (3.3) und (b) folgt hieraus (c) und (d).

Ist die Voraussetzung der schwachen* Stetigkeit von $\beta_\Psi^* | \overline{\mathfrak{P}}_2$ nicht erfüllt, so kann man P, Q im vorangegangenen Beweis als Teilmengen von

$$B(\overline{\mathfrak{P}}_1, \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_1)) \times B(\overline{\mathfrak{P}}_2, \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_2))$$

auffassen. Zusammen mit [5], IV.5.1 sowie (1.2) und der Tatsache, daß $\beta_\Psi^*(\lambda)$ als schwach* unterhalb stetige Funktion $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$-meßbar ist, liefert der obige Beweis das

3.2. Korollar. *Es gibt $\tilde{\mu}_i \in \mathrm{ba}_1^+(\overline{\mathfrak{P}}_i)$ mit den Schwerpunkten $\lambda_i \in \overline{k(\mathfrak{P}_i)}$, $i = 1, 2$, so daß für jeden Test $\varphi^* \in \Phi_\alpha^*$ gilt:*

(a) $\int_{\overline{\mathfrak{P}}_1} (E_\lambda \varphi^* - \alpha) \, d\tilde{\mu}_1(\lambda) = 0$ *oder* $\int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} (E_\lambda \varphi^* - 1) \, d\tilde{\mu}_2(\lambda) = 0$,

(b) $\int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} \big(\beta_\Psi^*(\lambda) - E_\lambda \varphi^* - \sup_{\lambda \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(\lambda)\big) \, d\tilde{\mu}_2(\lambda) = 0$,

(c) *φ^* ist bester Test zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\{\lambda_2\}$,*

(d) *φ^* ist bester Test zum Niveau α für das Testen von $\{\lambda_1\}$ gegen $\{\lambda_2\}$.*

(b) und (c) von 3.1 bedeutet, daß μ_2 eine ungünstigste Verteilung für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ zum Niveau α ist. Dabei heißt $\mu_2 \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ ungünstigste Verteilung für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ zum Niveau α genau dann, wenn für jedes $\mu \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ gilt

$$\int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} (\beta_\Psi^*(\lambda) - E_\lambda \varphi_\mu^*) \, d\mu(\lambda) \leqq \int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} (\beta_\Psi^*(\lambda) - E_\lambda \varphi_{\mu_2}^*) \, d\mu_2(\lambda). \tag{3.5}$$

Dabei ist λ_2 bzw. $\lambda \in k(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ der Schwerpunkt von μ_2 bzw. $\mu \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ und $\varphi_{\mu_2}^*$ bzw. φ_μ^* ein bester Test zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\{\lambda_2\}$ bzw. gegen $\{\lambda\}$ [2].

Aus 3.1 ergibt sich nämlich das

3.3. Korollar. *Sei φ^* ein strenger Test bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$. Unter der Voraussetzung von* 3.1 *ist $\mu_2 \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ genau dann eine*

[2] Ist $\beta_\Psi^* | \overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ schwach* stetig, so folgt aus der Konvexität dieser Funktion, daß die ungünstigsten Verteilungen eine konvexe, schwach* kompakte G_δ-Menge bilden.

ungünstigste Verteilung für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ zum Niveau α, wenn (b) *und* (c) *von* 3.1 *für φ^* und μ_2 mit λ_2 als Schwerpunkt von μ_2 gilt.*

Beweis. Ist $\mu' \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}_2})$ und ist (b) und (c) von 3.1 für φ^* und μ_2 erfüllt, so gilt für jeden besten Test $\varphi^*_{\mu'}$ zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\{\lambda'\}$, wobei $\lambda' \in \overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ der Schwerpunkt von μ' ist,

$$\int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} (\beta^*_\Psi(\lambda) - E_\lambda \varphi^*_{\mu'})\, d\mu'(\lambda) \leqq \int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} (\beta^*_\Psi(\lambda) - E_\lambda \varphi^*)\, d\mu'(\lambda) \leqq \sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p)$$
$$= \int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} (\beta^*_\Psi(\lambda) - E_\lambda \varphi^*)\, d\mu_2(\lambda).$$

Wegen (3.4) und der Optimalität von $\varphi^*_{\mu'}$ ist nämlich $\int E_\lambda \varphi^*_{\mu'}\, d\mu' \geqq \int E_\lambda \varphi^*\, d\mu'$, und aufgrund der schwachen* Stetigkeit von β^*_Ψ gilt

$$\sup_{\lambda \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi, \Psi}(\lambda) = \sup_{\lambda \in \overline{\mathfrak{P}}_2} \gamma_{\varphi, \Psi}(\lambda) \tag{3.6}$$

für jedes $\varphi \in \Phi$. Damit ist μ_2 eine ungünstigste Verteilung für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ zum Niveau α.

Sei nun umgekehrt μ_2 eine ungünstigste Verteilung für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ zum Niveau α. Dann existiert zunächst nach 3.1 zusammen mit (3.6) zu jedem $\varphi^* \in \Phi^*_\alpha$ ein $\mu_0 \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}_2})$ mit

$$\sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p) = \int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} (\beta^*_\Psi(\lambda) - E_\lambda \varphi^*)\, d\mu_0(\lambda), \tag{3.7}$$

wobei μ_0 eine ungünstigste Verteilung für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ zum Niveau α und φ^* ein bester Test zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\{\lambda_0\}$ ist. Dabei ist λ_0 der Schwerpunkt von μ_0. Ist ferner $\varphi^*_{\mu_2}$ ein bester Test zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\{\lambda_2\}$, wobei λ_2 der Schwerpunkt von μ_2 ist, so folgt hieraus wegen (3.4)–(3.7)

