Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2, 255—272 (1964)

Ein Verfahren der linearen Optimierung

Herrn F. Löbell zum 70. Geburtstag gewidmet

Von

J. Heinhold und K. Kuntze

Einführung

Beim Problem der linearen Optimierung handelt es sich um die Bestimmung eines Punktes $\mathfrak{x}^*$ des n-dimensionalen Raumes R_n, des sogenannten Zielpunktes, für den die Zielfunktion $Z = \mathfrak{c}\,\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) = \operatorname{grad} Z$ und $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in einem „zulässigen" Bereich $\mathfrak{M}$, der durch die Ungleichungen

$$\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{x} + b_\mu \geqq 0\,, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m\,, \quad \text{mit} \quad \mathfrak{a}_\mu = (\mathfrak{a}_{\mu 1}, \mathfrak{a}_{\mu 2}, \ldots, \mathfrak{a}_{\mu n})\,, \quad \mathfrak{a}_\mu \neq 0\,,$$

beschrieben wird, ihr Maximum annimmt.

J. B. Pyne [1] hat als erster eine auf dem Gradientenverfahren beruhende Lösungsmethode für elektronische Analogrechner angegeben. Eine weitere derartige Methode beschreibt A. S. Jackson [2]. Die Bedeutung beider Verfahren liegt auf der experimentellen Seite. Ein mathematischer Beweis für die Konvergenz der mathematisch formulierbaren Verfahren wird nicht erbracht.

Auch das in dieser Arbeit behandelte, zunächst für den elektronischen Analogrechner entwickelte Verfahren, ist ein Gradientenverfahren. Man erhält hiermit die Bewegung eines Punktes $\mathfrak{x}(t)$ mit der Zeit t als Parameter als Lösung einer autonomen Differentialgleichung $d\mathfrak{x}/dt = \mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ mit unstetigem $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$. Dieses läßt sich für Punkte, die nicht auf einer Hyperebene $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{x} + b_\mu = 0)$ liegen, explizit angeben; für Punkte auf Hyperebenen wird $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ durch ein Rekursionsverfahren definiert.

Hat das gestellte Problem eine Lösung $\mathfrak{x}^*$, so liefert das Verfahren, wie im folgenden bewiesen werden soll, ausgehend von einem beliebigen Anfangspunkt $\mathfrak{x}_0$, stets eine Lösung $\mathfrak{x}^*$; andernfalls läßt sich damit feststellen, daß das Problem widerspruchsvoll ist.

Das für den elektronischen Analogrechner angegebene Verfahren zur Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe eignet sich auch für die Behandlung auf einem elektronischen digitalen Rechenautomaten. Ferner läßt es sich auf den Fall zeitabhängiger Koeffizienten und auf gewisse nichtlineare Optimierungsaufgaben übertragen.

§ 1. Die Bewegung $\mathfrak{x}(t)$ außerhalb der Hyperebenen

Wir definieren zunächst in inneren Punkten des zulässigen Bereiches $\mathfrak{M}$ sowie in Punkten des zu $\mathfrak{M}$ komplementären, nichtzulässigen Bereiches $\overline{\mathfrak{M}}$, die nicht auf Hyperebenen* $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{x} + b_\mu = 0)$ gelegen sind, die Bewegung $\mathfrak{x}(t)$ durch die folgende Differentialgleichung

* im folgenden kurz als HE bezeichnet.

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{v}(\mathfrak{x}) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{v}(\mathfrak{x}) = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \mathfrak{a}_\mu + \delta \cdot \mathfrak{c}, \tag{1}$$

$$\lambda_\mu = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{x} + b_\mu > 0, \\ 1 & \text{für} \quad \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{x} + b_\mu < 0, \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu > 0, \\ 1 & \text{für} \quad \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu = 0. \end{cases}$$

$$\left(\dot{\mathfrak{x}} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right).$$

Hierdurch wird jedem Punkt $\mathfrak{x}$ des R_n, der nicht auf einer der HEn $\mathfrak{H}_\mu$ gelegen ist, in eindeutiger Weise ein Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ zugeordnet. Im Innern des zulässigen Bereiches $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{v}$ gleich dem Gradienten der Zielfunktion. Im nichtzulässigen Bereich $\overline{\mathfrak{M}}$ wird jedoch — anders als in den eingangs zitierten Gradientenverfahren — die Zielfunktion „abgeschaltet". $\mathfrak{v}$ wird dort in den nicht auf HEn gelegenen Punkten durch die Resultate der Gradienten $\mathfrak{a}_\mu$ jener Hyperebenen bestimmt, für die $\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{x} + b_\mu < 0$ ist.

Ehe wir dazu übergehen $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ auch in Punkten von HEn zu definieren, soll das Verhalten der Lösungskurven der Differentialgleichung (1) im Innern eines von HEn berandeten Teilbereiches, der selbst keine HEn-punkte enthält, untersucht werden. $\mathfrak{M}$ sei als nicht leer vorausgesetzt ($\mathfrak{x}_m \in \mathfrak{M}$; vgl. 5.2). Dann gilt der folgende

Satz. *Liegt $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}(0)$ jeweils auf der „negativen" Seite von genau k Hyperebenen $\mathfrak{H}_\varkappa (\varkappa = 1, \ldots, k)$, d. h., gilt $\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{x}_0 + b_\varkappa < 0$, so bewegt sich $\mathfrak{x}(t)$ für $t \geqq 0$ längs der Geraden $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t(\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_k)$ auf einen Punkt dieser Hyperebenen zu.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{x}_0 + b_\varkappa < 0, \quad \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{x}_m + b_\varkappa \geqq 0 \tag{2), (3}$$

Der Punkt $\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x}_0 + t \sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{a}_\varkappa$ hat von $\mathfrak{H}_\varkappa$ den orientierten Abstand

$$d_\varkappa(t) = [\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{x}_0 + b_\varkappa + t(\mathfrak{a}_\varkappa \sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{a}_\varkappa)] : |\mathfrak{a}_\varkappa| \tag{4}$$

Hierbei muß mindestens eine der runden Klammern für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ positiv sein. Andernfalls ergäbe sich aus

$$\mathfrak{a}_\varkappa \sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{a}_\varkappa \leqq 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, \ldots, k \quad \text{durch Addition} \quad (\sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{a}_\varkappa)^2 \leqq 0,$$

also $\sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{a}_\varkappa = 0$. Die Addition von (2) für $\varkappa = 1, \ldots, k$ liefert dann $\sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa < 0$, die von (3) $\sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa \geqq 0$, also einen Widerspruch. Wegen (2) wird daher für einen endlichen Wert $t = t_1$ mindestens ein $d_\varkappa(t)$ für $\varkappa = 1, \ldots, k$ zum erstenmal Null, w. z. b. w.

Es zeigt sich ferner, daß $\mathfrak{x}(t)$, von $\mathfrak{x}_0$ ausgehend, sich in dem durch (2) definierten Bereich mit wachsendem t jedem Punkt $\mathfrak{x}_m$ von $\mathfrak{M}$ mit konstanter Geschwindigkeit nähert.

Aus (2) und (3) folgt $\mathfrak{a}_\varkappa(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_0) > 0$ und durch Summation über $\varkappa = 1, \ldots, k$

$$(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_0) \sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{a}_\varkappa > 0 \tag{5}$$

Die Differenz der Abstandsquadrate der Punkte $\mathfrak{x}(t)$ und $\mathfrak{x}_0$ von $\mathfrak{x}_m$ ist

$$s^2 = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_m)^2 - (\mathfrak{x}_0 + t\sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{a}_\varkappa - \mathfrak{x}_m)^2 = -t^2 (\sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{a}_\varkappa)^2 + 2t(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_0)\sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{a}_\varkappa .$$

Für kleine t ist dieser Ausdruck wegen (5) sicher größer als Null und bleibt in dem durch (2) beschriebenen Gebiet positiv, anderenfalls könnte man für eine Nullstelle $\mathfrak{x}'$ von s^2 wieder $s^2 > 0$ nachweisen.

Durch jeden inneren Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_m$ von $\mathfrak{M}$ führt als Lösungskurve die Gerade $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_m + t\mathfrak{c}$.

§ 2. Gradientenflächen

Für eine sinnvolle analytische Definition des Geschwindigkeitsvektors in Hyperebenenpunkten, die dem Verhalten des Analogrechners entspricht, ist folgende geometrische Überlegung nützlich.

Die durch die Differentialgleichung (1) definierten Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ bilden ein Vektorfeld, das den gesamten R_n mit Ausnahme der HEn erfüllt. Ordnet man in jedem dieser Punkte $\mathfrak{x}$ dem zugehörigen Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ ein zu ihm senkrecht stehendes (gerichtetes) Flächenelement zu, so bilden diese Flächenelemente in jedem von HEn begrenzten Teilbereich, der selbst keine HEn-punkte enthält, in ihrer Gesamtheit parallele Ebenen, die im folgenden Gradientenebenen genannt werden. Dadurch wird in jedem einfach zusammenhängenden, offenen Gebiet des R_n, das von HEn berandet ist, und keine HEn-punkte enthält, eine Schar paralleler Gradientenebenen eindeutig bestimmt, die jenes Gebiet lückenlos und einfach erfüllen und auf den dort definierten (untereinander parallelen) Geschwindigkeitsvektoren senkrecht stehen. Diese (offenen) Gradientenebenen werden durch Hinzunahme ihrer Randpunkte, die auf HEn bzw. auf dem Würfel $|x_i| = M$ (M sei eine entsprechend große Zahl) liegen, zu abgeschlossenen Punktmengen des R_n.

Es zeigt sich, daß nunmehr außerhalb $\mathfrak{M}$* stückweise ebene, aus Gradientenebenen zusammengesetzte Gradientenflächen entstanden sind, die $\overline{\mathfrak{M}}$ lückenlos und einfach erfüllen. Um dies einzusehen, wird folgender Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz. *Liegt ein Punkt $\mathfrak{x}_0$, der nicht $\mathfrak{M}$ angehört, auf genau einer HE*

$$\mathfrak{H}_\mu : \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{x} + b_\mu = 0$$

und damit auf je einer auf der positiven und negativen HEn-seite gelegenen, abgeschlossenen Gradientenebene $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, so liegt der Durchschnitt der beiden abgeschlossenen Gradientenebenen ganz in der HE $\mathfrak{H}_\mu$.

