Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
37, 297–319 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Balayage et formes de Dirichlet

Yves Le Jan*

Université Pierre et Marie Curie, Lab. de Calcul des Probabilités, Tour 56, 4 Place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05, France

Ce travail comprend trois parties. La première est consacrée à l'exposé de généralités sur la théorie des formes de Dirichlet et ses liens avec la théorie des processus de Markov. Les formes envisagées ne sont pas à priori supposées symetriques.

La deuxième partie est une étude de la restriction a^D d'une forme de Dirichlet régulière a basée sur $L^2(X, m)$ à un ouvert D de X, des noyaux de Poisson associés, et du balayage sur un fermé. Si un processus de Hunt est associé à a, le processus tué à la sortie de D est associé à a^D et le processus changé de temps par la fonctionnelle additive α-balayée de dt sur D^c est associée à la «forme de Dirichlet balayée» de a sur $L^2(\nu_\alpha)$, où ν_α désigne la mesure α-balayée de m sur D^c.

Dans la troisième partie, on présente une construction des formes de Dirichlet basées sur le même espace $L^2(X, m)$ ayant même restriction à D et mêmes noyaux de Poisson associés. Cette construction se fait à l'aide des «formes de Dirichlet balayées».

Le thème de ce travail et certaines techniques ont été suggérés par une série de travaux effectués ces dernières années sur des problèmes voisins par Fukushima, Kunita et Silverstein. Une note résumant l'essentiel des résultats établis dans cet article a été publié au C.R. Acad. Sci. Paris. t. 282 (1976).

I. Généralités

La théorie des espaces de Dirichlet, due à Beurling et Deny ([3]) introduit une axiomatique de la théorie du potentiel fondée sur la notion d'énergie. Elle utilise essentiellement diverses méthodes hilbertiennes et la méthode des contractions.

En utilisant la notion de projection par rapport à une forme bilinéaire continue et coercive due à Stampachia (cf. [25]), Ancona (cf. [1], [2]), Bliedtner (cf. [4]), Ito (cf. [15]), Kunita (cf. [17]) ont généralisé la théorie à des formes non symétriques.

* Laboratoire «Processus Stochastiques et Applications» dépendant de l'Université Paris VI n° 224 associé au C.N.R.S.

Ce premier paragraphe est essentiellement consacré au rappel de résultats généraux sur les formes de Dirichlet (cf. [1, 4, 8]). De plus, l'identité des réduites au sens des formes de Dirichlet et au sens probabiliste est établie à la fin du paragraphe.

On suppose donnés un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts X et une mesure positive m sur sa tribu borélienne $\mathscr{B}$. Le support de m est supposé égal à X.

I.1. *Définition.* On dira qu'une forme bilinéaire a définie sur un sous espace $\mathbb{H}$ de $L^2(m)$ est une forme de Dirichlet basée sur $L^2(m)$ si et seulement si:

A) La forme quadratique associée à a munit $\mathbb{H}$ d'une structure hilbertienne pour laquelle la forme a et l'injection naturelle de $\mathbb{H}$ dans $L^2(m)$ sont continues.

B) Si, $\forall f \in \mathbb{H}$, on pose $Tf = |f|$ ou $Tf = f \wedge 1$, $Tf \in \mathbb{H}$ et:

$$a(Tf+f, f-Tf) \geqq 0$$
$$a(f-Tf, f+Tf) \geqq 0.$$

i.e. la contraction module et la contraction unité opèrent sur la forme a et sur la forme transposée $\hat{a}$.

Remarques. Si la forme a est symétrique toutes les contractions opèrent sur a.

· $\hat{a}$ est une forme Dirichlet.

I.2. *Résolvante*

· L'hypothèse A) et le théorème de Lax Milgram permettent de définir une $L^2(m)$ résolvante G_α associée à a par la relation:

$$a_\alpha(G_\alpha f, g) = \int fg\, dm, \qquad \forall f \in L^2(m), \qquad \forall g \in \mathbb{H}, \qquad \forall \alpha \geqq 0,$$

où a_α désigne la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot) + \alpha \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(m)}$.

· On définit de la même manière la résolvante associée à $\hat{a}$, notée $\hat{G}_\alpha$.

· L'hypothèse B) équivaut à supposer la sous markovianité de G_α et $\hat{G}_\alpha$, ou que G_0 et $\hat{G}_0$ vérifient le principe complet du maximum.

· G_α et $\hat{G}_\alpha$ sont fortement continues dans $\mathbb{H}$ et dans l'adhérence de $\mathbb{H}$ dans $L^2(m)$.

I.3. *Exemples*

a) a peut être la forme bilinéaire associée à un opérateur de diffusion uniformément elliptique sous forme variationnelle et définie sur $H_0^1(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

b) On peut prendre

$$a(\phi, \phi) = \lambda \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\, dx)} + \iint \frac{(\phi(x) - \phi(y))^2}{\|x-y\|^{n+2s}}\, dx\, dy$$

avec $\phi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et $0 < s < 1$.

La résolvante associée est celle d'un processus symétrique stable tué à un temps aléatoire de densité $\lambda e^{-\lambda t}$.

c) D'autres exemples sont donnés dans [14].

I.4. *Théorie du Potentiel*

I.4.1. Potentiels

a) Pour tout $\alpha \geqq 0$ les propriétés suivantes sont équivalentes pour $p \in L^2(m)$.

i) $p \in \mathbb{H}$ et $\forall f \in \mathbb{H}^+$, $a_\alpha(p,f) \geqq 0$.

ii) $p \geqq 0$, $\beta G_{\alpha+\beta}\, p \leqq p$, et $\exists\, g \in \mathbb{H}$ tel que $p \leqq g$.

Un tel élément de $\mathbb{H}$ est appelé un a_α potentiel. Le cône des a_α potentiels est noté $\mathbb{P}_{a_\alpha}$.

b) $\mathbb{P}_{a_\alpha}$ est inf-stable. De plus $p \in \mathbb{P}_{a_\alpha}$ entraîne que $p \wedge 1 \in \mathbb{P}_{a_\alpha}$.

c) $\mathbb{P}_{a_\alpha} - \mathbb{P}_{a_\alpha}$ est dense dans $\mathbb{H}$ (du fait que G_α est fortement continue).

I.4.2. Régularité

Pour obtenir une théorie du potentiel assez riche, on fait sur a une hypothèse de régularité, (vérifiée dans les précédents exemples).

Définition. Si $\mathcal{D}$ est un sous espace dense de $C_K(X)$, a est dite $\mathcal{D}$ régulière si $\mathcal{D} \cap \mathbb{H}$ est dense dans $\mathbb{H}$ et dans $C_K(X)$. Si $\mathcal{D} = C_K(X)$ on dit que a est régulière.

Remarque. Si a est régulière, on a le résultat plus précis suivant:

Si $f \in C_K(X)$, pour tout voisinage U de $\operatorname{Supp}(f)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C_K(X) \cap \mathbb{H}$ tel que:

$\|f-g\|_\infty < \varepsilon$ et $\operatorname{Supp}(g) \subseteq U$.

On suppose dorénavant a régulière (ce qui équivaut à supposer $\hat{a}$ régulière).

I.4.3. Mesures d'énergie finie

Définition. Une mesure positive sur X est dite d'énergie finie si et seulement si sa restriction à $C_K(X) \cap \mathbb{H}$ est continue pour la topologie de $\mathbb{H}$. On note $\mathscr{E}$ le cône des mesures d'énergie finie. On pose $\tilde{\mathscr{B}} = \bigcap_{\mu \in \mathscr{E}} \mathscr{B}_\mu$.

· μ est d'énergie finie ssi il existe un unique homorphisme continu d'espaces vectoriels réticulés de $\mathbb{H}$ dans $L^1(\mu)$ prolongeant l'homomorphisme naturel de $C_K(X) \cap \mathbb{H}$ dans $L^1(\mu)$. Si $\operatorname{Supp}(\mu) = X$ cet homorphisme est injectif. On ne distinguera pas dans les notations un élément de $\mathbb{H}$ et son représentant dans $L^1(\mu)$.

· Pour tout $\alpha \geqq 0$ il existe un élément $\phi \in \mathbb{P}_{a_\alpha}$ tel que:

$a_\alpha(\phi, g) = \int g\, d\mu \quad \forall\, g \in \mathbb{H}$.

On pose $\phi = G_\alpha \mu$. Inversement tout élément de $\mathbb{P}_{a_\alpha}$ est le a-potentiel d'une mesure d'énergie finie.

I.4.4. Réduites. Capacité

· Si f est une fonction numérique définie sur X, si $A \in \tilde{\mathscr{B}}$ et si il existe $h \in \mathbb{H}$ tel que: $h \geqq f$ μ p.s. sur A, $\forall\, \mu \in \mathscr{E}$, il existe un plus petit a_α-potentiel majorant f sur A μ-p.s., pour toute mesure $\mu \in \mathscr{E}$. Il est appelé la a_α-réduite de f sur A et noté $R_a^A(f)$ (ou $R^A(f)$ s'il n'y a pas d'ambiguité).

· $R_a^A(f)$ est la a_α projection de 0 sur le convexe fermé des éléments de $\mathbb{H}$ majorant f sur A μ-p.s., pour toute mesure $\mu \in \mathscr{E}$.

· Si la a-réduite de 1 existe sur A, A est dit de a-capacité finie. On pose:

$\operatorname{Cap}_a(A) = a(R_a^A(1), R_a^A(1)), \qquad e_\alpha^A = R_{a_\alpha}^A(1).$

Si a est symétrique, Cap_a se prolonge en une capacité de Choquet.

· Si b est une autre forme de Dirichlet définie sur $\mathbb{H}$ et induisant sur $\mathbb{H}$ la même topologie que a, A est de b-capacité finie ssi A est de a-capacité finie et il existe $k>0$ tel que:

$$\frac{1}{k}\,\mathrm{Cap}_a(A) \leqq \mathrm{Cap}_b(A) \leqq k\,\mathrm{Cap}_a(A).$$

I.4.5. Ensembles polaires et fonctions quasi continues

a) Soit $A \in \tilde{\mathscr{B}}$. A est dit polaire ssi il est de a-capacité nulle. A, est polaire ssi: $\mu(A)=0\ \forall\, \mu \in \mathscr{E}$.

b) Une propriété vraie sauf sur un ensemble polaire est dite vraie quasi partout (en abrégé q.p.).

c) Une fonction f définie sur X est dite quasi continue si et seulement si il existe une suite décroissante ω_n d'ouverts de X tels que:

i) f soit continue sur $X-\omega_n$

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} e_0^{\omega_n}=0$ dans $\mathbb{H}$.

d) Si f est quasi-continue, f est positive m-ps ssi f est positive quasi partout.

I.4.6. Représentants quasi continus des éléments de $\mathbb{H}$

a) Tout élément de $\mathbb{H}$ admet un représentant quasi continu, unique modulo l'égalité quasi partout.

On identifie tout élément de $\mathbb{H}$ avec la classe de ses représentants quasi-continus. Celle-ci réalise la limite projective de ses représentants dans les espaces $L^1(\mu)$.

b) Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de $\mathbb{H}$ convergeant vers f dans $\mathbb{H}$ et soient $(\tilde{f}_n)_{n\in N}$ et $\tilde{f}$ des représentants quasi-continus de $(f_n)_{n\in N}$ et de f respectivement. Alors il existe une sous-suite $\tilde{f}_{n_K}$ telle que $\tilde{f}_{n_K}$ converge quasi partout vers $\tilde{f}$.

I.5. *Processus de Markov associé*

Dans une série de travaux (cf. [11, 12]) Fukushima a montré comment un processus de Markov peut être associé à un espace de Dirichlet régulier. Ce résultat se généralise au cas des formes de Dirichlet non symétriques (cf. Carrillo-Menendez [7]).

I.5.1. *Définition.* Si a est une forme de Dirichlet régulière définie sur $\mathbb{H} \subseteq L^2(X,m)$ et si G_α est la résolvante associée, si $M=(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, \zeta, P_x)$ est un processus de Hunt, à valeurs dans $X-N$, où N est un ensemble polaire, dont la résolvante V_α vérifie la propriété

$$\forall\, h \in \mathscr{L}^2(m), \qquad \forall\, \alpha>0, \qquad V_\alpha h = G_\alpha h \text{ qp.}$$

M est dit associé à a.

