Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
37, 329 – 340 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Eine Mischungseigenschaft von Zufallsvariablen

Uwe Rösler

Institut für Mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik der Universität,
Lotzestr. 13, D-3400 Göttingen, Bundesrepublik Deutschland

Seien Z_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$, und sei S_m die Summe von $Z_0, Z_1, \ldots, Z_m$.

$t_l^{\bar{m}}$ werde definiert durch

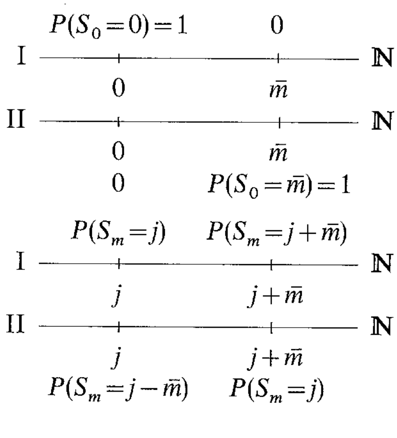
$$2 - t_l^{\bar{m}} = \sum_{j \in \mathbb{N}} |P(Z_l = j) - P(Z_l = j - t_l^{\bar{m}})|, \qquad \bar{m}, l \in \mathbb{N}.$$

In dieser Arbeit wird bewiesen: Aus $\sum_{l=1}^{\infty} t_l^{\bar{m}} = \infty$ folgt

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} |P(S_m = j) - P(S_m = j - \bar{m})| = 0.$$

Heuristische Vorbetrachtung

Zur Anschauung folgende Zeichnung:
(An der Geraden I tragen wir den Wert $P(S_m = j)$ bei $j \in \mathbb{N}$ und an der Geraden II im Punkt j jeweils den Wert $P(S_m = j - \bar{m})$ auf.)



Die Summe $\sum_j |P(S_m = j) - P(S_m = j - \bar{m})|$ läßt sich darstellen, indem man von den in der Zeichnung übereinanderstehenden Ausdrücken die Differenz, dann den Absolutbetrag bildet und aufsummiert.

Setzt man

$$B(j,m)=\min(P(S_m=j),\ P(S_m=j-\bar{m}))$$

und wendet die Gleichung $|a-b|=a+b-2\min(a,b)$, a, $b\geqq 0$, an, so erhält man

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbb{N}}|P(S_m=j)-P(S_m=j-\bar{m})|\\&\quad=\sum_{j\in\mathbb{N}}P(S_m=j)+\sum_{j\in\mathbb{N}}P(S_m=j-\bar{m})-\sum_{j\in\mathbb{N}}2\,B\,(j,m)\\&\quad=2-\sum_{j\in\mathbb{N}}2B(j,m).\end{aligned}$$

Transportieren wir vom Punkt j aus die Masse $B(j,m)$ unter Z_{m+1} weiter, so gelangt hiervon auf der oberen und unteren Geraden jeweils der Betrag $B(j,m)\cdot P(Z_{m+1}=k)$ zum Punkt $j+k$, das bedeutet insbesondere:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}}B(j,m+1)&\geqq\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}}B(k,m)\cdot P(Z_{m+1}=j-k)\\&=\sum_{k\in\mathbb{N}}B(k,m).\end{aligned}$$

Für eine bessere Abschätzung von $\sum_{j\in\mathbb{N}}B(j,m+1)$ beschränken wir uns auf den Fall

$$P(S_m=j)\geqq P(S_m=j-\bar{m}),\ P(S_m=j+\bar{m})$$

und ziehen den uninteressant gewordenen Teil $B(j,m)$ ab.

$$\begin{array}{lccr}
 & P(S_m=j)-P(S_m=j-\bar{m}) & 0 & \\
\mathrm{I} & \text{———}+\text{———} & \text{———}+\text{———} & \mathbb{N}\\
 & j & j+\bar{m} & \\
 & j & j+\bar{m} & \\
\mathrm{II} & \text{———}+\text{———} & \text{———}+\text{———} & \mathbb{N}\\
 & 0 & P(S_m=j)-P(S_m=j+\bar{m}) &
\end{array}$$

Diese Zeichnung zeigt uns ein bekanntes Bild, nämlich die Startlage zum Zeitpunkt $m=0$ mit dem Unterschied, daß die Massen in j bzw. $j+\bar{m}$ $(0,\bar{m})$ verschieden sind. Deshalb betrachten wir den nun folgenden Prozeß mit den Zufallsvariablen $Z_{m+1}, Z_{m+2}, \ldots,$ nicht mit Masse 1, sondern mit

$$M(j,m)=\min((P(S_m=j)-P(S_m=j-\bar{m})),(P(S_m=j)-P(S_m=j+\bar{m})))$$

als Startmasse.