Beweis. Sei $\mathfrak{v}_\mu'$ der auf der positiven Seite der HE $\mathfrak{H}_\mu$ wirkende Geschwindigkeitsvektor, so ist

$$\mathfrak{G}_1 : (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{v}_\mu' = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}_2 : (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\,(\mathfrak{v}_\mu' + \mathfrak{a}_\mu) = 0 .$$

Jeder Punkt $\mathfrak{x}_1$, der auf $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ liegt, erfüllt daher die Bedingung $(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) \cdot \mathfrak{a}_\mu = 0$, d.h. er liegt auf der HE $\mathfrak{H}_\mu : (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \cdot \mathfrak{a}_\mu = 0$, w.z.b.w.

* Bezüglich der Definition von Gradientenflächen durch innere Punkte von $\mathfrak{M}$ siehe § 3.2.

Aus dem Hilfssatz folgt, daß eine Hyperebene und ihre beiden in demselben Punkt angrenzenden Gradientenebenen linear abhängig sind:

$$\mathfrak{H}_\mu + \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2 = 0 .$$

Ist $\mathfrak{v}_\mu' = \lambda \mathfrak{a}_\mu (\lambda \neq 0)$, so ist $\mathfrak{G}_1 \equiv \mathfrak{H}_\mu \equiv \mathfrak{G}_2$, also $\mathfrak{H}_\mu$ ist selbst Gradientenebene.

Liegt $\mathfrak{x}_0$ auf genau k Hyperebenen, so führt ebenfalls genau eine Gradientenfläche durch $\mathfrak{x}_0$. Für $k = 1$ wurde dieser Sachverhalt soeben bewiesen. Um den Satz allgemein für $k > 1$ zu beweisen, werde vorausgesetzt, daß nach Entfernung einer der k HEn die übrigen $k - 1$ HEn in einer Umgebung von $\mathfrak{x}_0$ eindeutig ein Feld von Gradientenflächen bestimmen, welches diese Umgebung einfach und lückenlos überdeckt und somit genau eine Gradientenfläche durch $\mathfrak{x}_0$ führt. Ergänzt man nunmehr die durch $\mathfrak{x}_0$ führenden $k - 1$ HEn um jene vorher entfernte, so läßt diese k-te HE das eben beschriebene Feld auf ihrer positiven Seite unverändert. Zu den Normalen $\mathfrak{n}_\nu (\nu = 1, \ldots)$ der auf ihrer negativen Seite liegenden Gradientenebenen $\mathfrak{G}_\nu$ wird der Gradient $\mathfrak{a}_k$ der k-ten HE $\mathfrak{H}_k$ addiert. Dies bewirkt, daß in jedem von HEn berandeten Teilbereich $\mathfrak{T}_\nu$ von $\overline{\mathfrak{M}}$, der auf der negativen Seite von $\mathfrak{H}_k$ liegt, die Normalen um den Winkel $\arccos \frac{\mathfrak{a}_k \mathfrak{n}_\nu}{|\mathfrak{a}_k|\,|\mathfrak{n}_\nu|}$ auf diese HE $\mathfrak{H}_k$ hingedreht werden.

Hierdurch bleibt einmal die Parallelität der Gradientenebenen (bzw. -flächen) untereinander bestehen und zum zweiten auch die Durchschnitte derselben mit der HE $\mathfrak{H}_k$. Damit ist gezeigt, daß durch jeden Punkt $\mathfrak{x}_0$ des Komplementraumes $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{M}$ genau eine eindeutig bestimmte Gradientenfläche hindurchgeht, daß diese Gradientenfläche in ihren Gradientenebenen zu den benachbarten Gradientenflächen (bzw. -ebenen) parallel ist und mit diesen den Raum $\overline{\mathfrak{M}}$ lückenlos und einfach erfüllt.

Satz. *Die Gradientenflächen sind konvexe Polyeder.*

Zum *Beweis* werde angenommen, daß eine Gradientenfläche nicht konvex ist. Dann besitzt sie mindestens in einem Punkt $\mathfrak{x}_0$, durch den genau k HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ hindurchführen, eine nicht konvexe Ecke. In einer Umgebung von $\mathfrak{x}_0$ gibt es daher mindestens zwei Gradientenebenen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ sowie zwei Punkte $\mathfrak{x}_1$ auf $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ auf $\mathfrak{G}_2$, so daß mindestens ein innerer Punkt $\mathfrak{x}'$ der Verbindungsstrecke $\overline{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2}$ auf der „negativen Seite" von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ liegt. Die Verbindungsstrecke $\overline{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2}$ durchdringt die HEn $\mathfrak{H}_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l \leqq k)$. Es ist daher:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{H}_1 : (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{a}_1 = 0 & \mathfrak{G}_1 : (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{g}_1 = 0 \quad \text{mit} & (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{g}_1 = 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \mathfrak{G}_2 : (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{g}_2 = 0 \quad \text{mit} & (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{g}_2 = 0 \\
\mathfrak{H}_k : (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{a}_k = 0 & &
\end{array}$$

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_1 + \vartheta(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) \quad \text{mit} \quad 0 < \vartheta < 1$$

$$(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{g}_1 < 0, \qquad (\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{g}_2 < 0 .$$

Hieraus folgt

$$\begin{array}{lll}
(\mathfrak{x}_1 + \vartheta(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{g}_1 < 0 & \text{oder} & (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{g}_1 < 0 \\
(\mathfrak{x}_1 + \vartheta(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{g}_2 < 0 & \text{oder} & (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)\,\mathfrak{g}_2 < 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)(\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_2) < 0 . \tag{5'}$$

Die HEn $\mathfrak{H}_\lambda$ mit den Gradienten $\mathfrak{a}_\lambda$ trennen die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ voneinander, d. h. es gilt:

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{a}_\lambda' < 0 \\
(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{a}_\lambda' > 0
\end{array}\right\} \text{ für } \quad \lambda' = l_1'; l_2'; \ldots; l_r'$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{a}_\lambda'' > 0 \\
(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{a}_\lambda'' < 0
\end{array}\right\} \text{ für } \quad \lambda'' = l_1''; l_2''; \ldots; l_s'' = l - l_r' .$$

$\mathfrak{r}$ sei die Summe der Gradienten aller HEn, auf deren negativer Seite sich sowohl $\mathfrak{x}_1$ als auch $\mathfrak{x}_2$ befindet.

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{r} + \sum_{l'}^{l'_r} \mathfrak{a}'_\lambda; \quad \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{r} + \sum_{l''_1}^{l''} \mathfrak{a}''_\lambda .$$

Für $l = 0$ ist $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{r}$, entgegen der Annahme.

Für $l \neq 0$ ist:

$$(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \sum \mathfrak{a}'_\lambda < 0$$
$$(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) \sum \mathfrak{a}''_\lambda < 0$$
$$\overline{(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) (\sum \mathfrak{a}''_\lambda - \sum \mathfrak{a}'_\lambda) < 0} \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)(\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1) < 0 .$$

Dies steht im Widerspruch zu Gleichung (5′). Damit ist der Satz bewiesen.

Die Gradientenflächen sind also konvexe Polyederflächen. Die Punktmenge $\mathfrak{M}$ wird von jeder Gradientenfläche umschlossen. Die Gradientenflächen sind dann und nur dann geschlossen, wenn $\mathfrak{M}$ endlich ist. Der Rand von $\mathfrak{M}$ kann selbst als Gradientenfläche angesehen werden. Seine Konvexität folgt schon aus der Tatsache, daß jede Gradientenebene als HE Stützebene von $\mathfrak{M}$ ist.

Anmerkung. Ist in einem Teilbereich von $\overline{\mathfrak{M}}$ der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}'$ und in einem anderen Teilbereich von $\overline{\mathfrak{M}}$ der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}''$ vorhanden und führen zwei Gradientenflächen durch diese beiden Teilbereiche, so läßt sich zeigen, daß sich die Zeiten in den beiden Teilbereichen, um längs einer Bewegungskurve (vgl. 3.1) von einer Gradientenfläche auf die andere zu gelangen, wie $\mathfrak{v}'^2 : \mathfrak{v}''^2$ verhalten.

Wählt man an Stelle der Zeiteinheit von z. B. 1 sec in den einzelnen Teilbereichen von $\mathfrak{M}$ die Zeiteinheit $\mathfrak{v}^2$ sec, wobei $\mathfrak{v}^2$ das skalare Quadrat des dort vorhandenen Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ ist, so stellen die Gradientenflächen gerade jene Flächen dar, von denen aus man längs den Bewegungskurven den Rand von $\mathfrak{M}$ in gleichen Zeiten erreicht.

Wählt man an Stelle der Wegeinheit von z. B. 1 cm in den einzelnen Teilbereichen von $\mathfrak{M}$ die Einheit $1/\mathfrak{v}^2$ cm, so stellen die Gradientenflächen gerade jene Flächen dar, von denen aus man längs den Bewegungskurven den Rand von $\mathfrak{M}$ auf gleich langen Wegen erreicht.

§ 3. Die mit Hilfe der Gradientenflächen definierten Bewegungskurven

3.1. Bewegungskurven

Die Schar der Gradientenflächen werde jetzt von stetigen Kurven durchsetzt, die stückweise aus Geraden bestehen. Die Richtung dieser Geraden ist in jedem Punkt $\mathfrak{x} \in \overline{\mathfrak{M}}$ wegen der Konvexität der Gradientenflächen eindeutig durch die Forderung bestimmt, daß die jenem Punkt in Richtung $\mathfrak{M}$ benachbarte Gradientenfläche auf jener Kurve auf kürzestem Wege erreicht wird. Diese „Bewegungskurven" schneiden jede Gradientenfläche genau einmal und führen (nach endlicher Zeit) auf den Rand von $\mathfrak{M}$ zu. Es ist durchaus möglich, daß mehrere Kurven sich ab einem bestimmten Punkt zu einer einzigen Kurve vereinen.