$$\sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p) = \int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} (\beta^*_\Psi(\lambda) - E_\lambda \varphi^*_{\mu_2})\, d\mu_2(\lambda) \leqq \int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} (\beta^*_\Psi(\lambda) - E_\lambda \varphi^*)\, d\mu_2(\lambda) \leqq \sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p)$$

und damit $\int E_\lambda \varphi^*_{\mu_2}\, d\mu_2 = \int E_\lambda \varphi^*\, d\mu_2$ bzw. $\sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p) = \int (\beta^*_\Psi(\lambda) - E_\lambda \varphi^*)\, d\mu_2$, d.h. $E_{\lambda_2} \varphi^*_{\mu_2} = E_{\lambda_2} \varphi^*$ bzw. $E_p \varphi^* = \beta^*_\Psi(p) - \sup_{p \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \Psi}(p)$ μ_2-fast überall, d.h. (b) und (c) von (3.3) gilt für φ^* und μ_2.

3.4. *Bemerkung.* Wegen der $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$-Meßbarkeit von $\beta^*_\Psi(\lambda)$ kann man die Definition ungünstigster Verteilungen auf $\tilde{\mu} \in \mathrm{ba}_1^+(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ gemäß (3.5) ausdehnen. Dann gilt 3.3 ohne die Annahme der schwachen* Stetigkeit von $\beta^*_\Psi | \overline{\mathfrak{P}}_2$ mit 3.2 anstelle von 3.1, wenn man die Erweiterung der Definition strenger Tests bezüglich Ψ zum Niveau α von $\mathfrak{P}_i$ auf $\overline{\mathfrak{P}}_i$, $i = 1, 2$, strenge Tests bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $\overline{\mathfrak{P}}_1$ gegen $\overline{\mathfrak{P}}_2$ betrachtet. In 3.1 und 3.2 kann man auch auf die Dominiertheit von $\mathfrak{W}_i$, $i = 1, 2$, verzichten, wenn man $\mathfrak{W}_i$, $i = 1, 2$, in den Banach-Raum der endlich additiven, beschränkten Mengenfunktionen mit der totalen Variation als Norm einbettet und statt der Menge Q_E im Beweis von 3.1 die Teilmenge $Q_\varepsilon = \{(r, s)\colon r(\lambda) \leqq \alpha,\ \lambda \in \mathfrak{W}_1$ und $s(\lambda) \geqq \beta_\Psi^*(\lambda) - \sup_{\lambda \in \mathfrak{P}_2} \gamma_{\varphi^*, \psi}(\lambda) + \varepsilon,\ \lambda \in \overline{\mathfrak{W}_2}\}$, $\varepsilon > 0$, von $B(\overline{\mathfrak{W}_1}, \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{W}_1})) \times B(\overline{\mathfrak{W}_2}, \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{W}_2}))$ betrachtet, wobei $B(\overline{\mathfrak{W}_i}, \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{W}_i}))$ analog zu $B(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{B}(\mathfrak{P}_i))$, $i=1,2$, erklärt ist.

Um mit Hilfe des Fundamentallemmas von Neyman und Pearson zusammen mit 3.1 (d) für jeden strengen Test bezüglich ψ zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ eine 0-1-Struktur angeben zu können, ist die σ-Additivität von $\lambda_i \in \overline{k(\mathfrak{P}_i)}$, $i=1,2$, notwendig. Eine hinreichende Bedingung dafür liefert der

3.5. Satz. *Ist $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, gleichmäßig integrabel, so ist jedes $\lambda_i \in \overline{k(\mathfrak{P}_i)}$, $i=1,2$, σ-additiv.*

Beweis. Zu $\lambda_i \in \overline{k(\mathfrak{P}_i)}$, $i=1,2$, gibt es ein Netz $\lambda_\alpha^{(i)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen aus der konvexen Hülle $k(\mathfrak{P}_i)$ von $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, das gegen λ_i in der schwachen* Topologie von $\mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*, \mu)$ konvergiert, $i=1,2$. Ferner ist nach [11], IV.2.3 die gleichmäßige Integrabilität von $\mathfrak{P}_i$ gleichwertig damit, daß $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, in der schwachen* Topologie von $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ relativ kompakt ist. Damit ist auch $k(\mathfrak{P}_i)$, $i=1,2$, relativ schwach kompakt (vgl. [5], V.6.3). Es gibt daher ein Teilnetz $\lambda_{\alpha'}^{(i)}$ von $\lambda_\alpha^{(i)}$ und ein p_i' aus der konvexen, in der schwachen Topologie abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, so daß die zu $\lambda_{\alpha'}^{(i)}$ gehörenden μ-Dichten in der schwachen Topologie gegen p_i' konvergieren, $i=1,2$ (vgl. [8], S. 163). Da aber die schwache Konvergenz in $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ mit der schwachen* Konvergenz der zugehörigen σ-additiven Mengenfunktionen aus $\mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*, \mu)$ übereinstimmt, ist $\lambda_i = \lambda_i'$, wobei λ_i' das zu p_i' gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß ist, $i=1,2$.