Nach diesen heuristischen Vorbetrachtungen werden die nun folgenden Sätze und Abkürzungen nur zum Beweis des Satzes benötigt und seien deshalb ohne Erläuterung hintereinandergereiht.

Für die technische Ausführung einige Abkürzungen: Notation.

$$\delta(k,m)=\begin{cases}1 & \text{falls } P(S_m=k)\geqq P(S_m=k-\bar{m})\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$A(k,m)=|P(S_m=k)-P(S_m=k-\bar{m})|$$

$$\delta'(k,m)=\begin{cases}1 & \text{falls } A(k,m)\cdot\delta(k,m)\geqq A(k+\bar{m},m)\cdot(1-\delta(k+\bar{m},m))\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$M(k,m)=\min\{A(k,m)\,\delta(k,m),A(k+\bar{m},m)\,(1-\delta(k+\bar{m},m))\}$$

$$D(k,m)=|A(k,m)\,\delta(k,m)-A(k+\bar{m},m)\,(1-\delta(k+\bar{m},m))|$$

$$B(k,m)=\min\{P(S_m=k),P(S_m=k-\bar{m})\}.$$

$t^{\bar{m}}_{m,m+1}$, $t^{\bar{m}}_{0,m}$ werde definiert durch

$$2-t^{\bar{m}}_{m,m+1}=\sum_{k\in\mathbb{N}}|P(Z_{m+1}=k)-P(Z_{m+1}=k-\bar{m})|$$

$$2-t^{\bar{m}}_{0,m}=\sum_{k\in\mathbb{N}}|P(S_m=k)-P(S_m=k-\bar{m})|.$$

Einige Male wird von der einfach zu beweisenden Beziehung

$$\sum_{k=0}^{\infty}A(k,m)=2-2\sum_{k=0}^{\infty}B(k,m) \tag{$*$}$$

Gebrauch gemacht.

Proposition 1.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}|P(S_{m+1}=k)-P(S_{m+1}=k-\bar{m})|\leqq 2-t^{\bar{m}}_{0,m}-t^{\bar{m}}_{m,m+1}(1-t^{\bar{m}}_{0,m})^{+}.$$

Beweis. i) Zerlege $P(S_m=k)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}P(S_m=k)&=\min(P(S_m=k),P(S_m=k-\bar{m}))+|P(S_m=k)-P(S_m=k-\bar{m})|\,\delta(k,m)\\&=\min(P(S_m=k),P(S_m=k-\bar{m}))\\&\quad+||P(S_m=k)-P(S_m=k-\bar{m})|\,\delta(k,m)-|P(S_m=k+\bar{m})-P(S_m=k)|\\&\quad\cdot\ (1-\delta(k+\bar{m},m))|\,\delta'(k,m)\\&\quad+\min\{|P(S_m=k)-P(S_m=k-\bar{m})|\,\delta(k,m),\\&\qquad\quad |P(S_m=k+\bar{m})-P(S_m=k)|\,(1-\delta(k+\bar{m},m))\}\\&=\min(P(S_m=k),P(S_m=k-\bar{m}))+D(k,m)\,\delta'(k,m)+M(k,m).\end{aligned}$$

ii) Analog ergibt sich folgende andere Zerlegung:

$$\begin{aligned}P(S_m=k)=\min\{&P(S_m=k+\bar{m}),P(S_m=k)\}\\&+D(k,m)\,(1-\delta'(k,m))\\&+M(k,m).\end{aligned}$$

iii) Für die folgende Abschätzung wird der erste Term wie in i), der zweite wie in

ii) ausgedrückt.

