Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
50, 149–157 (1979)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Sur la régularité des trajectoires des Martingales à deux indices

D. Bakry*

Université Paris VI, Laboratoire de Calcul des Probabilités,
4 Place Jussieu, Tour 56 - 3e Etage, F-75230 Paris Cedex 05

A Leopold Schmetterer, à l'occasion de son soixantième anniversaire

Introduction

Nous étudions ci-dessous l'existence de versions continues à droite et limitées à gauche (càd-làg) pour des martingales à deux paramètres, dans le cadre défini par R. Cairoli et J.B. Walsh dans [1]: (Ω, F, P) étant un espace de probabilité complet, on se donne deux filtrations $(F_s^1)_{s \geqq 0}$ et $(F_t^2)_{t \geqq 0}$ vérifiant les conditions habituelles, ainsi que la propriété d'indépendance conditionnelle notée (F. 4) dans [1]: pour tout (s,t) de $\mathbf{R}_+^2$, F_s^1 et F_t^2 sont conditionnellement indépendantes par rapport à $F_s^1 \cap F_t^2$.

Une *martingale à deux paramétres* est un processus $(M_{st}(\omega))_{s \geqq 0, t \geqq 0}$ qui à t fixé (resp. à s fixé) est une martingale en s (resp. t) par rapport à la filtration $(F_s^1)_{s \geqq 0}$(resp. $(F_t^2)_{t \geqq 0}$).

On se donne sur $\mathbf{R}_+^2$ l'ordre partiel naturel:

$$(s,t) \leqq (s',t') \Leftrightarrow (s \leqq s') \quad \text{et} \quad (t \leqq t')$$

et on note:

$$(s,t) < (s',t') \Leftrightarrow (s < s') \quad \text{et} \quad (t < t').$$

D'après (F. 4), M est une martingale si et seulement si:

$$\forall (s,t) \leqq (s',t') \qquad E(M_{s't'} | F_s^1 \cap F_t^2) = M_{st}.$$

Une trajectoire $M(\omega)$: $\mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}$ est dite *continue à droite* (resp. *limitée à gauche*) si:

$$\forall (s,t) \geqq (0,0) (\text{resp.} \ \forall (s,t) > (0,0)):$$

$$\lim_{\substack{(s',t') \to (s,t) \\ (s',t') \geqq (s,t)}} M_{s't'}(\omega) = M_{st}(\omega) (\text{resp.} \lim_{\substack{(s',t') \to (s,t) \\ (s',t') < (s,t)}} M_{s't'}(\omega) \text{ existe}).$$

* Membre du Laboratoire Associé au CNRS., n° 224 «Processus Stochastiques et Applications»

0044-3719/79/0050/0149/$01.80

La martingale M est dite *càd-làg* si, pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire $M(\omega)$ est càd-làg.

R. Cairoli et J.B. Walsh donnent dans [1] un exemple de martingale uniformément intégrable, n'admettant nulle part de limite à gauche.

Nous montrons ci-dessous l'existence d'une version càd-làg pour des martingales bornées dans L^2, résultat qui s'étend aux martingales de L Log L.

Pour cela, les principaux outils que nous utilisons sont la théorie de l'intégrale stochastique dans L^2, les inégalités de Cairoli-Doob ([1] paragraphe 1 et début du paragraphe 2), ainsi que la notion de ligne d'arrêt introduite par E. Wong et M. Zakai dans [6].

Plus précisément, nous montrons qu'une martingale bornée dans L^2 admet des limites à droite (le long des dyadiques), le long de toute ligne d'arrêt, et nous concluons en utilisant un résultat de E. Merzbach [3], selon lequel le début d'un ensemble progressif est une ligne d'arrêt. Pour les limites à gauche, nous montrons leur existence le long d'une ligne d'arrêt prévisible, et nous concluons à l'aide d'un théorème de section prévisible dû également à E. Merzbach.

C. Doléans et P.A. Meyer ont d'ores et déjà donné dans [2] un exemple d'application de l'existence de versions càd-làg des martingales à deux paramètres bornées dans L^2, à savoir l'obtention d'un théorème de projection duale prévisible. Pour notre part, nous développerons dans une note ultérieure d'autres conséquences, pour la théorie générale, de l'existence de ces versions càd-làg.

Signalons d'autre part que L. Dubins a montré que, si l'on supprime l'hypothèse (F.4), il existe des martingales bornées d'admettant pas de versions càd-làg.