3.6. *Bemerkung.* $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, ist nach [11], II.5.1 gleichmäßig integrabel, wenn $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, durch eine integrable Funktion (nach oben) beschränkt ist. Dies wiederum ist erfüllt, wenn der von $\mathfrak{W}_i$ erzeugte positive Kegel $\mathfrak{K}_i := \{a\, w_i\colon w_i \in \mathfrak{W}_i,\ a \geqq 0\}$, $i=1,2$, einen inneren Punkt in der Normtopologie des Raumes $\mathrm{ca}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ der σ-additiven, beschränkten Mengenfunktionen über $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ mit der totalen Variation als Norm enthält. Ist $a_i\, w_i^{(0)}$, $a_i > 0$ ein solcher Punkt, so gibt es wegen der Beschränktheit von $a_i\, w_i^{(0)} - \mathfrak{W}_i$ ein $\varepsilon_i > 0$ mit $a_i\, w_i^{(0)} + \varepsilon_i (a_i\, w_i^{(0)} - \mathfrak{W}_i) \subset \mathfrak{K}_i$, $i=1,2$. Hieraus folgt $(1+\varepsilon_i)\, w_i^{(0)}(B) \geqq \frac{\varepsilon_i}{a_i} w_i(B)$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$ und $w_i \in \mathfrak{W}_i$, $i=1,2$, und damit $p_i \leqq \frac{a_i\, \varepsilon_i}{1+\varepsilon_i} p_i^{(0)}$ für jedes $p_i \in \mathfrak{P}_i$, $i=1,2$. Dabei ist $p_i^{(0)}$ die μ-Dichte von $w_i^{(0)}$, $i=1,2$.

3.7. *Beispiele.* Klassen von Wahrscheinlichkeitsmaßen, die sogar in der Normtopologie von $\mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*, \mu)$ relativ kompakt sind, findet man in [14]. Einfach zu zeigen ist, daß eine durch ein σ-finites Maß dominierte Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen w_ϑ über $(\mathbb{R}_1, \mathfrak{B}_1)$, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}_1$, mit $w_\vartheta(B) = w(B - \vartheta)$, $B \in \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ als σ-Körper der Borelschen Mengen des $\mathbb{R}_1$ in dieser Topologie relativ kompakt ist, falls Θ beschränkt ist. Zunächst kann man nach [6], Lemma 2 das Lebesguesche Maß λ als dominierendes Maß wählen. Wegen [5], IV.13.99 gilt dann in Verallgemeinerung von Lemma 3 in [6]

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}_1} |w_\vartheta(B) - w_{\vartheta_0}(B)| = \tfrac{1}{2} \int |p(x+\vartheta) - p(x+\vartheta_0)|\, d\vartheta \to 0 \qquad \text{für } \vartheta \to \vartheta_0,$$

woraus die relative Kompaktheit von $\{w_\vartheta\colon \vartheta \in \Theta\}$ folgt, falls Θ beschränkt ist.

In der herkömmlichen Theorie der ungünstigsten Verteilungen ist es üblich, die zu den $\lambda_i \in \overline{k(\mathfrak{P}_i)}$, $i=1,2$, gehörenden μ-Dichten als Mischung der μ-Dichten p_λ von $\lambda \in \overline{\mathfrak{P}}_i$, $i=1,2$, darzustellen (vgl. [21], S. 106). Hinreichende Bedingungen dafür liefert der

3.8. Satz. *Ist $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, gleichmäßig integrabel und gibt es in $\mathfrak{B}$ enthaltene für $\mathfrak{W}_i$, $i=1,2$, suffiziente, separable σ-Körper, so existieren $\mu_i \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$ zu $\lambda_i \in \overline{k(\mathfrak{P}_i)}$, $i=1,2$, so daß für die μ-Dichten p_{λ_i} von λ_i, gilt*

$$p_{\lambda_i}(x) = \int_{\overline{\mathfrak{P}}_i} p_\lambda(x)\, d\mu_i(\lambda) \qquad \mu\text{-fast überall},$$

$i=1,2$.

Beweis. Wegen 3.5 kann man jedem $\lambda \in \overline{\mathfrak{P}}_i$, $i=1,2$, eine μ-Dichte zuordnen. Diese Abbildung ist ein Homöomorphismus H, wenn man $\overline{\mathfrak{P}}_i$ mit der (relativen) schwachen* Topologie von $\mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*, \mu)$ und den Bildraum von H mit der (relativen) schwachen Topologie von $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ versieht. Ferner existiert nach [16], 1.2 zu $\lambda_i \in \overline{k(\mathfrak{P}_i)}$ ein $\mu_i \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$, so daß $f(\lambda_i) = \int f(\lambda)\, d\mu_i$ für jedes f aus dem Dualraum von $C(\overline{\mathfrak{P}}_i)$ gilt, $i=1,2$. Setzt man insbesondere $f(\lambda) = E_{H(\lambda)}\varphi$, $\varphi \in \Phi$, so folgt

$$E_{p_{\lambda_i}}\varphi = \int_{\overline{\mathfrak{P}}_i} E_{H(\lambda)}\varphi\, d\mu_i(\lambda) \tag{3.8}$$

für alle $\varphi \in \Phi$, $i=1,2$. Nach [15] gibt es nun $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$-meßbare Versionen von $(H(\lambda))(x)$, $x \in \mathfrak{X}$, $\lambda \in \overline{\mathfrak{P}}_i$, $i=1,2$, denn der für $\mathfrak{P}_i$ suffiziente σ-Körper in $\mathfrak{B}$ ist auch für $H(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$, suffizient (vgl. [15]), so daß sich aus (3.8) zusammen mit dem Satz von Fubini die Behauptung ergibt.