$$\begin{aligned}
&\sum_j |P(S_{m+1}=j)-P(S_{m+1}=j-\bar{m})|\\
&\quad=\sum_j \Big|\sum_k P(S_{m+1}-S_m=k)\,[\min(P(S_m=j-k),P(S_m=j-k-\bar{m}))\\
&\qquad+D(j-k,m)\,\delta'(j-k,m)+M(j-k,m)]\\
&\qquad-\sum_k P(S_{m+1}-S_m=k-\bar{m})\,[\min(P(S_m=j-k+\bar{m}),P(S_m=j-k))\\
&\qquad+D(j-k,m)\,(1-\delta'(j-k,m))+M(j-k,m)]\Big|\\
&\quad\leqq\sum_j\sum_k |M(j-k,m)\,[(P(S_{m+1}-S_m=k)-P(S_{m+1}-S_m=k-\bar{m}))]|\\
&\qquad+\sum_j\sum_k D(j-k,m)\,\delta'(j-k,m)\cdot P(S_{m+1}-S_m=k)\\
&\qquad+\sum_j\sum_k D(j-k,m)\,(1-\delta'(j-k,m))\,P(S_{m+1}-S_m=k-\bar{m})\\
&\quad\leqq\sum_j\sum_k M(j-k,m)\,|P(S_{m+1}-S_m=k)-P(S_{m+1}-S_m=k-\bar{m})|\\
&\qquad+\sum_j\sum_k A(j-k,m)\,\delta(j-k,m)\,P(S_{m+1}-S_m=k)\\
&\qquad+\sum_j\sum_k A(j-k+\bar{m},m)\,(1-\delta(j-k+\bar{m},m))\,P(S_{m+1}-S_m=k-\bar{m})\\
&\qquad-\sum_j\sum_k M(j-k,m)\,P(S_{m+1}-S_m=k)\\
&\qquad-\sum_j\sum_k M(j-k,m)\,P(S_{m+1}-S_m=k-\bar{m})\\
&\quad\leqq(2-t^{\bar{m}}_{m,m+1})\sum_j M(j,m)+\sum_j A(j,m)-2\sum_j M(j,m)\\
&\quad=(2-t^{\bar{m}}_{m,m+1})\,a+(2-t^{\bar{m}}_{0,m})-2a\\
&\quad=2-t^{\bar{m}}_{0,m}-t^{\bar{m}}_{m,m+1}\cdot a,\qquad \text{wobei } a=\sum_{j\in\mathbb{N}} M(j,m) \text{ sei.}
\end{aligned}$$

iv) Beh:

$$P(S_m=j)-M(j,m)\leqq\min(P(S_m=j),P(S_m=j-\bar{m}))+\min(P(S_m=j+\bar{m}),P(S_m=j)).$$

Dies aber folgt aus der Definition von $M(j,m)$,

$$\begin{aligned}
M(j,m)=\min\{&|P(S_m=j)-P(S_m=j-\bar{m})|\,\delta(j,m),\\
&|P(S_m=j+\bar{m})-P(S_m=j)|\,(1-\delta(j+\bar{m},m))\},
\end{aligned}$$

sofort für $\delta(j,m)=0$ oder $\delta(j+\bar{m},m)=1$.

Für den Fall $\delta(j,m)=1$ und $\delta(j+\bar{m},m)=0$ ist zu zeigen:

$$\begin{aligned}
&P(S_m=j)-P(S_m=j)+\max(P(S_m=j-\bar{m}),P(S_m=j+\bar{m}))\\
&\quad\leqq P(S_m=j-\bar{m})+P(S_m=j+\bar{m}).
\end{aligned}$$

Dies aber ist erfüllt.

v) Summiert man die Behauptung aus iv) über j, so erhält man $1-a\leqq t^{\bar{m}}_{0,m}$, und dies eingesetzt in die in iii) erhaltene Formel liefert die Proposition.

Folgerung. Da $2-t^{\bar{m}}_{0,m+1} \leqq 2-t^{\bar{m}}_{0,m}-t^{\bar{m}}_{m,m+1}\,a \leqq 2-t^{\bar{m}}_{0,m}$ gilt, ist $t^{\bar{m}}_{0,m} \leqq t^{\bar{m}}_{0,m+1}$ für alle $m\in\mathbb{N}$, und demnach ist für $m\to\infty$

$$\sum_j |P(S_m=j)-P(S_m=j-\bar{m})|$$

monoton fallend, und der Limes existiert.

Proposition 2. *Falls* $\sum_{m\in\mathbb{N}} t^{\bar{m}}_{m,m+1}=\infty$ *ist, gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{N}} \min(P(S_m=j), P(S_m=j-\bar{m})) \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Beweis. Annahme: $\exists\, 0<t<1\ \forall\, m\in N\colon t^{\bar{m}}_{0,m} \leqq t$.

Von Proposition 1 erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2-t^{\bar{m}}_{0,m_0+1} &\leqq 2-t^{\bar{m}}_{0,m_0}-t^{\bar{m}}_{m_0,m_0+1}(1-t^{\bar{m}}_{0,m_0}) \\ &\leqq 2-t^{\bar{m}}_{0,m_0}-t^{\bar{m}}_{m_0,m_0+1}(1-t). \end{aligned}$$

Mit Induktion über m_0 ergibt sich:

$$2-t^{\bar{m}}_{0,m_0+1} \leqq 2-(1-t)\sum_{m=0}^{m_0} t^{\bar{m}}_{m,m+1}.$$

Für $m_0\to\infty$ konvergiert die rechte Seite gegen $-\infty$, das heißt, auch $t^{\bar{m}}_{0,m_0+1}$ muß gegen ∞ konvergieren. Dies aber ist ein Widerspruch, da $t^{\bar{m}}_{0,m_0+1}$ durch 2 beschränkt ist.