1. Préliminaires et notations

(Ω, F, P) étant un espace de probabilité complet, on se donne deux filtrations $(F_s^1)_{s \geqq 0}$ et $(F_t^2)_{t \geqq 0}$, vérifiant les conditions habituelles, ainsi que la condition (F.4) de [1]. On désigne par $z=(s,t)$ le point générique de $\mathbf{R}^2$, et on note:

$$F_z = (F^1_{s \vee 0}) \cap (F^2_{t \vee 0}).$$

Dans toute la suite, on note $R_z = \{z' \in \mathbf{R}^2;\ z' \leqq z\}$, $U_z = \{z' \in \mathbf{R}^2,\ z' \geqq z\}$. Les intérieurs de ces deux ensembles sont notés R_z^0 et U_z^0. Si $z \leqq z'$ on pose $]z,z'] = U_z^0 \cap R_{z'}$, et on fait de même pour les autres types d' intervalles.

Une partie A de $\Omega \times \mathbf{R}^2$ est dite *progressive* si

$$\forall z \in \mathbf{R}^2;\ A \cap (R_z^0 \times \Omega) \in B(R_z^0) \otimes F_z$$

où $B(R_z^0)$ est la tribu borélienne de R_z^0.

On note Π la tribu des ensembles progressifs, et Π^+ sa trace sur $\Omega \times \mathbf{R}^2_+$.

La *tribu prévisible* est la tribu engendrée par les parties de $\Omega \times \mathbf{R}^2_+$, de la forme $A_z \times]z,z']$, avec $z < z'$, $A \in F_z$. On la note $\mathscr{P}$, et $\mathscr{P}^+$ sa trace sur $\Omega \times \mathbf{R}^2_+$.

Si A est une partie de $\mathbf{R}^2$, on note A^0 (resp. $\bar{A}, \partial A$) son intérieur, (resp. son adhérence, sa frontière).

Suivant [3], si A est une partie de $\mathbf{R}_+^2$, on définit:

$$H_A^- = \bigcup_{z\in A} R_z^0; \quad H_A = \bigcup_{z\in A} R_z \quad H_A^+ = \bigcup_{z\in A} U_z^0.$$

On appelle *ligne de séparation* (en abrégé *l.s.*) une partie fermée L de $\mathbf{R}^2$ vérifiant

1) $H_L \cap \mathbf{R}_+^2 \neq \emptyset$ (L rencontre $\mathbf{R}_+^2$),
2) $H_L \cap H_L^+ = \emptyset$ (L est totalement incomparable pour $<$),
3) $H_L^- \cup H_L^+ \cup L = \mathbf{R}^2$ (L sépare $\mathbf{R}^2$).

Par abus de Langage, nous dirons que $\emptyset$ est une l.s., avec

$$H_\emptyset = H_\emptyset^- = \mathbf{R}^2; \quad H_\emptyset^+ = \emptyset.$$

Une partie non nécessairement fermée de $\mathbf{R}^2$ vérifiant les conditions 1) et 2) est dite *ligne de séparation faible* (en abrégé l.s.f.).

On note S (resp. S_f) l'ensemble des l.s. (resp. des l.s.f.).

Remarquons que, si A est une partie de $\mathbf{R}_+^2$, ∂H_A^+ est un élément de S, qui est vide si et seulement si A est vide.

Définition. Une ligne d'arrêt (resp. ligne d'arrêt faible) *est une application* L: $\Omega \to S$ *(resp.* L: $\Omega \to S_f$) *telle que* 1_{H_L} *soit adapté.*

Une ligne d'arrêt est dité prévisible *s'il existe une suite* $(L_n)_{n\geq 0}$ *de lignes d'arrêt vérifiant*

1) $\forall n$, $H_{L_n} \subset H_{L_{n+1}} \subset H_L$,
2) $\bigcup_n H_{L_n} = H_L^-$ sur $(0,0) \in H_L^-$.

On dit qu'une telle suite $(L_n)_{n\geq 0}$ *annonce* L;

Remarquons qu'on a alors $\forall n$, $H_{L_n} \subset H_L^-$ sur $\{(0,0) \in H_L^-\}$.

Si A est une partie de $\Omega \times \mathbf{R}_+^2$, nous appelons *début* de A (et nous notons L_A) l'application: $\omega \to \partial H_{A(\omega)}^+$.

