Z. Wahrscheinlichkeit verw. Gebiete
35, 121 – 129 (1976)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Représentation des martingales de carré integrable relative aux processus de Wiener et de Poisson à n paramètres

Marc Yor*

Laboratoire de Calcul des Probabilités, Université Pierre et Marie Curie, 9 Quai St. Bernard, F-75005 Paris, France

Le théorème de E. Wong et M. Zakaï sur la représentation des martingales de carré intégrable du processus de Wiener à 2 paramètres ([6] et [2]) est étendu en toute dimension $n \in \mathbb{N}$. La méthode employée par l'auteur – différente de celles figurant dans les articles cités précédemment – consiste à exprimer sous la forme d'intégrales stochastiques des martingales exponentielles remarquables (pour le processus de Wiener à n paramètres). Cette méthode permet de traiter conjointement le cas du processus de Poisson à n paramètres.

0. Notations

$\mathbb{R}_+^n = \{t = (t_1, \dots, t_n) = (t^{n-1}, t_n) | t_1 \geqq 0, \dots, t_n \geqq 0\}$, $t \in \mathbb{R}_+^n$; $t' \in \mathbb{R}_+^n$. On note $t \leqq t'$ lorsque: $t_1 \leqq t'_1, \dots, t_n \leqq t'_n$. Si $t \leqq t'$, $(t, t']$ désigne l'ensemble $\{u | t_i < u_i \leqq t'_i \forall i\}$. On note un point de $(\mathbb{R}_+^n)^k$ $\hat{u}^k = (u^1, \dots, u^k)$.

Si f est une fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^n)^k$, et $s \in \mathbb{R}_+^n$, on note

$$f_s(\hat{u}^k) = f(\hat{u}^k) \prod_{i=1}^{k} 1_{(0,s]}(u^i).$$

Une fonction f: $(\mathbb{R}_+^n)^k \to \mathbb{R}$ est dite continue à gauche (resp. à droite) si:

$$\forall \hat{u}^k \in (\mathbb{R}_+^n)^k, \quad \lim_{\substack{\widehat{u^n}^k \to \hat{u}^k \\ (u^n)^i \leqq u^i (1 \leqq i \leqq k) \\ (\text{resp} \geqq)}} f(\widehat{u^n}^k) = \mathrm{f}(\hat{u}^k).$$

Une fonction f: $(\mathbb{R}_+^n)^k \to \mathbb{R}$ est dite continue si elle est continue pour la topologie usuelle de $(\mathbb{R}_+^n)^k$.

Enfin, toutes les fonctions considérées ci-dessous sont à valeurs réelles.

1. Définitions et généralités

Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace l.c.d. muni de sa tribu borélienne. On note $\mathscr{B}_b(E, \mathscr{E})$ l'ensemble des fonctions boréliennes, bornées sur $(E, \mathscr{E})$. $\mathscr{B}_c(E, \mathscr{E})$ est constitué des fonctions

---

* Membre du Laboratoire de Probabilités associé au C.N.R.S. (L.A. 224)

de $\mathscr{B}_b(E,\mathscr{E})$ à support compact. D'autre part, $M_p^+(E,\mathscr{E})$ désigne l'ensemble des sommes finies de mesures de Dirac sur $(E,\mathscr{E})$.

Soit μ mesure de Radon positive sur $(E,\mathscr{E})$. On note $\mathscr{E}_\mu$ la classe des ensembles boréliens μ.intégrables. Rappelons que l'on appelle mesure brownienne (centrée, réelle) sur $L^2(E,\mathscr{E},\mu)$ tout processus gaussien, centré, réel $\underline{B}=(\Omega,\mathscr{A},P,\ B(\Gamma),\ \Gamma\in\mathscr{E}_\mu)$ de covariance μ et mesure de Poisson (réelle) sur $(E,\mathscr{E},\mu)$ tout processus de Poisson ponctuel $\underline{N}=(\Omega,\mathscr{A},P,\ N(\omega,\cdot)\in M_p^+(E,\mathscr{E}))$ d'intensité μ (voir, par exemple, [4] pour ces définitions).

Le noyau $(f,g)\to\int f g\, d\mu$ défini sur $L^2(E,\mathscr{E},\mu)\times L^2(E,\mathscr{E},\mu)$ est symétrique et de type positif, ce qui assure l'existence de $\underline{B}$ ([3] et [4]). La construction de $\underline{N}$, faite en [4] (p. 162), en supposant μ bornée, se généralise facilement dans notre cadre.