Hilfssatz 3. *Es seien* $a_i\in\mathbb{R}_0^+$, $i\in\mathbb{N}$, *vorgegeben,* $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j=1$, $\bar{m}$ *und* g *natürliche Zahlen.*

Dann existieren nicht-negative Zahlen $u_{i,j}$ *mit*

$$a_j=\sum_{i\in\mathbb{N}} u_{i,j}=\sum_{i\in\mathbb{N}} u_{j,i}, \qquad u_{i,j}\geqq 0 \quad \textit{für alle } i,j\in\mathbb{N}.$$

i) $u_{j,j-\bar{m}}=\min(a_j, a_{j-\bar{m}}) \qquad j\leqq g+\bar{m}$

ii) $u_{j,j-n}=0$ *für alle* $n>0$ *mit entweder* $n\neq\bar{m}$ *oder* $(n=\bar{m},\ j>g+\bar{m})$

iii) $\sum_{i,j} u_{i,j}(j+1-i)=1.$

Beweis. Der Beweis wird geführt durch endlich viele Umformungen einer Ausgangsmatrix, hier niedergeschrieben als Induktion über die Spaltenzahl n, bis die Zahl g erreicht ist. Induktionsanfang.

Für $n=0$ wähle $u_{i,j}=\delta_{i,j}a_j$, $\delta_{i,j}$ Kroneckersymbol.

Induktionsschluß. Wir nehmen an, wir haben bereits eine Matrix $V_n=(v_{i,j})$, $i,j\in\mathbb{N}$, folgender Gestalt erhalten:

(a) $v_{i,j}\geqq 0\ \forall\, i,j\in\mathbb{N}$

$v_{i,j}=0$ für $i>j$ und $i-j\neq\bar{m}$ oder für $i-j=\bar{m}$ und $i>n+\bar{m}$

d.h. V_n hat Dreiecksgestalt bis auf die Elemente $v_{i,i-\bar{m}}$, $i\leqq n+\bar{m}$)

(b) $\sum_{j\in\mathbb{N}} v_{i,j}=a_i=\sum_{j\in\mathbb{N}} v_{j,i}, \quad \sum_{i,j} v_{i,j}(j+1-i)=1$

(c) $v_{j+\bar{m},j}=\min(a_{j+\bar{m}},a_j)$ für alle $j<n$

(d) Für $B(i)=\{j\in\mathbb{N}\mid v_{i,j}\neq 0\}$ gilt $\#B(i)<\infty$ für alle $i\in\mathbb{N}$, für $C(j)=\{i\in\mathbb{N}\mid v_{i,j}\neq 0\}$ gilt $\#C(j)<\infty$ für alle $j\in\mathbb{N}$. Setze $l=\#B(n+\bar{m})+\#C(n)$.

Der Induktionsschritt geschieht nun durch geeignete Umformungen von $V_n=V_n^l$ (Induktion nach l).

Fall 1. $\exists j_0\in\mathbb{N}\ \exists i_0\in\mathbb{N}\ j_0>n,\ i_0\leqq n\Rightarrow \min(v_{n+\bar{m},j_0},v_{i_0,n})\neq 0$. Dann definiere man $V_n'^{l'}$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
v'_{i,j}&=v_{i,j} \quad \text{falls } i\neq i_0, n+\bar{m} \text{ oder } j\neq j_0, n\\
v'_{i_0,j_0}&=\min(v_{n+\bar{m},j_0},v_{i_0,n})+v_{i_0,j_0}\\
v'_{n+\bar{m},n}&=\min(v_{n+\bar{m},j_0},v_{i_0,n})+v_{n+\bar{m},n}\\
v'_{i_0,n}&=-\min(v_{n+\bar{m},j_0},v_{i_0,n})+v_{i_0,n}\\
v'_{n+\bar{m},j_0}&=-\min(v_{n+\bar{m},j_0},v_{i_0,n})+v_{n+\bar{m},j_0}.
\end{aligned}$$

Diese $V_n'^{l'}$ erfüllt wieder die Eigenschaften von V_n^l

(a) nach Definition;

(b) $\sum_j v_{i,j}=\sum_j v'_{i,j}=a_i=\sum_j v_{j,i}=\sum_j v'_{j,i}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} v'_{i,j}(j+1-i)=&\sum_{\substack{i,j\\ i\neq i_0,n+\bar{m}\\ \text{oder } j\neq j_0,n}} v_{i,j}(j+1-i)+v_{i_0,j_0}(j_0+1-i_0)\\
&+v_{i_0,n}(n+1-i_0)+v_{n+\bar{m},n}(n+1-n-\bar{m})\\
&+v_{n+\bar{m},j_0}(j_0+1-n-\bar{m})+\min(v_{n+\bar{m},j_0},v_{i_0,n})\\
&\cdot\underbrace{(j_0+1-i_0-n-1+i_0+n+1-n-\bar{m}-j_0-1+n+\bar{m})}_{=0}\\
=&\sum_{i,j} v_{i,j}(j+1-i)=1;
\end{aligned}$$

(c) nach Definition.