Die Bewegungskurven können als „Lösungskurven" des gestellten Problems angesehen werden, da gezeigt wird, daß sie, gleichgültig ob einer ihrer Anfangspunkte $\mathfrak{x}_0$ auf einer HE liegt oder nicht, in jedem Falle in einem Lösungspunkt $\mathfrak{x}^*$

enden. Die Bewegungskurven ergeben sich als Lösungen einer erweiterten Differentialgleichung, die entsteht, wenn die Differentialgleichung (1) gilt und zusätzlich in den Punkten der HEn Richtung und Größe des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ entsprechend definiert wird. Zur eindeutigen Bestimmung der Größe und Richtung von $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ in HEn-punkten werden im folgenden Abschnitt die Begriffe $\mathfrak{x}_0$-Bereich und ausgezeichneter $\mathfrak{x}_0$-Bereich eingeführt.

3.2. $\mathfrak{x}_0$*-Bereich*

$\mathfrak{x}_0$ sei ein Punkt in $\mathfrak{M}$ durch den genau k HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) gehen sollen. Wir betrachten dann nur diese k HEn und sehen zunächst von allen anderen nicht durch $\mathfrak{x}_0$ gehenden HEn ab. Durch diese k HEn wird nun der R_n in Bereiche, wir nennen sie $\mathfrak{x}_0$-Bereiche, unterteilt.

Zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ gehören dann und nur dann zu demselben $\mathfrak{x}_0$-Bereich, wenn sie auf keiner HE liegen und ihre Verbindungsstrecke keine weitere HE schneidet oder wenn sie auf genau denselben $k-\mu$ ($\mu = 0, 1, \ldots, k-1$) HEn liegen und ihre Verbindungsstrecke keine der übrigen μ HEn schneidet.

Liegt $\mathfrak{x}_0$ auf genau einer HE $\mathfrak{H}_1$, so sind die $\mathfrak{x}_0$-Bereiche einmal $\mathfrak{H}_1$ selbst sowie die beiden durch $\mathfrak{H}_1$ begrenzten Teile des R_n. In diesem Falle haben wir drei verschiedene $\mathfrak{x}_0$-Bereiche. Liegt $\mathfrak{x}_0$ auf genau r linear unabhängigen HEn, so gibt es insgesamt 3^r verschiedene $\mathfrak{x}_0$-Bereiche.

Nach 3.1 ist in $\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{M}$ ein Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{x}}_0$ seiner Richtung nach durch die Forderung bestimmt, daß längs ihm die in Richtung $\mathfrak{M}$ benachbarte Gradientenfläche auf kürzestem Wege erreicht wird. Dieser in $\mathfrak{x}_0$ angeheftete Geschwindigkeitsvektor zeigt in einen $\mathfrak{x}_0$-Bereich, den wir den ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich nennen.

Der Betrag $|\dot{\mathfrak{x}}_0|$ des in $\mathfrak{x}_0$ angehefteten Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_0) = \dot{\mathfrak{x}}_0$ wird wie folgt festgelegt:

a) Enthält der ausgezeichnete $\mathfrak{x}_0$-Bereich einen Punkt, der auf keiner HE liegt — damit liegen sämtliche Punkte dieses ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereiches auf keiner durch $\mathfrak{x}_0$ gehenden HE —, so ist nach der Differentialgleichung (1) innerhalb dieses ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereiches in allen Nachbarpunkten* $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{x}_0$ der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ in gleicher Weise definiert und dieser wird $\mathfrak{x}_0$ nun auch der Größe nach zugeordnet.

b) Der ausgezeichnete $\mathfrak{x}_0$-Bereich enthält Punkte, die bei entsprechender Numerierung auf den HEn $\mathfrak{H}_\sigma$ ($\sigma = 1, 2, \ldots, s$) ($s \leqq k$) liegen. Dann existieren solche $\mathfrak{x}_0$-Bereiche $\mathfrak{T}_\tau$, deren Punkte auf keiner HE $\mathfrak{H}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) gelegen sind und deren Randpunkte im ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich liegen. In diesen $\mathfrak{x}_0$-Bereichen $\mathfrak{T}_\tau$ ist nach (1) in Nachbarpunkten von $\mathfrak{x}_0$ bereits der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{v}(\mathfrak{x}_\tau)$ eindeutig definiert, wobei $\mathfrak{x}_\tau$ ein Punkt eines solchen $\mathfrak{x}_0$-Bereichs $\mathfrak{T}_\tau$ ist. Die Projektion des Vektors $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_\tau)$ auf den bisher nur durch seine Richtung im ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich festgelegten Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{x}}_0$ wird gleich der Größe $\dot{\mathfrak{x}}_0$ dieses Geschwindigkeitsvektors gesetzt. Die Projektion

* Da die $\mathfrak{x}_0$-Bereiche nur durch die durch $\mathfrak{x}_0$ führenden HEn bestimmt sind, durchstößt eine von $\mathfrak{x}_0$ in den ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich führende geradlinige Bewegung nach einer gewissen nicht verschwindenden endlichen Strecke erstmalig eine nicht durch $\mathfrak{x}_0$ führende HE oder führt andernfalls ins Unendliche. Nur bis zu dieser HE reichen die eben genannten Nachbarpunkte von $\mathfrak{x}_0$ innerhalb des $\mathfrak{x}_0$-Bereichs.

ist unabhängig davon, von welchem $\mathfrak{x}_0$-Bereich $\mathfrak{T}_\tau$ man ausgeht, da sich die Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_\tau)$ dieser $\mathfrak{x}_0$-Bereiche $\mathfrak{T}_\tau$ nur um Gradientenvektoren unterscheiden, die senkrecht auf dem ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich stehen.

Um den Geschwindigkeitsvektor für Punkte $\mathfrak{x}_m$ aus $\mathfrak{M}$ zu bestimmen, werden in entsprechender Weise auch diesen Punkten Gradientenflächen zugeordnet. Die Gradientenfläche durch $\mathfrak{x}_m$ ist gleich dem Rand des Durchschnitts der Menge aller Punkte $\mathfrak{x}_m$ mit der Eigenschaft $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_m)\mathfrak{c} \geqq 0$ und der Punktmenge $\mathfrak{M}$. Dabei ist $\mathfrak{c}$ der Gradient der Zielfunktion Z. Auch jede dieser Gradientenflächen ist Rand einer konvexen Punktmenge.

Die Schar der durch die Punkte $\mathfrak{x}_m \in \mathfrak{M}$ gebildeten Gradientenflächen werde jetzt von stetigen Kurven, den Bewegungskurven, durchsetzt, die stückweise aus Strecken bestehen. Die Richtung dieser Strecken ist in jedem Punkt $\mathfrak{x}_m \in \mathfrak{M}$ wegen der Konvexität der Gradientenflächen eindeutig durch die Forderung bestimmt, daß die jenem Punkt „in Richtung größer werdender Z-Werte" benachbarte Gradientenfläche auf kürzestem Weg erreicht wird. Existiert keine solche benachbarte Gradientenfläche, so wird einem solchen Punkt $\mathfrak{x}_m$ der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{x}}_m = 0$ zugeordnet; dieser Punkt $\mathfrak{x}_m$ ist dann Zielpunkt. In allen anderen Punkten führen die Bewegungskurven zu Punkten mit größeren Z-Werten. Diese Bewegungskurven enden alle in einem Zielpunkt $\mathfrak{x}^*$. In allen inneren Punkten $\mathfrak{x}_m$ von $\mathfrak{M}$ wird der Geschwindigkeitsvektor durch die Differentialgleichung (1) bereits mit $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_m) = \mathfrak{c}$ definiert. In allen Randpunkten $\mathfrak{x}_m$ von $\mathfrak{M}$ ist die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_m) = \dot{\mathfrak{x}}_m$ durch die o.g. Forderung bestimmt, daß längs ihm in Richtung wachsender Z-Werte die zu $\mathfrak{x}_m$ benachbarte Gradientenfläche auf kürzestem Wege erreicht wird. Die Größe $|\dot{\mathfrak{x}}_m|$ wird als Projektion von $\mathfrak{c}$ auf die gegebene Richtung von $\dot{\mathfrak{x}}_m$ festgelegt.

Damit ist für jeden Punkt des R_n eindeutig der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ (hinsichtlich Richtung und Größe) definiert.

A n m e r k u n g. Für Hyperebenenpunkte $\mathfrak{x}_0$, die auf dem Rand von $\mathfrak{M}$ liegen, kann auch ein ausgezeichneter $\mathfrak{x}_0$-Bereich definiert werden. Es wird darunter der Durchschnitt desjenigen $\mathfrak{x}_0$-Bereiches, in dem der oben definierte Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{x}}_0$ liegt, mit der Punktmenge $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\mathfrak{c} \geqq 0$ verstanden.

§ 4. Ein rekurrentes Verfahren

4.1. Ausgezeichneter $\mathfrak{x}_0$-Bereich (2. Definition)

Für alle Punkte $\mathfrak{x}$ des R_n, die auf HEn liegen, ist nach § 3 der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{x}}$ hinsichtlich seiner Richtung durch die Forderung bestimmt, daß die zu $\mathfrak{x}$ in Richtung $\mathfrak{M}$ bzw. in Richtung wachsender Z-Werte benachbarte Gradientenebene auf kürzestem Wege erreicht wird. Für Punkte, die auf keiner HE liegen, löst bereits die Differentialgleichung (1) die Aufgabe. Für alle Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$, die auf mindestens einer HE liegen, kann die Bestimmung von $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_0) = \dot{\mathfrak{x}}_0$ auch derart durchgeführt werden, daß man zuerst den ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich mit Hilfe eines rekurrenten Verfahrens und dann den in diesem ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich vorhandenen Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_0)$ nach Größe und Richtung bestimmt.