Dans la suite on suppose donné un processus de Hunt M associé à une forme de Dirichlet régulière a basée sur $L^2(X,m)$. On reprend les notations de la définition.

I.5.3. **Proposition.** *Pour tout* $\alpha \geqq 0$, *si* f *est un* α (i.e. a_α) *potentiel, il existe un représentant quasi continu* $\tilde{f}$ *de* f *dont la restriction à* $X-N$ *est une fonction excessive.*

La proposition est évidente pour les potentiels de fonctions. Mais tout α-potentiel est limite croissante de α-potentiels de fonctions.

I.5.4. **Proposition.** *Soit A un ensemble presque borélien dans $X-N$ et T_A le temps d'entrée de X_t dans A,* (cf. [6]).

Si A est de capacité finie on a: $e_\alpha^A = E.(e^{-\alpha T_A} 1_{\{\zeta > T_A\}})$ qp.

En particulier A est polaire ssi $E.(T_A < \infty) = 0$ qp.

Démonstration. a) Si A est un ouvert de capacité finie (par exemple relativement compact) on peut choisir $\tilde{e}_\alpha^A$ telle que $\tilde{e}_\alpha^A = 1$ sur $A-N$.

En effet, si Ψ est un représentant de e_α^A défini sur $X-N$, borélien et égal à 1 sur A, on a:

$$e_\alpha^A = \liminf_{m\to+\infty} m V_{\alpha+m} \Psi = \liminf_{m\to+\infty} V_\alpha(\Psi - m V_{\alpha+m}\Psi) \text{ qp.}$$
$$= \liminf_{m\to+\infty} V_\alpha(\Psi - m V_{\alpha+m}\Psi)^+ \text{ qp.}$$

Cette dernière fonction est α surmédiane. Sa régularisée excessive est égale quasi partout à e_α^A.

Or on a $V_\alpha(\Psi - m V_{\alpha+m}\Psi)^+ \geqq V_\alpha(\Psi - m V_{\alpha+m}\Psi) = m V_{\alpha+m}\Psi$.

Et donc, d'après la continuité à droite des trajectoires,

$$\liminf_{m\to+\infty} V_\alpha(\Psi - m V_{\alpha+m}\Psi)^+ \geqq 1 \quad \text{sur } A-N.$$

Cette inégalité s'étend à la régularisée excessive du membre de gauche, notée Ψ'. On prend alors $\tilde{e}_\alpha^A = \Psi' \wedge 1$ sur $X-N$.

b) Si f et $\tilde{f}$ vérifient la proposition (I.5.3) et si A est un ouvert de X, on a la double inégalité:

$$R^A(f) \leqq E.(e^{-\alpha T_A} \tilde{f}(X_{T_A})) \leqq f \text{ qp.} \tag{$*$}$$

La deuxième inégalité résulte de l'excessivité de $\tilde{f}$ et démontre que $E.(e^{-\alpha T_A} \tilde{f}(X_{T_A}))$ est un α potentiel.

D'autre part, du fait que A est ouvert, T_A est nul P_x ps pour $x \in A$. On en déduit; $E.(e^{-\alpha T_A} \tilde{f}(X_{T_A})) = \tilde{f}$ sur A. La première inégalité résulte donc de la définition de la réduite.

c) En appliquant ($*$) à e_α^A il vient: $e_\alpha^A \leqq E.(e^{-\alpha T_A} \tilde{e}_\alpha^A(X_{T_A}))$ qp. On en déduit $e_\alpha^A \leqq E.(e^{-\alpha T_A} 1_{\zeta > T_A})$ qp.

D'autre part, $\tilde{e}_\alpha^A$ étant excessive, on a: $\forall x \in X-N$, $\forall K$ compact inclus dans A, $E_x(e^{-\alpha T_K} 1_{\zeta > T_K}) = E_x(e^{-\alpha T_K} e_\alpha^A(X_{T_K})) \leqq e_\alpha^A(x)$.

En appliquant par exemple le théorème 48 du chapitre XV de [18], on en déduit: $E_x(e^{-\alpha T_A} 1_{\{\zeta > T_A\}}) \leqq e_\alpha^A(x), \quad \forall x \in X-N$,

on a donc: $e_\alpha^A = E.(e^{-\alpha T_A} 1_{\{\zeta > T_A\}})$ qp et donc m-ps.

En appliquant par exemple le théorème 53 du chapitre XV de [18] et le fait que $A \to e_\alpha^A$ est une capacité fonctionnelle continue à droite, on montre que l'identité m p.s. ci-dessus est valable pour A presque borélien et de capacité finie.

L'excessivité du deuxième membre permet alors de retrouver une égalité qp.

I.5.5. **Proposition.** *Soit A un ensemble presque borélien dans $X-N$. Soient f un α potentiel et $\tilde{f}$ une fonction presque borélienne égale à f quasi partout. On a* $R_\alpha^A(f) = E.(e^{-\alpha T_A} \tilde{f}(X_{T_A}))$ qp.

Démonstration. D'après les deux propositions précédentes, on peut supposer $\tilde{f}$ excessive. Supposons dans un premier temps A ouvert.

D'après l'inégalité (*) du b) de la démonstration précédente on a $E.(e^{-\alpha T_A}\tilde{f}(X_{T_A})) \geqq R_\alpha^A f$ qp.

Soit g une fonction α excessive sur $X-N$ égale quasi partout à $R_\alpha^A f$. On a $g=f$ qp sur A.

D'après la proposition précédente, on en déduit, pour tout compact K inclus dans A

$$E.(e^{-\alpha T_K}\tilde{f}(X_{T_K})) \underset{\text{q.p.}}{=} E.(e^{-\alpha T_K} f(X_{T_K})) \leqq R_\alpha^A f \text{ qp.}$$

On peut alors conclure la démonstration en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition précédente.

I.5.6. **Proposition.** *Tout ensemble semi polaire pour le processus X_t est polaire.*

Il suffit de montrer qu'une fonction V_α surmédiane ϕ et sa régularisée α excessive ne diffèrent que sur un ensemble polaire.

Soit D_n une suite fortement croissante d'ouverts relativement compact épuisant X. Choisissons (cf. a) de la démonstration de la proposition I.5.4) $\tilde{e}_\alpha^{D_n}=1$ sur D_n et $\tilde{e}_\alpha^{D_n} \leqq 1$ sur $X-N$.

Si $\hat{\phi}$ désigne la classe d'équivalence de ϕ modulo l'égalité quasi partout, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\hat{\phi} \wedge n e^{D_n}$ est un α potentiel. On en déduit que:

$$\phi \wedge n\tilde{e}_\alpha^{D_n} = \lim_{\beta \to +\infty} \uparrow \beta V_{\beta+\alpha}(\phi \wedge n\tilde{e}_\alpha^{D_n}) \text{ qp.}$$

Et donc: $\phi \wedge n = \lim_{\beta \to +\infty} \uparrow \beta V_{\beta+\alpha}(\phi \wedge n)$ qp sur D_n ce qui permet de conclure.

I.5.7. L'hypothèse d'absolue continuité de la résolvante

La réciproque de la proposition I.5.6 est vraie ssi, pour tout $x \in X-N$, pour tout $\alpha>0$, $V_\alpha(x,\cdot) \ll m(\cdot)$. Ceci équivaut à supposer qu'un α potentiel est représenté par une seule fonction V_α excessive. On peut alors les identifier. La proposition I.5.5 peut s'écrire:

$$R_\alpha^A f(x) = E_x(e^{-\alpha T_A} f(X_{T_A})) \qquad \forall f \in \mathbb{P}_{a_\alpha}.$$

On a les équivalences: A polaire pour le processus $\Leftrightarrow A$ polaire au sens des formes de Dirichlet $\Leftrightarrow A$ semi polaire pour le processus.

Note. L'équivalence entre la localité de la forme a et la continuité des trajectoires du processus associé est établie dans [7].

II. Balayage sur un Fermé

Une grande partie de ce chapitre est consacrée à la généralisation au cas non symétrique de résultats de Silverstein (cf. [21–23]). En fait, le point de vue exposé ici est assez différent et une nette distinction est établie entre les résultats de nature potentialiste et leur inteprétation probabiliste.

Soit X un espace l.c.d., m une mesure de Radon sur X, M un fermé de X, a une forme de Dirichlet sur $\mathbb{H} \subseteq L^2(X,m)$ supposée régulière. On pose $D=M^c$. On note G_α la $L^2(m)$ résolvante associée à a. On pose $\mathbb{H}^D = \{\phi \in \mathbb{H} \mid \phi = 0 \text{ qp sur } M\}$.

II.1. *Les opérateurs* H_α^M («Noyaux de Poisson»)

II.1.1. **Proposition.** *Pour tout* $\alpha \geqq 0$, *il existe un opérateur unique* H_α^M *opérant sur* $\mathbb{H}$ *caractérisé par les deux propriétés suivantes:*

i) $H_\alpha^M f = f$ qp *sur* M (i.e. $f - H_\alpha^M f \in \mathbb{H}^D$),

ii) $a_\alpha(H_\alpha^M f, g) = 0 \ \forall f \in \mathbb{H} \ \forall g \in \mathbb{H}^D$ (α «harmonicité» dans D).

De plus H_α^M *est sous markovien i.e.:*

$\forall f \in \mathbb{H}$, $0 \leqq f \leqq 1 \Rightarrow 0 \leqq H_\alpha^M f \leqq 1$ *et si* f *est un* α *potentiel on a* $H_\alpha^M f = R_{a_\alpha}^M f$.

Démonstration. On peut définir H_α^M de deux façons

a) $H_\alpha^M f$ est la a_α projection de f sur le convexe fermé

$\Gamma = \{g \in \mathbb{H} | f = g$ qp sur $M\}$

b) $f - H_\alpha^M f$ est la a_α projection de f sur $\mathbb{H}^D$.

Les propriétés i) et ii) sont évidemment équivalentes à a) ou b).

Si f est un α potentiel, l'identité $R_{a_\alpha}^M(f) = H_\alpha^M f$ est une conséquence directe de a). La sous markovianité de H_α^M en résulte lorsque f est différence de deux potentiels. La forte continuité de G_α dans $\mathbb{H}$ et la continuité de H_α^M permet de conclure.

II.1.2. **Proposition.** *Si* M_1 *et* M_2 *sont deux fermés de* X *tels que* $M_1 \subset M_2$ *on a:* $\forall \alpha \geqq 0$, $\forall f \in \mathbb{H}$, $H_\alpha^{M_1} H_\alpha^{M_2} f = H_\alpha^{M_2} H_\alpha^{M_1} f = H_\alpha^{M_1} f$.

Si f est un α potentiel ces deux identités résultent directement de la définition de la réduite. On conclut par continuité.

II.2. *L'espace* H^D

II.2.1. **Proposition.** *Si on note* a^D *la restriction de* a *à* $\mathbb{H}^D \times \mathbb{H}^D$, a^D *est une forme de Dirichlet régulière sur* $\mathbb{H}^D \subseteq L^2(D, 1_D m)$.

$\mathbb{H}^D$ est fermé dans $\mathbb{H}$ d'après (I.4.6.b) et il est clair que la contraction fondamentale opère.

Le seul point délicat est la régularité. En utilisant la remarque de I.4.2 on démontre aisément que $C_K(D) \cap \mathbb{H}^D = C_K(D) \cap \mathbb{H}$ est dense dans $C_K(D)$ pour la norme uniforme.

Il reste à démontrer que $C_K(D) \cap \mathbb{H}$ est dense dans $\mathbb{H}^D$. On procède en plusieurs étapes.

Lemme 1. *Pour tout* $\alpha \geqq 0$, *pour tout* $f \in \mathbb{H}$, *pour toute suite fortement croissante de compacts* K_n *épuisant* X, $H_\alpha^{K_n} f$ *converge vers* 0 *dans* $\mathbb{H}$ *quand* $n \to +\infty$.