(d) Für die analogen Größen $B'(i)=\{j\in N\mid v'_{i,j}\neq 0\}$, $C'(j)=\{i\in N\mid v'_{i,j}\neq 0\}$ gilt $\#B'(i)<\infty$ und $\#C'(j)<\infty$, $i,j\in\mathbb{N}$.

Setze wieder $l'=\#B'(i)+\#C'(j)$.
Nach Konstruktion gilt stets

$$v'_{n+\bar{m},n}>v_{n+\bar{m},n}.$$

Ist $v_{n+\bar{m},n}$ schon ungleich Null, dann ist $l'<l$. Falls $v_{n+\bar{m},n}=0$ gilt, so ist aber $v'_{n+\bar{m},n}\neq 0$ und für den darauffolgenden Konstruktionsschritt gilt dann $l''<l$. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Matrixumformung erreicht man nach endlich vielen Schritten (maximal l Schritte) den Fall 2.

Fall 2. Es gilt nicht Fall 1, d.h.

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \forall i_0 \in \mathbb{N} \quad j_0 > n, \quad i_0 \leqq n \Rightarrow \min(v_{n+\bar{m}, j_0}, v_{i_0, n}) = 0.$$

Dies bedeutet, in der Zeile $n+\bar{m}$ oder der Spalte n ist nur der Wert $v_{n+\bar{m},n}$ größer als Null, damit ist aber $v_{n+\bar{m},n} = \min(a_{n+\bar{m}}, a_n)$.

Diese Matrix erfüllt die Bedingungen $a-d$ mit $n+1$ anstatt n. Die Induktion über n läuft so lange, bis $V_{g+1} = U$ konstruiert ist.

Bemerkung. Für $g = \infty$ läßt sich keine Matrix mit den geforderten Eigenschaften konstruieren.

Proposition 4. *Aus*

$$\sum_{m \in N} t^1_{m,m+1} = \infty$$

folgt

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} |P(S_m = j) - P(S_m = j - \bar{m})| \leqq 2 - (\tfrac{1}{2})^{\bar{m}-1}.$$

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion über m geführt.

i) Der Induktionsanfang $\bar{m} = 0$ ist offensichtlich.

ii) Zerlege $P(S_{m_0} = j)$, $m_0 \in N$, nach Hilfssatz 3

$$P(S_{m_0} = j) = \sum_i u_{i,j}(m_0) = \sum_i u_{j,i}(m_0)$$

mit

$$u_{j,j-\bar{m}}(m_0) = \min(P(S_{m_0} = j), P(S_{m_0} = j - \bar{m})).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{m \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} |P(S_m = j) - P(S_m = j - \bar{m} - 1)| \\
&\quad = \lim_{m_0, m_1 \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} |P(S_{m_0+m_1} = j) - P(S_{m_0+m_1} = j - \bar{m} - 1)| \\
&\quad = \lim_{m_0, m_1 \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} \Big| \sum_{k \in \mathbb{N}} P(S_{m_0} = k) P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j - k) \\
&\qquad - \sum_{k'} P(S_{m_0} = k') P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j - k' - \bar{m} - 1) \Big| \\
&\quad = \lim_{m_0, m_1 \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} \Big| \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} u_{k,i}(m_0) P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j - k) \\
&\qquad - \sum_{k'} \sum_{q \in \mathbb{N}} u_{q,k'}(m_0) P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j - k' - \bar{m} - 1) \Big| \\
&\quad = \lim_{m_0, m_1 \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} \Big| \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} u_{k,i}(m_0) [P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j - k) \\
&\qquad - P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j - i - \bar{m} - 1)] \Big|
\end{aligned}$$

$$\leqq \lim_{m_0, m_1 \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i + \bar{m} \neq k} u_{k,i}(m_0) \, |P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j-k)$$

$$- P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j - i - \bar{m} - 1)|$$

$$+ \lim_{m_0, m_1 \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{k,k-\bar{m}}(m_0) \, |P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j-k)$$

$$- P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j - k - 1)|$$

$$\leqq \lim_{m_0 \to \infty} 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i \neq k - \bar{m}} u_{k,i}(m_0) + \lim_{m_0 \to \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{k,k-\bar{m}}(m_0)$$

