Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2, 420—428 (1964)

Ein Test zum Erkennen von Normalverteilungen

Von

HORAND STÖRMER *

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ voneinander unabhängige Zufallsvariable, welche dieselbe Verteilungsfunktion $F(x)$ besitzen. Um zu testen, ob $F(x)$ eine Gaußsche Verteilungsfunktion ist, untersuchen die Autoren KAC, KIEFER und WOLFOWITZ [1] u. a. die Verteilung der Größe

$$v_n = \sup_{-\infty < y < \infty} \left| G_n^*(y) - N(y \mid \bar{x}, s^2) \right| .$$

Darin ist $G_n^*(y)$ die aus den $x_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ gebildete empirische Verteilungsfunktion und $N(y \mid \bar{x}, s^2)$ die Gaußsche Verteilungsfunktion, in der für den Erwartungswert die Zufallsvariable

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$$

und für die Streuung die Zufallsvariable

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 - \bar{x}^2$$

eingesetzt wird.

Die Verteilungsfunktion von v_n bei erfüllter Nullhypothese ist nicht explizit bekannt und wird in [1] durch Monte-Carlo-Methoden angenähert. Es liegt daher nahe, aus den Zufallsvariablen $x_1, \ldots, x_n$ durch eine geeignete Transformation neue m Zufallsvariable $z_1, \ldots, z_m$ der Art zu gewinnen, daß die $z_1, \ldots, z_m$ bei erfüllter Nullhypothese (d. h. wenn die x_ν einer beliebigen Gaußverteilung genügen) unabhängig voneinander eine *normierte* Gaußverteilung ($\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$) haben. Auf die $z_1, \ldots, z_m$ wendet man dann den Kolmogoroff-Test bezüglich der normierten Gaußverteilung an.

Wir werden eine solche Transformation mit $m = n - 2$ angeben. Als Alternativen lassen wir alle Verteilungen zu, deren Erwartungswert und Streuung existiert, und zeigen, daß der zugehörige Test konsistent gegenüber allen einfachen Alternativen aus diesem Raum ist.

1. Die Transformation der Zufallsvariablen

Es sei μ beliebig reell und $\sigma^2 > 0$. Wir bezeichnen mit

$$N(x \mid \mu, \sigma^2), \quad -\infty < x < \infty ,$$

die Gaußsche Verteilungsfunktion mit dem Erwartungswert μ und der Streuung σ^2 und zeigen: Zu $n\,(n \geqq 3)$ voneinander unabhängigen nach $N(x \mid \mu, \sigma^2)$ verteilten

* Mitteilung aus dem Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG., München.

Zufallsvariablen $x_1, \dots, x_n$ gibt es $n-2$ Transformierte

$$z_\nu = g_\nu(x_1, \dots, x_n), \quad \nu = 1, \dots, n-2$$

mit von μ und σ^2 unabhängigen meßbaren Funktionen $g_\nu(x_1, \dots, x_n)$ der Art, daß die $z_1, \dots, z_{n-2}$ unabhängig voneinander nach $N(x \mid 0, 1)$ verteilt sind.

Die gesuchte Transformation ergibt sich durch die Zusammensetzung zweier Transformationen. Durch die erste, eine Orthogonalprojektion, werden die n nach $N(x \mid \mu, \sigma^2)$ verteilten Zufallsvariablen in $n-1$ unabhängige, nach $N(x \mid 0, \sigma^2)$ verteilte Zufallsvariable überführt. Eine weitere Transformation führt diese $n-1$ Zufallsvariablen in $n-2$ unabhängige, nach $N(x \mid 0, 1)$ verteilte Zufallsvariable über.

1.1 Die Orthogonaltransformation

Es seien $x_1, \dots, x_n$ unabhängig voneinander nach $N(x \mid \mu, \sigma^2)$ verteilte Zufallsvariablen. Ist dann

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1,1} \cdots a_{n-1,n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \cdots\cdots \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

eine Orthogonalmatrix, so sind die neuen Zufallsvariablen

$$y_\nu = a_{\nu 1} x_1 + \cdots + a_{\nu n} x_n, \quad \nu = 1, \dots, n-1 \tag{2}$$

unabhängig voneinander nach $N(x \mid 0, \sigma^2)$ verteilt. Dies folgt durch Spezialisierung aus einem Satz über Linearkombinationen normalverteilter zufälliger Variabler ([*5*], S. 106–107).