Soit donc $\underline{B}$ mesure brownienne sur $L^2(E,\mathscr{E},\mu)$ (resp.: $\underline{N}$ mesure de Poisson sur $(E,\mathscr{E},\mu)$). On définit les tribus $(\mathscr{F}_A, A\in\mathscr{E})$ respectivement par:

$$\mathscr{F}_A=\begin{cases}\sigma\{B(\Gamma);\ \Gamma\in\mathscr{E}_\mu;\ \Gamma\subset A\}\vee\mathscr{N}\\ \sigma\{N(\Gamma);\ \Gamma\in\mathscr{E}_\mu;\ \Gamma\subset A\}\vee\mathscr{N},\end{cases}$$

où $\mathscr{N}$ désigne la classe des éléments P.négligeables pour $\mathscr{F}_E$. Si $\mathscr{A}$ est une famille filtrante croissante d'éléments de $\mathscr{E}$, on appelle $\mathscr{A}$.martingale de carré intégrable toute $(\mathscr{F}_A, A\in\mathscr{A}, P)$ martingale $(M_A, A\in\mathscr{A})$ vérifiant: $\forall A\in\mathscr{A},\ E(M_A^2)<\infty$. On dira simplement martingale de carré intégrable lorsque $(E,\mathscr{E},\mu)=(\mathbb{R}_+^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+^n),\lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^n$, avec $\mathscr{A}=((0,t], t\in\mathbb{R}_+^n)$.

De façon générale, le lemme suivant donne une famille importante de $\mathscr{E}$.martingales de carré intégrable.

Lemme 1.1. *1. Soit $A\in\mathscr{E}$; les variables*

$$M_A^f=\begin{cases}\exp\{B(f\,1_A)-\frac{1}{2}\int_A f^2\,d\mu\}, & f\in L^2(E,\mathscr{E},\mu)\\ \exp\{\int_A f\,dN-\int_A (e^f-1)\,d\mu\}, & f\in\mathscr{B}_c(E,\mathscr{E})\end{cases}$$

sont totales dans $L^2(\Omega,\mathscr{F}_A,P)$.

2. Soit $f\in L^2(E,\mathscr{E},\mu)$ (resp. $\mathscr{B}_c(E,\mathscr{E})$). Le processus $(M_A^f, A\in\mathscr{E})$ est une $\mathscr{E}$.martingale de carré intégrable.

Preuve. Nous ne la donnons que pour $\underline{B}$, la démonstration pour $\underline{N}$ étant identique.

1. Toute variable $Y\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_A,P)$, orthogonale aux v.a. $(M_A^f, f\in L^2(E,\mathscr{E},\mu))$ est en fait orthogonale aux variables $(\exp B(f 1_A),\ f\in L^2(E,\mathscr{E},\mu))$, donc à toute variable $\phi[B(f_1 1_A),\dots,B(f_p 1_A)]$ $(\phi\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^p), p\in\mathbb{N})$, et donc, d'après le théorème de classe monotone à $L^2(\Omega,\mathscr{F}_A,P)$.

2. $\underline{B}$ étant une mesure brownienne centrée, si u et v sont deux fonctions orthogonales de $L^2(E,\mathscr{E},\mu)$, les variables $B(u)$ et $B(v)$ sont indépendantes. Donc, si $f\in L^2(E,\mathscr{E},\mu)$, et $A\subset C\in\mathscr{E}$,

$$E[M_C^f|\mathscr{F}_A]=M_A^f\,E[M_{C\setminus A}^f|\mathscr{F}_A]=M_A^f\,E[M_{C\setminus A}^f]=M_A^f. \quad \square$$

Dans toute la suite, on se restreint au cas où $(E,\mathscr{E},\mu)\equiv(\mathbb{R}_+^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+^n),\lambda)$. D'après [5], il existe une réalisation de $\underline{B}$ telle que le processus $B_t=B(]0,t_1]\times-\times]0,t_n])$ soit à trajectoires continues: on appelle $(B_t, t\in\mathbb{R}_+^n)$ processus de

Wiener à n paramètres. De même, on appelle $N_t = N(]0, t_1] \times - \times]0, t_n])$ processus de Poisson à n paramètres: ce processus est continu à droite par construction.

2. Représentation des martingales de carré intégrable des processus de Wiener et de Poisson à n paramètres

Pour unifier l'écriture, on note désormais:

$$X(A) = \begin{cases} B(A) \\ \\ N(A) - \lambda(A) \end{cases}, \quad A \in \mathscr{E}_\lambda; \qquad X_u = \begin{cases} B_u \\ \\ N_u - \prod_{i=1}^{n} u_i \end{cases}; \qquad \bar{f}(u) = \begin{cases} f(u) \\ \\ e^{f(u)} - 1. \end{cases}$$

Si $A = (0, t]$, on note $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{(0,t]}$ et $M^f_{(0,t]} = M^f_t$.

2 a. Développement des martingales M^f_t

$\mathscr{P}^i (1 \leqq i \leqq n)$ désigne la tribu sur $E \times \Omega$ engendrée par les processus $(\phi(u), u \in E)$, $\mathscr{F}^i_u = \mathscr{F}_{\{v \mid v_i \leqq u_i\}}$ adaptés et continus à gauche. On note

$$L^2(\mathscr{P}^i) = \{\phi \in \mathscr{P}^i \mid E[\int \phi^2(u)\, du] < \infty\}$$

et

$$L^2_{\mathrm{loc}}(\mathscr{P}^i) = \{\phi \in \mathscr{P}^i \mid \forall z \in E,\ \phi 1_{(0,z]} \in L^2(\mathscr{P}^i)\}.$$

L'extension du théorème 2.3 de [2] à notre cadre, est immédiate, permettant ainsi de définir l'intégrale stochastique $(\phi \cdot X)_z = \int_{(0,z]} \phi(u)\, dX_u$, pour tout $\phi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathscr{P}^i)$. L'application linéaire $\phi \to \phi \cdot X$, à valeurs dans les processus de carré intégrable, ainsi définie, vérifie, et est caractérisée[1] par les propriétés suivantes:

α) Si $\phi(u, \omega) = \alpha(\omega) 1_{(a,b]}(u) \in L^2(\mathscr{P}^i)$, $(\phi \cdot X)_z = \alpha X\{(a, b] \cap (0, z]\}$.