Les définitions précédentes sont légérement différentes de celles données par E. Merzbach dans [3]. Néanmoins, les deux résultats suivants, que nous lui empruntons, ont une démonstration identique à celle qu'il a donnée.

1) Si $A \in \Pi^+$, L_A est une ligne d'arrêt.

2) «Théorème de section prévisible»: pour tout $A \in \mathscr{P}^+$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une ligne d'arrêt faible λ telle que

1) $[\lambda] \subset A$ ($[\lambda] = \{(\omega, z) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^2;\ z \in \lambda_\omega\}$),

2) si π désigne la projection canonique de $\Omega \times \mathbf{R}^2$ sur Ω, on a $P(\pi(A)) \leq P(\lambda \neq \emptyset) + \varepsilon$,

3) $L_{[\lambda]}$ est prévisible et $[\lambda] \subset [L_{[\lambda]}]$,

4) de plus, si $A \subset \Omega \times \mathbf{R}_+^{*2}$, on peut choisir λ tel que $[L_{[\lambda]}] \subset \Omega \times \mathbf{R}_+^{*2}$.

2. Enoncé des Resultats

Soit (M_z) une martingale bornée dans L^2, c'est à dire

1) $\sup_{z\in\mathbf{R}_+^2} E(M_z^2) < +\infty$,
2) $z' \leq z \Rightarrow M_{z'} \underset{\text{p.s}}{=} E(M_z | F_{z'})$.

Comme dans le cas unidimensionnel, on appelle *modification de M* un processus M' tel que, pour tout z, on ait $M_z = M'_z$ p.s.

Théorème. *Si M est une martingale bornée dans L^2, M admet une modification continue à droite, limitée à gauche.*

Corollaire. *Soit M une martingale vérifiant, pour tout z,* $E(|M_z| \operatorname{Log}^+ |M_z|) < +\infty$ *alors, M admet une modification càd-làg.*

Démonstration. Soit ϕ la fonction $x \to |x| \operatorname{Log}^+ |x|$. Notons que, sur $\mathbf{R}_+$, ϕ est convexe, croissante, et que:

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \qquad \phi(x+y) \leqq 2(\phi(x) + \phi(y))$$

quitte à étudier la restriction de M à $R_{(n,n)}$, nous pouvons supposer que

$$\sup_{z \in \mathbf{R}_+^2} E(\phi(M_z)) < +\infty$$

soit M_∞ la variable terminale de M, qui existe d'après [5], théorème 2.3. Posons $M_\infty^n = (M_\infty \wedge n) \vee (-n)$; on a:

$$E(\phi(M_\infty^n - M_\infty)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Soit M^n la version càd-làg de la martingale bornée $E(M_\infty^n | F_z)$ (qui existe d'après le théorème précédent). L'inégalité de Jensen donne:

$$E(\phi(M_z^n - M_z)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Quitte à extraire de M^n une sous suite, nous pouvons supposer:

$$\forall m\colon E|\phi(4^m(M_\infty^{m+1} - M_\infty^m))| \leqq 1$$

L'inégalité L Log L de Cairoli Doob ([5], th. 2.2.) donne:

$$2^m\, P(\sup_{z \in \mathbf{R}_+^2} 4^m |M_z^{m+1} - M_z^m| \geqq 2^m) \leqq a \qquad (\text{où } a = 2e/e-1).$$

D'où:

$$P\left(\sup_{z \in \mathbf{R}_+^2} |M_z^{m+1} - M_z^m| \geqq \frac{1}{2^m}\right) \leqq \frac{a}{2^m},$$

ce qui entraîne aisément que M^n converge p.s. uniformément vers un processus càd-làg Y.

Comme d'autre part, pour tout z, M_z^n converge dans L^1 vers M_z, Y est une modification càd-làg de M.

3. Démonstration du théorème

Nous notons Δ l'ensemble des dyadiques de $\mathbf{R}_+^2$, c'est à dire des points de la forme $(2^{-n} i, 2^{-n} j)$, $(n, i, j) \in \mathbf{N}^3$.