3.9. *Bemerkung.* Man kann 3.8 als Umkehrung von 3.4 in [2] ansehen. Dabei ist nach [15] die Existenz eines separablen, für $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, suffizienten σ-Körpers in $\mathfrak{B}$ gleichwertig mit der Separabilität von $\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, in der (relativen) schwachen Topologie von $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$. Ferner sind die in 3.8 angegebenen Bedingungen äquivalent damit, daß $\mathfrak{P}_i' := H(\overline{\mathfrak{P}}_i)$, $i=1,2$, in der schwachen Topologie von $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ kompakt und metrisch ist, was nach [13], II.6.2 gleichwertig damit ist, daß $\mathfrak{W}(\mathfrak{P}_i')$, $i=1,2$, kompakt und metrisch ist. Dabei ist $\mathfrak{W}(\mathfrak{P}_i')$ analog zu $\mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_i)$ definiert. Da ein kompakter, metrischer Raum stets separabel ist, braucht zum Beweis der obigen Behauptung nur noch aus der Kompaktheit und Separabilität von $\mathfrak{P}_i'$, $i=1,2$, auf die Existenz einer Metrik für die schwache Topologie von $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ auf $\mathfrak{P}_i'$, $i=1,2$, geschlossen werden. Nach [15] gibt es eine abzählbare, dichte Menge von $\mathfrak{P}_i'$, $i=1,2$, in der Normtopologie von $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$. Daher läßt sich $\mathfrak{P}_i'$, $i=1,2$, als Teilmenge von $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}', \mu')$ auffassen, wobei $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ separabel und $\mu' = \mu|\mathfrak{B}$ σ-finit ist (vgl. den Beweis in [5], III.8.5). Daher ist $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}', \mu')$ separabel in der Normtopologie (vgl. [21], 2.17), und die schwache Topologie von $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}', \mu')$ bzw. $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ stimmen auf $\mathfrak{P}_i'$, $i=1,2$, überein. Nach [5], V.6.3 ist aber die schwache Topologie von $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}', \mu')$ auf $\mathfrak{P}_i'$, $i=1,2$, eine metrische Topologie.

Aus 3.1 kann man eine hinreichende Bedingung für die schwache* Stetigkeit von $\beta_\alpha^*(\lambda) := \beta_{\Phi_\alpha}^*(\lambda)$ in $\lambda \in \overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ herleiten. Es gilt nämlich das

3.10. Korollar. *Ist $\mathfrak{P}_2$ gleichmäßig integrabel und der Positivteil von $p_{\lambda_2} - k' p_{\lambda_1'}$ schwach* stetig in $\lambda_2 \in \overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ für jedes λ_1' aus der konvexen Hülle von $\mathfrak{P}_1$ und $k' \geqq 0$, so ist $\beta_\alpha^* | \overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ schwach* stetig.*

Beweis. Setzt man im Beweis von 3.1 für $\Psi=\Phi$ und $E=\{\lambda_2\}$ mit $\lambda_2\in\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$, so folgt aus (3.1) für jeden besten Test φ^* zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\{\lambda_2\}$

$$E_{\lambda_2}\varphi^*=\beta_\alpha^*(\lambda_2)\geqq\alpha k+E_{\lambda_2}\varphi-k\int\limits_{\mathfrak{P}_1}E_\lambda\varphi\,d\mu_1(\lambda) \tag{3.9}$$

für jedes $\varphi\in\Phi$ mit $\mu_1\in\mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_1)$ und $k\geqq 0$. Dabei ist

$$\int\limits_{\mathfrak{P}_1}E_\lambda\varphi^*\,d\mu_1(\lambda)=\alpha, \tag{3.10}$$

falls $k>0$ ist.

Nach [16], 1.1 gilt für den Schwerpunkt $\lambda_1\in\overline{k(\mathfrak{P}_1)}$ von μ_1 die Beziehung (3.4) für $i=1$. Aus (3.9) ergibt sich dann

$$\beta_\alpha^*(\lambda_2)=\alpha k+(\lambda_2-k\lambda_1)^+(\mathfrak{X}) \tag{3.11}$$

mit $(\lambda_2-k\lambda_1)^+$ als Positivteil bei der Jordan-Zerlegung von $\lambda_2-k\lambda_1$ (vgl. [5], III.1.8). Ist nun $\lambda_1'\in\overline{k(\mathfrak{P}_1)}$, so existiert nach [16], 1.2 ein $\mu_i'\in\mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_1)$ mit (3.4) für $i=1$. Wegen $\varphi^*\in\Phi_\alpha$ gilt $\int E_\lambda\varphi^*\,d\mu_1'\leqq\alpha$, so daß aus (3.9)–(3.11) folgt

$$\beta_\alpha^*(\lambda_2)=\inf\{\alpha k'+(\lambda_2-k'\lambda_1')^+(\mathfrak{X})\colon\ \lambda_1'\in\overline{k(\mathfrak{P}_2)},\ k'\geqq 0\}. \tag{3.12}$$

Setzt man ferner im Beweis von 3.1 anstelle von $\mathfrak{P}_1$ eine endliche Teilmenge E' von $\mathfrak{P}_1$, $E=\{\lambda_2\}$ mit $\lambda_2\in\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ und $\Psi=\Phi$, so folgt für jeden besten Test $\varphi_{E'}^*$ zum Niveau α für das Testen von E' gegen $\{\lambda_2\}$

$$E_{\lambda_2}\varphi_{E'}^*\geqq\alpha\,\mu_{E'}^{(1)}(E')+E_{\lambda_2}\varphi-\mu_{E'}^{(1)}(E')\int\limits_{E'}E_\lambda\varphi\,d\mu_{E'}^{(1)}(\lambda) \tag{3.13}$$

für jedes $\varphi\in\Phi$. Dabei ist $\mu_{E'}^{(1)}$ ein endliches Maß über $(\overline{\mathfrak{P}}_1,\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_1))$, dessen Träger in E' enthalten ist. Da Φ eine schwach* kompakte Teilmenge von $\mathfrak{L}_\infty(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mu)$ ist (vgl. [5], V.4.3), gibt es ein Teilnetz $\{\varphi_{E''}^*\colon E''\subset\mathfrak{P}_1,\ E''\text{ endlich}\}$ von $\{\varphi_{E'}^*\colon E'\subset\mathfrak{P}_1,\ E'\text{ endlich}\}$ und einen Test φ^*, so daß $\varphi_{E'}^*$ in der schwachen* Topologie von $\mathfrak{L}_\infty(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mu)$ gegen φ^* konvergiert. Daher ist $\varphi^*\in\Phi_\alpha$, und $E_{\lambda_2}\varphi^*\geqq\beta_\alpha^*(\lambda_2)$, d.h. $E_{\lambda_2}\varphi^*=\beta_\alpha^*(\lambda_2)$. Aus (3.12) und (3.13) folgt hiermit

$$\beta_\alpha^*(\lambda_2)=\inf\{\alpha k'+(\lambda_2-k'\lambda_1')^+(\mathfrak{X})\colon\ \lambda_1'\in k(\mathfrak{P}_1),\ k'\geqq 0\}. \tag{3.14}$$