β) Pour tout $\phi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathscr{P}^i)$, $(\phi \cdot X)$ est une $(\mathscr{F}^i_z, z \in E)$ martingale de carré intégrable continue à droite (continue si $X = B$).

γ) Pour tout $\phi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathscr{P}^i)$, le processus $(\phi \cdot X)^2_z - \int_{(0,z]} \phi^2(u)\, du$ est une $(\mathscr{F}^i_z, z \in E)$ martingale intégrable.

On peut maintenant énoncer le:

Lemme 2.1. *Soit $f \in L^2(E, \mathscr{E}, \lambda)$ (resp $\mathscr{B}_c(E, \mathscr{E})$) et $\sigma \in E$. On a les formules:*

$$M^f_\sigma = 1 + \int_{(0,\sigma]} M^f_{(\sigma^{n-1}, t_{\bar{n}})} \bar{f}(t)\, dX_t \quad \text{p.s.,} \tag{1}$$

$$M^f_\sigma = 1 + \int_{(0,\sigma]} M^f_{(\sigma^{n-2}, t_{\overline{n-1}}, t_{\bar{n}})} \bar{f}(t)\, dX_t \quad \text{p.s.} \tag{2}$$

$$+ \int_{(0,\sigma]} dX_t\, \bar{f}(t) \int_{(0,\sigma^{n-2}] \times (t_{n-1}, \sigma_{n-1}] \times (0, t_n)} dX_v\, \bar{f}(v)\, M^f_{(\sigma^{n-2}, v_{\overline{n-1}}, t_{\bar{n}})}.$$

Preuve. 1. Montrons la formule (1) pour $X = B$.

---

[1] On confond deux processus indistinguables

Si $N_t^f \stackrel{\Delta}{=} \int_{(0,t]} f(u)\,dX_u$, on a les égalités:

$$M_\sigma^f = 1 + \int_0^{\sigma_n} M^f_{(\sigma^{n-1},t_n)}\, d_{t_n} N^f_{(\sigma^{n-1},t_n)} \stackrel{\Delta}{=} 1 + Y_\sigma^f \tag{$*$}$$

$$= 1 + \int_{(0,\sigma]} M^f_{(\sigma^{n-1},t_n)} f(t)\,dX_t \quad \stackrel{\Delta}{=} 1 + Z_\sigma^f.$$

L'égalité ($*$) découle de la formule de Ito (à un paramètre). Fixons σ^{n-1}. D'après b), les processus $t_n \to N^f_{(\sigma^{n-1},t_n)}$ et $t_n \to Z^f_{(\sigma^{n-1},t_n)}$ sont deux $(\mathscr{F}^n_{(\sigma^{n-1},t_n)}, t_n \geqq 0)$ martingales telles que, à l'aide de γ)

$$\langle N^f_{\sigma^{n-1},\bullet}, Z^f_{\sigma^{n-1},\bullet}\rangle_{t_n} = \int_{(0,(\sigma^{n-1},t_n)]} M^f_{(\sigma^{n-1},t_n^-)} (\bar{f}(t))^2\,dt,$$

et donc, toujours d'après γ), $E[(Y_\sigma^f - Z_\sigma^f)^2] = 0$, d'où (1).

2. Dans le cas du processus de Poisson, posons

$$L_\sigma^f = 1 + \int_{(0,\sigma]} M^f_{(\sigma^{n-1},t_n^-)} \bar{f}(t)\,dX_t.$$

On a les égalités:

$$E[(M_\sigma^f)^2] = E[(L_\sigma^f)^2] = e^{\int_{(0,\sigma]} du(\bar{f}(u))^2} \stackrel{\Delta}{=} I_\sigma$$

D'où: $E[(M_\sigma^f - L_\sigma^f)^2] = 2(I_\sigma - E(M_\sigma^f L_\sigma^f))$.