Ceci résulte aisément de la densité de $C_K(X) \cap \mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$, et du fait que les opérateurs $H_\alpha^{K_n}$ sont équicontinus car ils sont des opérateurs de projection.

Lemme 2. *Il existe une suite croissante d'ouverts* D_n *relativement compacts fortement inclus dans* D *telle que, si* $M_n = D_n^c$, $\forall n$, *on ait:* $\forall \alpha \geqq 0$, $\forall f \in \mathbb{H}$, $H_\alpha^M f = \lim H_\alpha^{M_n} f$ *dans* $\mathbb{H}$.

On se ramène à l'aide du lemme 1 au cas où D est relativement compact. D'après I.4.1.c) et du fait de l'équicontinuité des opérateurs $H_\alpha^{M_n}$ pour α fixé, on peut supposer que f est un potentiel. Le lemme résulte alors du fait que, pour tout α potentiel f, $A \to R_\alpha^A f$ est une capacité fonctionnelle continue à droite. On déduit du lemme 2 que $\bigcup_n \mathbb{H}^{D_n}$ est dense dans $\mathbb{H}^D$. Il suffit donc de montrer que pour tout n, une fonction g de $\mathbb{H}^{D_n}$ est la limite faible dans $\mathbb{H}^D$ d'une suite ψ_m de fonctions de $C_K(D) \cap \mathbb{H}$.

On peut supposer g bornée: en effet si ϕ_m est une suite de fonctions bornées de $\mathbb{H}$ convergeant vers g dans $\mathbb{H}$, pour tout $\alpha > 0$, la suite $\phi_m - H_\alpha^{D_n^c} \phi_m$ converge aussi vers g, et du fait de la sous markovianité des «noyaux de Poisson» $\phi_m - H_\alpha^{D_n^c} \phi_m$ est bornée pour tout m. Supposons de plus g positive. Soit u_m une suite de fonctions de $C_K^+(X)$ convergeant vers g dans $\mathbb{H}$. Soit ψ une fonction de $C_K(D) \cap \mathbb{H}^+$ telle que $\psi \geqq \|g\|_\infty$ sur D_n. La suite $\psi_m = \psi \wedge u_m$ converge faiblement dans $\mathbb{H}$ vers $\psi \wedge g = g$.

En effet on a : $a_\alpha(\psi \wedge u_m, \psi \wedge u_m)^{1/2} \leqq a_\alpha(\psi, \psi)^{1/2} + a_\alpha(u_m, u_m)^{1/2}$ ce qui implique la convergence faible d'une sous suite, mais d'autre part, d'après le théorème de Lebesgue $\psi u_m \to g$ dans $L^2(m)$.

Remarque. $\forall A \in \tilde{\mathscr{B}}$, $A \subseteq D$, A est a^D-polaire ssi A est a-polaire.

II.2.2. **Proposition.** *Si G_α^D est la $L^2(m 1_D)$ résolvante associée à la forme de Dirichlet a^D, on a les relations:*

a) $\forall \alpha, \beta > 0, \quad H_\alpha^M - H_\beta^M = (\beta - \alpha) G_\alpha^D H_\beta^M$

b) $\forall \alpha > 0, \quad G_\alpha = G_\alpha^D + H_\alpha^M G_\alpha$.

Démontrons par exemple la première formule. On a:

$$\begin{aligned} &\forall f \in \mathbb{H},\ \forall g \in \mathbb{H}^D,\ a_\alpha(H_\beta^M f + (\beta - \alpha) G_\alpha^D H_\beta^M f, g) \\ &\quad = a_\alpha(H_\beta^M f, g) + (\beta - \alpha) \langle H_\beta^M f, g \rangle_{L^2(m)} = a_\beta(H_\beta^M f, g) = 0 \end{aligned}$$

et d'autre part: $H_\beta^M f + (\beta - \alpha) G_\alpha^D H_\beta^M f = f$ qp sur M.

II.2.3. *Remarques.* · Les opérateurs G_α^D, G_α et H_α^M, $\alpha \geqq 0$, se prolongeant naturellement en des noyaux à valeurs dans l'espace vectoriel réticulé des classes d'équivalence de fonctions boréliennes modulo l'égalité quasi partout.

· On note $\hat{H}_\alpha^M$ ($\hat{G}_\alpha^D$) les noyaux de Poisson (la résolvante) associés (ée) à $\hat{a}$($\hat{a}^D$).

II.3. *Potentiels locaux — Mesures balayées*

II.3.1. *Définitions.* a) Une fonction positive f définie qp est dite G_α-surmédiane si et seulement si: $\forall \alpha > 0$ $\alpha G_\alpha f \leqq f$ qp.

Si f est surmédiane et si F est un fermé de X, $H_0^F f$ est surmédiane et majorée par f.

b) Une fonction positive f définie qp est dite a-harmonique ssi $H_0^F f = f$ qp pour tout fermé F tel que F^c soit relativement compact (ou de capacité finie si f est bornée).

c) Soit v_0 une mesure positive sur X ne chargeant pas les polaires. On appelle a-potentiel de v_0 l'enveloppe supérieure des a potentiels des mesures $v \in \mathscr{E}$ telles que $v \leqq v_0$. Il est noté $G v_0$. C'est une fonction surmédiane.

d) On dit que f définie qp appartient à $\mathbb{H}^{\text{loc}}$ ssi pour tout compact K, il existe $g \in \mathbb{H}$ tel que $g|_K = f|_K$ qp. Si de plus f est le potentiel d'une mesure positive ne chargeant pas les polaires, on dit que f est un potentiel local.

II.3.2. **Proposition.** *Une fonction G_α-surmédiane f est un a potentiel local* ssi:

a) $f \in \mathbb{H}^{\text{loc}}$

b) *Pour toute suite d'ouverts relativement compacts D_n croissants vers X,* $\lim\limits_{n \to +\infty} \downarrow H_0^{D_n^c} f = 0$.

Corollaire (Décomposition de Riesz). *Toute fonction surmédiane appartenant à $\mathbb{H}^{\text{loc}}$ est la somme d'une fonction harmonique et d'un potentiel local.*

Démonstration. · Partie directe: $\forall \phi \in C_K^+(X) \int H_0^{D_n^c} G(v) \phi\, dm = \int dv\, H_0^{D_n^c} G \phi \downarrow 0$ quand $n \to +\infty$.

· *Réciproque.* $\forall n$, *$f - H^{D_n^c} f$ est un a^{D_n}-potentiel $G^{D_n}(v_n)$.*

En effet si $g \in \mathbb{P}_a$ est tel que $g = f$ sur D_n et $g \leqq f$ $g - H_0^{D_n^c} g$ est un a^{D_n} potentiel et $f - H_0^{D_n^c} f \leqq g - H_0^{D_n^c} g$. On vérifie aisément que si $m > n$, $G^{D_n}(v_m) = G^{D_n}(v_n)$ et donc $v_m 1_{D^n} = v_n$. On définit alors $v = \lim \uparrow v_n$.

$$\begin{aligned} \text{On } a,\ \forall \phi \in C_K^+(X)\colon \lim_{n \to +\infty} \int G v_n \phi\, dm &= \lim_{n \to +\infty} \int \hat{G} \phi\, dv_n \\ &= \lim_{n \to +\infty} \uparrow \int \hat{G}^{D^n} \phi\, dv_n \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int (f - H_0^{D_n^c} f) \phi\, dm \\ &= \int f \phi\, dm. \end{aligned}$$

Et donc $f = G v$.

Le corollaire résulte du fait suivant: Si g est surmédiane, $\lim\limits_{n \to +\infty} \downarrow H_0^{D_n^c} g$ est harmonique.

Remarques et Notations. · On note $\mathscr{E}^{\text{loc}}(a)$ le cone des mesures associées aux a potentiels locaux. $\mu \in \mathscr{E}^{\text{loc}}(a)$ ssi μ ne charge pas les polaires et pour tout compact K, $\mu \hat{H}_0^K$ est d'énergie finie.

· Si $\mu \in \mathscr{E}^{\text{loc}}(a)$, toute fonction de $\mathbb{H}$ est localement μ intégrable.

II.3.3. **Proposition.** *Pour tout $\alpha \geqq 0$, pour tout mesure $v \in \mathscr{E}^{\text{loc}}(a_\alpha)$, $v \hat{H}_\alpha^M$ est la mesure de $\mathscr{E}^{\text{loc}}(a_\alpha)$ associée au potentiel local $H_\alpha^M G_\alpha v$.*

On l'appelle la mesure a_α balayée de v sur M. Si M est compact, elle est d'énergie finie.

$$\begin{aligned} \text{En effet: } \forall g \in L^2(m) \int \hat{H}_\alpha^M \hat{G}_\alpha g\, dv &= \lim_{n \to +\infty} \uparrow \int \hat{H}_\alpha^M \hat{G}_\alpha g\, dv_n \\ &= \lim_n \uparrow \int g \cdot H_\alpha^M G_\alpha v_n\, dm = \int g \cdot H_\alpha^M G_\alpha v\, dm. \end{aligned}$$

II.3.4. **Proposition.** a) *Si pour tout $\alpha \geqq 0$ on note v_α la mesure α balayée de m, alors, étant donnés α et $\beta > 0$, il existe $C > 0$ tel que:*

$$C v_\alpha \leqq v_\beta \leqq \frac{1}{C} v_\alpha.$$

b) *Si M_r désigne le support commun des mesures ν_α, M_r est l'intersection des fermés inclus dans M et tels que leur complémentaire dans M soit polaire.*

Démonstration. a) En effet, $\forall\, \alpha, \beta > 0$, $\forall\, \phi \in L^1(\nu_\beta) \cap L^1(\nu_\alpha)$, on a $\nu_\alpha(|\phi|) = \int \hat{H}_\alpha^M(|\phi|)\,dm$, et donc:

$$\begin{aligned}\nu_\alpha(|\phi|) &= \int dm\, |\hat{H}_\beta^M(|\phi|) + (\beta-\alpha)\hat{G}_\alpha^D \hat{H}_\beta^M(|\phi|)\\ &= \nu_\beta(|\phi|) + (\beta-\alpha)\int \hat{H}_\beta^M(|\phi|)\, G_\alpha^D 1\, dm \leqq \nu_\beta(|\phi|)\left(1 + \frac{|\beta-\alpha|}{\alpha}\right),\end{aligned}$$

ce qui en faisant varier β et α démontre la partie a) de la proposition.

b) Il est clair que M_r est inclus dans M. Montrons que $M - M_r$ est polaire. D'après 1.4.2 (Remarque) il existe, pour tout compact K inclus dans $M - M_r$, une fonction $f_k \in C_K^+(X) \cap \mathbb{H}$ telle que $f = 0$ sur M_r et $f > 1$ sur K.

On a $H_\alpha^M f = 0$ et donc $f \in \mathbb{H}^D$ i.e. $f = 0$ qp sur M. On en déduit que K est polaire. $M - M_r$ est donc polaire. Réciproquement, si F est un fermé inclus dans M tel que $M - F$ soit polaire, il est clair que ν_α est portée par F.

II.3.5. *Les noyaux Π_α^M.* Soit $\nu \in \mathscr{E}^{\mathrm{loc}}(a)$ telle que $\forall\, \alpha > 0$ $\hat{H}_\alpha^M$ applique continûment $L^1(\nu)$ dans $L^1(m)$ (par exemple $\nu = \nu_\beta$, $\beta > 0$). On définit par dualité une application continue Π_α^M de $L^\infty(m)$ dans $L^\infty(\nu)$ qui vérifie l'identité:

$$H_\alpha^M G_\alpha f = G_\alpha(\Pi_\alpha^M f \cdot \nu).$$

En effet: $\forall\, \alpha > 0$, $\forall\, \phi \in C_K^+(X)$, $\forall\, f \in L^\infty(m)$

$$a_\alpha(H_\alpha^M G_\alpha f, \hat{G}_\alpha \phi) = \int H_\alpha^M G_\alpha f \cdot \phi\, dm = \int f \cdot \hat{H}_\alpha^M G_\alpha \phi\, dm = \int \Pi_\alpha^M f\, G_\alpha \phi\, d\nu.$$

$\Pi_\alpha^M f \cdot \nu$ est donc d'énergie finie et $\int H_\alpha^M G_\alpha f \cdot \phi\, dm = \int G_\alpha(\Pi_\alpha^M f \cdot \nu)\phi\, dm$.