Der ausgezeichnete $\mathfrak{x}_0$-Bereich eines Punktes $\mathfrak{x}_0$ kann durch eine zweite Definition eindeutig festgelegt werden:

Sei $\tilde{\mathfrak{x}} \neq \mathfrak{x}_0$ ein Punkt eines $\mathfrak{x}_0$-Bereiches und $\dot{\tilde{\mathfrak{x}}}$ der nach § 3 festgelegte Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}(\tilde{\mathfrak{x}})$ in $\tilde{\mathfrak{x}}$. Verbleiben alle Punkte der Geraden $\mathfrak{x} = \tilde{\mathfrak{x}} + t\dot{\tilde{\mathfrak{x}}}$ für $t > 0$ innerhalb desselben $\mathfrak{x}_0$-Bereiches, so ist dieser ausgezeichneter $\mathfrak{x}_0$-Bereich, falls $\dot{\tilde{\mathfrak{x}}} \cdot \mathfrak{a}_\varkappa \neq 0$ ist für alle $\varkappa = 1, \ldots, k$. Andernfalls ist der Durchschnitt aller jener durch $\mathfrak{x}_0$ führenden HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$, für die $\dot{\tilde{\mathfrak{x}}} \cdot \mathfrak{a}_\varkappa = 0$ gilt, ausgezeichneter $\mathfrak{x}_0$-Bereich.

Diese zweite Charakterisierung des ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereichs ist mit der unter § 3 gegebenen Definition äquivalent, da es nach beiden Definitionen keine zwei verschiedenen $\mathfrak{x}_0$-Bereiche geben kann, die ausgezeichnet sind, und nach beiden Definitionen alle Punkte der Geraden $\mathfrak{x} = \tilde{\mathfrak{x}} + t\dot{\mathfrak{x}}$ für $t > 0$ im gleichen (ausgezeichneten) $\mathfrak{x}_0$-Bereich verbleiben.

Um in $\mathfrak{x}_0$ auf $\mathfrak{H}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{x}}_0$ zu bestimmen, sei vorausgesetzt, daß in allen Punkten $\mathfrak{x}$, die auf höchstens $k-1$ HEn liegen, der Geschwindigkeitsvektor bereits bekannt ist. Das im folgenden Abschnitt beschriebene Verfahren liefert einen eindeutig bestimmten Punkt $\tilde{\mathfrak{x}}$, wobei $\dot{\tilde{\mathfrak{x}}}$ der Geschwindigkeitsvektor im ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich ist. $\tilde{\mathfrak{x}}$ liegt entweder auf weniger HEn als $\mathfrak{x}_0$, so daß $\dot{\tilde{\mathfrak{x}}}$ bereits bestimmt ist oder $\tilde{\mathfrak{x}}$ liegt auf k HEn. In diesem Falle ist der ausgezeichnete $\mathfrak{x}_0$-Bereich gerade gleich dem Durchschnitt der durch $\mathfrak{x}_0$ und $\tilde{\mathfrak{x}}$ führenden k HEn. Im ersten Fall ist $\dot{\mathfrak{x}}_0 = \dot{\tilde{\mathfrak{x}}}$. Im zweiten Fall ist die Größe und Richtung von $\dot{\tilde{\mathfrak{x}}}$ gleich der „Projektion" der Summe aller Gradienten von HEn, die nicht durch $\tilde{\mathfrak{x}}$ gehen und auf deren negativer Seite $\tilde{\mathfrak{x}}$ liegt, auf den Durchschnitt der durch $\tilde{\mathfrak{x}}$ führenden k HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$, wie in 4.3 gezeigt wird. Es gilt dann auch hier $\dot{\mathfrak{x}}_0 = \dot{\tilde{\mathfrak{x}}}$.

4.2. Das rekurrente Verfahren

$\mathfrak{x}_0$ liege genau auf den k HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$). Die Summe der Gradienten aller HEn $\mathfrak{H}_\mu$, die nicht $\mathfrak{x}_0$ enthalten, aber auf deren negativer (wirksamer) Seite $\mathfrak{x}_0$ liegt, sei $\mathfrak{r}$.

$$\mathfrak{r} = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \mathfrak{a}_\mu, \qquad \begin{array}{ll} \lambda_\mu = 1, & \text{wenn} \quad \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{x}_0 + b_\mu < 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \\ \lambda_\mu = 0, & \text{sonst}. \end{array}$$

Es existiert eine Umgebung von $\mathfrak{x}_0$, die keine Punkte von HEn enthält, die nicht durch $\mathfrak{x}_0$ führen. Diese Umgebung kann man dadurch zu der Gesamtheit aller $\mathfrak{x}_0$-Bereiche erweitern, indem man im R_n nur mehr die durch $\mathfrak{x}_0$ führenden HEn betrachtet. In jedem Punkt $\mathfrak{x}$ des R_n, der nicht auf einer HE liegt, wird dann als Geschwindigkeitsvektor der Vektor

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{r} + \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa \mathfrak{a}_\varkappa \quad \begin{array}{ll} [\lambda_\varkappa = 1, & \text{wenn} \quad \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{x} + b_\varkappa < 0; \\ \lambda_\varkappa = 0, & \text{sonst}] \quad \text{angeheftet}. \end{array}$$

Hierdurch werden die in der o.g. Umgebung von $\mathfrak{x}_0$ verlaufenden konvexen Gradientenflächen in ihren Gradientenebenen parallel in allen $\mathfrak{x}_0$-Bereichen ebenfalls fortgesetzt und überdecken den gesamten R_n einfach und lückenlos. Damit ist nach § 3 auch nunmehr in jedem Punkt der durch $\mathfrak{x}_0$ führenden HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$ ein Geschwindigkeitsvektor festgelegt.

Nunmehr wird angenommen, daß in jedem Punkt des R_n, der auf höchstens $k-1$ HEn liegt, der Geschwindigkeitsvektor bereits bestimmt ist.

Man bestimmt nunmehr einen Polygonzug, der aus endlich vielen Strecken besteht und die Punkte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_a = \tilde{\mathfrak{x}}$ derart verbindet, daß $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_a) = \dot{\mathfrak{x}}_a$ gleich dem Geschwindigkeitsvektor in allen Punkten des ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereiches ist. Die Punkte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_a$ erhält man folgendermaßen:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}.$$

Entweder liegt $\mathfrak{x}_1$ auf denselben k HEn wie $\mathfrak{x}_0$ oder nicht.

Im ersten Fall ist $\mathfrak{x}_1$ ein Punkt des ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereichs, der gleich dem Durchschnitt aller HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$ ist, da ja die Gerade $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{r}$ mit $t > 0$ den Durchschnitt nicht verläßt. Der Geschwindigkeitsvektor im ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich ist somit $\mathfrak{r}$.

Im zweiten Fall ist in $\mathfrak{x}_1$ nach Voraussetzung der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{x}}_1$ bereits bestimmt. Verbleiben sämtliche Punkte der Geraden $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\dot{\mathfrak{x}}_1$ für $t > 0$ im gleichen $\mathfrak{x}_0$-Bereich, so ist dieser ausgezeichneter $\mathfrak{x}_0$-Bereich, wenn für kein $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ die Gleichung $\mathfrak{a}_\varkappa \dot{\mathfrak{x}}_1 = 0$ erfüllt ist; gilt hierbei jedoch $\mathfrak{a}_\varkappa \dot{\mathfrak{x}}_1 = 0$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, l$ (bei geeigneter Numerierung der HEn), so ist der ausgezeichnete $\mathfrak{x}_0$-Bereich der Durchschnitt der HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, l$). Im anderen Fall erreicht die Gerade für $t = t_1$ erstmalig eine weitere, nicht durch $\mathfrak{x}_1$ gehende HE im Punkt $\mathfrak{x}_2$.

Der ausgezeichnete $\mathfrak{x}_0$-Bereich läßt sich auch dadurch eindeutig charakterisieren, daß man die sgn-Funktionen $\operatorname{sgn}(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)\mathfrak{a}_\varkappa$ und $\operatorname{sgn} \dot{\mathfrak{x}}_1 \cdot \mathfrak{a}_\varkappa$ ($\operatorname{sgn} a = +1, 0, -1$, wenn $a >, =, < 0$) betrachtet.

Die Gleichung $\operatorname{sgn} \dot{\mathfrak{x}}_1 \mathfrak{a}_\varkappa = 0$ ist erfüllt für alle HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$, zu denen die Gerade $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\dot{\mathfrak{x}}_1$ parallel ist. Die Ungleichung $\operatorname{sgn}(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)\mathfrak{a}_\varkappa \neq 0$ ist erfüllt für alle HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$, auf denen $\mathfrak{x}_1$ nicht liegt. Da $\mathfrak{x}_1$ auf höchstens $k-1$ HEn liegt, so existiert mindestens eine solche Ungleichung. Die Gerade $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\dot{\mathfrak{x}}_1$ ($t > 0$) trifft dann und nur dann keine weitere nicht durch $\mathfrak{x}_1$ führende HE, wenn erfüllt ist:

a) $\operatorname{sgn}(\dot{\mathfrak{x}}_1 \cdot \mathfrak{a}_\varkappa) = 0$ für alle $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ oder wenn

b) für alle $\varkappa$, für die $\operatorname{sgn}(\dot{\mathfrak{x}}_1 \cdot \mathfrak{a}_\varkappa) \neq 0$ ist und $\operatorname{sgn}(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)\mathfrak{a}_\varkappa \neq 0$ ist, die Gleichung $\operatorname{sgn}(\dot{\mathfrak{x}}_1 \cdot \mathfrak{a}_\varkappa) = \operatorname{sgn}(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) \cdot \mathfrak{a}_\varkappa$ gilt.