1.2 Eine weitere Transformation

Sind $y_1, \dots, y_m$ $(m \geqq 2)$ unabhängig voneinander nach $N(x \mid 0, \sigma^2)$ verteilte Zufallsvariable, so ist $(y_1^2 + \cdots + y_m^2)/(m-1)$ eine erschöpfende Schätzfunktion für den Parameter σ^2. Darauf beruht die folgende Transformation, durch die wir aus den $y_1, \dots, y_m$ neue $m-1$ nach $N(x \mid 0, 1)$ verteilte unabhängige Zufallsvariable $z_1, \dots, z_{m-1}$ gewinnen. Dabei wird insbesondere ausgenutzt, daß die gemeinsame Dichte der $y_1, \dots, y_m$ auf den Hyperkugelflächen

$$\sum_{\nu=1}^{m} u_\nu^2 = r^2 \qquad (0 < r^2 < \infty)$$

konstant ist.

Die Transformation hat die Gestalt

$$z_\nu = h_\nu(y_1, \dots, y_m) = h(y_\nu \mid y_1, \dots, y_m), \quad \nu = 1, \dots, m-1 \tag{3}$$

mit

$$h(x \mid y_1, \dots, y_m) = (x/\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{m-1}^2})\, \varphi_m(x/\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_m^2}). \tag{4}$$

Darin ist die Funktion $\varphi_m(\tau)$, $-1 \leqq \tau \leqq 1$, eindeutig erklärt durch die Beziehung

$$\frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda)} \int_0^{[\varphi_m(\tau)]^2} x^{\lambda-1} e^{-x/2}\, dx = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda)} \int_{-1}^{\tau} (1-x^2)^{\lambda-1}\, dx\,, \tag{5}$$

$$\varphi_m(\tau) \geqq 0\,, \quad \lambda = \frac{m-1}{2}\,.$$

(Anmerkung: Links steht der Funktionswert der χ^2-Verteilungsfunktion mit $m-1$ Freiheitsgraden an der Stelle $[\varphi_m(\tau)]^2$, rechts der Funktionswert einer Verteilungsfunktion vom Pearsonschen Typ II an der Stelle τ).
Dann gilt folgender

Satz 1. *Sind $y_1, \dots, y_m$ unabhängig voneinander nach $N(x\,|\,0, \sigma^2)$ verteilte Zufallsvariable, so sind die durch* (3), (4) *und* (5) *definierten Zufallsvariablen $z_1, \dots, z_{m-1}$ unabhängig voneinander nach $N(x\,|\,0, 1)$ verteilt.*

Beweis. Als weitere Zufallsvariable wird

$$z_m = h_m(y_1, \dots, y_m) = y_1^2 + \cdots + y_m^2 \tag{6}$$

eingeführt. Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen $z_1, \dots, z_m$ ist dann

$$g(v_1, \dots, v_m) = (1/\sqrt{2\pi}\,\sigma)^m e^{-v_m/2\sigma^2} \left| \frac{\partial(v_1, \dots, v_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)} \right|^{-1} \tag{7}$$

mit

$$v_\nu = h_\nu(u_1, \dots, u_m)\,, \quad \nu = 1, \dots, m\,,$$

wobei in der Funktionaldeterminante die u_ν durch die v_ν auszudrücken sind. Die Berechnung der Funktionaldeterminante ergibt

$$\left| \frac{\partial(v_1, \dots, v_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)} \right|^{-1} = \left[\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{m-1} v_\nu^2} v_m{}^{\lambda-\frac{1}{2}} \right] / \left[2^\lambda \Gamma(\lambda+\tfrac{1}{2})\right],$$

woraus sich mit (7)

$$g(v_1, \dots, v_m) = \prod_{\nu=1}^{m-1} \left[(1/\sqrt{2\pi})\, e^{-v_\nu^2/2}\right] \frac{(v_m/\sigma^2)^{m/2-1}\, e^{-v_m/2\sigma^2}}{2^{m/2}\,\Gamma(m/2)\,\sigma^2} \tag{8}$$

ergibt. Aus dieser Produktdarstellung folgt die Behauptung von Satz 2.