Les opérateurs Π_α^M se prolongent naturellement en des noyaux positifs à valeurs dans les fonctions définies ν ps.

II.4. *Interprétation probabiliste*

Dans cette section, on montre que les noyaux de Poisson s'interprètent de la façon usuelle en fonction du temps d'atteinte de M par le processus de Markov associé à a. Ceci revient à dire que si un processus de Markov est associé à a, le processus tué à la sortie de D est associé à a^D.

Les noyaux Π_α^M s'interprètent du point de vue probabiliste à l'aide des lois d'entrée introduites par Getoor-Sharpe ([13]).

II.4.1. **Proposition.** *Soit f un élément de $\mathbb{H}$ et $\tilde{f}$ une fonction presque borélienne égale à f quasi partout.*

On a, pour tout $\alpha > 0$, l'identité: $H_\alpha^M f = E_\cdot(e^{-\alpha T_M}\tilde{f}(X_{T_M}))$ qp.

Cette identité est une conséquence immédiate de I.5.5 lorsque f est différence de deux α potentiels.

Mais $\forall f \in \mathbb{H}$ $\exists (\beta_n)_{n\in N}$ tq $\lim_{n\to+\infty} \beta_n G_{\alpha+\beta_n} f = f$ et $\lim_{n\to+\infty} \beta_n V_{\alpha+\beta_n}\tilde{f} = \tilde{f}$ qp. Or $\forall\, \beta > 0$, $\beta G_{\alpha+\beta} f$ est différence de deux α potentiels. Si f est bornée, la continuité de H_α^M et le théorème de convergence dominée permettent de conclure.

On étend ce résultat aux fonctions de $\mathbb{H}$ non bornées en utilisant le théorème de convergence monotone.

II.4.2. **Proposition.** *M_r est caractérisée par la propriété suivante:*
M_r est le plus petit fermé de X tel que on ait $P_\cdot(T_M=0)=0$ qp sur M_r^c.
Si on se place sous l'hypothèse d'absolue continuité (I.5.7) *on a $M_r=\overline{M^r}$ ou M^r désigne l'ensemble des points réguliers de M.*

Démonstration. $P_\cdot(T_M=0)=0$ qp sur $F^c \Leftrightarrow P_\cdot(T_{M\cap F^c})=0$ qp sur $F^c \Leftrightarrow e_\alpha^{M\cap F^c}<1$ qp sur F^c si F est un fermé de $X \Leftrightarrow e_\alpha^{M\cap F^c}=0$ qp $\Leftrightarrow M-F$ polaire.

Du fait que $M-M^r$ est polaire, on a en général $M_r \subseteq \overline{M^r}$. Sous l'hypothèse d'absolue continuité, on a: $M_r=\overline{M^r}$.

En effet dans le cas contraire, $M^r \cap M_r^c$ serait non vide. Mais cet ensemble serait à la fois régulier et polaire, ce qui est contradictoire.

II.4.3. *Changement de temps.* La fonction $\frac{1}{\alpha} E_x(e^{-\alpha T}M^r - e^{-\alpha\zeta})$ définie sur $X-N$ est un α potentiel régulier, cf. [6] chapitre IV. De plus du fait que $M-M^r$ est polaire (I.5.7), on a:

$$\frac{1}{\alpha} E_\cdot(e^{-\alpha T}M^r - e^{-\alpha\zeta}) = H_\alpha^M G_\alpha 1 = G_\alpha \nu_\alpha \text{ qp.}$$

Soit A_t^α la fonctionnelle additive continue telle que:

$$\frac{1}{\alpha} E_x(e^{-\alpha T}M^r - e^{-\alpha\zeta}) = E_x\left(\int_0^\zeta e^{-\beta t}\, dA_t^\alpha\right) \text{ (A_t est la f.a. α balayée de dt sur M^r).}$$

On a: $G_\beta \nu_\alpha = E_\cdot\left(\int_0^\zeta e^{-\beta t}\, dA_t^\alpha\right)$ qp.

Proposition. *$\forall f\in\mathscr{B}^+$ on a: $G_\beta(f\nu_\alpha) \underset{\text{q.p.}}{=} E_\cdot\left(\int_0^\zeta e^{-\beta t} f(X_t)\, dA_t^\alpha\right)$.*

On reprend essentiellement la démonstration de [6] chapitre VI. Il suffit, par un raisonnement de classe monotone, d'établir l'identité cherchée dans le cas ou f est l'indicatrice d'un ouvert dont la frontière est de ν_α mesure nulle. (Ces ouverts engendrent la topologie de X.) $E_\cdot\left(\int_0^\zeta e^{-\beta t} 1_G(X_t)\, dA_t^\alpha\right)$ et $E_\cdot\left(\int_0^\zeta e^{-\beta t} 1_{G^c}(X_t)\, dA_t^\alpha\right)$ définissent deux β potentiels locaux notés respectivement $G_\beta\mu_1$ et $G_\beta\mu_2$. On a, d'une part: $H_\alpha^{\overline{G}} G_\beta\mu_1 = G_\beta\mu_1 \Rightarrow \operatorname{Supp}\mu_1 \subseteq \overline{G}$, d'autre part: $H_\alpha^{G^c} G_\beta\mu_2 = G_\beta\mu_2 \Rightarrow \operatorname{Supp}(\mu_2) \subseteq G^c$ avec $\mu_1+\mu_2=\nu,\alpha$). Du fait que ν_α ne change pas la frontière de G on en déduit: $\mu_1 = 1_G \nu_\alpha$.

En posant $\nu=\nu_1$ et en appliquant II.3.5 on a:

$$\forall f\in\mathscr{B}^+,\ \forall g\in\mathscr{B}^+ \quad \text{tel que } g=\Pi_\alpha^M f \text{ qp}$$

d'une part: $G_\beta(\nu\,\Pi_\beta^M f) = E_\cdot\left(\int_0^\zeta e^{-\beta t} g(X_t)\, dA_t^1\right)$

d'autre part: $G_\beta(\nu\,\Pi_\beta^M f) = H_\beta^M G_\beta f = E_\cdot\left(\int_{T_{M_r}}^\zeta e^{-\beta t} f(X_t)\, dt\right)$ qp.

Mais cette dernière quantité peut également s'écrire:

$E.\left(\int_0^\zeta e^{-\beta t} W_\beta^{M^r} f(X_t)\,dA_t^1\right)$ où W^{M^r} désigne la résolvante du *semi-groupe d'entrée* associé au fermé régulier M^r (cf. Getoor-Sharpe [13]). On en déduit:

$$W_\beta^{M^r} f = \Pi_\beta^M f, \nu \text{ p.s.} \quad \forall f \in \mathscr{B}^+.$$

II.5. *Forme de Dirichlet balayée.* Le but de cette section est de construire une forme de Dirichlet sur M qui avec a^D, décompose a. *On supposera dorénavant que* $M = M_r$.

II.5.1. *Définitions.* On définit $\mathbb{H}^M = \{\phi|_M, \phi \in \mathbb{H}\}$ où $\phi|_M$ est une classe de fonctions quasi continues sur M obtenue par restriction à M de ϕ.

Pour tout $\alpha \geqq 0$ on définit la forme bilinéaire balayée de a_α sur M, $a_{(\alpha)}^M$, sur $\mathbb{H}^M \times \mathbb{H}^M$ par:

$$\forall \phi, \psi \in \mathbb{H}^M, \quad a_{(\alpha)}^M(\phi, \psi) = a_\alpha(H_\alpha^M \phi, H_\alpha^M \psi) = a_\alpha(\hat{H}_\alpha^M \phi, \hat{H}_\alpha^M \psi) = a_\alpha(H_\alpha^M \phi, \hat{H}_\alpha^M \psi).$$

($\forall \phi \in \mathbb{H}^M$, $H_\alpha^M \phi$ est défini de façon évidente).

La forme quadratique associée à $a_{(\alpha)}^M$ définit une structure hilbertienne sur $\mathbb{H}^M$ pour laquelle $a_{(\alpha)}^M$ est continue. La topologie ainsi définie sur $\mathbb{H}^M$ est indépendante de $\alpha \geqq 0$.

II.5.2. On établit sans difficulté les relations suivantes:

a) $\forall \alpha \geqq 0$, $\forall \phi, \psi \in \mathbb{H}$, $\quad a_\alpha(\phi, \psi) = a_\alpha^D(\phi - H_\alpha^M \phi, \psi - \hat{H}_\alpha^M \psi) + a_{(\alpha)}^M(\phi|_M, \psi|_m)$

b) $\forall \alpha \geqq 0$ $\forall \beta \geqq 0$ $\forall \phi, \psi \in \mathbb{H}^M$ on a:

$$a_{(\alpha)}^M(\phi, \psi) - a_{(\beta)}^M(\phi, \psi) = (\alpha - \beta) \int H_\alpha^M \phi \, \hat{H}_\beta^M \psi \, dm.$$

II.5.3. **Proposition.** *La contraction module et la contraction unité opèrent sur* $a_{(\alpha)}^M$ *et* $\hat{a}_{(\alpha)}^M$.

Du fait que $\mathbb{H}^M$ s'injecte dans $L_1^{\text{loc}}(\nu_\alpha)$, il suffit de vérifier le principe complet du maximum pour les $a_{(\alpha)}^M$ potentiels de fonctions mesurables bornées à support compact (cf. [4]). Or si f est une telle fonction et Vf son $a_{(\alpha)}^M$ potentiel on a:

$$a_\alpha(H_\alpha^M Vf, g) = a_\alpha(H_\alpha^M Vf, H_\alpha^M g) = a_{(\alpha)}^M(Vf, g) = \int f g \, d\nu_\alpha, \quad \forall g \in \mathbb{H}.$$

On en déduit que $H_\alpha^M Vf = G_\alpha(f\nu_\alpha)$. Le principe complet du maximum dans $(\mathbb{H}^M, a_{(\alpha)}^M)$ se déduit alors du principe complet du maximum pour les potentiels de mesures dans $(\mathbb{H}, a_\alpha)$.

Corollaire. *Si* ν *est une mesure positive sur* M *telle que* Supp$(\nu) \subseteq M$ *et telle que* $\mathbb{H}^M$ *s'injecte continûment dans* $L^2(\nu)$, *alors, pour tout* $\alpha \geqq 0$, $a_{(\alpha)}^M$ *définit une forme de Dirichlet régulière basée sur* $L^2(\nu)$.

On l'appelle forme de Dirichlet balayée de a_α sur $L^2(\nu)$.

II.5.4. **Proposition.** *Pour tout $\alpha>0$, $\mathbb{H}^M$ s'injecte continûment dans $L^2(v_\alpha)$ et $L^2(\hat{v}_\alpha)$.*

Fixons $\alpha>0$. Soit V_λ la résolvante définie par la relation:

$$a_{(\alpha)}^M(V_\lambda f, g)+\lambda<f, g>_{L^2(v_\alpha)}=\int fg\,dv_\alpha, \qquad \forall g\in\mathbb{H}^M\cap L^2(v_\alpha),\ \forall f\in L^2(v_\alpha).$$

D'après la proposition précédente, V_λ est sous markovienne (cf. [4]).
Pour toute $\phi\in\mathbb{H}^M\cap C_K(M)$,

$$a_{(\alpha)}^M(\phi,\phi)=\lim_{\lambda\to+\infty} a_{(\alpha)}^M(\lambda V_\lambda\phi,\phi)=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\int[\phi^2-(V_\lambda\phi)\phi]\,dv_\alpha.$$

Mais, $\forall\lambda>0 \int\lambda(V_\lambda\phi)\phi\,dv_\alpha\leqq\frac{1}{2}\int(\lambda V_\lambda\phi^2+\lambda\hat{V}_\lambda\phi^2)dv_\alpha$, du fait de la sous markovianité de V_λ.