Im Fall a) ist der Durchschnitt aller HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) ausgezeichneter $\mathfrak{x}_0$-Bereich mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{x}}_1$. Der Fall b) ergibt sich aus der Betrachtung der Abstände der Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t\dot{\mathfrak{x}}_1$ von den HEn $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\mathfrak{a}_\varkappa = 0$. Diese Abstände sind

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}_\varkappa^2}}\left[(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)\mathfrak{a}_\varkappa + t(\dot{\mathfrak{x}}_1 \cdot \mathfrak{a}_\varkappa)\right].$$

Dem ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich ist hier der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{x}}_1$ zugeordnet. Derjenige $\mathfrak{x}_0$-Bereich ist ausgezeichneter $\mathfrak{x}_0$-Bereich, in dem $\mathfrak{x}_1$ liegt, falls $\dot{\mathfrak{x}}_1 \cdot \mathfrak{a}_\varkappa = 0$ für kein $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ erfüllt ist. Andernfalls ist derjenige $\mathfrak{x}_0$-Bereich ausgezeichneter $\mathfrak{x}_0$-Bereich, der den Punkt $\mathfrak{x}_0 + \dot{\mathfrak{x}}_1$ enthält. Er ist gleich dem Durchschnitt aller jener HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$, für die $\dot{\mathfrak{x}}_1 \cdot \mathfrak{a}_\varkappa = 0$ erfüllt ist. Ist weder a) noch b) erfüllt, so trifft die Gerade $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + t_1\dot{\mathfrak{x}}_1$ für $t = t_1 > 0$ erstmalig auf eine nicht durch $\mathfrak{x}_1$ gehende HE. t_1 erhält man aus der Gleichung $(\mathfrak{x}_1 + t_1\dot{\mathfrak{x}}_1 - \mathfrak{x}_0)\mathfrak{a}_\varkappa = 0$, indem man das kleinste positive t_1 wählt, wenn $\varkappa$ die Werte 1 bis k durchläuft. Für $\mathfrak{x}_2$ gelten nun dieselben Überlegungen wie für $\mathfrak{x}_1$, d. h. entweder liegt $\mathfrak{x}_1$ auf denselben k HEn wie $\mathfrak{x}_1$ oder nicht … Und so weiter.

Dieser so eindeutig bestimmte Polygonzug, der die Punkte $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ jeweils geradlinig verbindet, ist eine Bewegungskurve bezüglich der den R_n einfach und lückenlos überdeckenden Gradientenflächen, falls wie vorausgesetzt nur die durch $\mathfrak{x}_0$ führenden k HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ als existent betrachtet werden. Wegen der Konvexität der Gradientenflächen kann er denselben $\mathfrak{x}_0$-Bereich nicht zweimal durchlaufen und da die $\mathfrak{x}_0$-Bereiche in ihrer Anzahl endlich sind und es genau einen ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich gibt, muß er nach endlich vielen Strecken zu einem Endpunkt $\mathfrak{x}_a$ gelangen, der im ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich liegt und diesen Bereich eindeutig festlegt.

Ergänzt man die Differentialgleichung (1) um die für HEn-Punkte $\mathfrak{x}$ auf Grund des rekurrenten Verfahrens gewonnenen Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}) = \dot{\mathfrak{x}}$, so erhält man eine erweiterte Differentialgleichung. Durch sie wird jedem Punkt $\mathfrak{x}$ des R_n ein Richtungsvektor $\dot{\mathfrak{x}}$ zugeordnet und jede ihrer Lösungskurven endet von einem beliebigen Anfangspunkt ausgehend in einem Zielpunkt der Optimierungsaufgabe und entspricht zugleich einer mit Hilfe des AR nur durch Schaltung der Differentialgleichung (1) erhaltenen Lösungskurve.

4.3. Projektion auf den ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich

4.3.1. Seien $\mathfrak{H}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ k durch den Punkt $\mathfrak{x}_0$ führende HEn. ϑ sei die vom Durchschnitt dieser k HEn gebildete Punktmenge. Gesucht sei der Punkt $\mathfrak{x}^*$ von ϑ, der den kürzesten Abstand vom Punkt $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{s}$ besitzt, wobei $\mathfrak{s}$ ein beliebig vorgegebener Vektor ist.

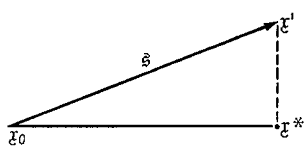


Fig. 1

Die HEn $\mathfrak{H}_\varkappa : (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{a}_\varkappa = 0$ seien als linear unabhängig vorausgesetzt.

$$\mathfrak{x}^* \in \vartheta = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{H}_\varkappa ,$$

d. h.: $$(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{a}_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Für das Abstandsquadrat A der Strecke $\mathfrak{x}^*\mathfrak{x}'$ gilt: $A = (\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}')^2$.

A soll nun bezüglich $\mathfrak{x}^*$ zum Minimum gemacht werden unter den k Nebenbedingungen $(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{a}_\varkappa = 0$. $(\varkappa = 1, \ldots, k)$.

Nach Einführung der Lagrangeschen Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varkappa$ gilt:

$$F = (\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}')^2 + \lambda_1\,\mathfrak{a}_1(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}_0) + \cdots + \lambda_\varkappa\,\mathfrak{a}_\varkappa(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}_0); \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{x}^*} = 2(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}') + \lambda_1\,\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\,\mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_\varkappa\,\mathfrak{a}_\varkappa = 0\,. \tag{7}$$

Nach Multiplikation mit $\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}_0$ ergibt sich:

$$(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}') \cdot (\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}_0) = 0\,. \tag{8}$$

Notwendig für die Existenz von $\mathfrak{x}^*$ ist also das Senkrechtstehen der beiden Vektoren $\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}_0$.

Aus (7) folgt: $2(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}') + \lambda_1\,\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_\varkappa\,\mathfrak{a}_\varkappa = 0$; bzw.

$$\lambda_1\,\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\,\mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_\varkappa\,\mathfrak{a}_\varkappa = 2\,\mathfrak{s} - 2(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}_0)\,. \tag{9}$$

Multipliziert man die Gleichung (9) mit $a_\varkappa$ für $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$, so erhält man nachstehende k Gleichungen für die $\lambda_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1\,\mathfrak{a}_1^2 \quad + \lambda_2\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_k\,\mathfrak{a}_\varkappa\,\mathfrak{a}_1 &= 2\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{s} \\
\lambda_1\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 + \lambda_2\,\mathfrak{a}_2^2 \quad + \cdots + \lambda_k\,\mathfrak{a}_\varkappa\,\mathfrak{a}_2 &= 2\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{s} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\lambda_1\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_k + \lambda_2\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_k + \cdots + \lambda_k\,\mathfrak{a}_k^2 \quad &= 2\,\mathfrak{a}_k\,\mathfrak{s}\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\mathfrak{a}_\varkappa$ ist die Determinante D des Gleichungssystems (10) von Null verschieden.

Wäre $D = 0$, so sind z. B. die Elemente von D spaltenweise linear abhängig, d. h. es gilt mit entsprechenden Konstanten $w_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ $(\sum_1^k w_\varkappa^2 \neq 0)$;

$$\begin{array}{lll} \text{für die 1. Spalte:} & \mathfrak{a}_1(w_1\mathfrak{a}_1 + w_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + w_k\mathfrak{a}_k) = 0 & \\ \cdots & & \\ \text{für die } k\text{. Spalte:} & \mathfrak{a}_k(w_1\mathfrak{a}_1 + w_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + w_k\mathfrak{a}_k) = 0 & \\ \text{woraus folgt:} & (w_1\mathfrak{a}_1 + w_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + w_k\mathfrak{a}_k)^2 = 0\,, & \text{Widerspruch}. \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist dann und nur dann homogen, wenn $\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{s} = 0$ $(\varkappa = 1, \ldots k$ gilt. Dies besagt genau, daß $\mathfrak{x}'$ in ϑ liegt, somit $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}'$ ist und der Abstand $\overline{\mathfrak{x}^*\mathfrak{x}'}$ Null ist.

Benützt man die Matrixschreibweise

$$\mathfrak{A}_k = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{a}_k \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{A}_k' = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_k); \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_k' = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1^2 & \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1 & \ldots & \mathfrak{a}_k\mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_2^2 & \ldots & \mathfrak{a}_k\mathfrak{a}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_k & \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_k & \ldots & \mathfrak{a}_k^2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_k \end{pmatrix},$$

so lautet das Gleichungssystem (10):

$$\mathfrak{A}\lambda = 2\mathfrak{A}_k\mathfrak{s}\,, \tag{10'}$$

bzw.

$$\lambda = 2\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}_k\mathfrak{s} \tag{11}$$

und Gleichung (7):

$$2(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}') + \mathfrak{A}_k'\lambda = 0\,. \tag{7'}$$

Aus (11) und (7') folgt:

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}' - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_k'\lambda = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{s} - \mathfrak{A}_k'\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}_k\mathfrak{s}\,, \tag{12}$$

somit:

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{E} - \mathfrak{A}_k'(\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_k')^{-1}\mathfrak{A}_k]\,\mathfrak{s}\,. \tag{13}$$

Der Vektor $\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}_0 = [\mathfrak{E} - \mathfrak{A}_k'(\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_k')^{-1}\mathfrak{A}_k]\,\mathfrak{s}$ werde die Projektion von $\mathfrak{s}$ auf ϑ genannt. Sind die HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ linear abhängig, so sind unter ihnen voneinander linear unabhängige HEn auszuwählen, so daß deren Anzahl maximal ist. Für diese (nicht eindeutig) ausgewählten HEn ist dann nach (13) der Punkt $\mathfrak{x}^*$ zu bestimmen. Der Vektor $\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}_0$ ist dann sowohl Projektion von $\mathfrak{s}$ auf ϑ als auch die Projektion von $\mathfrak{s}$ auf den Durchschnitt der ausgewählten, linear unabhängigen HEn. Er ist von der getroffenen Auswahl unabhängig.