Zur praktischen Berechnung der Transformierten noch eine Bemerkung, die ich Herrn Dipl.-Math. JENS KRÜGER verdanke:

Die Beziehung (5) läßt sich, wie man leicht zeigt, durch die unvollständige Gamma-Funktion und die unvollständige Beta-Funktion in folgender Form darstellen:

$$\frac{\Gamma_{[\varphi_m(\tau)]^2/2}(\lambda)}{\Gamma(\lambda)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}\tau)\, \frac{B_{\tau^2}(\frac{1}{2}, \lambda)}{B(\frac{1}{2}, \lambda)}\,, \quad \varphi_m(\tau) \geqq 0$$

mit (vgl. z. B. [*3*], S. 326—333)

$$\Gamma_x(p) = \int_0^x t^{p-1} e^{-t}\, dt\,, \quad \Gamma(p) = \Gamma_\infty(p)$$

und

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt\,, \quad B(p, q) = B_1(p, q)\,.$$

Für die Quotienten

$$I(u,p)=\frac{\Gamma_x(p+1)}{\Gamma(p+1)}, \quad u=\frac{x}{\sqrt{p+1}}; \quad I_x(p,q)=\frac{B_x(p,q)}{B(p,q)}$$

existieren aber Tabellen von K. PEARSON [2].

1.3 Die Testtransformation

Als Orthogonalprojektion benutzen wir die von K. SARKADI angegebene Transformation [4]

$$y_\nu = x_\nu - \bar{x}_n', \quad \nu = 1, \ldots, n-1; \quad \bar{x}_n' = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + x_n\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}. \tag{9}$$

Wenden wir auf diese Transformierten y_ν die durch (3), (4) und (5) definierte Transformation mit $m = n - 1$ an, so erhalten wir

$$z_\nu = \frac{x_\nu - \bar{x}_n'}{\sqrt{s_n^2 - \xi_n^2}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \varphi_{n-1}(\xi_n/s_n), \quad \nu = 1, \ldots, n-2 \tag{10}$$

mit

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \; s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2}, \; \bar{x}_n' = \frac{n\bar{x}_n + x_n\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}, \; \xi_n = \frac{x_{n-1} - \bar{x}_n'}{\sqrt{n-1}}. \tag{11}$$

Sind $x_1, \ldots, x_n$ unabhängig voneinander nach $N(x\,|\,\mu, \sigma^2)$ verteilte Zufallsvariable, so sind nach Abschnitt 1.1 und Satz 1 die $z_1, \ldots, z_{n-2}$ unabhängig voneinander nach $N(x\,|\,0, 1)$ verteilte Zufallsvariable. Wir bezeichnen mit $F_{n-2}(x\,|\,z_1, \ldots, z_{n-2})$ die aus den $z_1, \ldots, z_{n-2}$ gebildete empirische Verteilungsfunktion:

$$F_{n-2}(x\,|\,z_1, \ldots, z_{n-2}) = \sum_{\substack{z_\nu \leqq x \\ \nu = 1, \ldots, n-2}} \frac{1}{n-2}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{12}$$

Der gesuchte Test besteht in der Anwendung des Kolmogoroff-Tests bezüglich $N(x\,|\,0, 1)$ auf die $z_1, \ldots, z_{n-2}$:

Bei erfüllter Nullhypothese hat nämlich die Größe

$$D(n-2) = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_{n-2}(x\,|\,z_1, \ldots, z_{n-2}) - N(x\,|\,0, 1)| \tag{13}$$

die vom Kolmogoroff-Test her bekannte Verteilung. Insbesondere läßt sich zu vorgegebenem $\beta > 0$ ein $\varepsilon(n-2, \beta)$ so angeben, daß bei erfüllter Nullhypothese

$$P\{D(n-2) > \varepsilon(n-2, \beta)\} = \beta \tag{14}$$

ist (Tabelle für $\varepsilon(n-2, \beta)$ z.B. in [6]).