En effet: $$\frac{\lambda V_\lambda\phi}{\lambda V_\lambda 1}\cdot\phi\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{(\lambda V_\lambda\phi)^2}{(\lambda V_\lambda 1)^2}+\phi^2\right)\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda V_\lambda\phi^2}{\lambda V_\lambda 1}+\phi^2\right)$$

i.e.: $$\lambda V_\lambda\phi\cdot\phi\leqq\tfrac{1}{2}(\lambda V_\lambda(\phi^2)+\lambda V_\lambda 1\cdot\phi^2).$$

On en déduit: $$a_{(\alpha)}^M(\phi,\psi)\geqq\limsup_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda}{2}\int(\phi^2-\lambda V_\lambda\phi^2)dm+\frac{\lambda}{2}(\phi^2-\lambda\hat{V}_\lambda\phi^2)dm.$$

Soit u_n une suite de $\hat{a}$ potentiels croissant vers 1.

On a: $$\begin{aligned}&\lambda\int(\phi^2-\lambda V_\lambda\phi^2)dm\\ &=\lim_{n\to+\infty} a_{(\alpha)}^M(\lambda V_\lambda\phi^2, u_n|_M)\\ &=\lim_{n\to+\infty} a_\alpha(H_\alpha^M\lambda V_\lambda\phi^2, u_n)\geqq\lim_{n\to+\infty}\alpha\int u_n H_\alpha^M\lambda V_\lambda\phi^2\,dm\geqq\alpha\int H_\alpha^M\lambda V_\lambda\phi^2\,dm.\end{aligned}$$

On a donc: $$a_{(\alpha)}^M(\phi,\phi)\geqq\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\alpha}{2}\int\lambda V_\lambda\phi^2\,dv_\alpha+\frac{\alpha}{2}\int\lambda\hat{V}_\lambda\phi^2\,d\hat{v}_\alpha$$

i.e. $$a_{(\alpha)}^M(\phi,\phi)\geqq\frac{\alpha}{2}\int\phi^2\,dv_\alpha+\frac{\alpha}{2}\int\phi^2\,d\hat{v}_\alpha.$$

II.6. *Décomposition des résolvantes*

Remarque. On démontre aisément que les opérateurs $\hat{H}_\alpha^M$ (respectivement H_α^M) se prolongent naturellement en des opérateurs continus de $L^2(v_\beta)$ (respectivement $L^2(\hat{v}_\beta)$) dans $L^2(m)$, pour tout $\beta\geqq 0$. (On utilise la sous markovianité).

II.6.1. **Proposition.** *Soit v une mesure positive sur M telle que $\mathbb{H}^M$ s'injecte continûment dans $L^2(v)$ et telle que $\hat{H}_\alpha^M(H_\alpha^M)$ opère continûment de $L^2(v)$ dans $L^2(m)$, pour tout $\alpha\geqq 0$. Si $R_{(\alpha)}$ $(\hat{R}_{(\alpha)})$ désigne l'opérateur potentiel associé à la forme de Dirichlet $a_{(\alpha)}^M$ $(\hat{a}_{(\alpha)}^M)$ basée sur $L^2(v)$ et si Π_α^M $(\hat{\Pi}_\alpha^M)$ désigne le transposé de $\hat{H}_\alpha^M$ (H_α^M) on a les identités:*

a) $\forall\alpha,\beta\geqq 0,\quad \Pi_\beta^M-\Pi_\beta^M=(\beta-\alpha)\,\Pi_\beta^M G_\alpha^D,\quad (\hat{\Pi}_\alpha^M-\hat{\Pi}_\beta^M=(\beta-\alpha)\,\hat{\Pi}_\beta^M\hat{G}_\alpha^D).$

b) $\forall\alpha\geqq 0,\quad \forall f\in L^2(v),\quad G_\alpha(f\cdot v)=H_\alpha^M R_{(\alpha)}f,\quad (\hat{G}_\alpha(f\cdot v)=\hat{H}_\alpha^M\hat{R}_{(\alpha)}f).$

c) $\forall\alpha\geqq 0,\quad G_\alpha=G_\alpha^D+H_\alpha^M R_{(\alpha)}\Pi_\alpha^M,\quad (\hat{G}_\alpha=\hat{G}_\alpha^D+\hat{H}_\alpha^M\hat{R}_{(\alpha)}\hat{\Pi}_\alpha^M).$

Remarque. Si $\hat{H}_\alpha^M$ opère continûment de $L^1(v)$ dans $L^1(m)$, pour tout $\alpha>0$, les opérateurs Π_α^M sont induits par les noyaux définis en II.3.5.

Démonstration. a) $\forall\, \phi\in \mathbb{H}$, $a_\alpha(H_\alpha^M R_{(\alpha)} f, \phi) = a_{(\alpha)}^M(R_{(\alpha)} f, \phi|_M) = \int f\phi\, dv \Rightarrow fv$ est d'énergie finie et $G_\alpha(fv) = H_\alpha^M R_{(\alpha)} f$.

D'après (II.4.3.), on en déduit, si $v = v_\beta$:

$$\forall f\in L^2(m)\ \ R_{(\alpha)} f = E.\left(\int_0^\zeta e^{-\alpha t} f(X_t)\, dA_t^\beta\right) \text{ qp.}$$

b) Il suffit d'établir d'après (II.2.2.b) l'identité:

$$H_\alpha^M R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M = H_\alpha^M G_\alpha,$$

i.e. $\forall f\in L^2(m)$, $\forall g\in \mathbb{H}$ $a_\alpha(H_\alpha^M R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M f, g) = a_\alpha(H_\alpha^M G_\alpha f, g)$.
Or

$$a_\alpha(H_\alpha^M G_\alpha f, g) = a_\alpha(G_\alpha f, \hat{H}_\alpha^M g) = \int f \hat{H}_\alpha^M g\, dm,$$

et

$$a_\alpha(H_\alpha^M R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M f, g) = a_{(\alpha)}^M(R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M f, g|_M) = \int \Pi_\alpha^M f, g\, dv.$$

II.6.2. **Proposition.** *Sous les hypothèses de* II.6.1., *si on pose pour tout* $\lambda\geqq 0$ $a_{(\lambda)}(\cdot,\cdot) = a(\cdot,\cdot) + \lambda\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(v)}$, $a_{(\lambda)}$ *est une forme de Dirichlet régulière définie sur* $\mathbb{H}$ *et basée sur* $L^2(m)$. *Si on note* $R_{(\alpha)\lambda}$ *et* $G_{(\lambda)\alpha}$ *les résolvantes respectivement associées à* $a_{(\alpha)}^M$ *sur* $L^2(v)$ *et à* $a_{(\lambda)}$ *sur* $L^2(m)$, *on a les identités.*

a) $G_{(\lambda)\alpha} - G_{(\mu)\beta} = (\beta-\alpha) G_{(\lambda)\alpha} G_{(\mu)\beta} + (\mu-\beta) H_\alpha^M R_{(\alpha)\lambda} R_{(\beta)\mu} \Pi_\beta^M$

b) $R_{(\alpha)\lambda} - R_{(\beta)\mu} = (\mu-\lambda) R_{(\alpha)\lambda} R_{(\beta)\mu} + (\beta-\alpha) R_{(\alpha)\lambda} \Pi_\beta^M H_\alpha^M R_{(\beta)\mu}$

Interprétation probabiliste. On a vu en III.2.1 que si $v = v_\beta$ on a

$$R_{(\alpha)} f = E.\left(\int_0^\zeta e^{-\alpha t} f(X_r)\, dA_t^\beta\right) \text{ qp.}$$

Si on pose: $\forall f\in \mathscr{B}^+$, $\tilde{R}_{(\alpha)\lambda} f = E.\left(\int_0^\zeta e^{-\alpha t} e^{-\lambda A_t^\beta} f(X_t)\, dA_t^\beta\right)$.

On vérifie aisément que: $\forall f\in\mathscr{B}^+$ $R_{(\alpha)} f = \tilde{R}_{(\alpha)\lambda} f + \lambda R_{(\alpha)} \tilde{R}_{(\alpha)\lambda} f$.

On en déduit que $R_{(\alpha)\lambda} f = \tilde{R}_{(\alpha)\lambda} f$ qp.

$R_{(\alpha)\lambda}$ s'interprète alors comme la résolvante du processus tué à un temps exponentiel de densité $\alpha e^{-\alpha t}$ changé de temps à l'aide de la fonctionnelle additive A_t^β.

II.7. *Extensions possibles*

a) Si on ne suppose pas que la contraction unité opère sur $\hat{a}$ tous les résultats concernant a énoncés jusqu'ici restent valables excepté II.5.4 et II.6. On peut définir les opérateurs $\hat{G}_\alpha$, $\hat{G}_\alpha^D$, $\hat{H}_\alpha^M$. Ceux-ci sont alors positifs mais en général ils ne sont pas sous-markoviens.

b) On peut aussi développer une théorie du potentiel associée à a en supposant seulement que la contraction module opère sur a (cf. [1]).

III. Un problème de construction

Soit μ une mesure sur M telle que $L^2(\mu)$ soit topologiquement égal à $L^2(v_\alpha+\hat{v}_\alpha)$, pour tout $\alpha>0$.

Ce chapitre est consacré à la résolution du problème suivant: trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme de Dirichlet k basée sur $L^2(\mu)$ soit la forme de Dirichlet balayée sur $L^2(\mu)$ d'une forme de Dirichlet régulière g basée sur $L^2(m)$ et admettant a^D comme restriction à D et H_α^M et $\hat{H}_\alpha^M$ comme noyaux de Poisson. On obtient ainsi un théorème de construction qui constitue la réciproque de la décomposition établie en II.5.

L'idée d'appliquer la théorie des espaces de Dirichlet à ce type de problèmes apparaît dans une publication de M. Fukushima (cf. [10]). Il obtient une construction des résolvantes markoviennes G_α^* définies sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ telles que $G_\alpha^* f-G_\alpha f$ soit harmonique si f est de carré intégrable, et G_α la résolvante du mouvement brownien tué à la sortie de l'ouvert. Ces résultats furent généralisés par Kunita à une classe de diffusions (cf. [16]).

Dans un cadre différent, (frontière régulière) Sato-Ueno (cf. [20]) et Bony-Courrège-Priouret (cf. [5, 19]) ont résolu des problèmes analogues pour certaines classes de diffusions à coefficients hölderiens.

Dans le cadre de la théorie des espaces de Dirichlet, M. Silverstein résolut le problème abordé par Fukushima dans le cas d'une L^2 résolvante quelconque associée à un espace de Dirichlet régulier vérifiant une condition de transience (cf. [21–23]).

Les techniques utilisées ici se rapprochent souvent de celles utilisées par Kunita et Silverstein.