Posons pour tout $z \geqq (0,0)$

$$\overline{M}_z^d = \limsup_{z'>z,\, z' \in \Delta,\, z' \to z} M_{z'}$$

$$\underline{M}_z^d = \liminf_{z'>z,\, z' \in \Delta,\, z' \to z} M_{z'}$$

et pour tout $z > (0,0)$

$$\overline{M}_z^g = \limsup_{z'<z,\, z' \in \Delta z' \to z} M_{z'}; \qquad M_z^g = \liminf_{z'<z,\, z' \in \Delta,\, z' \to z} M_{z'}$$

et enfin

$$\overline{M}^g = \underline{M}^g = 0 \quad \text{sur les axes}$$

Lemme 1. a) *Soient α, β deux nombres rationnels; alors, le détut $L_{\alpha,\beta}$ de $A_{\alpha,\beta} = (\overline{M}^d > \alpha, M^d < \beta)$ est une ligne d'arrêt vérifiant*

$$P(\pi([L_{\alpha,\beta}] \cap A_{\alpha,\beta})) = P(\pi(A_{\alpha,\beta}))$$

b) *$\underline{M}^g$ et $\overline{M}^g$ sont des processus prévisibles.*

Démonstration. a) Pour tout (n,i,j), posons $z_{i,j}^n = (2^{-n} i, 2^{-n} j)$; alors

$$\overline{M}_z^d = \limsup \sum_{i,j} \mathrm{M}_{z_{i+1,j+1}^n}(\omega)\, 1_{]z_{i,j}^n, z_{i+1,j+1}^n]}(z)$$

et donc, pour tout n, $\overline{M}^d$ est progressif par rapport à la famille (G_{st}^n) avec $G_{st}^n = F_{s+2^{-n}, t+2^{-n}}$.

De même pour $\underline{M}^d$; on peut en déduire, comme dans le cas unidimensionnel, que $\overline{M}^d$ et $\underline{M}^d$ sont progressifs par rapport à la filtration (F_{st}).

Donc $L_{\alpha\beta}$ est une ligne d'arrêt. De plus, comme $A_{\alpha,\beta} = (\overline{M}^d > \alpha,\ \underline{M}^d < \beta)$ a ses coupes fermées à droite, $L_{\alpha,\beta} \cap A_{\alpha,\beta}$ a ses coupes non vides là où $A_{\alpha,\beta}$ a ses coupes non vides.

b) $\overline{M}^g = \limsup_{n \to \infty} \sum_{i,j} M_{z_{i,j}^n} 1_{]z_{i,j}^n, z_{i+1,j+1}^n]}$, et donc est prévisible, et de même pour $\underline{M}^g$. ■

Afin de poursuivre notre étude, nous avons besoin de quelques rappels et remarques élémentaires sur l'intégrale stochastique simple par rapport à M. Suivant [1], théorème 1.5, nous associons à M un processus croissant intégrable (non nécessairement prévisible), noté $\langle M \rangle$ tel que $X = M^2 - \langle M \rangle$ soit une martingale faible, c'est à dire:

$$\forall z = (s,t) < (s',t') = z', \qquad E(X_{s't'} - X_{st'} - X_{s't} + X_{st} | F_{st}) = 0.$$

Il faut remarquer que l'existence de $\langle M \rangle$ ne fait pas appel à la régularité des trajectoires de M.

Si ϕ est un processus prévisible tel que $E(\int_{\mathbf{R}_+^2} \phi_z^2\, d\langle M \rangle_z) < +\infty$, nous pouvons définir, suivant [1], l'integrale stochastique

$$(\phi \cdot M)_\infty = \int_{\mathbf{R}_+^2} \phi_z\, dM_z$$

comme élément de $L^2(F_\infty)$ vérifiant

$$E(\phi\cdot M)^2_\infty = E\int_{\mathbf{R}^2_+} \phi^2_z \, d\langle M\rangle_z$$

L'application $\phi \to (\phi\cdot M)_\infty$ est linéaire et le processus $(\phi\cdot M)_z$ défini par $(\phi\cdot M)_z = \int_{\mathbf{R}^2_+} 1_{R_z}(u)\,\phi(u)\,dM_u$, (défini à une modification près) est une martingale de carré intégrable.