Soit $(\Gamma_i^{(p)}, i \in \tau_p)$ une suite de quadrillages de plus en plus fins de $(0,\sigma]$ par des pavés tels que la longueur de chaque côté converge uniformément vers 0 lorsque $(p \to \infty)$. Soit $t_i^{(p)}$ le sommet du pavé $\Gamma_i^{(p)}$ de coordonnées minimales. Fixons $\sigma \in E$. D'après l'inégalité de Doob, on a: $E[\operatorname{Sup}_{t_n \leqq \sigma_n} (M^f_{(\sigma^{n-1},t_n)})^2] < \infty$, et donc, d'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on a:

$$E[M_\sigma^f L_\sigma^f] = 1 + \lim_{(p\to\infty)} \sum_{i\in\tau_p} E[M_\sigma^f M^f_{(\sigma^{n-1},(t_n)_i)} \int_{\Gamma_i} \bar{f}(t)\,dX_t]$$

Soit $R_i = (0; (\sigma^{n-1}, (t_n)_i)]$. Ecrivons $(0,\sigma] = R_i + \Gamma_i + H_i$; alors:

$$E[M_\sigma^f L_\sigma^f] = 1 + \lim_{(p\to\infty)} \sum_{i\in\tau_p} E[(M_{R_i}^f)^2]\, E[M_{\Gamma_i}^f \int_{\Gamma_i} \bar{f}(t)\,dX_t]\, E[M_{H_i}^f]$$

$$= 1 + \lim_{(p\to\infty)} \sum_{i\in\tau_p} I_{(\sigma^{n-1},(t_n)_i)} E[M_{\Gamma_i}^f \int_{\Gamma_i} \bar{f}(t)\,dX_t].$$

Par un simple calcul sur les distributions poissonniennes, on obtient:

$$E[M_{\Gamma_i}^f \int_{\Gamma_i} \bar{f}(t)\,dX_t] = \int_{\Gamma_i} (\bar{f}(t))^2\,dt. \text{ D'où:}$$

$$E[M_\sigma^f L_\sigma^f] = 1 + \int_{(0,\sigma]} I_{(\sigma^{n-1},t_n)} (\bar{f}(t))^2\,dt = I_\sigma, \qquad \text{d'où (1).}$$

3. Utilisons la formule (1) pour la $(n-1)$ième coordonnée.

$$M^f_{(\sigma^{n-1},t_n)} = M^f_{(\sigma^{n-2},t_{n-1},t_n)} + \int_{(0,\sigma^{n-2}]\times(t_{n-1},\sigma_{n-1}]\times(0,t_n]} dX_v\, \bar{f}(v)\, M^f_{(\sigma^{n-2},v_{n-1}^-,t_n)} \text{ p.s.}$$

et donc par convergence p.s.:

$$M^f_{(\sigma^{n-1}, t_{\bar{n}})} = M^f_{(\sigma^{n-2}, t_{\overline{n-1}}, t_{\bar{n}})} + \int_{(0,\sigma^{n-2}]\times[t_{n-1},\sigma_{n-1}]\times(0,t_n)} dX_v\, \bar{f}(v)\, M^f_{(\sigma^{n-2}, v_{\overline{n-1}}, t_{\bar{n}})}.$$

En reportant cette égalité en (1), on obtient (2), si l'on remplace $1_{[t_{n-1},\sigma_{n-1}]}(v_{n-1})$ par $1_{(t_{n-1},\sigma_{n-1}]}(v_{n-1})$, ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale, $1_{(t_{n-1}=v_{n-1})}$ étant de $dt_{n-1}\, dv_{n-1}$ mesure nulle. □

En itérant le procédé de développement commencé dans le lemme 2.1, on fait apparaître finalement 2^{n-1} intégrales, dont $C^{k-1}_{n-1}(1\leqq k\leqq n)$ sont des intégrales itérées d'ordre k.

2 b. Définition de $(\mathscr{F}_t, P)$ martingales de carré intégrable

On définit $\mathfrak{S}^k_n = \{\hat{p}_k = (p_1, -, p_k) | 1\leqq p_1 < p_2 - < p_k \leqq n\} \subset \mathbb{N}^k$

$$\Delta(k,\hat{p}_{k-1}) = \left\{ \hat{u}^k\in E^k;\ \begin{array}{ll|ll|ll|l}
 & & u^2_{n-p_2} & < u^3_{n-p_2} & u^3_{n-p_3} & < u^4_{n-p_3} & \\
 & & u^3_{n-p_2+1} & < u^2_{n-p_2+1} & u^4_{n-p_3+1} & < u^3_{n-p_3+1} & \\
 & & & \vdots & & \vdots & \\
u^1_{n-p_1} & < u^2_{n-p_1} & u^3_{n-p_1} & < u^2_{n-p_1} & u^4_{n-p_2} & < u^3_{n-p_2} & \cdots \\
u^2_{n-p_1+1} & < u^1_{n-p_1+1} & u^3_{n-p_1+1} & < u^1_{n-p_1+1} & u^4_{n-p_1+1} & < u^1_{n-p_1+1} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
u^2_n & < u^1_n & u^3_n & < u^1_n & u^4_n & < u^1_n &
\end{array}\right\}$$

$$i_{\hat{p}_{k-1}}(\hat{u}^k) = (u^k_1, -, u^k_{n-p_{k-1}}, u^{k-1}_{n-p_{k-1}+1}, -, u^2_{n-p_1}, u^1_{n-p_1+1}, -, u^1_n)\in E$$