III.1. *La forme N^M*

On a montré en II.5.4 l'inégalité:

$$a_{(\alpha)}^M(\phi,\phi)\geqq\frac{\alpha}{2}\left(\int\phi^2\,dv_\alpha+\int\phi^2\,d\hat{v}_\alpha\right),\qquad \forall\,\alpha>0,\ \forall\,\phi\in\mathbb{H}^M.$$

Si on pose, pour tout $\phi\in L^2_{(\mu)}$, pour tout $\alpha>0$,

$$N_{(\alpha)}^M(\phi)=\frac{\alpha}{2}\int_D\left(H_\alpha^M\phi^2+\hat{H}_\alpha^M\phi^2-2H_\alpha^M\phi\,\hat{H}_0^M\phi\right)dm$$

cette inégalité peut s'écrire:

$$a^M(\phi,\phi)\geqq N_{(\alpha)}^M(\phi)\qquad\forall\,\phi\in\mathbb{H}^M\ \forall\,\alpha>0,\ \text{d'après II.5.2.b).}$$

III.1.1. **Proposition.** *Pour tout $\phi\in L^2_{(\mu)}$, $N_{(\alpha)}^M(\phi)$ est positif et croissant en α. De plus, les contractions opèrent sur $N_{(\alpha)}^M$.*

On introduit les mesures positives sur $M\times M$ $U_{\alpha,\beta}^M(dy,dz)$ définies pour $\alpha,\beta\geqq 0$ par l'identité:

$$\forall\,\phi,\psi\in C_K(M),\ (\beta-\alpha)\int_D H_\alpha^M\,\hat{H}_\beta^M\,\psi\,dm=\int_{M\times M}\phi(y)\,\psi(z)\,U_{\alpha,\beta}^M(dy,dz).$$

Un calcul facile montre que:

$$\forall\, \alpha, \beta, \gamma \geqq 0, \qquad U_{\alpha,\gamma}(dy, dz) = U_{\alpha,\beta}(dy, dz) + U_{\beta,\gamma}(dy, dz). \tag{$*$}$$

Remarquons que, $\forall\, \phi \in C_K(M)$, on a l'identité:

$$N^M_{(\alpha)}(\phi) = \tfrac{1}{2} \int (\phi(y) - \phi(z))\, U^M_{0,\alpha}(dy, dz) + \frac{\alpha}{2} \int_D (1 - H^M_0 1)\, \hat{H}^M_\alpha\, \phi^2\, dm$$
$$+ \frac{\alpha}{2} \int_D (1 - \hat{H}^M_0 1)\, H^M_\alpha\, \phi^2\, dm. \tag{$**$}$$

Cette dernière écriture établit la positivité de $N^M_{(\alpha)}$ et le fait que les contractions opèrent.

D'autre part, d'après l'identité $(*)$, le premier terme de la décomposition de $N^M_{(\alpha)}(\phi)$ est croissant en α. Il suffit donc d'établir la croissance en α du deuxième et du troisième membre.

Remarquons que:

$$\begin{aligned}
&\int (1 - H^M_0 1)(\alpha H^M_\alpha \phi^2 - \beta H^M_\beta \phi^2)\, dm \\
&\quad = (\beta - \alpha) \int (1 - H^M_0 1)(H^M_\beta \phi^2 - \alpha G^D_\alpha H^M_\beta \phi^2)\, dm \\
&\quad = (\beta - \alpha) \int (1 - \alpha G^D_\alpha 1 - H^M_0 1 + \alpha G^D_\alpha H^M_0 1)\, H^M_\beta\, \phi^2\, dm \\
&\quad = (\beta - \alpha) \int (1 - \alpha G^D_\alpha 1 - H^M_\alpha 1)\, H^M_\beta\, \phi^2\, dm.
\end{aligned}$$

Lemme. $1 - H^M_\alpha 1 - G^D_\alpha 1 \geqq 0$ qp, $\forall\, \alpha > 0$.

On a en effet:

$$1 - H^M_\alpha 1 - \alpha G^D_\alpha 1 = \lim_{\beta \to +\infty} \beta G_{\alpha+\beta} 1 - H^M_\alpha\, \beta G_{\alpha+\beta} 1 - \alpha G^D_\alpha\, \beta G_{\alpha+\beta} 1,$$

mais $\beta G_{\alpha+\beta} 1 = G_\alpha(\beta - \beta^2 G_{\alpha+\beta} 1)$ et donc l'expression précédente est égale à $G^D_\alpha(\beta - \beta^2 G_{\alpha+\beta} 1) - \alpha G^D_\alpha\, \beta G_{\alpha+\beta} 1$ elle même égale à $\beta G^D_\alpha(1 - (\alpha+\beta)\, G_{\alpha+\beta} 1)$ évidemment positive.

La croissance du deuxième membre est ainsi établie. On procède de la même façon pour le troisième membre.

Remarque. Si $n^M_{(\alpha)}$ désigne la forme polaire de $N^M_{(\alpha)}$ on a, pour tout

$$\phi \in L^2(\mu):\ n^M_{(\alpha)}(\phi^+, \phi^-) = \alpha \int_D H^M_\alpha\, \phi^+ \cdot \hat{H}^M_0\, \phi^-\, dm + \alpha \int_D H^M_\alpha\, \phi^-\, \hat{H}^M_0\, \phi^+\, dm$$

et les deux termes du second membre sont croissants en α.

III.1.2. **Proposition.** a) *Soit* $\mathbb{N}^M = \{\phi \in L^2(\mu)$ *tels que* $\lim_{\alpha \to +\infty} \uparrow N^M_{(\alpha)}(\phi) < +\infty\}$ *et posons pour tout* $\phi \in \mathbb{N}^M$, $N^M(\phi) = \lim_{\alpha \to +\infty} N^M_{(\alpha)}(\phi)$. *Si, pour* $\lambda > 0$, *on pose* $\mathbb{N}^M_\lambda = N^M + \lambda \|\ \|^2_{L^2(\mu)}$, N^M_λ *définit une norme hilbertienne sur* $\mathbb{N}^M$. *Les contractions opèrent sur* $\mathbb{N}^M$.

b) *Pour* $\phi \in \mathbb{N}^M$, *on peut poser* $\theta(\phi^+, \phi^-) = \lim_{\alpha \to +\infty} \uparrow \alpha \int_D H^M_0\, \phi^-\, H^M_\alpha\, \phi^+\, dm < +\infty$.

c) $\mathbb{H}^M$ *est inclus dans* $\mathbb{N}^M$ *et on a, pour tout* $\phi \in \mathbb{H}^M$, $a^M(\phi, \phi) \geqq N^M(\phi)$.

d) *Il existe une mesure positive* $\theta(dy, dz)$ *définie sur* $M \times M - \Delta$ *(ou* Δ *désigne* *la diagonale du produit $M \times M$) telle que pour $\phi \in \mathbb{N}^M \cap C(M)$ on ait:*

$$\iint \phi^+(y)\, \phi^-(z)\, \theta(dy, dz) = \theta(\phi^+, \phi^-) \tag{1}$$

$$\iint (\phi(y) - \phi(z))^2\, \theta(dy, dz) + \int H_0^M \phi^2\, d\hat{\chi}_D + \int \hat{H}_0^M \phi^2\, d\chi_D = 2N^M(\phi) \tag{2}$$

où χ_D (resp. $\hat{\chi}_D$) *désigne la restriction à D de la mesure χ^a* (resp. $\chi^{\hat{a}}$ *associée au a* (resp. *$\hat{a}$)-potentiel local de la décomposition de Riesz de 1 i.e. la mesure associée au a^D* (resp. $\hat{a}^D$) *potentiel local de la décomposition de Riesz de la fonction G_α^D* (resp. $\hat{G}_\alpha^D$) *surmédiane* $1 - H_0^M 1$ (resp. $1 - \hat{H}_0^M 1$).

(*Si D est de capacité finie, on a,* $G_D \chi_D = 1 - H_0^M 1 (\hat{G}^D \hat{\chi}_D = 1 - \hat{H}_0^M 1)$).

Démonstration. a) et b) sont des conséquences faciles de la proposition et de la remarque précédentes.

c) résulte de l'inégalité: $a^M(\phi, \phi) \leqq N_{(\alpha)}^M(\phi)\ \ \forall\, \phi \in \mathbb{H}^M\ \ \forall\, \alpha > 0$.

Pour établir d), remarquons que $C_0(M) \cap \mathbb{N}^M$ est dense dans $C_0(M)$ d'après c). On en déduit que les fonctions de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i^+ \phi_i^- \quad \text{avec} \quad \phi_i \in C_0^+(M) \cap \mathbb{N}^M$$

forment un cône convexe dense dans $C_0^+(M \times M - \Delta)$. On en déduit l'existence d'une mesure $\theta(dy, dz)$ sur $C_K(M \times M - \Delta)$ vérifiant (1). Il résulte de la définition de θ que:

$$\forall\, \psi \in C_K(M \times M - \Delta), \qquad \iint \psi(y, z)\, \theta(dy, dz) = \lim_\alpha \iint \psi(y, z)\, U_{0,\alpha}(dy, dz)$$

cette dernière limite étant croissante si ψ est positive.

(2) résulte alors de l'identité (**) établie lors de la démonstration de la proposition précédente et du lemme suivant (évident si D est de capacité finie).

Lemme. *Pour tout* $\phi \in \mathbb{N}^M \cap C_K^+(M)$, $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \uparrow \alpha \int\limits_D H_\alpha^M \phi^2 (1 - H_0^M 1)\, dm = \int \hat{H}_0^M \phi^2\, d\chi^D$.

Soit D_n la suite croissante d'ouverts relativement compacts épuisant D introduite en II.2.1 (lemme 2).

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \uparrow \int \alpha \hat{H}_\alpha^M \phi^2 \cdot (1 - H_0^M 1)\, dm = \lim_{\alpha \to +\infty} \uparrow \lim_{n \to +\infty} \uparrow \int \alpha H^M \phi^2 \cdot (1 - H_0^{D_n^c} 1)\, dm$$

Si χ_n est définie sur D_n par:

$$G^{D_n} \chi_n = 1 - H_0^{D_n^c} 1, \qquad \text{on a } \chi_D = \lim_n \uparrow \chi_n \text{ (cf. II.3.2).}$$

Le deuxième membre de l'identité précédente peut s'écrire:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \uparrow \lim_{n \to +\infty} \uparrow \int \alpha H_\alpha^{D_n^c} H_\alpha^M \phi^2 \cdot G^{D_n} \chi_n\, dm$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \uparrow \left(\lim_n \int H_0^{D_n^c} H_\alpha^M \phi^2\, d\chi_n - \lim_n \uparrow \int H_\alpha^M \phi^2\, d\chi_n\right).$$

Mais d'une part,

$$\lim_n \int H_\alpha^{D_n^c} H_\alpha^M \phi^2\, d\chi_n \geqq \int \lim_{n \to +\infty} H_0^{D_n^c} H_\alpha^M \phi\, d\chi_m, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$$
$$\geqq \int H_0^M \varphi^2\, d\chi_m, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

et donc: $\lim_n \int H_\alpha^{D_n^c} H_\alpha^M \phi^2 \, d\chi_n \geqq \int H_0^M \phi^2 \, d\chi$.

D'autre part: $\lim_n \int H_0^{D_n^c} H_\alpha^M \phi^2 \, d\chi_n \leqq \lim_n \int H_0^{D_n^c} H_\alpha^M \phi^2 \, d\chi \leqq \int H_0^M \phi^2 \, d\chi$.

On en déduit: $\lim_{\alpha \to +\infty} \uparrow \int \alpha \hat{H}_\alpha^M \phi^2 \cdot (1 - H_0^M 1) \, dm = \int H_0^M \phi^2 \, d\chi$

car: $\lim_\alpha \downarrow \int H_\alpha^M \phi^2 \, d\chi = 0$.

Remarque. Dans le cas où a^D et H_0^M sont associés à un mouvement brownien plan stoppé à la sortie d'un cercle, on a

$$\theta(dy, dz) = \frac{C}{1 - \cos(\phi(x) - \phi(y))} \, d\phi(x) \, d\phi(y)$$

si $\phi(x)$ désigne l'angle polaire du point x et C une constante positive (cf. [10]).

III.1.3. **Proposition.** *Pour tout $\phi \in \mathbb{N}^M$, $H_0^M \phi - \hat{H}_0^M \phi$ appartient à $\mathbb{H}^D$ et*

$$N^M(\phi) \geqq \tfrac{1}{4} a^D(H_0^M \phi - \hat{H}_0^M \phi, H_0^M \phi - \hat{H}_0^M \phi).$$

Démonstration. $\forall \phi, \psi \in L^2(m|_D)$ on définit la forme approchée:

$$a^{D(\alpha)}(\phi, \psi) = \alpha \int_D (\phi - \alpha G_\alpha^D \phi) \psi \, dm, \qquad \forall \phi \in L^2(m|_D + \mu),$$

$\forall \alpha > 0$, on définit: $B^{(\alpha)}(\phi) = N^{M(\alpha)}(\phi) + a^{D(\alpha)}(\phi - H_0^M \phi, \phi - \hat{H}_0^M \phi)$.