Si ϕ est un processus continu à gauche, adapté, (donc prévisible), borné et si on note $\phi^* = \sup_{z\in\mathbf{R}^2_+} |\phi_z|$, alors pour tout z on a

$$1_{\{\phi^*=0\}}(\phi\cdot M)_z = 0 \qquad \text{(p.s.)}$$

en effet $\phi_z(\omega) = \lim_{n\to\infty} \psi_{n,z}(\omega)$ avec $\psi_n = \sum_{i,j} \phi_{z^n_{i,j}} 1_{]z^n_{i,j}, z^n_{i+1,j+1}]}$; ψ_n est prévisible borné. Or, par construction de l'intégrale stochastique

$$\forall z\; 1_{\{\phi^*=0\}}(\psi_n\cdot M)_z = 0 \qquad \text{(p.s.)}$$

et

$$(\phi\circ M)_z = \lim (\psi_n\cdot M)_z \qquad \text{dans } L^2.$$

D'où le résultat cherché. ■

Si L est une ligne d'arrêt de $\mathbf{R}^2_+$, posons $D = H_L$; 1_D est continu à gauche, adapté. On note $M(D) = (1_D\cdot M)_\infty$, et le résultat de localisation précédent nous donne:

$$\forall z\in\mathbf{R}^2_+\; 1_{\{z\in D\}} M(D\cap R_z) = 1_{\{z\in D\}} M_z \qquad \text{(p.s.)}$$

et, de même

$$\forall z\in\mathbf{R}^2_+\; 1_{\{z\in D\}} M(D\cap U_z) = 0 \qquad \text{(p.s.)}$$

Cette remarque nous sera utile plus bas.

Lemme 2. *Soit L une ligne d'arrêt et $D = H_L$. Il existe $(Y^1_s)_{s\geq 0}$, (F^1_s)-martingale bornée dans L^2,* càd-làg, *et $(Y^2_t)_{t\geq 0}$, (F^2_t)-martingale bornée dans L^2;* càd-làg, *vérifiant*

1) $Y^1_\infty = Y^2_\infty = M(D)$,
2) $\forall z = (s,t)\in\mathbf{R}^2_+$ *on a*

$$Y^1_s + Y^2_t + M(D^c\cap R_z) + M(D\cap U_z) = M(D) + M_z \qquad \text{(p.s.)} \tag{1}$$

Démonstration. Posons $D^1_s = D\cap R_{(s,\infty)}$ $D^2_t = D\cap R_{(\infty,t)}$ et $Y^{1,0}_s = M(D^1_s)$, $Y^{2,0}_t = M(D^2_t)$; $Y^{i,0}$ est une F^i-martingale a un paramètre, bornée dans L^2, vérifiant $Y^{i,0}_\infty = M(D)$ p.s. et il suffit de prendre pour Y^i la version càd-làg de $Y^{i,0}$. La formule (1) est alors une conséquence immédiate de l'égalité:

$$1_{D\cap U^0_z} + 1_{D\cap R_{(s,\infty)}} + 1_{D\cap R_{(\infty,t)}} + 1_{D^c\cap R_z} = 1_D + 1_{R_z}. \quad ■$$

Lemme 3. *Pour toute ligne d'arrêt* L, $P(\exists\, z\in L;\ \overline{M}_z^d \neq \underline{M}_z^d)=0$.

Démonstration. Posons $D=H_L$, et, suivant [4] (prop. 2.2.) nous exhibons une suite $(L_n)_{n\geqq 0}$ de lignes d'arrêt, vérifiant, (si on note $D_n=H_{L_n}$)

$$\forall\, n\, D_{n+1}\subset D_n;\ \bigcap_n D_n=D,$$

$$\forall\, n, D\subset D_n^0.$$

Choisissons alors une suite croissante (n_k) d'entiers telle que l'on ait pour tout k

$$E(\textstyle\int 1_{D_{n_k}\setminus D}(z)\, d\langle M\rangle_z)\leqq k^{-4}.$$

Posons $M^{*n}=\sup\limits_{z\in\mathbf{Q}_+^2} M((D_n\setminus D)\cap R_z)$. D'après les inégalités L^2 de Cairoli-Doob ([5], th. 2.2.) on a

$$E(M^{*n_k})^2\leqq 16\frac{1}{k^4},\qquad \text{et donc } M^{*n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \qquad \text{p.s.}$$

Soit N^1 l'ensemble aléatoire où cette convergence n'a pas lieu; $P(N^1)=0$.

Nous associons à L les martingales Y^i construites au Lemme 2, et soit $N^2=\{\omega\,|\,\exists\, z\in\mathbf{Q}_+^2;\quad Y_s^1+Y_t^2+M(D^c\cap R_z)+M(D\cap U_z)\neq M(D)+M_z\}$. D'après le Lemme 2, $P(N^2)=0$. Posons encore:

$$N^3=\{\omega\,|\,\exists\, z\in\mathbf{Q}_+^2,\quad \exists\, k;\ M(D\cap U_z)\,1_{\{z\notin D\}}\neq 0$$

ou

$$(M(D^c\cap D_{n_k}\cap R_z)-M(D^c\cap R_z))\,1_{\{z\in D_{n_k}\}}\neq 0\}.$$

D'après le résultat de localisation, $P(N^3)=0$.