$$\cdot \lim_{m_1 \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} |P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j-k) - P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j-k-1)|$$

$$\leqq 2 + \lim_{m_0 \to \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{k,k-\bar{m}}(m_0) \, [\lim_{m_1 \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} |P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j-k)$$

$$- P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j-k-1)| - 2]$$

$$\leqq 2 + \lim_{m_0 \to \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{k,k-\bar{m}}(m_0) \, [1-2] \qquad \text{(Prop. 2)}$$

$$\leqq 2 - 1 \cdot (\tfrac{1}{2})^{\bar{m}-1} \cdot \tfrac{1}{2} \qquad \text{(siehe (*))}$$

$$\leqq 2 - (\tfrac{1}{2})^{\bar{m}+1-1}.$$

Hilfssatz 5. *Sei $a \in R$, $0 \leqq a \leqq 1$, $b > 0$, $a \leqq b$. Setze*

$$V = \{v_1, v_2, v_3 \ldots) \,|\, 0 \leqq v_m \in R \wedge \sum_{m=1}^{\infty} v_m \cdot m = b \wedge \sum_{m=1}^{\infty} v_m = a, \qquad \forall\, m \in N\}$$

$$M = \{v \in V \,|\, \exists\, m_1 \in N \,\forall\, m \neq m_1, m_1 + 1 : v_m = 0\}.$$

Dann existiert

$$\max \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} v_m [2 - (\tfrac{1}{2})^{m-1}] \,|\, v \in V \right\}$$

und wird durch ein Element aus M angenommen.

Beweis. i) Sei $v \in V \wedge v \notin M$, so existieren $m_0, m_1 \in N$ mit

$$m_0 + 1 < m_1 \quad \text{und} \quad \min(v_{m_0}, v_{m_1}) = d \neq 0.$$

Der Vektor v' werde definiert durch

$$v'_m = v_m \qquad \text{falls } m \neq m_0, \, m_0 + 1, \, m_1 - 1, m_1$$

$$v'_{m_0} = v_{m_0} - d \qquad v'_{m_1} = v_{m_1} - d$$

$$\left.\begin{array}{l} v'_{m_0+1} = v_{m_0+1} + d \\ v'_{m_0+1} = v_{m_0+1} + d \end{array}\right\} \quad \text{für } m_0 + 1 \neq m_1 - 1$$

$$v'_{m_1-1} = v_{m_1-1} + 2d \qquad \text{für } m_0 + 1 = m_1 - 1.$$

Behauptung. v' ist ein Element aus V, aber mit

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_m[2-(\tfrac{1}{2})^{m-1}] < \sum_{m=1}^{\infty} v'_m[2-(\tfrac{1}{2})^{m-1}].$$

Nach dem Einsetzen von v, v' bleibt zu zeigen:

$$d(2-(\tfrac{1}{2})^{m_0-1}) + d(2-(\tfrac{1}{2})^{m_1-1}) < d(2-(\tfrac{1}{2})^{m_0}) + d(2-(\tfrac{1}{2})^{m_1-2}),$$

zu zeigen

$$(\tfrac{1}{2})^{m_0-1} + (\tfrac{1}{2})^{m_1-1} > (\tfrac{1}{2})^{m_0} + (\tfrac{1}{2})^{m_1-2},$$

zu zeigen

$$1 + (\tfrac{1}{2})^{m_1-m_0} > (\tfrac{1}{2})(1 + (\tfrac{1}{2})^{m_1-m_0})$$

und dies ist erfüllt.

ii) Sei jetzt $v \in V$ mit unendlich vielen Koordinaten $v_m \neq 0$, so existiert ein v' mit endlich vielen Koordinaten $v'_m \neq 0$, mit

$$\sum_{m=1}^{\infty} v'_m(2-(\tfrac{1}{2})^{m-1}) > \sum_{m=1}^{\infty} v_m(2-(\tfrac{1}{2})^{m-1}).$$

Der Beweis läuft analog zu i).

iii) Wegen i) und ii) reicht es, sich beim Supremum auf $v \in M$ einzuschränken. Dann ist das Problem zurückgeführt auf eine Optimierungsaufgabe, ein $v_1, v_2 \in R$ und ein $m \in N$ zu finden mit den Eigenschaften

i) $v_1 m + v_2(m+1) = b$
ii) $v_1 + v_2 = a$
iii) $v_1, v_2 \geqq 0$, so daß
iv) $v_1(2-(\tfrac{1}{2})^{m-1}) + v_2(2-(\tfrac{1}{2})^m)$ maximiert wird.