4.3.2. Behauptung. *Die Projektion des Vektors* $\mathfrak{s} = \mathfrak{r} + \bar{\sigma}_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \bar{\sigma}_k\mathfrak{a}_\varkappa$ *(*$\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_k$ *beliebig) auf den Durchschnitt* ϑ *der HEn* $\mathfrak{H}_\varkappa$: $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \cdot \mathfrak{a}_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ *ist von der Wahl der* $\bar{\sigma}_\varkappa$ *unabhängig.*

Mit anderen Worten: Liegt $\mathfrak{x}_0$ auf dem Durchschnitt ϑ der k HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$ und betrachtet man alle $\mathfrak{x}_0$-Bereiche, die keine HEn-Punkte enthalten, von denen aber Randpunkte auf ϑ liegen, so ergibt die Projektion des in diesen $\mathfrak{x}_0$-Bereichen vorhandenen Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ auf ϑ jedesmal denselben Vektor. $\mathfrak{v}$ hat stets das Aussehen $\mathfrak{v} = \mathfrak{r} + \sigma_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \sigma_\varkappa \mathfrak{a}_\varkappa$ (mit $\sigma_\varkappa = 0$ oder $1, \varkappa = 1, \ldots, k$).

Beweis. Setzt man $\mathfrak{a}_i \, \mathfrak{a}_k = a_{ik}$, so lauten die Gleichungen (10):

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_k a_{1k} &= 2\,\mathfrak{a}_1 \cdot (\mathfrak{r} + \sigma_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \sigma_k \mathfrak{a}_k) \\ \cdots & \cdots \\ \lambda_1 a_{1k} + \cdots + \lambda_k a_{kk} &= 2\,\mathfrak{a}_k \cdot (\mathfrak{r} + \sigma_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \sigma_k \mathfrak{a}_k) \end{aligned} \tag{14}$$

oder

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - 2\sigma_1) a_{11} + \cdots + (\lambda_k - 2\sigma_k) a_{1k} &= 2\,\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{r} \\ \cdots & \cdots \\ (\lambda_1 - 2\sigma_1) a_{1k} + \cdots + (\lambda_k - 2\sigma_k) a_{kk} &= 2\,\mathfrak{a}_k \cdot \mathfrak{r}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Nach (10′) folgt bei

$$(\lambda - 2\sigma) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 2\sigma_1 \\ \cdots \\ \lambda_k - 2\sigma_k \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &: \mathfrak{A}(\lambda - 2\sigma) = 2\,\mathfrak{A}_k \mathfrak{r} \\ &\lambda - 2\sigma = 2\,\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{A}_k \mathfrak{r}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Nun gilt

$$2(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}') + \mathfrak{A}_k' \lambda = 0\,. \tag{7′}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}^* &= \mathfrak{x}' - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_k' \lambda = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r} + \mathfrak{A}_k' \sigma - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_k' \lambda = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_k'(\lambda - 2\sigma) \\ &= \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_k' \cdot 2\,\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}_k \mathfrak{r} = \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{E} - \mathfrak{A}_k'(\mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_k')^{-1} \cdot \mathfrak{A}_k]\,\mathfrak{r} \end{aligned} \tag{17}$$

w. z. b. w.

4.3.3. Der ausgezeichnete $\mathfrak{x}_0$-Bereich bestehe aus dem Durchschnitt ϑ von durch $\mathfrak{x}_0$ hindurchgehenden HEn $\mathfrak{H}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$). (Dies müssen nicht alle durch $\mathfrak{x}_0$ führende HEn sein.) $\mathfrak{x}_1$ sei ein von $\mathfrak{x}_0$ verschiedener Punkt des Durchschnitts ϑ, der $\mathfrak{M}$ „näher" liegt als $\mathfrak{x}_0$, d. h. innerer Punkt der durch $\mathfrak{x}_0$ führenden Gradientenfläche ist. Die Verbindungsgerade $\overrightarrow{\mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_1}$ schneide keine HE, die nicht bereits schon durch $\mathfrak{x}_0$ führt. Es wird jener Punkt $\tilde{\mathfrak{x}}$ auf der durch $\mathfrak{x}_1$ führenden Gradientenfläche $\mathfrak{G}$ gesucht, der den kürzesten Abstand vom Punkt $\mathfrak{x}_0$ besitzt.

Es ist also:

$$\begin{aligned} &\vartheta = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{H}_k; \quad \mathfrak{H}_\varkappa : (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \cdot \mathfrak{a}_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)\,, \\ &\mathfrak{x}_0 \in \vartheta; \ \mathfrak{x}_1 \neq \mathfrak{x}_0; \ \mathfrak{x}_1 \in \vartheta; \qquad (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) \cdot \mathfrak{a}_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k); \end{aligned}$$

$\mathfrak{r}$ sei die Summe der in $\mathfrak{x}_1$ wirksamen Gradienten von HEn, die $\mathfrak{x}_1$ nicht enthalten.

$$\mathfrak{r} = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \mathfrak{a}_\mu; \quad \begin{aligned} \lambda_\mu &= 1\,, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{x}_1 \mathfrak{a}_\mu + b_\mu < 0 \\ \lambda_\mu &= 0\,, \quad \text{sonst} \end{aligned} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)\,.$$

Die in $\mathfrak{x}_1$ zusammenstoßenden Gradientenebenen von $\mathfrak{G}$ haben die Gleichungen:

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1)(w_1 \mathfrak{a}_1 + w_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + w_k \mathfrak{a}_k + \mathfrak{r}) = 0 \quad \text{mit} \quad w_\varkappa = 0 \text{ oder } 1\,.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{a}_\varkappa &= 0 \\ (\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{r} &= 0 \end{aligned} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

für alle Punkte $\mathfrak{x}$, die im Durchschnitt $\vartheta_{\mathfrak{G}}$ aller in $\mathfrak{x}_1$ zusammenstoßenden Gradientenebenen enthalten sind. Ferner ist $\vartheta_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{D}$.

Es soll nun $A = (\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_0)^2$ mit der Nebenbedingung $\tilde{\mathfrak{x}} \in \vartheta_{\mathfrak{G}}$ zu einem Minimum gemacht werden. Die Aufgabe wird durch Einführung von $k + 1$ Lagrangeschen Multiplikatoren $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1}$ gelöst.

$$F = (\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_0)^2 + \tilde{\lambda}_1 \mathfrak{a}_1 (\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_1) + \cdots + \tilde{\lambda}_k \mathfrak{a}_k (\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_1) + 2 \tilde{\lambda}_{k+1} \mathfrak{r} (\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_1); \tag{18}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{\mathfrak{x}}} = 2(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) + \tilde{\lambda}_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \tilde{\lambda}_k \mathfrak{a}_k + 2 \tilde{\lambda}_{k+1} \mathfrak{r} = 0. \tag{19}$$

Nach Multiplikation mit $\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_1$ ergibt sich $(\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_0)\,(\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_1) = 0$.

Aus (19) folgt:

$$2(\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) + \tilde{\lambda}_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \tilde{\lambda}_k \mathfrak{a}_k + 2 \tilde{\lambda}_{k+1} \mathfrak{r} = 0, \tag{20}$$

bzw.

$$\tilde{\lambda}_1 \mathfrak{a}_1 + \tilde{\lambda}_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \tilde{\lambda}_k \mathfrak{a}_k = -2(\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_1) - 2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) - 2 \tilde{\lambda}_{k+1} \mathfrak{r}. \tag{21}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\mathfrak{a}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) bzw. $\mathfrak{r}$, so erhält man $k + 1$ Gleichungen für die $\tilde{\lambda}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) und $\tilde{\lambda}_{k+1}$

$$\begin{aligned}
&\tilde{\lambda}_1 \mathfrak{a}_1^2 + \tilde{\lambda}_2 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \tilde{\lambda}_k \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_1 = -2 \tilde{\lambda}_{k+1} \mathfrak{r} \mathfrak{a}_1 \\
&\tilde{\lambda}_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 + \tilde{\lambda}_2 \mathfrak{a}_2^2 + \cdots + \tilde{\lambda}_k \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_2 = -2 \tilde{\lambda}_{k+1} \mathfrak{r} \mathfrak{a}_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\tilde{\lambda}_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_k + \tilde{\lambda}_2 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_k + \cdots + \tilde{\lambda}_k \mathfrak{a}_k^2 = -2 \tilde{\lambda}_{k+1} \mathfrak{r} \mathfrak{a}_k \\
&[\tilde{\lambda}_1 \mathfrak{a}_1 + \tilde{\lambda}_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \tilde{\lambda}_k \mathfrak{a}_k + 2 \tilde{\lambda}_{k+1} \mathfrak{r} + 2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)]\, \mathfrak{r} = 0.
\end{aligned}$$

Man verifiziert durch Vergleich mit 4.4.3.1, daß dieses Gleichungssystem genau für $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*$, $\tilde{\lambda}_\varkappa = \lambda_\varkappa (\varkappa = 1, \ldots, k)$, $\tilde{\lambda}_{k+1} = -1$ erfüllt wird.

Die eckige Klammer der letzten Gleichung verschwindet wegen (19).

Die kürzeste Entfernung des Punktes $\mathfrak{x}_0$, der auf mindestens einer HE liegt, zu der in Richtung $\mathfrak{M}$ benachbarten Gradientenfläche erhält man also längs eines Vektors $\mathfrak{p}$, dessen Richtung mit der Projektion eines Vektors $\mathfrak{r}$ auf den ausgezeichneten $\mathfrak{x}_0$-Bereich übereinstimmt, wobei $\mathfrak{r}$ die Summe der in $\mathfrak{x}_0$ wirksamen Gradienten ist. Der Geschwindigkeitsvektor in $\mathfrak{x}_0$ wird nach Definition gleich diesem Vektor $\mathfrak{p}$ gesetzt.

Für Punkte $\mathfrak{x}_0$, die Randpunkte von $\mathfrak{M}$ sind, wird in entsprechender Weise der Geschwindigkeitsvektor definiert, wobei hier $\mathfrak{r}$ durch den Gradienten $\mathfrak{c}$ der Zielfunktion zu ersetzen ist.