Damit können wir den Test jetzt explizit angeben. Durch (10), (12) und (13) werden die $x_1, \ldots, x_n$ des R_n eindeutig auf die Größe $D(n-2)$ in $[0, 1]$ abgebildet. Als Verwerfungsbereich V zur Irrtumswahrscheinlichkeit β ergibt sich nach (14)

$$V = \{D(n-2) > \varepsilon(n-2, \beta)\}. \tag{15}$$

2. Die Konsistenz des Testes

Es sei jetzt $F_1(x)$ eine Verteilungsfunktion mit dem Erwartungswert μ und der Streuung $\sigma^2 > 0$, und es sei $F_1(x)$ *keine* Gaußsche Verteilungsfunktion, d.h. es sei

$$F_1(x) \not\equiv N(x\,|\,\mu, \sigma^2) \tag{16}$$

Mit $P_n(V)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Nullhypothese H_0 verworfen wird unter der Voraussetzung, daß die Alternativhypothese H_1:

$$„F(x) = F_1(x)\text{“} \tag{17}$$

erfüllt ist.

Dann ist $1 - P_n(V)$ also die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art. Wir beweisen den

Satz 2. *Es sei* (17) *erfüllt. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(V) = 1\,. \tag{18}$$

Beweis. Nach (16) und (17) hat die Funktion $G(x) = F(\sigma x + \mu)$ eine Stetigkeitsstelle x_0 mit

$$G(x_0) \neq N(x_0\,|\,0{,}1)\,. \tag{19}$$

Um (18) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß die aus den z_ν gebildete empirische Verteilungsfunktion $F_{n-2}(x\,|\,z_1, \ldots, z_{n-2})$ an der Stelle x_0 nach Wahrscheinlichkeit gegen $G(x_0)$ konvergiert.

Dazu beweisen wir zunächst den

Hilfssatz. *Falls* (17) *erfüllt ist, konvergiert die Zufallsvariable*

$$(1/\sqrt{n-1})\,\varphi_{n-1}(\xi_n/s_n)$$

mit $n \to \infty$ nach Wahrscheinlichkeit gegen eins.

Beweis des Hilfssatzes. Wegen $\varphi_{n-1}(\xi_n/s_n) \geqq 0$ genügt es zu zeigen, daß die Größe $[1/(n-1)][\varphi_{n-1}(\xi_n/s_n)]^2$ nach Wahrscheinlichkeit gegen eins konvergiert.

1. Die Zufallsvariablen $\bar{x}_n'$ und s_n (Gleichung (11)) konvergieren nach Wahrscheinlichkeit mit $n \to \infty$ gegen μ bzw. σ. Daraus folgt (vgl. [*6*], S. 101), daß die Verteilungsfunktion von $\sqrt{n-1}\,\xi_n/s_n = (x_{n-1} - \bar{x}_n')/s_n$ an jeder Stetigkeitsstelle ξ von $G(x)$ gegen $G(\xi)$ konvergiert. Daher gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $K > 0$ der Art, daß für $n > n_0$

$$P\{|\sqrt{n-1}\,\xi_n/s_n| < K\} > 1 - \varepsilon \tag{20}$$

gilt.

2. Die Funktion $\varphi_{n-1}(\tau)$ ist durch (5) mit $m = n-1$, $\lambda = (n-2)/2$ definiert. Schreiben wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda)} \int\limits_0^{[\varphi_{n-1}(\tau)]^2} x^{\lambda-1} e^{-x/2}\,dx = Q_n(Y) \quad \text{mit} \quad Y = \frac{[\varphi_{n-1}(\tau)]^2 - (n-2)}{\sqrt{2(n-2)}}\,,$$

so folgt aus dem asymptotischen Verhalten der χ^2-Verteilung, daß $Q_n(Y)$ mit $n \to \infty$ für alle Y gleichmäßig gegen die Gaußsche Verteilungsfunktion $N(Y\,|\,0{,}1)$ konvergiert.

Wir setzen weiter

$$\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda)} \int\limits_{-1}^{\tau} (1-x^2)^{\lambda-1}\,dx = R_n(T) \quad \text{mit} \quad T = \sqrt{n-1}\,\tau\,.$$