Pour $z=(s,t)$; posons $Y_z=Y_s^1+Y_t^2-M(D)$.

Montrons que, si ω n'appartient pas à $N^1\cup N^2\cup N^3$, si z appartient à L_ω et, si (z_p) est une suite de dyadiques strictement supérieurs à z, décroissant vers z, alors: $M_{z_p}(\omega)\xrightarrow[p\to\infty]{} Y_z(\omega)$. En effet, si $z_p=(s_p,t_p)$:

$$M_{z_p}-Y_z=Y_{s_p}^1-Y_s^1+Y_{t_p}^2-Y_t^2+M(D^c\cap R_{z_p}).$$

Fixons $\varepsilon>0$; comme chaque Y^i est càd, on a:

$$|Y_{s_p}^1+Y_{t_p}^2-Y_s^1-Y_t^2|\leqq\frac{\varepsilon}{2}\qquad \text{si } p\geqq p_1$$

Soient k tel que $M^{*n_k}\leqq\frac{\varepsilon}{2}$, et p_2, tel que, si $p\geqq p_2$, $z_p\in D_{n_k}$; on a alors si $p\geqq p_2$: $|M(D^c\cap R_{z_p})|\leqq M^{*n_k}\leqq\varepsilon/2$.

D'où le résultat cherché. ∎

On déduit immédiatement du Lemme 1 a) et du Lemme 3 que M admet des limites à droite le long des dyadiques hors d'un ensemble évanescent.

Lemme 4. *Si L une ligne d'arrêt prévisible telle que $L \subset (\mathbf{R}_+^*)^2$; alors on a*

$$P(\exists z \in L;\ \overline{M}^g \neq \underline{M}^g) = 0.$$

Démonstration. Soit (L_k) annonçant L, et posons $D^k = H_{L_k}$; $D^0 = H_L^-$; on a $\bigcap_k (D^0 \setminus D^k) = \emptyset$ (p.s.) et D^0 est donc prévisible.

A tout L_k, associons les deux martingales à un paramètre $Y^{i,k}$ du Lemme 2; on a si $k \geqq k'$

$$E(Y_\infty^{i,k} - Y_\infty^{i,k'})^2 = E(\textstyle\int 1_{D^k \setminus D^{k'}}\, d\langle M \rangle_z)$$

et cette quantité tend donc vers zéro lorsque k et k' tendent vers l'infini. Donc, pour $i = 1, 2$ $(Y_\infty^{i,k})_k$, suite de Cauchy dans L^2, converge dans cet espace vers une variable aléatoire Y^i; notons $(Y_s^i)_{s \geqq 0}$ la version càd-làg de $E(Y^i | F_s^i)$ et posons

$$(Y^{i,k} - Y^i)^* = \sup_s |Y_s^{i,k} - Y_s^i|.$$

Alors:

$$E((Y^{i,k} - Y^i)^{*2}) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Quitte à remplacer (L_k) par une sous-suite, nous pouvons supposer que

$$(Y^{i,k} - Y^i)^* \to 0 \quad \text{(p.s.)}.$$

Soit $N^1 = \{\omega | \exists i; (Y^{i,k} - Y^i)^*(\omega) \not\to 0\ (k \to \infty)\}$. Alors $P(N^1) = 0$. Posons $Y_{s,t} = Y_{s-}^1 + Y_{t-}^2 - M(D^0)$.

Pour $z = (s, t)$, posons $N_{k,z} = (z \notin D^k) \cap [Y_s^{1,k} + Y_t^{2,k} + M(R_z \setminus D^k) \neq M_z + M(D^k)]$. Par localisation et grâce à l'égalité (1) du Lemme 2, on a:

$$\forall k, \forall z\ P(N_{k,z}) = 0.$$

Posons $N^2 = \bigcup_{k \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{Q}_+^2} N_{k,z}$, et remarquons d'autre part que, lorsque $k \to \infty$ $M(D^0 \setminus D^k) \to 0$ dans L^2, et donc que:

$$E(\sup_{z \in \mathbf{Q}_+^2} |M((D^0 \cap R_z) \setminus D^k)|^2 \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