4.4. Zusammenfassung des rekurrenten Verfahrens

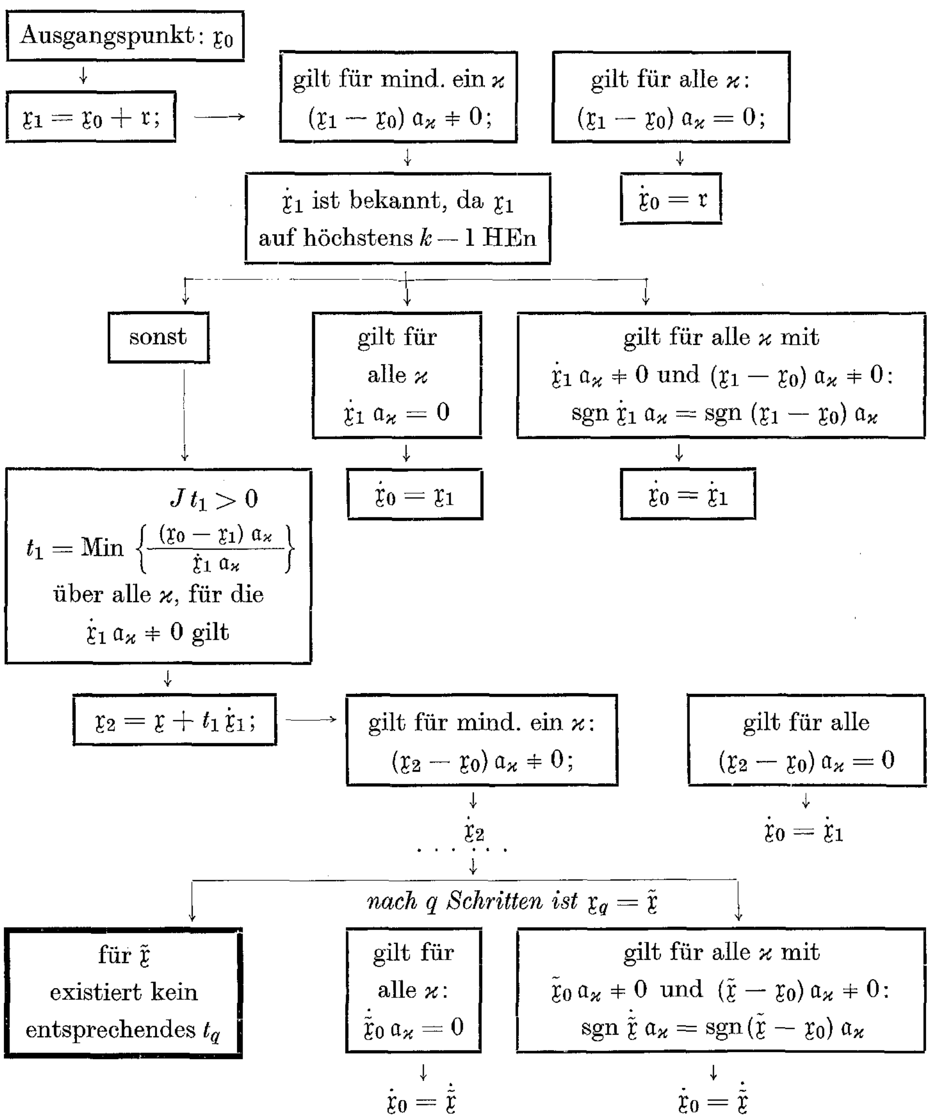
$\mathfrak{x}_0$ liegt auf genau den k HEn

$$\mathfrak{H}_\varkappa : \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{x} + b_\varkappa = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\, \mathfrak{a}_\varkappa = 0; \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

In jedem Punkt $\mathfrak{x}$, der auf weniger als diesen k HEn liegt, sei $\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ als bekannt vorausgesetzt.

Es ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathfrak{x}_0) = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \mathfrak{a}_\mu + \delta \mathfrak{r}$;

$$\begin{aligned} \lambda_\mu &= 0, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{x}_0 + b_\mu \geqq 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \\ \lambda_\mu &= 1, \quad \text{sonst} \\ \delta &= 0, \quad \text{wenn} \quad \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu > 0 \\ \delta &= 1, \quad \text{sonst} \end{aligned}$$



§ 5. Schlußbemerkungen

5.1. Stabilität

1. Hilfssatz. *Der Abstand zweier beliebiger Punkte* $\mathfrak{x}_0$ *und* $\mathfrak{x}_m$ *mit* $\mathfrak{x}_0 \in \overline{\mathfrak{M}}$ *und* $\mathfrak{x}_m \in \mathfrak{M}$ *ist größer als der Abstand der Punkte* $\mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{x}_m$ *für* $0 \leqq t \leqq t_1$.

$\mathfrak{r}$ *ist die Summe der in* $\mathfrak{x}_0$ *wirksamen Gradienten, und* t_1 *kann so gewählt werden, daß* $\mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{r}$ *noch im gleichen* $\mathfrak{x}_0$*-Bereich verbleibt und keine HE schneidet, auf der nicht* $\mathfrak{x}_0$ *liegt.*

Beweis. $\mathfrak{r} = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \mathfrak{a}_\mu = \sum_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{a}_\lambda$ (bei geeigneter Numerierung ist $\lambda_\mu = 1$ für

$$\mu = 1, \ldots, l \quad \text{und} \quad \lambda_\mu = 0 \quad \text{sonst})$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}_0 + b_1 < 0; & \mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}_m + b_1 \geqq 0; \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \mathfrak{a}_l \mathfrak{x}_0 + b_l < 0; & \mathfrak{a}_l \mathfrak{x}_m + b_l \geqq 0; \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \mathfrak{a}_1(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_0) > 0 \\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{a}_l(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_0) > 0 \\ \hline (\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_0) \sum_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{a}_\lambda > 0 \end{array}$$

$$\overline{\mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_m}^2 = A_{0m}^2 = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_m)^2$$

$$\overline{\mathfrak{x}_t \mathfrak{x}_m}^2 = A_{tm}^2 = (\mathfrak{x}_0 + t \sum_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{a}_\lambda - \mathfrak{x}_m)^2$$

$$\begin{aligned} D = A_{0m}^2 - A_{tm}^2 &= (-t \sum_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{a}_\lambda)(2\mathfrak{x}_0 - 2\mathfrak{x}_m + t \sum_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{a}_\lambda) \\ &= -t^2 (\sum_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{a}_\lambda)^2 + 2t(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_0) \sum_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{a}_\lambda > 0 \end{aligned}$$

$$\text{für} \quad 0 \leqq t \leqq t_1; \quad \text{w. z. b. w.}$$

2. Hilfssatz. *Durchdringen eine Bewegungskurve* k_1 *und eine zu ihr benachbarte Bewegungskurve* k_2 *die HE* $\mathfrak{H}_\varkappa$ *in den Punkten* $\mathfrak{x}_1$ *bzw.* $\mathfrak{x}_2$, *so ist ihr Abstand während des gegenseitigen parallelen Verlaufes nach der Durchdringung der HE höchstens gleich dem Abstand während ihres gegenseitigen parallelen Verlaufes der Durchdringung.*

Beweis. In einem Gebiet des R_n sei $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r} + \mathfrak{a}_\varkappa$ der auf der positiven bzw. negativen Seite von $\mathfrak{H}_\varkappa$ wirkende Geschwindigkeitsvektor. Aus der Tatsache der Durchdringung folgt $\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_\varkappa > 0$.

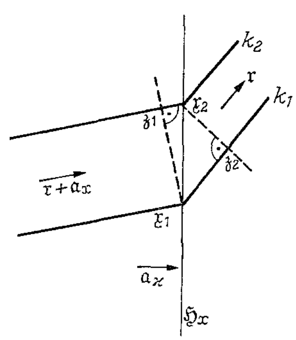


Fig. 2

Die durch $\mathfrak{x}_1$ bzw. $\mathfrak{x}_2$ führende Gradientenfläche wird von k_2 bzw. k_1 in $\mathfrak{z}_1$ bzw. $\mathfrak{z}_2$ geschnitten (siehe Fig. 2!). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man folgern, daß gilt:

$$(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{a}_\varkappa \leqq 0 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{x}_2)\,\mathfrak{a}_\varkappa > 0 .$$

Somit ist:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{x}_2 - \sigma(\mathfrak{r} + \mathfrak{a}_\varkappa); & \sigma > 0; & \mathfrak{H}_\varkappa : (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{a}_\varkappa = 0 \\ \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{x}_1 + \tau\mathfrak{r}; & \tau > 0; & (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{a}_\varkappa = 0 . \end{array}$$