$\mathscr{P}(k,\hat{p}_{k-1})$ est la tribu sur $\Omega\times E^k$ engendrée par les processus

$$\phi(\hat{u}^k) = 1_{\Delta(k,\hat{p}_{k-1})}(\hat{u}^k)\, \Psi(\hat{u}^k)$$

où Ψ est un processus continu à gauche, $\mathscr{F}_{i_{\hat{p}_{k-1}}}(\hat{u}^k)$ adapté

$$L^2(k,\hat{p}_{k-1},X) = \left\{ \phi: \Omega\times E^k \to \mathbb{R},\quad \text{vérifiant:}\ \begin{array}{l} \text{i)}\ \phi\in\mathscr{P}(k,\hat{p}_{k-1}) \\ \text{ii)}\ \phi=0,\quad \text{hors de } \Delta(k,\hat{p}_{k-1}) \\ \text{iii)}\ \|\phi\|^2_{\hat{p}_{k-1}} = E(\int d\hat{u}^k |\phi(\hat{u}^k)|^2) < \infty \end{array}\right\}$$

On fixe, pour le reste de la section 2b, $1 < k\leqq n$ et $\hat{p}_{k-1}\in\mathfrak{S}^{k-1}_{n-1}$.

Lemma 2.2. *Les processus simples, c'est à dire* $\phi(\hat{u}^k) = \alpha\prod_{i=1}^k 1_{(a^i,b^i]}(u^i)$, *vérifiant* $\phi\equiv 0$ *hors de* $\Delta(k,\hat{p}_{k-1})$, *et* $\alpha\in L^2(P,\mathscr{F}_{i_{\hat{p}_{k-1}}(\hat{a}^k)})$ *sont totaux dans*

$$(L^2(k,\hat{p}_{k-1},X), \|\cdot\|_{\hat{p}_{k-1}}).$$

Preuve. Soit $\phi = 1_{\Delta(k,\hat{p}_{k-1})}\Psi$, avec Ψ processus continu à gauche, borné, à support compact et $\mathscr{F}_{i_{\hat{p}_{k-1}}(\hat{u}^k)}$ adapté. Par continuité à gauche, on a:

$$\phi(\hat{u}^k) = \lim_{(m\to\infty)} 1_{\Delta(k,\hat{p}_{k-1})}(\hat{u}^k) \sum_{(q_1,-,q_k)\in(Z^n)^k} \prod_{i=1}^k 1_{\left(\frac{q_i}{2^m};\frac{q_i+1}{2^m}\right]}(u^i)\, \Psi\left(\frac{q_1}{2^m}, -, \frac{q_k}{2^m}\right)$$

la limite ayant lieu en tout point, et dans $L^2(k, \hat{p}_{k-1}, X)$. $\Delta(k, \hat{p}_{k-1})$ étant ouvert, on peut se restreindre à sommer sur les indices $(q_1, —, q_k)$ tels que

$$\mathop{\times}_{i=1}^{k} \left(\frac{q_i}{2^m}; \frac{q_i+1}{2^m}\right] \subset \Delta(k, \hat{p}_{k-1}).$$

Il suffit donc de montrer que les processus $\phi = 1_{\Delta(k, \hat{p}_{k-1})} \Psi$, avec Ψ processus continu à gauche, $\mathscr{F}_{i_{\hat{p}_{k-1}}(\hat{u}^k)}$ adapté, borné, sont totaux dans $L^2(k, \hat{p}_{k-1}, X)$, ce qui découle du théorème de classe monotone. □

Les processus simples permettent de construire les martingales élémentaires suivantes:

Proposition 2.3. *Soit* $\phi(\hat{u}^k) = \alpha \prod_{i=1}^{k} 1_{(a^i, b^i]}(u^i)$ *un processus simple. Alors,*

$$I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi)(s) \stackrel{\Delta}{=} \alpha \prod_{i=1}^{k} X(R^i_s),$$

avec $R^i_s = (a^i, b^i] \cap (0, s]$, *est une martingale continue (resp: continue à droite) vérifiant:*

$$E[(I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi)(s))^2] = \|\phi_s\|^2_{\hat{p}_{k-1}}. \tag{3}$$

Remarque. Par abus de notation, on désigne aussi par $I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi)$ la variable terminale de la martingale $(I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi)(s), s \in E)$, i.e.:

$$I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi) = \alpha \prod_{i=1}^{k} X(R^i).$$

Preuve. Montrons que $(I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi)(s), s \in E)$ est une martingale. Soit $t \leqq s$. On note $R^i_s = R^i_t + C^i_{(t,s)}$. On procède en plusieurs étapes:

1. $t \geqq i^k_{\hat{p}_{k-1}}(a^1, —, a^k)$. On a alors:

$$E\left[\alpha \prod_{i=1}^{k} X(R^i_s) | \mathscr{F}_t\right]$$
$$= \alpha E\left[\prod_{i=1}^{k} (X(R^i_t) + X(C^i_{(t,s)})) | \mathscr{F}_t\right].$$

En développant le produit, on obtient $\alpha \prod_{i=1}^{k} X(R^i_t)$ et des termes du type

$$\alpha \prod_j X(R^j_t) E \prod_\ell X(C^\ell_{(t,s)}) | \mathscr{F}_t]$$
$$= \alpha \prod_j X(R^j_t) E[\prod_\ell X(C^\ell_{(t,s)})] \text{ (car } C^\ell_{(t,s)} \subset \complement(0, t])$$
$$= \alpha \prod_j X(R^j_t) \prod_\ell E[X(C^\ell_{(t,s)})] = 0 \text{ (car } \ell \neq \ell' \Rightarrow C^\ell_{(t,s)} \cap C^{\ell'}_{(t,s)} = \emptyset).$$

2. t et $i^k_{\hat{p}_{k-1}}(a^1, —, a^k)$ ne peuvent être comparés.