Aus Stetigkeitsgründen existiert eine Lösung.

Proposition 6. *Es gilt folgende Abschätzung:*

$$\max_{v \in V} \sum_{m=1}^{\infty} v_m(2-(\tfrac{1}{2})^{m-1}) \leqq a(2-(\tfrac{1}{2})^{\frac{b}{a}}) \qquad a, b \text{ siehe Hilfssatz 5.}$$

Beweis. Das Maximum werde durch $(0, 0, \ldots, v_{m_0}, v_{m_0+1}, 0, \ldots) \in M$ angenommen.

$$v_{m_0} + v_{m_0+1} = a \wedge v_{m_0} \cdot m_0 + v_{m_0+1}(m_0+1) = b = a \cdot m_0 + 1 \cdot v_{m_0+1}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_m(2-(\tfrac{1}{2})^{m-1}) \leqq (v_{m_0} + v_{m_0+1})(2-(\tfrac{1}{2})^{m_0})$$

$$\leqq a(2-(\tfrac{1}{2})^{m_0}).$$

Aus $b = a m_0 + v_{m_0+1}$ folgt

$$m_0 = \frac{b - v_{m_0+1}}{a} \leqq \frac{b}{a}$$

und daraus ergibt sich die gesuchte Abschätzung

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_m(2-(\tfrac{1}{2})^{m-1}) \leqq a(2-(\tfrac{1}{2})^{\frac{b}{a}}).$$

Mit den bereitgestellten Mitteln nun der Hauptsatz für $\bar{m}=1$:

Satz 7. *Aus*

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^1_{m,m+1} = \infty$$

folgt

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j\in N} |P(S_m=j)-P(S_m=j-1)|=0.$$

Beweis. Man nehme an, der Limes sei gleich $B \neq 0$. Wähle ein m_0 zu vorgegebenem $\delta > 0$ mit

$$\sum_{j\in N} |P(S_{m_0}=j)-P(S_{m_0}=j-1)| \leqq B+\delta.$$

Man zerlege wieder $P(S_{m_0}=j)=\sum_{j\in N} u_{i,j}=\sum_{i\in N} u_{i,j}$ wie in Hilfssatz 3

$$u_{j,j-1}=\min(P(S_{m_0}=j),\ P(S_{m_0}=j-1)) \qquad \text{für alle } j\leqq g;$$

man wähle dabei g so, daß zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{g} u_{j,j-1}+\varepsilon \geqq \sum_{j=1}^{\infty} \min(P(S_{m_0}=j-1),\ P(S_{m_0}=j)) \geqq \frac{2-B-\delta}{2}.$$

Dies ist wegen $\sum_{j\in N} P(S_{m_0}=j)=1$ und $P(S_{m_0}=j)\geqq 0$ für alle j stets möglich.

Definiere:

$$v_m = \sum_{\substack{(j+1-i)=m\\ i,j}} u_{i,j}.$$

Dann gilt

$$1=\sum_{i,j} u_{i,j}(j+1-i)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m\cdot m,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m=\sum_{i,j} u_{i,j}=\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i=1,$$

$$v_0=\sum_{\substack{(j+1-i)=0\\ i,j}} u_{i,j}=\sum_{j=0}^{g} u_{j,j-1}\geqq \frac{2-B-\delta}{2}-\varepsilon,$$

$v_m=0$, falls $m<0$ ist (da U Dreiecksgestalt hat).

Jetzt gilt folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} B &= \lim_{m_1\to\infty} \sum_j |P(S_{m_0+m_1}=j)-P(S_{m_0+m_1}=j-1)| \\ &\leqq \lim_{m_1\to\infty} \sum_j \Big|\sum_k P(S_{m_0}=k)\,P(S_{m_0+m_1}-S_{m_0}=j-k) \\ &\qquad -\sum_i P(S_{m_0}=i)\,P(S_{m_0+m_1}-S_{m_0}=j-i-1)\Big| \end{aligned}$$

$$\leqq \lim_{m_1 \to \infty} \sum_j \sum_k \sum_i u_{k,i} |P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j-k)$$
$$- P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j-i-1)|.$$

Man wende wieder dominierte Konvergenz an und indiziere um, $k-1-m=i$

$$= \sum_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{k,k-1-m} \lim_{m_1 \to \infty} \sum_j |P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j-k)$$
$$- P(S_{m_0+m_1} - S_{m_0} = j-k+m)|.$$

Mit Anwendung von Proposition 4 folgt

$$\leqq \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} v_m (2 - (\tfrac{1}{2})^{m-1}) + v_0 \cdot 0.$$

Es reicht, über $m>0$ zu indizieren.