Aus:

$$\begin{array}{lll} (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1)(\mathfrak{r} + \mathfrak{a}_\varkappa) = 0 & \text{folgt} & (\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{x}_1)(\mathfrak{r} + \mathfrak{a}_\varkappa) = 0 \\ (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_2)\,\mathfrak{r} = 0 & & (\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{x}_2)\,\mathfrak{r} = 0 , \end{array}$$

oder

$$[\mathfrak{x}_2 - \sigma(\mathfrak{r} + \mathfrak{a}_\varkappa) - \mathfrak{x}_1] \cdot (\mathfrak{r} + \mathfrak{a}_\varkappa) = 0$$

$$[\mathfrak{x}_1 + \tau\mathfrak{r} - \mathfrak{x}_2] \cdot \mathfrak{r} = 0 ,$$

damit

$$\left.\begin{array}{l}(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{r}-\sigma(\mathfrak{r}+\mathfrak{a}_\varkappa)^2=0\\ -(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{r}+\tau\mathfrak{r}^2=0\end{array}\right\} \succ \quad \sigma(\mathfrak{r}+\mathfrak{a}_\varkappa)^2=\tau\mathfrak{r}^2 \succ \sigma\leqq\tau\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(\mathfrak{z}_1-\mathfrak{x}_1)^2-(\mathfrak{z}_2-\mathfrak{x}_2)^2 &= [\mathfrak{x}_2-\sigma(\mathfrak{r}+\mathfrak{a}_\varkappa)-\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_1+\tau\mathfrak{r}-\mathfrak{x}_2]\\ &\quad\ [\mathfrak{x}_2-\sigma(\mathfrak{r}+\mathfrak{a}_\varkappa)-\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_1-\tau\mathfrak{r}+\mathfrak{x}_2]\\ &= [-\sigma(\mathfrak{r}+\mathfrak{a}_\varkappa)+\tau\mathfrak{r}]\cdot[2(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_1)-\tau\mathfrak{r}-\sigma(\mathfrak{r}+\mathfrak{a}_\varkappa)]\\ &= -2\sigma(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_1)(\mathfrak{r}+\mathfrak{a}_\varkappa)+2\tau\mathfrak{r}(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_1)-\\ &\quad -\tau^2\mathfrak{r}^2+\sigma^2(\mathfrak{r}+\mathfrak{a}_\varkappa)^2\\ &= -2\sigma\tau\mathfrak{r}^2+2\tau^2\mathfrak{r}^2-\tau^2\mathfrak{r}^2+\sigma\tau\mathfrak{r}^2\\ &= \mathfrak{r}^2(\tau^2-\sigma\tau)=\mathfrak{r}^2\tau(\tau-\sigma)\geqq 0; \quad \text{w.z.b.w.}\end{aligned}$$

Liegen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ auf derselben Gradientenfläche, so sei ihr Abstand der auf dieser Fläche liegende kürzeste Abstand und werde kurz Abstand der beiden durch $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ gehenden Bewegungskurven bezüglich der Gradientenfläche genannt.

Obiger Hilfssatz gilt auch für den Fall, daß die beiden Bewegungskurven nach ihrem Auftreffen auf die HE auf derselben weiterlaufen. Es folgt ganz allgemein: Der Abstand zweier benachbarter (paralleler) Bewegungskurven wird in ihrem weiteren (parallelen) Verlauf, d. h. bezüglich der laufend durchstoßenen Gradientenflächen niemals größer. Es kann gezeigt werden, daß aus einem gegenteiligen Verhalten zweier benachbarter Bewegungskurven notwendig auf das Vorhandensein mindestens einer nicht konvexen Gradientenfläche geschlossen werden kann.

Der erste Hilfssatz besagt, daß man sich beim rekurrenten Verfahren bereits während des Durchlaufens der ersten Strecke vom Punkt $\mathfrak{x}_0$ bis zum Punkt $\mathfrak{x}_1$ längs $\mathfrak{r}$ ebenfalls jedem Punkt von $\mathfrak{M}$ nähert, sofern $\mathfrak{M}$ nicht leer ist. Dasselbe gilt für die Durchlaufung des gesamten Polygonzuges $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x} = \tilde{\mathfrak{x}}$. Durch den zweiten Hilfssatz ist gewährleistet, daß benachbarte Bewegungskurven benachbart bleiben. Bewegungskurven, die in einem Ausgangsbereich des R_n einen bestimmten Abstand von einer vorgegebenen Bewegungskurve nicht überschreiten, bilden eine röhrenförmige Umgebung dieser Bewegungskurve. Der zweite Hilfssatz besagt, daß der „Querschnitt“ dieser Röhre bis zum Erreichen des Zielpunktes monoton abnimmt. Hieraus folgt, daß eine Lösungskurve stabil ist hinsichtlich der Tatsache, daß ein Abweichen von dieser Kurve, z.B. bedingt durch den Driftfehler der Integrierverstärker, die Trägheit der Sprungfunktionen, usw. wiederum zu einer Bewegungskurve führt, die ihrerseits zu einem Zielpunkt konvergiert. Die mit Hilfe des Rechners gefundenen Koordinaten eines Zielpunktes liegen also innerhalb der Genauigkeitsgrenzen des Rechners und sind von der Wahl des Ausgangspunktes unabhängig.

5.2. Der Fall: $\mathfrak{M}$ ist leer

Auch wenn $\mathfrak{M}$ leer ist, wird durch die Differentialgleichung (1) in allen Punkten, die auf keiner HE liegen, ein Geschwindigkeitsvektor definiert. Ebenso erhält man durch das rekurrente Verfahren (vgl. 4.2.) in allen HEn-Punkten den entsprechenden Geschwindigkeitsvektor. (Die Lösungskurven der auf diese Weise erweiterten Differentialgleichung entsprechen wiederum den mit Hilfe des Analogrechners erhaltenen Bewegungskurven.) Nach Wahl eines beliebigen Anfangspunktes enden jedoch die Bewegungskurven sämtlich in einem Punkt, der allemal im Endlichen liegt. Die Menge dieser Endpunkte $\mathfrak{x}^{**}$, die alle nicht Zielpunkte des gestellten Problems sind, werde mit $\mathfrak{M}^{**}$ bezeichnet. In den inneren Punkten von $\mathfrak{M}^{**}$ fallen Anfangspunkt und Endpunkt einer Bewegungskurve zusammen, d. h. die Bewegungskurve entartet zu einem Punkt.

Die Ausführungen von § 1 und § 2 müssen in folgenden Punkten geändert werden. Der Satz von § 1 erhält den Wortlaut: „Liegt der Anfangspunkt $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}(0)$ in einem Teilgebiet des R_n, dessen sämtliche Randpunkte auf HEn liegen und dessen innere Punkte nicht auf HEn liegen, so bewegt sich $\mathfrak{x}(t)$ für $t \geqq 0$ längs der Geraden $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_k)$ auf einen Punkt der das Gebiet berandenden HEn zu, wobei $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ die Normalen aller jener HEn sind, auf deren negativer Seite $\mathfrak{x}_0$ liegt. Die Bewegung kann in Ruhe ausarten, wenn die Summe $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_k$ verschwindet.“ Im letzteren Fall gehört $\mathfrak{x}_0$ der Menge $\mathfrak{M}^{**}$ an. Die Ausführungen in § 2 bleiben erhalten, sofern sie nicht die Menge $\mathfrak{M}^{**}$ betreffen. Insbesondere gilt weiterhin, daß die Gradientenflächen außerhalb $\mathfrak{M}^{**}$ konvexe Polyeder sind. Innerhalb $\mathfrak{M}^{**}$ entarten die Gradientenflächen zu Punkten. Die Gradientenflächen müssen jedoch nicht mehr beschränkt sein, wie das Beispiel

$$\mathfrak{H}_1 : -x_1 - 1 = 0; \quad \mathfrak{H}_2 : x_1 - 1 = 0 \quad \text{im} \quad R_2$$

zeigt. Aber auch hier umschließt jede Gradientenfläche die Punktmenge $\mathfrak{M}^{**}$ und zur negativen bzw. positiven „Seite“ der Gradientenflächen zählen alle jenen Punkte, die auf derselben Seite liegen wie die Punkte von $\mathfrak{M}^{**}$ bzw. nicht.

Dann und nur dann, wenn $\mathfrak{M}$ leer ist, ist die Punktmenge $\mathfrak{M}^{**}$ nicht leer, so daß in den meisten Ausführungen der früheren Kapitel die Menge $\mathfrak{M}^{**}$ die Menge $\mathfrak{M}$ ersetzen kann. Die Ausführungen über die Begriffe Bewegungskurven, $\mathfrak{x}_0$-Bereich, ausgezeichneter $\mathfrak{x}_0$-Bereich sowie über das rekurrente Verfahren, können somit auch im Falle einer leeren Menge $\mathfrak{M}$ gemacht werden. Die über die Stabilität gemachten Aussagen behalten weiterhin Gültigkeit.

5.3. Allgemeines

Durch Schaltung der Differentialgleichung (1) auf dem Analogrechner erhält man unabhängig davon, ob die Menge $\mathfrak{M}$ leer ist oder nicht, als Lösungskurven diejenigen, wie sie sich als Lösungen der auf Grund des rekurrenten Verfahrens erweiterten Differentialgleichung (1) ergeben. Die Lösungskurven sind nur vom beliebig zu wählenden Anfangspunkt $\mathfrak{x}_0$ abhängig und enden, falls $\mathfrak{M}$ leer ist, in einem im Endlichen liegenden Punkt der Menge $\mathfrak{M}^{**}$, wenn $\mathfrak{M}$ nicht leer ist, in einem Zielpunkt $\mathfrak{x}^*$, der im Endlichen liegt, oder das Problem hat keine im Endlichen liegende Lösung. Das Verfahren ist also auch gleichzeitig dafür geeignet zu entscheiden, ob das gestellte Problem lösbar ist oder nicht. Man beobachtet auf dem Analogrechner die Bewegungskurven der geschalteten Differentialgleichung (1), bis diese in einem Punkt endet, der nicht Randpunkt des Meßbereiches ist (vgl. 1.3); dann ist durch Ablesen der Größe δ bzw. der Größen λ_μ sofort feststellbar, ob der Endpunkt der Bewegungskurve Zielpunkt ist und damit Lösung der gestellten Aufgabe oder ob er der Menge $\mathfrak{M}^{**}$ angehört und die Aufgabe keine Lösung besitzt.

Literatur

[1] Pyne, I. B.: Linear Programming on an Electronic Analogue Computer. Trans. Amer. Inst. Electr. Eng. **75**, 139—143 (1956).
[2] Jackson, A. S.: Analog Computation. New York: McGraw Hill 1960. Chapter **10**, S. 357 ff.
[3] Heinhold, J.: Die Anwendung des elektronischen Analogrechners in der linearen Optimierung. ZAMM Bd. **41** Tagungsheft, 182—187 (1961).
[4] Feldbaum, A. A.: Rechengeräte in automatischen Systemen. München: R. Oldenbourg 1962.

Institut für Angewandte Mathematik
der Technischen Hochschule
8 München 2, Arcisstr. 21

(Eingegangen am 8. März 1963)