Supposons par exemple: $t_1 \geqq a^k_1, \ldots, t_{n-p_1} \geqq a^2_{n-p_1}$, mais il existe $r \geqq 1$ tel que $t_{n-p_1+r} < a^1_{n-p_1+r}$ (la démonstration dans les autres cas 2. est analogue à celle faite dans ce cas).

Remarquons ici que $\alpha \prod_{i=1}^{k} X(R^i_t) = 0$, car $R^1_t = \emptyset$.

On veut donc montrer: $E\left[\alpha \prod_{i=1}^{k} X(R_s^i)|\mathscr{F}_t\right]=0.$

Or, le membre de gauche est égal à:

$$E\left[\alpha \prod_{i=2}^{k} X(R_s^i)\, E[X(R_s^1)|\mathscr{F}_{a^1}^{n-p_1+r}]|\mathscr{F}_t\right]$$

et:

$$\begin{aligned} E[X(R_s^1)|\mathscr{F}_{a^1}^{n-p_1+r}] &= X(R_s^1 \cap \{u^1 | u_{n-p_1+r} \leqq a^1_{n-p_1+r}\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. $t < i^k_{\hat{p}_{k-1}}(a^1, —, a^k)$.

On a $\prod_{i=1}^{k} X(R_t^i)=0$, donc si $s < i^k_{\hat{p}_{k-1}}(a^1, —, a^k)$, on a le résultat. Sinon, on a:

$$\begin{aligned} E\left[\alpha \prod_{i=1}^{k} X(R_s^i)|\mathscr{F}_t\right] &= E\left[E\left(\alpha \prod_{i=1}^{k} X(R_s^i)|\mathscr{F}_{i^k_{\hat{p}_{k-1}}(a^1,—,a^k)}\right)|\mathscr{F}_t\right] \\ &= E\left[\alpha \prod_{i=1}^{k} X(R^i_{i^k_{\hat{p}_{k-1}}(a^1,—,a^k)})|\mathscr{F}_t\right] \end{aligned}$$

d'après 1) et 2). Or, pour tout i, $R^i_{i^k_{\hat{p}_{k-1}}(a^1,—,a^k)}=\emptyset$.

Enfin, l'égalité (3) résulte de: $R_s^i \cap R_s^j = \emptyset$, pour $i \neq j$. □

On étend ensuite la définition de $I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi)$ par linéarité aux processus ϕ combinaisons linéaires de processus simples. L'égalité (3) est conservée, ce qui permet de définir, d'après le lemme 2.2, $I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi)$ par limite dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}_E, P)$, pour tout processus ϕ de $L^2(k, \hat{p}_{k-1}, X)$. La continuité (resp: continuité à droite) de l'intégrale ainsi obtenue résulte de l'inégalité de Doob-Cairoli ([1] et [2], théorème 1.2) pour une martingale M de carré intégrable, continue à droite:

$$\forall s \in E,\ E[\sup_{u \leqq s} |M_u|^2] \leqq 16\, E[|M_s|^2].$$

Nous montrons maintenant, en généralisant en dimension n, un «théorème de Fubini» établi en [2] (théorème 2.6), que l'on peut écrire les martingales construites précédemment comme intégrales stochastiques itérées d'ordre k.

Proposition 2.4. *Soit* $\Phi(\stackrel{\Delta}{=} \Phi_0) \in L^2(k; \hat{p}_{k-1}; X)$.

Il existe k processus $\Phi_m(u^1, -, u^{k-m})$ $(0 \leqq m \leqq k-1)$ *tels que:*

1. $\forall 0 \leqq m \leqq k-1$, $\Phi_m \in \mathscr{B}(E^{k-m}) \otimes \mathscr{F}_E$.
2. $\forall 0 \leqq m \leqq k-1$, $du^1 \ldots du^{k-m-1}$ p.s., $\Phi_m(u^1, -, u^{k-m-1}, .) \in L^2(\mathscr{P}^{n-p}\ k-m-1)$ et $\Phi_{k-1} \in L^2(\mathscr{P}^n)$.
3. $\forall 0 \leqq m < k-1$, $\Phi_{m+1}(u^1, -, u^{k-m-1})$

$$= \int \Phi_m(u^1, -, u^{k-m})\, dX_{u^{k-m}}\quad dP \bigotimes_{i=1}^{k-m-1} du^i \text{ p.s.}$$

4. $I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\Phi) = \int \Phi_{k-1}(u^1)\, dX_{u^1}$. p.s.