Da $\mathfrak{P}_2$ gleichmäßig integrabel ist, ist jedes $\lambda_2\in\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ wegen 3.5 σ-additiv. Bezeichnet $p_{\lambda_1'}$ bzw. p_{λ_2} die μ-Dichte von $\lambda_1'\in k(\mathfrak{P}_1)$ bzw. $\lambda_2\in\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$, so folgt aus (3.14)

$$\beta_\alpha^*(\lambda_2)=\inf\{\alpha k'+\int(p_{\lambda_2}-k'p_{\lambda_1'})^+\,d\mu\colon\ \lambda_1'\in k(\mathfrak{P}_1),\ k'\geqq 0\}, \tag{3.15}$$

wobei $(p_{\lambda_2}-k'p_{\lambda_1'})^+$ der Positivteil von $p_{\lambda_2}-k'p_{\lambda_1'}$ ist.

Aus (3.15) folgt, daß β_α^* auf $\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ nach oben schwach* halbstetig ist und da β_α^* wegen $\beta_\alpha^*(\lambda_2)=\sup\{E_{\lambda_2}\varphi\colon\varphi\in\Phi_\alpha\}$ nach unten schwach* halbstetig ist, folgt hieraus die Behauptung.

3.11. *Bemerkung*. Aus [2], 6.3 folgt auch (3.14). Ferner sind die Voraussetzungen von 3.10 erfüllt, wenn $\mathfrak{W}_2$ in der Normtopologie von $\mathrm{ca}(\mathfrak{X},\mathfrak{B})$ relativ kompakt ist, denn wegen [5], V.2.6, V.3.5 und V.3.7 stimmen schwache* Topologie und Normtopologie auf $\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ überein.

Erweitert man die Definition strenger Tests bezüglich Ψ zum Niveau α gemäß (1.3) von $\mathfrak{P}_i$ auf $\overline{k(\mathfrak{P}_i)}$, $i=1,2$, so läßt sich das Konvexitätsprinzip für gleichmäßig beste (trennscharfe) Tests (vgl. [20], S. 216–217) auf strenge Tests bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ übertragen.

3.12. Satz. *Sei $\beta_\alpha^* | \overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ schwach* stetig. Dann ist jeder strenge Test bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ auch ein strenger Test bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $\overline{k(\mathfrak{P}_1)}$ gegen $\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$.*

Beweis. Aus $E_p\,\varphi \leqq \alpha$, $p \in \mathfrak{P}_1$, folgt wegen (3.4) mit $i=1$ $E_{\lambda_1}\varphi \leqq \alpha$, $\lambda_1 \in \overline{k(\mathfrak{P}_1)}$ für jedes $\varphi \in \Phi$ [3]. Dabei ist $\mu_1 \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_1)$ mit λ_1 als Schwerpunkt (vgl. [16], 1.2). Wegen der schwachen* Stetigkeit von β_Ψ^* auf $\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ gilt (3.6) auch für $k(\mathfrak{P}_2)$ anstelle von $\mathfrak{P}_2$, so daß es genügt

$$\sup_{p \in \overline{k(\mathfrak{P}_2)}} \gamma_{\varphi^*,\Psi}(p) \leqq \sup_{p \in \overline{\mathfrak{P}}_2} \gamma_{\varphi^*,\Psi}(p) \tag{3.16}$$

zu zeigen. Dabei ist φ^* ein strenger Test bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $k(\mathfrak{P}_1)$ gegen $k(\mathfrak{P}_2)$, der nach 2.1 existiert, denn $k(\mathfrak{P}_i)$, $i=1,2$, wird durch μ dominiert. Wegen der schwachen* Stetigkeit von β_Ψ^* ist auch $\gamma_{\varphi^*,\Psi}$ schwach* stetig auf $\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ und nimmt das Maximum als konvexe Funktion in einem Extremalpunkt von $\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ an (vgl. [1], 2.2.1). Da $\overline{\mathfrak{P}}_2$ und $\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ schwach* kompakt, und $\overline{k(\mathfrak{P}_2)} = \overline{k(\overline{\mathfrak{P}}_2)}$ ist folgt mit [5], V.8.5 die Beziehung (3.16).