Quitte à extraire de (L_k) une nouvelle sous-suite, nous pouvons supposer que

$$\sup_{z \in \mathbf{Q}_+^2} |M((D^0 \cap R_z) \setminus D^k)| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \quad \text{p.s. et que } M(D^0 \setminus D^k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \quad \text{p.s.}$$

Soit N^3 l'ensemble où ces deux convergences n'ont pas lieu et soit

$$N^4 = \{\exists k;\ M(D^0 \setminus D^k) \neq M(D^0) - M(D^k)\}.$$

Alors: $P(N^1 \cup N^2 \cup N^3 \cup N^4) = 0$.

Soient ω n'appartenant pas à $N^1 \cup N^2 \cup N^3 \cup N^4$, z un point de L_ω, (z_n) une suite de dyadiques strictement inférieurs à z, croissant vers z.

Alors $M_{z_n}(\omega) \xrightarrow[n \to \infty]{} M_z(\omega)$. En effet, posons $z_n = (s_n, t_n)$; $z = (s, t)$, et soit $\varepsilon > 0$:

Pour $k \geqq k_1$

$$\sup_{\mathbb{Q}_+^2} |M((D^0 \cap R_z) \setminus D^k)| + |M(D^0 \setminus D^k)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $n \geqq n_1$, on a $z_n \in D^0 \setminus D^{k_1}$, et donc:

$$M_{z_n} = M_{s_n}^{1,k_1} + M_{t_n}^{2,k_1} + M(R_{z_n} \setminus D^{k_1}) - M(D^{k_1}).$$

D'où:

$$-M_{z_n} + Y_z = Y_{s-}^1 - Y_{s_n}^1 + Y_{t-}^2 - Y_{t_n}^2 + Y_{s_n}^1 - M_{s_n}^{1,k_1} + Y_{t_n}^2 - M_{t_n}^{2,k_1} - M(D^0 \setminus D^{k_1})$$
$$- M(R_{z_n} \setminus D^{k_1}).$$

Pour $n \geqq n_1$: $|M(R^{z_n} \setminus D^{k_1})| + M(D^0 \setminus D^{k_1})| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$

Pour $n \geqq n_2$: $|Y_{s-}^1 - Y_{s_n}^1) + |Y_{t-}^2 - Y_{tn}^2| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$

Pour $n \geqq n_3$: $|y_{s_n}^1 - M_{s_n}^{1,k_1}| + |y_{t_n}^2 - M_{t_n}^{2,k_1}| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$

D'où le résultat pour $n \geqq n_1 \vee n_2 \vee n_3$. ■

On déduit du Lemme 1 b), du Lemme 4, et du théorème de section prévisible que $\{\overline{M}^g \neq \underline{M}^g\}$ est évanescent.

Soit alors M_+ le système des limites à droite de M le long des dyadiques; M_+ est une modification de M; en effet, soit (z_n) une suite de dyadiques décroissant vers z, strictement; on a $M_{z_n} \to M_z$ dans L^2 et $M_{z_n} \xrightarrow{\text{p.s.}} M_{+z}$ p.s., donc $M_{+z} = M_z$ p.s.

Donc, M_+ est une modification continue à droite de M.

Comme elle admet des limites à gauche le long des dyadiques, elle est également limitée à gauche.

References

1. Cairoli, R., Walsh, J.B.: Stochastic integrals in the plane. Acta Math. **134**, 111–183 (1975)
2. Doleans, C., Meyer, P.A.: Un petit théorème de projection pour processus à deux indices. Séminaire de Probabilité XIII. Lecture Notes in Maths. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979
3. Merzbach, E.: Stopping for two dimensionnal stochastic processes. (A paraître)
4. Cairoli, R., Walsh, J.B.: Région d'arrêt, localisation et prolongement de martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **44**, 279–306 (1978)
5. Walsh, J.B.: Martingales with a multidimensionnal parameter and stochastic integrals in the plane. Cours de 3ème Cycle, Laboratoire de Calcul des Probabilités, Université Paris VI, Année 76–77
6. Wong, E., Zakai, M.: Weak martingales and stochastic integrals in the plane. Ann. Probability **4**, 570–586 (1976)
7. Walsh, J.B.: Convergence and regularity of multiparameter strong martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **46**, 177–192 (1979)

Reçu le 8 Juin 1979