Remarque. Les processus Φ_m vérifiant la propriété 2), les intégrales stochastiques figurant en 3) ont été définies au début de la section 2.a.

Preuve. Il suffit de démontrer la proposition pour Φ processus simple, le cas général s'en déduisant par approximation et convergence dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}_E, P)$ (de même que pour la dimension 2: voir la démonstration du théorème 2.6 de [2]).

Soit donc $\Phi(\hat{u}^k)=\alpha \prod_{i=1}^{k} 1_{(a^i, b^i]}(u^i)$ processus simple. Il est alors immédiat de vérifier que les processus $\Phi_m (0<m\leqq k-1)$ définis par: $\Phi_m(u^1, -, u^{k-m})=\alpha \prod_{i=1}^{k-m} 1_{(a^i, b^i]}(u^i) \prod_{k-m+1}^{k} X(a^i, b^i]$ vérifient les propriétés voulues. □

En utilisant les relations 4) et 3) de la proposition précédente pour $m=k-2$, puis $m=k-3, \ldots$, jusqu'à $m=0$, on peut écrire finalement, pour tout processus $\Phi \in L^2(k, \hat{p}_{k-1}, X)$ la formule:

$$I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\Phi)(s)=\int_{(0,s]} dX_{u^1}\Big[\int_{(0,s]} dX_{u^2}\Big[\ldots \int_{(0,s]} dX_{u^k}\,\Phi(\hat{u}^k)\Big]\ldots\Big] \text{ p.s.} \tag{4}$$

2 c. Résultat final

Théorème. *Soit $Z\in L^2(\Omega, \mathscr{F}_E, P)$, resp $(Z_t, t\in E)$ une martingale de carré intégrable. Il existe une constante Z_0 et pour tout $k\,(1\leqq k\leqq n)$ C^{k-1}_{n-1} processus*[1] $(\phi^{\hat{p}_{k-1}})_{\hat{p}_{k-1}\in\mathfrak{S}^{k-1}_{n-1}}$, *tels que:*

$$\phi^{\hat{p}_{k-1}} \; resp\!: \forall s\in E,\; \phi^{\hat{p}_{k-1}}_s \in L^2(k; \hat{p}_{k-1}, X) \tag{5}$$

et:

$$Z=Z_0+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\hat{p}_{k-1}\in\mathfrak{S}^{k-1}_{n-1}} I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi^{\hat{p}_{k-1}}) \qquad \text{p.s.} \tag{6}$$

$$resp\!: \forall t\in E,\; Z_t=Z_0+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\hat{p}_{k-1}\in\mathfrak{S}^{k-1}_{n-1}} I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi^{\hat{p}_{k-1}})(t) \qquad \text{p.s.} \tag{6'}$$

De plus, pour tout $\hat{p}_{k-1}\in\mathfrak{S}^{k-1}_{n-1}$, le processus $\phi^{\hat{p}_{k-1}}$ est défini de façon unique $dP \bigotimes_{i=1}^{k} du^i$ p.s.

Preuve. Montrons tout d'abord que les différentes intégrales figurant en (6) (resp (6′)) sont deux à deux orthogonales dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}_E, P)$.

Il suffit de le montrer pour des processus $\phi^{\hat{p}_{k-1}}$ simples.

a) Soit $\phi(u)=\alpha\, 1_{(a,b]}(u)$ et $\Psi(\hat{u}^k)=\beta \prod_{i=1}^{k} 1_{(a^i,b^i]}(u^i)\,(k\geqq 2)$ processus simples appartenant respectivement à $L^2(1,0,X)$ et $L^2(k; \hat{p}_{k-1}, X)$.

On a alors $I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\Psi)=\gamma\, X(a^1, b^1]\, X(a^2, b^2]$, avec $b^1_{n-p_1}<a^2_{n-p_1}$ et $\gamma\in\mathscr{F}^{n-p_1}_{a^2}$ D'où, d'après la propriété γ) de la section 2a,

$$\begin{aligned} E[I^1_0(\phi)\, I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\Psi)] &= E\Big\{\int_{(a^1,b^1]} du^1\, \phi(u^1)\,\gamma\, X(a^2,b^2]\Big\} \\ &= \int_{(a^1,b^1]} du^1\, E[\phi(u^1)\,\gamma\, E[X(a^2,b^2]\,|\,\mathscr{F}^{n-p_1}_{a^2}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) Soit $\phi(\hat{u}^k)=\alpha \prod_{i=1}^{k} 1_{(a^i,b^i]}(u^i)$ et $\Psi(\hat{u}^{k'})=\beta \prod_{i=1}^{k'} 1_{(a'^i,b'^i]}(u^i)$ deux processus simples appartenant respectivement à $L^2(k, \hat{p}_{k-1}, X)$ et $L^2(k', \hat{p}'_{k'-1}, X)$ (avec