On a: $$B^{(\alpha)}(\phi) = \frac{\alpha}{2} \int_D (H_\alpha^M \phi^2 + \hat{H}_\alpha^M \phi^2 - 2\phi H_\alpha^M \phi - 2\phi \hat{H}_\alpha^M \phi) \, dm + a^{D(\alpha)}(\phi, \phi)$$

$$= \frac{\alpha}{2} \int_D dm [(H_\alpha^M \phi^2 - 2\phi H_\alpha^M \phi + \phi^2 H_\alpha^M 1) + (\hat{H}_\alpha^M \phi^2 - 2\phi \hat{H}_\alpha^M \phi + \phi^2 \hat{H}_\alpha^M 1)]$$

$$+ a^{D(\alpha)}(\phi, \phi) - \frac{\alpha}{2} \int_D (\hat{H}_\alpha^M 1 + \hat{H}_\alpha^M 1) \phi^2 \, dm.$$

Et donc: $$B^{(\alpha)}(\phi) \geqq a^{D(\alpha)}(\phi, \phi) - \tfrac{1}{2} a^{D(\alpha)}(H_0^M 1, \phi^2) - \tfrac{1}{2} a^{D(\alpha)}(\phi^2, \hat{H}_0^M 1)$$

$$\Leftrightarrow B^{(\alpha)}(\phi) \geqq \frac{\alpha^2}{2} \int_D G_\alpha^D \phi^2 - 2\phi G_\alpha^D \phi + \phi^2 G_\alpha^D 1) \, dm$$

$$+ \tfrac{1}{2} a^{D(\alpha)}(1 - H_0^M 1, \phi^2) + \tfrac{1}{2} a^{D(\alpha)}(\phi^2, 1 - \hat{H}_0^M 1)$$

$$\Rightarrow B^{(\alpha)}(\phi) \geqq 0.$$

En prenant $\phi = \frac{1}{2}(H_0^M \psi + \hat{H}_0^M \psi)$ $\forall \psi \in \mathbb{N}^M$, on en déduit:

$$N^{M(\alpha)}(\psi, \psi) \geqq \tfrac{1}{4} a^{D(\alpha)}(H_0 \psi - \hat{H}_0 \psi, H_0 \psi - \hat{H}_0 \psi) \qquad \forall \alpha > 0.$$

La proposition en résulte.

III.2. **Théorème.** *Pour qu'une forme de Dirichlet k définie sur $\mathbb{K}$ et basée sur $L^2(\mu)$ soit la forme de Dirichlet balayée sur $L^2(\mu)$ d'une forme de Dirichlet régulière g basée sur $L^2(m)$ et admettant a^D comme restriction à D et H_0^M et $\hat{H}_0^M$ comme noyaux* *de Poisson, il faut et il suffit qu'elle vérifie les conditions suivantes:*

a) $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{N}^M$ *et pour tout* $\phi \in \mathbb{K}$, $k(\phi, \phi^+) - N^M(\phi^+) - \theta(\phi^-, \phi^+) \geqq 0$.

b) *Il existe* $\gamma > 1$ *tel que* $k(\phi, \phi) \geqq \frac{\gamma}{4} a^D(H_0^M \phi - \hat{H}_0^M \phi, H_0 \phi - \hat{H}_0 \phi)$, $\quad \forall \phi \in \mathbb{K}$.

c) k *est* $\mathcal{D}_M$*-régulière avec* $\mathcal{D}_M = \{\phi \in C_K(M)$ *tel que* $\exists \psi \in C_K(X)$ *tel que* $\psi - H_0^M \phi \in \mathbb{H}^D\}$.

d) *Si* $\chi^k(\chi^{\hat{k}})$ *est la mesure associée au* $k\,(\hat{k})$ *potentiel local de la décomposition de Riesz de* 1, *on a:*

$$\chi^k \geqq \chi_D \hat{H}_0^M \quad \text{et} \quad \chi^{\hat{k}} \geqq \hat{\chi}_D H_0^M.$$

A. *Partie directe*

a) D'après II.1.2.c), il suffit, pour établir a), de démontrer l'inégalité:

$$-a^M(\phi^-, \phi^+) - \theta(\phi^-, \phi^+) \geqq 0, \qquad \forall \phi \in \mathbb{H}^M.$$

Celle-ci résulte par un passage à la limite de l'inégalité: $a^M_{(\alpha)}, (\phi^-, \phi^+) \leqq 0$ valable pour tout $\alpha \geqq 0$ du fait que la contraction module opère sur $a^M_{(\alpha)}$.

b) Pour tout $\phi \in \mathbb{H}$ on a: $a(\phi, \phi) \geqq \frac{1}{\|H_0^M\|^2} a^M(\phi|_M, \phi|_M)$

on en déduit que:

$$\forall \psi \in \mathbb{H}^M, \qquad a\left(\frac{H_0^M \phi + \hat{H}_0^M \phi}{2}, \frac{H_0^M \phi + \hat{H}_0^M \phi}{2}\right) \leqq \frac{1}{\|H_0^M\|^2} a^M(\psi, \psi)$$

i.e.: $a^M(\psi, \psi) - \frac{1}{4} a^D(H_0^M \psi - \hat{H}_0^M \psi, H_0^M \psi - \hat{H}_0^M \psi) \geqq \frac{1}{\|H_0^M\|^2} a^M(\psi, \psi)$

on en déduit que: $\|H_0^M\|^2 \geqq 1 + \|H_0^M - \hat{H}_0^M\|^2$

et que b) est vérifiée avec $\gamma = \frac{\|H_0^M\|^2}{1 - \|H_0^M\|^2}$.

c) Est une conséquence immédiate de la régularité de a.

d) χ^{a_M} est la mesure a-balayée de χ sur M. On a donc

$$\chi^{a_M} = \chi \hat{H}_0^M \geqq \chi_D \hat{H}_0^M.$$

B. *Réciproque*

i) **Lemme.** $\forall \alpha \geqq 0$, $H_\alpha^M(L^2(\mu)) \cap \mathbb{H}^D = \hat{H}^M(L^2(\mu) \cap \mathbb{H}^D = |0|$.

En effet, soit $\phi \in L^2(\mu)$ et D_n la suite d'ouverts définie dans la démonstration de II.2.

On a: $\forall \alpha \geqq 0 \lim_{n \to +\infty} H_\alpha^{D_n^c} H_\alpha^M \phi = 0$ si $H_\alpha^M \phi \in \mathbb{H}^D$, mais: $H_\alpha^{D_n^c} H_\alpha^M \phi, = H_\alpha^M \phi$, $\forall n$.

ii) Posons $\mathbb{G} = H_0^M(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{H}^D = \hat{H}_0^M(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{H}^D$ et définissons la forme bilinéaire g sur $\mathbb{G}$ par l'identité:

$$\forall \phi, \phi' \in \mathbb{H}^D, \quad \forall \psi, \psi' \in \mathbb{K}, \quad g(\phi + H_0^M \psi, \psi' + \hat{H}_0^M \psi') = a^D(\phi, \phi') + k(\psi, \psi').$$

La forme quadratique associée à g munit $\mathbb{G}$ d'une structure hilbertienne pour laquelle H_0^M et $\hat{H}_0^M$, et donc g, sont continues, (si $u = \phi + H_0^M \psi$, $\phi \in \mathbb{H}^D$, $\psi \in \mathbb{K}$, on pose: $H_\alpha^M u = H_\alpha^M \psi$ et $\hat{H}_\alpha^M u = \hat{H}_\alpha^M \psi$, $\forall \alpha \geqq 0$. On a:

$$g(u, u') = a^D(u - H_0^M u, u' - \hat{H}_0^M u') + g(H_0^M u, H_0^M u') \qquad \forall u, u' \in \mathbb{G}).$$

En effet

$$
\begin{aligned}
a(\phi+H_0\psi, \phi+\hat{H}_0\psi) &= a^D(\phi,\phi)+k(\psi,\psi)+a^D(\phi, H_0^M\phi-\hat{H}_0^M\phi)\\
&\geqq a^D(\phi,\phi)+k(\psi,\psi)-\sqrt{a^D(\phi,\phi)\,a^D(H_0\psi-\hat{H}_0\psi, H_0\psi-\hat{H}_0\psi)}\\
&\geqq a^D(\phi,\phi)+k(\psi,\psi)-\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{a^D(\phi,\phi)\,k(\psi,\psi)}\\
&\geqq \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}}\,(a^D(\phi,\phi)+k(\psi,\psi)).
\end{aligned}
$$

iii) Si on pose:

$$k_{(\alpha)}(\phi,\psi)=k(\phi,\psi)+\alpha\int_X H_\alpha^M\phi\hat{H}_0^M\psi\,dm, \qquad \forall\,\phi,\psi\in\mathbb{K}.$$

On a: $k_{(\alpha)}(\phi,\phi^+)\geqq N^M(\phi^+)+\alpha\int H_\alpha^M\phi\cdot\hat{H}_0^M\phi^+\,dm+\theta(\phi^-,\phi^+)$

$$\geqq N^{M(\alpha)}(\phi^+)+\alpha\int H_\alpha^M\phi\hat{H}_0^M\phi^+\,dm+\alpha\int_D H_\alpha^M\phi^-\,\hat{H}_0^M\phi^+\,dm$$

$$\Rightarrow k_{(\alpha)}(\phi,\phi^+)\geqq\frac{\alpha}{2}\Big(\int_M(\phi^+)^2\,d\nu_\alpha+\int(\phi^+)^2\,d\hat{\nu}_\alpha\Big)\geqq 0.$$

On en déduit que la contraction module opère sur $k_{(\alpha)}$.

Pour tout $\alpha\geqq 0$, on peut définir deux opérateurs positifs duaux $R_{(\alpha)}$ et $\hat{R}_{(\alpha)}$ de $L^2(\mu)$ dans $\mathbb{K}$ tels que:

$$\forall\,\phi\in L^2(\mu), \qquad \forall\,\psi\in\mathbb{K}, \qquad k_{(\alpha)}(R_{(\alpha)}\phi,\psi)=k_{(\alpha)}(\psi,\hat{R}_{(\alpha)}\phi)=\int\phi\psi\,d\mu.$$

On vérifie aisément l'identité:

$$\forall\,\phi,\psi\in G', \qquad \forall f,g\in\mathbb{H}^D, \qquad g_\alpha(f+H_\alpha^M\phi, g+\hat{H}_\alpha^M\psi)=a_\alpha^D(f,g)+k_{(\alpha)}(\phi,\psi).$$

Si U_α et $\hat{U}_\alpha$ sont les résolvantes respectivement associées à g et $\hat{g}$ on en déduit les identités,

$$U_\alpha=G_\alpha^D+H_\alpha^M R_{(\alpha)}\Pi_\alpha^M \quad \text{et} \quad \hat{U}_\alpha=\hat{G}_\alpha^D+\hat{H}_\alpha^M\hat{R}_{(\alpha)}\hat{\Pi}_\alpha^M$$

où $\Pi_{(\alpha)}^M$ (resp. $\hat{\Pi}_\alpha^M$) désigne l'opérateur positif de $L^2(m)$ dans $L^2(\mu)$ transposé de $\hat{H}_\alpha^M$ (resp. H_α^M).

U_α et $\hat{U}_\alpha$ sont évidemment positives, ce qui montre que la contraction module opère sur g.

Pour établir que g est une forme de Dirichlet, il reste à montrer que U_α et $\hat{U}_\alpha$ sont sous markoviennes.

iv) Vu la symétrie des hypothèses, on peut se borner à montrer que U_α est sous markovienne.

La démonstration est particulièrement simple si X est compact.

Il suffit d'établir que: $\forall\,u\in G^+$, $u=H_0^M\psi+\phi$, $a(1,u)\geqq 0$ i.e. $\int\phi\,d\chi_D+\int\psi\,d\chi^k\geqq 0$. Du fait que: $-\phi\geqq H_0^M\psi$, l'inégalité résulte de l'hypothèse: $\chi^k\geqq\chi_D\hat{H}_0^M$.