Man kann auf die Voraussetzung der schwachen* Stetigkeit von β_Ψ^* auf $\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ verzichten, wenn man strenge Tests bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $\overline{\mathfrak{P}}_1$ gegen $\overline{\mathfrak{P}}_2$ betrachtet. Es gilt der

3.13. Satz. *Jeder strenge Test bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $\overline{\mathfrak{P}}_1$ gegen $\overline{\mathfrak{P}}_2$ ist ein strenger Test bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $\overline{k(\mathfrak{P}_1)}$ gegen $\overline{k(\mathfrak{P}_2)}$.*

Beweis. Es sei $\gamma = \sup\{\gamma_{\varphi^*,\Psi}(\lambda)\colon \lambda \in \overline{\mathfrak{P}}_2\}$ mit φ^* als strenger Test bezüglich Ψ zum Niveau α für das Testen von $\overline{\mathfrak{P}}_1$ gegen $\overline{\mathfrak{P}}_2$. Da β_Ψ^* als schwach* nach unten stetige Funktion $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$-meßbar ist, gilt

$$\beta_\Psi^*(\lambda') - E_{\lambda'}\,\varphi \leqq \int_{\overline{\mathfrak{P}}_2} \left(\beta_\Psi^*(\lambda') - E_{\lambda'}\,\varphi\right) d\mu'(\lambda') \leqq \gamma$$

für jedes $\lambda' \in \overline{k(\mathfrak{P}_2)}$. Dabei ist $\mu' \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ mit λ' als Schwerpunkt (vgl. [16], 1.2). Hieraus folgt die Behauptung.

Schließlich soll noch untersucht werden, wann ein strenger Test φ^* bezüglich Φ_α zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ ein gleichmäßig bester Test ist, d.h. wann $E_p\,\varphi^* = \beta_\alpha^*(p)$, $p \in \mathfrak{P}_2$ gilt.

3.14 Satz. *Sei $\beta_\alpha^* | \overline{\mathfrak{P}}_2$ schwach* stetig. Dann ist ein strenger Test φ^* bezüglich Φ_α zum Niveau α für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ genau dann ein gleichmäßig bester Test, wenn eine der folgenden Bedingungen für das Testen von $\mathfrak{W}_1$ gegen $\mathfrak{W}_2$ zum Niveau α erfüllt ist:*

(a) *Es gibt eine ungünstigste Verteilung mit einpunktigem Träger* [4].

(b) *Jedes $\mu_2 \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ ist ungünstigste Verteilung.*

---

[3] Diese Aussage zusammen mit [5], V.2.10 liefert $\overline{k(\mathfrak{P}_i)} = \{\lambda \in \mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*, \mu)\colon$ Aus $E_p\,\varphi \leqq \alpha$, $p \in \mathfrak{P}_i$ folgt $E_\lambda\,\varphi \leqq \alpha$ für $\varphi \in \Phi\}$, $i=1,2$.

[4] Vgl. Definition in [1], S. 25.

(c) *Jedes* $\lambda_2 \in \overline{k(\mathfrak{P}_2)}$ *ist Schwerpunkt einer ungünstigsten Verteilung.*

(d) $\beta_\alpha^* \mid \overline{\mathfrak{P}}_2$ *ist affin linear.*

(e) *Es gibt eine ungünstigste Verteilung* μ_2, *deren Schwerpunkt im Träger von* μ_2 *liegt.*

(f) *Es gibt ein* $\lambda_2 \in \overline{k(\mathfrak{P}_2)}$, *so daß jedes* $\mu_2 \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ *mit* λ_2 *als Schwerpunkt ungünstigste Verteilung ist.*

Beweis. Aus 3.3 folgt unmittelbar, daß (a) notwendig und hinreichend ist. Aus 3.3 und, da aus $E_p\,\varphi^* = \beta_\alpha^*(p)$ für jedes $p \in \mathfrak{P}_2$, folgt $E_\lambda\,\varphi^* = \beta_\alpha^*(\lambda)$ für jedes $\lambda \in \overline{k(\mathfrak{P}_2)}$, ergibt sich, daß (b) und (c) notwendig und hinreichend sind. Aus der Linearität und der schwachen* Stetigkeit von $\beta_\alpha^*(\lambda)$ in $\lambda \in \overline{\mathfrak{P}}_2$ folgt $\beta_\alpha^*(\lambda_2) = \int \beta_\alpha^*(\lambda)\, d\mu_2$ mit μ_2 und λ_2 aus 3.1, so daß (d) notwendig und hinreichend ist. Wegen der schwachen* Stetigkeit von β_α^* auf $\overline{\mathfrak{P}}_2$ und, da der Träger von $\mu_2 \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ als Menge aller $\lambda \in \overline{\mathfrak{P}}_2$, deren offene Umgebungen positives μ_2-Maß haben, beschrieben werden kann, ist (e) notwendig und hinreichend. Um einzusehen, daß (f) hinreichend ist, betrachtet man den linearen Teilraum M von $C(\overline{\mathfrak{P}}_2)$, der von β_α^* und den auf $\overline{\mathfrak{P}}_2$ eingeschränkten und über $\mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}^*, \mu)$ schwach* stetigen, linearen Funktionen aufgespannt wird. Nach [5], II.3.1 und IV.6.3 gibt es zu dem stetigen linearen Funktional L mit $L(f) := f(\lambda_2)$, $f \in M$ ein $\mu_2 \in \mathfrak{W}(\overline{\mathfrak{P}}_2)$, so daß $L(f) = \int f\, d\mu_2$ für jedes $f \in M$ gilt. Zusammen mit 3.3 folgt hieraus $\sup\{\gamma_{\varphi^*, \Phi_\alpha}(p)\colon p \in \mathfrak{P}_2\} = 0$. Da (f) notwendig ist, ist 3.14 bewiesen.