[1] On pose $C^0_{n-1}=1$ et $\hat{p}_0=0$

$k, k' \geqq 2$). Supposons $p_1 < p'_1$. On a alors $I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi) = \tilde{\alpha} X(a^1, b^1]\, X(a^2, b^2]$, avec $b^1_{n-p_1} < a^2_{n-p_1}$ et $\tilde{\alpha} \in \mathscr{F}^{n-p_1}_{a^2}$; de même, $I^{k'}_{\hat{p}'_{k'-1}}(\Psi) = \tilde{\beta} X(a'^1, b'^1]\, X(a'^2, b'^2]$ avec $b'^2_{n-p_1} < a'^1_{n-p_1}$ et $\tilde{\beta} \in \mathscr{F}^{n-p_1}_{a'^1}$. D'où:

$$\begin{aligned} E[I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi)\, I^{k'}_{\hat{p}'_{k'-1}}(\Psi)] &= \int du^1\, 1_{(a^1, b^1]}\, 1_{(a'^1, b'^1]}\, E[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\, X(a'^2, b'^2]\, X(a^2, b^2]] \\ &\int du^1\, 1_{(a^1, b^1]}\, 1_{(a'^1, b'^1]}\, E[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\, X(a'^2, b'^2]\, E(X(a^2, b^2] \mid \mathscr{F}^{n-p_1}_{a^2})] \qquad (7) \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) Avec les mêmes notations qu'en b), supposons maintenant $p_1 = p'_1$. L'égalité (7) est encore valable. Supposons alors $p_2 < p'_2$. Le raisonnement fait en b), appliqué à $E[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\, X(a'^2, b'^2]\, X(a^2, b^2]]$ entraîne la nullité de cette expression.

On obtient ainsi, par itération, que, pour que deux intégrales $I^k_{\hat{p}_{k-1}}(\phi)$ et $I^{k'}_{\hat{p}'_{k'-1}}(\Psi)$ ne soient pas orthogonales, il est nécessaire que $\hat{p}_{k \wedge k'-1} = \hat{p}'_{k \wedge k'-1}$. Ensuite, si $k \neq k'$, un calcul analogue à celui fait en a) entraîne que les deux intégrales sont orthogonales. On a finalement le résultat d'orthogonalité cherché et donc: la décomposition de Z au moyen de (6), si elle existe, est unique.

Soit $\Lambda_t = \{Z \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P) \mid Z$ se décompose suivant (6)$\}$.

D'après le résultat d'orthogonalité que l'on vient d'obtenir, et la formule (3) valable pour tout processus $\phi \in L^2(k, \hat{p}_{k-1}, X)$, Λ_t est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ qui contient les variables M^f_t ($f \in L^2(E, \mathscr{E}, \lambda)$, resp $\mathscr{B}_c(E, \mathscr{E})$) d'après le lemme 2.1. D'après le même lemme, les variables M^f_t sont totales dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$, d'où $\Lambda_t = L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$. Plus généralement, si $Z \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_E, P)$, resp $(Z_t, t \in E)$ est une martingale de carré intégrable, on remarque que les différents processus $\phi^{\hat{p}_{k-1}}_q$ obtenus dans les décompositions de $Z_{\hat{q}} = E(Z \mid \mathscr{F}_{\hat{q}})$ $(q \in \mathbb{N})$ resp $(Z_{\hat{q}}, q \in \mathbb{N})$, où $\hat{q} = (q, \ldots, q)$ sont bien compatibles et donc que les égalités (6) resp (6') sont bien vérifiées.

Corollaire. *Toute $(\mathscr{F}_t, t \in E, P)$ martingale $(M_t, t \in E)$ vérifiant:*

$$\forall t \in E,\ E[|M_t| \{\mathrm{Log}^+ |M_t|\}^{n-1}] < \infty \qquad (8)$$

admet une version continue (continue à droite).

Preuve. Le résultat est vrai pour les martingales de carré intégrable, d'après le théorème. Il s'étend aux martingales vérifiant (8) à l'aide de l'inégalité maximale de R. Cairoli ([1] ou [2]): Si M est une martingale continue à droite, alors:

$$\forall \lambda > 0,\ \lambda P[\sup_{z \leqq t} |M_z| \geqq \lambda] \leqq \frac{e}{e-1} \{1 + E[|M_t| (\mathrm{Log}^+ |M_t|)^{n-1}]\}.$$

Références

1. Cairoli, R.: Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses applications. Séminaire de Probabilités IV. Lecture Notes in Math. **124**, 1–27. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
2. Cairoli, R., Walsh, J. B.: Stochastic integrals in the plane. Acta Math. **134**, 111–183 (1975)
3. Ito, K.: Multiple Wiener integral. J. Math. Soc. Japan **3**, 157–169 (1951)
4. Neveu, J.: Processus aléatoires gaussiens. Presses de l'Université de Montréal. Montréal: 1968
5. Park, W. J.: A multiparameter gaussian process. Ann. Math. Statist. **41**, 1582–1595 (1970)
6. Wong, E., Zakai, M.: Martingales and Stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter. Z. Wahrscheinlichkeit verw. Gebiete **29**, 109–122 (1974)
7. Yor, M.: Représentation des martingales de carré intégrable relatives aux processus de Wiener et de Poisson à n paramètres. C. R. Acad. Sci. Paris **281**, 111–113 (1975)

Reçu le 22 octobre 1975