Aus Proposition 6 folgert man mit $a = \sum_{m=1}^{\infty} v_m$ weiter:

$$\leqq a(2 - (\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{a}}).$$

Da $1 = \sum_{m=0}^{\infty} v_m = a + v_0 \geqq a + \dfrac{2-B-\delta}{2} - \varepsilon$ folgt weiter

$$\leqq \left(1 + \varepsilon - \frac{2-B-\delta}{2}\right) \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}\right).$$

Diese Abschätzung soll für jedes beliebige ε und δ gelten, also

$$0 < B \leqq \left(1 - \frac{2-B}{2}\right) \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}\right) < \frac{B}{2} \cdot 2 = B.$$

Widerspruch!

Damit folgt die Behauptung.

Bemerkung. Der angegebene Satz läßt sich ebenso mit Z_i Zufallsvariablen mit Werten in Z beweisen.

Bemerkung. Die angegebene Bedingung $\sum_{l \in \mathbb{N}} t_l^{\bar{m}} = \infty$ ist keineswegs notwendig,und in einigen Fällen wird man daher eine Folge $l_0 < l_1 < l_2 < \ldots$ von natürlichen Zahlen und die Zufallsvariablen $Y_i = \sum_{j=l_i+1}^{l_{i+1}} Z_j$ anstatt der Z_i wählen.

Eine etwaige Umkehrung wie:

Aus $\lim_{m \to \infty} \sum_{k \in N} |P(S_m = k) - P(S_m = k-1)| = 0$ folgt, es existieren obige Y_i mit $\sum_{l \in N} t_l^{\bar{m}} = \infty$ ($t_l^{\bar{m}}$ auf Y_l bezogen), gilt nicht. Man betrachte den Fall, Y_0 nehme jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0,5 die Werte 0 und 1 an und die restlichen ZV. mögen die mischende Eigenschaft für $\bar{m}=2$, aber nicht für $\bar{m}=1$ besitzen.

Eine Anwendung des eben bewiesenen Satzes findet man in Rösler [3]. Eine Verdeutlichung und weitere Anwendungsmöglichkeit ergibt sich mit Hilfe von Satz 8.

Satz 8. *$Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ seien unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$ auf einem W-Raum Ω.*

Sei $S_0=0$ und S_m die Summe von $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ für $m>0$ und m_0 das erzeugende Element des von

$$A=\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A(S_m), \qquad A(S_m)=\{m_1-m_2 \mid P(S_m=m_1)>0 \wedge P(S_m=m_2)>0\}$$

erzeugten Hauptideals, dann erfüllt die von dem Prozeß S_m, $m\in\mathbb{N}$ erzeugte terminale σ-Algebra $F^\infty=\bigcap_{m\in\mathbb{N}} F(S_n,\ n\geqq m)$, wobei $F(S_n,\ n\geqq m)$ die von S_m, S_{m+1}, $S_{m+2}\dots$ erzeugte σ-Algebra ist, genau dann das 0-1-Gesetz, wenn

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j\in\mathbb{N}} |P(S_m=j)-P(S_m=j-m_0)|=0 \quad \textit{gilt.}$$

Beweis. Der Beweis läuft über die äquivalenten Aussagen

i) F^∞ trivial.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{A\in F(S_n,S_{n+1},\dots)} |P(A\cap B)-P(A)\cdot P(B)|=0 \qquad \forall B\in F(S_0,S_1,S_2,\dots)$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{A\in F(S_m,S_{n+1},\dots)} |P(A\cap B)-P(A)\cdot P(B)|=0$ mit B aus dem Erzeugendensystem von $F(S_0,S_1,S_2\dots)$

$$B=\{B_j^m\}=\{\{S_m=j\}\ \ m\in\mathbb{N},\ j\in\mathbb{Z}\}.$$

iv) Für alle $m\in N$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in I} |P(S_n-S_m=j)-P(S_n-S_m=j-\bar{m})|=0, \qquad \bar{m}\in\{\bar{m}\mid PS_m=\bar{m})>0\}.$$

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |P(S_n=j)-P(S_n=j-m_0)|=0.$

Bemerkung. Der Satz von Borel-Cantelli ergibt sich als Spezialfall.

Literatur

1. Blackwell, D., Freedman, D.A.: The tail σ-field of a Markov-chain and a theorem of Orey. Ann Math. Statist. **35**, 1291–1295 (1964)
2. Orey, S.: An ergodic theorem for Markov chains. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete **1**, 174–176 (1962)
3. Rösler, U.: Das 0-1-Gesetz der terminalen σ-Algebra bei Harrisirrfahrten [Erscheint in Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete]

Eingegangen am 15. Dezember 1975; in revidierter Form am 30. August 1976