4. Verallgemeinerung des Fundamentallemmas von Neyman und Pearson auf endlich additive Mengenfunktionen

Die konstruktive Bestimmung eines strengen Tests durch Angabe einer 0-1-Struktur war mit Hilfe des Fundamentallemmas von Neyman und Pearson nur möglich, falls $\lambda_i \in \overline{k(\mathfrak{P}_i)}$ aus 3.1 σ-additiv war, $i = 1, 2$. Um nun das Fundamentallemma von Neyman und Pearson auf endlich additive Mengenfunktionen zu verallgemeinern, wird $\lambda \in \mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ nach [4], 2.2.1 zerlegt. Dabei bezeichnet $\mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ die Menge der beschränkten, endlich additiven Mengenfunktionen über $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$. Bezeichnet ferner $v(\lambda, B) := \lambda^+(B) + \lambda^-(B)$ die totale Variation von $\lambda \in \mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ auf $B \in \mathfrak{B}$ mit λ^+ bzw. λ^- als Positiv- bzw. Negativteil der Jordan-Zerlegung von λ, so soll zunächst ein einfacher Beweis für den folgenden Zerlegungssatz 2.2.1 in [4] angegeben werden:

4.1. Satz. *Sei* $\lambda, \rho \in \mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ *und* ρ σ*-additiv. Dann kann man* λ *eindeutig als Summe von* $\lambda', \lambda'' \in \mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ *schreiben. Dabei ist* λ' ρ*-stetig (d.h. zu* $\varepsilon > 0$ *gibt es* $\delta > 0$, *so daß aus* $v(\rho, B) < \delta$ *folgt* $v(\lambda', B) < \varepsilon$ *für jedes* $B \in \mathfrak{B}$) *und damit* σ*-additiv und* λ'' ρ*-singulär (d.h. zu* $\varepsilon > 0$ *gibt es* $B \in \mathfrak{B}$ *mit* $v(\rho, B) < \varepsilon$ *und* $v(\lambda'', \mathfrak{X} - B) < \varepsilon$).

Beweis. Wegen der Jordan-Zerlegung kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\lambda(B) \geqq 0$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$ annehmen. Dann ist $\Lambda := \{v \in \mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}) : 0 \leqq v(B) \leqq \lambda(B)$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$, v σ-additiv und ρ-stetig$\}$ induktiv geordnet bezüglich der partiellen Ordnung $\lambda_1 \leqq \lambda_2$, $\lambda_i \in \mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, $i = 1, 2$, genau dann, wenn $\lambda_1(B) \leqq \lambda_2(B)$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$ (vgl. [18], S. 28), so daß nach dem Zornschen Lemma (vgl. [5], I.2.7) ein maximales Element $\lambda' \in \Lambda$ existiert. Wegen der Maximalität von λ' ist $\lambda'' := \lambda - \lambda'$ ρ-singulär. Offenbar ist λ' und λ'' eindeutig.

4.2. *Bemerkung.* Wie der Beweis zeigt, braucht $\mathfrak{B}$ nur ein Mengenkörper zu sein (vgl. [3], Lemma 2). Ist $\lambda(B) \geqq 0$ und $\rho(B) \geqq 0$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$ und wird $\{\lambda\}$ durch ρ dominiert, so stimmt die obige Zerlegung von λ mit der Zerlegung von Yosida und Hewitt (vgl. [5], III.7.8) überein, d.h. λ'' ist rein endlich additiv ([5], III.7.7). Zum Beweis braucht man nur III.7.8 von [5] auf λ'' anzuwenden.

Aus 4.1 ergibt sich der

4.3. Satz. *Sei $\lambda_i \in \mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ mit $\lambda_i(B) \geqq 0$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$, $i=1,2$, und $\rho \in \mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ ein Maß. Dann gilt für jeden besten Test φ^* zum Niveau α, $0<\alpha<1$, für das Testen von $\{\lambda_1\}$ gegen $\{\lambda_2\}$: Es gibt $k \geqq 0$ mit*

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & (d\lambda_2'/d\rho)(x) > k(d\lambda_1'/d\rho)(x) \\ 0 & (d\lambda_2'/d\rho)(x) < k(d\lambda_1'/d\rho)(x) \end{cases} \quad \rho\text{-fast überall.}$$

Falls $E_{\lambda_2}\varphi^* < 1$ ist, gilt $E_{\lambda_1}\varphi^* = \alpha$ und $k>0$. Dabei ist λ_i' der σ-additive und ρ-stetige Teil der Zerlegung von 4.1 *und $d\lambda_i'/d\rho$ die zugehörige Radon-Nikodymsche Ableitung, $i=1,2$.*

Beweis. Die konvexen, disjunkten Teilmengen

$$P := \{(x_1, x_2) : \exists\, \varphi \in \Phi \quad \text{mit} \quad x_1 \geqq \int \varphi\, d\lambda_1 \quad \text{und} \quad x_2 \leqq \int \varphi\, d\lambda_2\},$$
$$Q := \{(y_1, y_2) : y_1 \leqq \alpha \quad \text{und} \quad y_2 > \int \varphi^*\, d\lambda_2\}$$

des $\mathbb{R}_2$ lassen sich nach einem Trennungssatz (vgl. [5], V.2.8) durch ein stetiges, lineares Funktional $\neq 0$ trennen. Es gibt also (vgl. Beweis von 3.1 oder [10], Beweis von Satz 2) eine Konstante $k \geqq 0$ mit $k x_1 - x_2 \geqq k y_1 - y_2$ für alle $(x_1, x_2) \in P$ und alle $(y_1, y_2) \in \bar{Q}$ mit $\bar{Q}$ als abgeschlossene Hülle von Q. Hieraus folgt

$$\int \varphi^*\, d\lambda_2 - k \int \varphi^*\, d\lambda_1 \geqq \int \psi\, d\lambda_2 - k \int \psi\, d\lambda_1 \tag{4.1}$$

für jedes $\psi \in \Phi$. Insbesondere ist $k>0$ und damit $E_{\lambda_1}\varphi^* = \alpha$, falls $E_{\lambda_2}\varphi^* < 1$ gilt. Um 4.3 zu beweisen, genügt es, aus (4.1) auf

$$\int \varphi^* z_2\, d\rho - k \int \varphi^* z_1\, d\rho \geqq \int \varphi z_2\, d\rho - k \int \varphi z_1\, d\rho \tag{4.2}$$