Dann ist

$$R_n(T) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_{-\sqrt{n-1}}^{T} \left(1 - \frac{x^2}{n-1}\right)^{(n-4)/2} dx\,,$$

und hieraus folgt, daß $R_n(T)$ mit $n \to \infty$ für alle T gleichmäßig gegen $N(T\,|\,0{,}1)$ konvergiert. Nach (5) ist

$$Q_n(Y) = R_n(T)\,,$$

und hieraus folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $Q_n(Y)$ und $R_n(T)$, daß Y für $|T| < K$ beschränkt bleibt. Wir haben also

$$|Y| < K_1 \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{Y}{\sqrt{(n-2)/2}}\right| < \frac{K_1}{\sqrt{(n-2)/2}} \text{ für } |T| < K$$

oder nach Einsetzen von $\tau = \xi_n/s_n$

$$\left|\frac{[\varphi_{n-1}(\xi_n/s_n)]^2}{n-2} - 1\right| < \frac{K_1}{\sqrt{(n-2)/2}} < \varepsilon\,, \tag{21}$$

falls

$$n > n_1 = \frac{2K_1^2}{\varepsilon^2} + 2 \quad \text{und} \quad |\sqrt{n-1}\,\xi_n/s_n| < K\,.$$

Für $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ gilt dann nach (20) und (21)

$$P\left\{\left|\frac{[\varphi_{n-1}(\xi_n/s_n)]^2}{n-2} - 1\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \varepsilon\,. \tag{22}$$

Also konvergiert auch $[\varphi_{n-1}(\xi_n/s_n)]^2/(n-1)$ nach Wahrscheinlichkeit gegen eins, was zu zeigen war.

Aus dem Hilfssatz und (10) folgt, daß die z_ν gleichmäßig in ν mit $n \to \infty$ nach Wahrscheinlichkeit gegen die Größen $(x_\nu - \mu)/\sigma$ konvergieren. Um die gewünschte Konsistenzeigenschaft (18) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß dann die aus den z_ν gewonnene empirische Verteilungsfunktion an jeder Stetigkeitsstelle x_0 von $G(x)$ mit $n \to \infty$ nach Wahrscheinlichkeit gegen $G(x_0)$ konvergiert. Dies folgt aber aus einem allgemeineren Satz über die Konvergenz empirischer Verteilungsfunktionen, den wir nun beweisen wollen. Dieser Satz macht sogar wesentlich schwächere Voraussetzungen über die Konvergenz der Zufallsvariablen nach Wahrscheinlichkeit, so daß er auch als Konsistenzkriterium für andere Tests (vgl. [*4*]) verwendet werden kann.

Satz 3. *Es sei $y_1, y_2, \ldots$ eine unendliche Folge unabhängiger, identisch nach einer Verteilungsfunktion $F(x)$ verteilter Zufallsgrößen. Zu jedem n $(n = 1, 2, \ldots)$ gebe es weiter eine Folge $y_{n1}, \ldots, y_{nn}$ von n Zufallsgrößen mit der folgenden Eigenschaft: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ sei $\nu(n, \varepsilon)$ die Anzahl der $y_{n\nu}$, für die*

$$p_{n\nu}(\varepsilon) = P\{|y_{n\nu} - y_\nu| \geqq \varepsilon\} \geqq \varepsilon \tag{23}$$

ist. Dann gilt: Falls $\nu(n, \varepsilon) = o(n)$ für jedes feste ε, dann konvergiert die aus den $y_{n\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ gebildete empirische Verteilungsfunktion $G_n(x)$ mit $n \to \infty$ an jeder

Stetigkeitsstelle x_0 von $F(x)$ nach Wahrscheinlichkeit gegen $F(x_0)$. Für eine Unstetigkeitsstelle braucht der Satz nicht zu gelten (Gegenbeispiel: $y_1 = y_2 = \cdots = a = \text{const}$ nach Wahrscheinlichkeit, $y_{n\nu} = a + 1/\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$; $|F(a) - G_n(a)| = 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1 für alle n).

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß es zu beliebigem $\varepsilon_1 > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon_1, x_0)$ der Art gibt, daß für $n > n_0$

$$P\{|G_n(x_0) - F(x_0)| < \varepsilon_1\} > 1 - \varepsilon_1 \quad \text{mit} \quad G_n(x) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ y_{n\nu} \leqq x}}^{n} \frac{1}{n}$$

ist.