D'après le lemme de III.1.1 et la décomposition de U_α obtenue ci-dessus, il suffit de montrer que: $\forall\,\alpha\geqq 0 \quad \alpha R_{(\alpha)}\Pi_\alpha^M 1\leqq 1$

i.e. $\quad \forall\,\phi\in C_K^+(M) \quad \int\alpha R_{(\alpha)}\Pi_\alpha^M 1\,\phi\,d\mu\leqq\int\phi\,d\mu.$

Or $\int \alpha R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M 1 \phi\, d\mu = \alpha \int R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M (H_0^M 1 - H_0 R\chi^k) \phi\, d\mu$

$$+\int \alpha R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M (1 - H_0^M 1) \phi\, d\mu + \int \alpha R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M H_0 R\chi^k \phi\, d\mu$$
$$= \int \alpha R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M (H_0^M 1 - H_0 R\chi^k) \phi\, d\mu + \int (1 - H_0^M 1) \alpha \hat{H}_\alpha^M \hat{R}_{(\alpha)} \phi\, dm$$
$$+ \int R\chi^k \phi\, d\mu - \int \hat{R}_{(\alpha)} \phi\, d\chi^k.$$

On déduit facilement du lemme introduit à la fin de la démonstration de III.1.2 l'identité:

$$\forall f \in \mathscr{B}^+ \lim_{\alpha \to +\infty} \uparrow \int \alpha H_\alpha^M f (1 - H_0^M 1)\, dm = \int \hat{H}_0^M f\, d\chi_D$$

et d'après d'hypothèse d) on en déduit l'inégalité:

$$\int \alpha R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M 1 \cdot \phi\, d\mu \leqq \int R\chi^k \phi\, d\mu + \int \alpha R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M H_0^M (1 - R\chi^k) \phi\, d\mu. \qquad (*)$$

Soit v_n une suite de k potentiels croissant vers $1 - R\chi^k$.

On a: $\int \alpha R_{(\alpha)} H_\alpha^M H_0^M (1 - R\chi^k) \phi\, d\mu = \lim_n \uparrow k(\alpha R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M H_0^M v_n, \hat{R}\phi)$

$$= \lim \uparrow g(\alpha U_\alpha H_0^M v_n, \hat{H}_0^M \hat{R}\phi)$$
$$\leqq \lim \uparrow g(H_0^M v_n, \hat{H}_0^M \hat{R}\phi).$$

Cette inégalité est une conséquence du résultat suivant.

Lemme. *Si v est un k potentiel $H_0^M v$ est un g potentiel.*

En effet si $u = \phi + H_0^M \psi$, $\phi \in \mathbb{H}^D$, $\psi \in \mathbb{K}$ on a $g(u, H_0^M v) = k(\psi, v)$ et $u \geqq 0 \Rightarrow \psi \geqq 0$. (Pour établir ce dernier point on utilise le lemme 2 de la section II.2.1).

On en déduit que: $\int \alpha R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M H_0^M (1 - R\chi^k) \phi\, d\mu \leqq \int (1 - R\chi_k) \phi\, d\mu$
et d'après $(*)$

$$\int \alpha R_{(\alpha)} \Pi_\alpha^M 1 \cdot \phi\, d\mu \leqq \int \phi\, d\mu.$$

v) La régularité de g procède directement de l'hypothèse c). On a évidemment $\mathbb{H}^D = \mathbb{G}^D$ et le reste de la proposition suit sans difficultés.

C. *Le cas symétrique*

i) Dans le cas ou toutes les formes de Dirichlet envisagées sont symétriques, la condition b) du théorème est triviale. Les inégalités de a) et d) sont vérifiées (si k est régulière) si et seulement si les contractions module et unité (et donc toutes les contractions) opèrent sur $k - n^M$ (ou n^M désigne la forme bilinéaire symétrique associée à N^M).

ii) En effet a) s'écrit alors:

$$\mathbb{K} \subseteq \mathbb{N}^M \quad \text{et} \quad k(\phi^+, \phi^-) - n^M(\phi^+, \phi) \geqq 0 \qquad \forall \phi \in \mathbb{K}$$

i.e.: la contraction module opère sur $k - n^M$.

Si X est compact, il est particulièrement facile de montrer que d) est vérifiée ssi la contraction unité opère sur $k - n^M$: d) peut en effet s'écrire:

$$k(1, \phi) - n^M(1, \phi) \geqq 0, \quad \forall \phi \in \mathbb{K}^+.$$

En général, le plus simple est de montrer que si la contraction unité opère sur $g-n^M$, U_α est sous markovienne.

iii) Du fait que les contractions opèrent sur $k-n^M$, on vérifie qu'elles opèrent sur la forme bilinéaire symétrique, $k-n^{M(\alpha)}$. On en déduit que si $\lambda\in[0\ 1[$ la forme bilinéaire $B_{\alpha,\lambda}$ définie par:

$$B_{\alpha,\lambda}(\phi,\psi)=k_{(\alpha)}(\phi,\psi)-\lambda\alpha\int H_\alpha^M(\phi,\psi)\,dm \qquad \forall\,\phi,\psi\in\mathbb{K}$$

est une forme de Dirichlet sur $\mathbb{K}$.

Soit $\tilde{R}_{(\alpha)}$ l'opérateur potentiel associé à $k_{(\alpha)}$ sur $L^2(v_\alpha)$.

Soit $\tilde{\Pi}_\alpha^M$ l'opérateur de $L^2(m)$ dans $l^2(v_\alpha)$ transposé de H_α^M. On vérifie aisément l'identité: $U_\alpha=G_\alpha^D+H_\alpha^M\,\tilde{R}_{(\alpha)}\,\tilde{\Pi}_\alpha^M$ et on a: $\tilde{\Pi}_\alpha^M 1=1$.

Il suffit donc d'établir l'inégalité $\alpha\tilde{R}_{(\alpha)}1\leqq 1$.

Soit u_n une suite de $B_{\alpha,\lambda}$ potentiel croissant vers 1.

On a $\forall\,\phi\in C_K^+(M)$, $B_{\alpha,\lambda}(u_n,\tilde{R}_{(\alpha)}\phi)\geqq 0$

i.e. $\int\phi u_n\,dv_\alpha-\lambda\alpha\int\tilde{R}_{(\alpha)}\phi\cdot u_n\,dv_\alpha\geqq 0$

i.e. $\int\phi(u_n-\lambda\alpha\tilde{R}_\alpha u_n)\,dv_\alpha\geqq 0.$

Et en passant à la limite successivement en n et en α on établit l'inégalité cherchée.

iv) Pour $\lambda>0$ la forme $n_\lambda^M=n^M+\lambda\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mu)}$ définie sur l'adhérence de $\mathscr{D}^M\cap\mathbb{N}^M$ dans $\mathbb{N}^M$ vérifie les hypothèses du théorème. Si $r_{(\lambda)}$ désigne la forme de Dirichlet basée sur $L^2(m)$ associée, son domaine de définition $\mathscr{R}$ est indépendant de λ et il existe une forme bilinéaire r définie sur $\mathscr{R}$ telle que:

$$r_{(\lambda)}(\phi,\phi)=r(\phi,\phi)+\lambda\int\phi^2\,d\mu \qquad \forall\,\phi\in\mathscr{R}.$$

r est appelée la forme réfléchie de a^D associée au balayage sur M. Cette terminologie est justifiée dans l'exemple suivant:

D. *Le cas de l'espace de Dirichlet classique*

On suppose que X et D sont des ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$. On prend $m=dx\cdot$ $a(f,g)=\int_{R^n}\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}(g)\,dx$ est définie sur $\mathbb{H}=H_0^1(X)$.

a^D est alors une forme de Dirichlet sur $\mathbb{H}^D=H_0^1(D)$.

Supposons la frontière Γ de D très régulière. Soit $d\sigma$ la forme volume sur Γ.

D'après [9] la forme réfléchie sur M est définie sur $\{\phi\in L^2(dx)\,|\,\phi|_D\in H^1(D)\}$ et égale à $\int_D\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}(g)\,dx$.

Un théorème de trace montre alors que: $\forall\,\phi\in\mathbb{H}$, $\phi|_\Gamma\in H^{1/2}(\Gamma)$, et que l'application $\phi\to\phi|_\Gamma$ est continue de noyau H_0^1. On en déduit que la norme définie par a^M sur $\mathbb{H}^M$ est équivalente à: $\|f|_M\|_{H^1(\mathbb{R}^n-D)}+\|f|_\Gamma\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$.

D'autre part, $\mathbb{N}^M=\{\phi\in L^2(M,dx+d\sigma)\,|\,\phi|_\Gamma\in H^{1/2}(\Gamma)\}$ et la norme induite par $N_\lambda^M(\lambda>0)$ est équivalente à $\|\ \|_{H^{1/2}(\Gamma)}$.

Enfin un élément ϕ de $C_2(\bar{D})$ appartient au domaine du générateur infinitésimal B_r associé à la forme réfléchie si et seulement si $\dfrac{\partial}{\partial n}(\phi)=0$ sur Γ (dérivée suivant la normale à la frontière), ce qui justifie la terminologie employée.

Ceci résulte aisément de la formule de Green.

Bibliographie

1. Ancona, A.: Théorie du potentiel dans les espaces fonctionnels à forme coercive. Équipe d'Analyse et de Théorie du potentiel, Paris VI. (1973)
2. Ancona, A.: Contraction module et principe de réduite dans les espaces ordonnés à forme coercive. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B, t. 275, 701–704 (1972)
3. Beurling, A., Deny, J.: Dirichlet Spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **45**, 208–215 (1959)
4. Bliedtner, J.: Seminar on Potential theory II. Lecture Notes 226. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
5. Bony, J.M., Courrege, Ph., Priouret, P.: 1/2 groupes de Feller sur une variété à bord compacte. Ann. Inst. Fourier, **18**, 369–521 (1969)
6. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov processes. New York: Academic Press 1968
7. Carrillo-Menendez, S.: Processus de Markov associé à une forme de Dirichlet non symétrique. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete **33**, 139–154 (1975)
8. Deny, J.: Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel. CIME 1969
9. Fukushima, M.: On Feller's kernel and the Dirichlet norm. Nagoya Math. J. **24**, 167–175 (1964)
10. Fukushima, M.: On boundary conditions for multidimensional brownian motion with symmetric resolvents. J. Math. Soc. Japan Vol. I-C Rome, ed. Gremanèse, 58–93 (1969)
11. Fukushima, M.: Regular representations of Dirichlet spaces et Dirichlet spaces and strong Markov processes. Trans. Amer. Math. Soc. **155**, 455–473, **162**, 185–224 (1971)
12. Fukushima, M.: Proc. 2ème Japon USSR. Sympos. Probab. Theory. Lecture Notes 330. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
13. Getoor, R.K., Sharpe, M.J.: Last exit decompositions and distributions. Indiana Univ. Math. **23**, n° 5 377–404 (1973)
14. Ikeda, N., Watanabe, S.: 2ème Japon USSR. Symp. Probab. Theory. Lecture Notes 330. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
15. Ito, M.: A note on extended regular functional spaces. Proc. Japan Acad. **43**, 435–440 (1967)
16. Kunita, H.: Boundary conditions for multidimensional diffusion processes. Kyoto 273–335 (1970)
17. Kunita, M.: Sub-Markov 1/2 groups in Banach lattices. Proc. Intern. Conf. Functional Analysis, Related Topics. Tokyo 1969
18. Meyer, P.A.: Processus de Markov. Lecture Notes, 26. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
19. Priouret, P.: Processus de Markov sur une variété à bord compacte. Ann. Inst. H. Poincaré **4**, 193–253 (1968)
20. Sato, K., Ueno, T.: Multidimensional diffusion and the Markov processes on the boundary. J. Math. Kyoto Univ. **4**, 526–606 (1965)
21. Silverstein, M.: Dirichlet spaces and random time change. Illinois J. Math. **17**, 1–72 (1973)
22. Silverstein, M.: The reflected Dirichlet space. Illinois J. Math. **18**, 310–355 (1974)
23. Silverstein, M.: Symmetric Markov processes. Lecture notes 426. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
25. Stampachia, G.: Formes bilinéaires coercives. C.R. Acad. Sci. Paris. t. 258. 4413–4416 (1964)

Recu le 1 Janvier 1976