für jedes $\varphi \in \Phi$ zu schließen. Dabei ist $z_i := d\lambda_i'/d\rho$, $i=1,2$. Wegen 4.1 gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $B \in \mathfrak{B}$ mit $\rho(B) < \varepsilon$ und $\lambda_i''(\mathfrak{X} - \mathfrak{B}) < \varepsilon$, $i=1,2$. Setzt man in (4.1) für $\psi = \varphi I_{\mathfrak{X}-B} + \varphi^* I_B$ mit I_C als Indikatorfunktion von $C \subset \mathfrak{X}$, so ergibt sich zusammen mit III.10.4 in [5]

$$\int_{\mathfrak{X}-B} \varphi^* z_2\, d\rho - k \int_{\mathfrak{X}-B} \varphi^* z_1\, d\rho \geqq \int_{\mathfrak{X}-B} \varphi z_2\, d\rho - k \int_{\mathfrak{X}-B} \varphi z_1\, d\rho - (k+1)\varepsilon$$

für jedes $\varphi \in \Phi$. Wegen [5], III.6.1.5 (i) folgt (4.2).

4.4. *Bemerkung.* Ist λ_i aus 4.3 σ-additiv, $i=1,2$, so folgt mit $\rho = \lambda_1$, $z_1 \equiv 1$, $z_2 = d\lambda_2'/d\lambda_1$ das Fundamentallemma von Neyman und Pearson in der Gestalt von [7]. Dabei ist λ_2' der λ_1-stetige Teil der Lebesgueschen Zerlegung von λ_2. Ferner kann man in 4.3 statt der ρ-stetigen und σ-additiven Komponente in der Zerlegung 4.1 von λ auch den σ-additiven Teil der Zerlegung von λ nach Yosida und Hewitt nehmen. Aus der Definition der reinen endlichen Additivität von λ'' folgt nämlich unmittelbar, daß λ'' bezüglich jedes Maßes singulär ist. Setzt man also in 4.3 für $\rho=\mu$, wobei μ das $\mathfrak{W}_1 \cup \mathfrak{W}_2$ dominierende σ-finite Maß ist, von dem man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mu \in \mathrm{ba}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ annehmen kann (vgl. [21], S. 48), so liefert die Zerlegung von Yosida und Hewitt wegen 4.2 mit Hilfe von 3.1 (d) dieselbe 0-1-Struktur für jeden strengen Test wie die Zerlegung von Darst [4]. Allerdings läßt sich 3.1 ohne die Annahme der Dominiertheit von $\mathfrak{W}_1 \cup \mathfrak{W}_2$ beweisen (vgl. 3.4), so daß 4.3 auch in diesem Fall eine konstruktive Bestimmung von Tests $\varphi^* \in \Phi_\alpha^*$ durch Angabe einer 0-1-Struktur erlaubt. Dabei braucht man nach 3.4 auch über $\Psi \in \Phi$ keine Voraussetzungen zu machen.

Literatur

1. Bauer, H.: Konvexität in topologischen Vektorräumen. Hamburg: Vorlesung 1963/64.
2. Baumann, V.: Eine parameterfreie Theorie der ungünstigsten Verteilungen für das Testen von Hypothesen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **11**, 41–60 (1968).
3. Chatterji, S. D.: Comments on the martingale convergence theorem. Lecture Notes in Mathematics **31**, 55–61 (1967).
4. Darst, R. B.: A decomposition of finitely additive sets functions. J. reine angew. Math. **210**, 31–37 (1962).
5. Dunford, N., Schwartz, T. J.: Linear operators, Part I. New York: Interscience Publishers 1964.
6. Ferguson, T. S.: Location and scale parameters in exponential families of distributions. Ann. math. Statistics **33**, 986–1001 (1962).
7. Grenander, U.: Stochastic processes and statistical inference. Ark. Mat. **1**, 195–277 (1950).
8. Kelley, J. L.: General topology. Princeton, N. Y.: Van Nostrand 1961.
9. – Namioka, I.: Linear topological spaces. Princeton, N. Y.: Van Nostrand 1963.
10. Krafft, O.: On the existence of least favorable contents. Arch. der Math. **20**, 72–80 (1969).
11. Neveu, J.: Mathematical foundations of the calculus of probability. San Francisco: Holden-Day, Inc. 1965.
12. Nölle, G., Plachky, D.: Zur schwachen Folgenkompaktheit von Testfunktionen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **8**, 182–184 (1967).
13. Parthasarathy, K. R.: Probability measures on metric spaces. New York: Academic Press 1967.
14. Pfanzagl, J.: On the topological structure of some ordered families of distributions. Ann. math. Statistics **35**, 1216–1228 (1964).
15. – On the existence of product measurable densities. Sankhya **31**, 13–18 (1969).
16. Phelps, R. R.: Lecture on Choquet's theorem. Princeton, N. Y.: Van Nostrand 1966.
17. Pitcher, T. S.: A more general property than domination for sets of probability measures. Pacific J. Math. **15**, 597–611 (1965).
18. Rao, R. R.: A note on finitely additive measures. Sankhya **19**, 27–28 (1958).
19. Schaafsma, W.: Hypothesis testing problems with the alternative restricted by a number of inequalities. Groningen: P. Noordhoff. N. V. 1966.
20. Schmetterer, L.: Mathematische Statistik. Wien: Springer 1966.
21. Witting, H.: Mathematische Statistik. Stuttgart: B. G. Teubner 1966.

Dr. D. Plachky
Institut für Mathematische Statistik
Universität Münster
44 Münster (Westf.), Roxeler Str. 62

(Eingegangen am 12. Mai 1969)