1. Es sei $\varepsilon_2 > 0$ so klein, daß

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon_1}{5} \quad \text{für} \quad |h| \leqq \varepsilon_2 . \tag{24}$$

2. Es sei $0 < \varepsilon_3 < \max(\varepsilon_2, \varepsilon_1/5)$. Wir setzen $n' = \nu(n, \varepsilon_3)$ und $p_{n\nu} = p_{n\nu}(\varepsilon_3)$. Wegen $n' = o(n)$ können wir n gleich so groß wählen, daß $n' < n$ ist. Die folgenden Summen erstrecken sich über alle $\nu = 1, \ldots, n$ mit der unter dem Summenzeichen angegebenen Eigenschaft. Mit den Bezeichnungen

$$F_n(x) = \sum_{y_\nu \leqq x} \frac{1}{n}, \quad F_n^*(x) = \sum_{\substack{y_\nu \leqq x \\ p_{n\nu} < \varepsilon_3}} \frac{1}{n - n'}, \quad F_n^{**}(x) = \sum_{\substack{y_\nu \leqq x \\ p_{n\nu} \geqq \varepsilon_3}} \frac{1}{n'}$$

(für $n' = 0$ sei $F_n^{**}(x) \equiv 0$) gilt dann für alle x

$$|F_n(x) - F_n^*(x)| = \frac{n'}{n} |F_n^{**}(x) - F_n^*(x)| \leqq \frac{n'}{n} . \tag{25}$$

Ganz entsprechend zeigt man

$$|G_n(x) - G_n^*(x)| \leqq \frac{n'}{n} \text{ mit } G_n^*(x) = \sum_{\substack{y_{n\nu} \leqq x \\ p_{n\nu} < \varepsilon_3}} \frac{1}{n - n'} . \tag{26}$$

3. Es ist (Summation über alle ν mit $p_{n\nu} < \varepsilon_3$)

$$G_n^*(x_0) = \sum_{\substack{y_{n\nu} \leqq x_0 \\ |y_{n\nu} - y_\nu| \leqq \varepsilon_2}} \frac{1}{n - n'} + \sum_{\substack{y_{n\nu} \leqq x_0 \\ |y_{n\nu} - y_\nu| > \varepsilon_2}} \frac{1}{n - n'} \leqq F_n^*(x_0 + \varepsilon_2) + h_n, \; h_n = \sum_{|y_{n\nu} - y_\nu| > \varepsilon_2} \frac{1}{n - n'}$$

und

$$F_n^*(x_0 - \varepsilon_2) = \sum_{\substack{y_\nu \leqq x_0 - \varepsilon_2 \\ |y_{n\nu} - y_\nu| \leqq \varepsilon_2}} \frac{1}{n - n'} + \sum_{\substack{y_\nu \leqq x_0 - \varepsilon_2 \\ |y_{n\nu} - y_\nu| > \varepsilon_2}} \frac{1}{n - n'} \leqq G_n^*(x_0) + h_n ,$$

also

$$F_n^*(x_0 - \varepsilon_2) - h_n \leqq G_n^*(x_0) \leqq F_n^*(x_0 + \varepsilon_2) + h_n . \tag{27}$$

Für h_n können wir schreiben

$$h_n = \frac{1}{n - n'} \sum_{p_{n\nu} < \varepsilon_3} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} 1 \text{ für } |y_{n\nu} - y_\nu| > \varepsilon_2 \\ 0 \text{ für } |y_{n\nu} - y_\nu| \leqq \varepsilon_2 \end{cases} .$$

Nun ist wegen $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$

$$q_{n\nu} = P(a_{n\nu} = 1) = P\{|y_{n\nu} - y_\nu| > \varepsilon_2\} \leqq P\{|y_{n\nu} - y_\nu| \geqq \varepsilon_3\} = p_{n\nu} < \varepsilon_3 . \tag{28}$$

Für den Erwartungswert von h_n folgt daraus sofort

$$E(h_n) < \varepsilon_3, \tag{29}$$

und für die Streuung gilt (Summation über $p_{n\nu} < \varepsilon_3$, $p_{n\mu} < \varepsilon_3$) die Abschätzung (vgl. [3])

$$\begin{aligned}(n-n')^2\,\sigma^2(h_n) &= \sum \operatorname{cov}(a_{n\nu}, a_{n\mu}) \leqq \sum \sigma(a_{n\nu})\,\sigma(a_{n\mu}) = \\ &= \sum \sqrt{q_{n\nu}(1-q_{n\nu})\,q_{n\mu}(1-q_{n\mu})} \leqq \\ &\leqq \left(\sum q_{n\nu}\right)\left(\sum (1-q_{n\mu})\right) < (n-n')^2\,\varepsilon_3,\end{aligned} \tag{30}$$

also

$$\sigma^2(h_n) < \varepsilon_3. \tag{31}$$

Aus (29) und (31) folgt mit der Tschebyscheffschen Abschätzung

$$P\left\{h_n > \frac{\varepsilon_1}{5}\right\} \leqq P\left\{h_n > E(h_n) + \frac{\varepsilon_1}{5} - \varepsilon_3\right\} \leqq \frac{\sigma^2(h_n)}{\left(\frac{\varepsilon_1}{5} - \varepsilon_3\right)^2} < \frac{\varepsilon_3}{\left(\frac{\varepsilon_1}{5} - \varepsilon_3\right)^2} < \frac{\varepsilon_1}{2}, \tag{32}$$

wenn wir das ε_3 hinreichend klein festlegen. Aus (27) und (32) folgt jetzt

$$P\left\{F_n^*(x_0 - \varepsilon_2) - \frac{\varepsilon_1}{5} \leqq G_n^*(x_0) \leqq F_n^*(x_0 + \varepsilon_2) + \frac{\varepsilon_1}{5}\right\} > 1 - \frac{\varepsilon_1}{5}. \tag{33}$$

4. Nach dem Satz von Glivenko gibt es ein n_1 der Art, daß

$$P\left\{\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon_1}{5}\right\} > 1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \text{ für } \quad n > n_1. \tag{34}$$

5. Für $n > n_2$ sei $n' < n\,\varepsilon_1/5$. Dann gilt für $n > n_2$ nach (24), (25) und (26)

$$\begin{aligned}G_n(x_0) - F(x_0) &= G_n(x_0) - G_n^*(x_0) + G_n^*(x_0) - F_n^*(x_0 + \varepsilon_2) + \\ &+ F_n^*(x_0 + \varepsilon_2) - F_n(x_0 + \varepsilon_2) + F_n(x_0 + \varepsilon_2) - F(x_0 + \varepsilon_2) + \\ &+ F(x_0 + \varepsilon_2) - F(x_0) < \varepsilon_1,\end{aligned} \tag{35}$$

falls

$$G_n^*(x_0) - F_n^*(x_0 + \varepsilon_2) < \frac{\varepsilon_1}{5} \quad \text{und} \quad F_n(x_0 + \varepsilon_2) - F(x_0 + \varepsilon_2) < \frac{\varepsilon_1}{5}.$$

Ebenso zeigt man für $n > n_2$

$$G_n(x_0) - F(x_0) > -\frac{\varepsilon_1}{5}, \tag{36}$$

falls

$$G_n^*(x_0) - F_n^*(x_0 - \varepsilon_2) > -\frac{\varepsilon_1}{5} \quad \text{und} \quad F_n(x_0 - \varepsilon_2) - F(x_0 - \varepsilon_2) > -\frac{\varepsilon_1}{5}.$$

Wegen (33) und (34) ist dann für $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$

$$P\{|G_n(x_0) - F(x_0)| < \varepsilon_1\} > 1 - \varepsilon_1,$$

was zu zeigen war.

Zum Schluß möchte ich Herrn Professor Dr. H. Richter für seine kritischen Hinweise, insbesondere auf die kurze Abschätzung (30), herzlich danken, ebenso einem der Referenten und Herrn Dr. H. Kellerer für weitere wertvolle Ratschläge.

Literatur

[1] KAC, M., J. KIEFER, and J. WOLFOWITZ: On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods. Ann. math. Stat. **26**, 189—211 (1955).
[2] PEARSON, K.: Tables of the incomplete Beta-Function. Cambridge: University Press 1948.
[3] RICHTER, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1956.
[4] SARKADI, K.: On testing for normality. Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci., V, 269—274 (1960).
[5] SCHMETTERER, L.: Einführung in die mathematische Statistik. Wien: Springer 1956.
[6] VAN DER WAERDEN, B. L.: Mathematische Statistik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957.

Zentral-Laboratorium der
Siemens & Halske AG
8 München 25,
Hofmannstraße 51

(Eingegangen am 28. Dezember 1962)