Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
38, 83–125 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Étude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales

Jean Jacod* et Marc Yor**

Université Paris VI, Laboratoire de Calcul des Probabilités,
4, Place Jussieu, Tour 56, F-75230 Paris V, France

0. Introduction

Soit $(\Omega, \mathscr{F}^0)$ un espace measurable muni d'une filtration $(\mathscr{F}_t^0)_{t\geqq 0}$ constituée de sous-tribus de $\mathscr{F}^0$. Soit X un processus fixé, à valeurs réelles, continu à droite et limité à gauche. L. Dubins et G. Schwarz ont posé en [6] la question suivante (dans un cadre un peu plus restrictif, puisqu'ils parlent de martingales), que l'on notera [Q]: comment caractériser les points extrémaux de l'ensemble $\mathscr{M}_X$ des probabilités P sur $(\Omega, \mathscr{F}^0)$ faisant de X une martingale locale? Ces auteurs, ainsi que C. Dellacherie en [2], ont résolu cette question lorsque l'ensemble des temps est $\mathbb{N}$.

Dans la première partie de l'article, nous généralisons [Q] en remplaçant X par une famille fixée $\mathscr{N}$ de processus continus à droite et limités à gauche, et nous donnons une caractérisation des points extrémaux de $\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$, lorsque l'ensemble des temps est $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$, complétant ainsi les resultats de [22], eux-même partiellement annoncés en [23]. On démontre notamment que P est extrémal dans $\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$ si et seulement si $\mathscr{F}_{0+}^0$ est P-triviale, et si les éléments de $\mathscr{N}$ engendrent (au sens des sous-espaces stables de martingales) l'ensemble de toutes les martingales locales nulles à l'origine. En particulier, $P \in \mathscr{M}_X$ est extrémale si et seulement si toute P-martingale locale admet une représentation $M_t = E(M_0) + \int_0^t u_s\, dX_s$, où u est un processus prévisible convenable.

Après avoir rappelé différents résultats de la théorie de l'intégration stochastique par rapport à une mesure aléatoire-martingale, on montre que de la caractérisation des éléments extrémaux de $\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$, découlent les résultats de [11] sur les points extrémaux de l'ensemble des solutions d'un problème de martingales posé de manière légèrement inhabituelle (car on y fixe a-priori la projection duale prévisible d'une mesure aléatoire).

Dans la seconde partie, après un exposé du théorème de Girsanov généralisé, on obtient des résultats complémentaires lorsque $\mathscr{N}$ est constitué d'un nombre

---

* I.R.I.S.A., Laboratoire associé n° 227, Université de Rennes, 35031-Rennes Cedex, BP 25 A

** Laboratoire de Probabilités associé au C.N.R.S. n° 224, Université Pierre et Marie Curie, 75230-Paris Cedex 05 fini de processus. D'autre part, l'existence de la décomposition d'une surmartingale de la classe (DL) comme différence d'une martingale et d'un processus croissant prévisible permet de traiter le problème analogue pour l'ensemble des probabilités faisant de X une surmartingale de la classe (DL).

Dans la troisième partie on montre, sous certaines conditions auxiliaires sur l'espace Ω et le processus X, que toute probabilité P faisant de X une (sur-)martingale telle que pour tout $t>0$, $E[\sup_{s\leqq t}|X_s|]<\infty$ est barycentre d'une mesure portée par l'ensemble des probabilités extrémales de l'ensemble convexe correspondant. Une étude, menée de manière élémentaire, des solutions P du problème $[Q]$ qui admettent une représentation de la forme $P=\alpha P'+(1-\alpha)P''$, avec P' et P'' extrémales, montre qu'il n'y a pas unicité de la représentation intégrale d'une solution comme barycentre d'une mesure portée par l'ensemble des solutions extrémales.

La dernière partie, que le lecteur peut aborder indépendamment des parties 2 et 3, est consacrée à établir la version des résultats précédents pour les problèmes de martingales posés par D.W. Stroock et S.R.S. Varadhan: soit $\mathscr{S}_x$ l'ensemble des probabilités P sur D^d (espace des applications $X\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^d$, continues à droite et limitées à gauche), muni de la topologie de Skorokhod sur tout compact, telles que

$$-P(X_0=x)=1,$$

$$-\forall f\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d),\qquad f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t \mathscr{L} f(X_s)\,ds \text{ est une } P\text{-martingale},$$

où $\mathscr{L}=L+K\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)\to C(\mathbb{R}^d)$, avec

$$(Lf)(x)=\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{1\leqq i,j\leqq d} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)+\textstyle\sum_{1\leqq i\leqq d} b_i(x)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$$

(opérateur elliptique, en général dégénéré), et

$$(Kf)(x)=\int S(x,dy)\left[f(x+y)-f(x)-\left(\textstyle\sum_{1\leqq i\leqq d} y_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)\dfrac{1}{1+|y|^2}\right],$$

(où S est un «bon» noyau). On montre que $\mathscr{S}_x$ est un convexe compact de l'ensemble des probabilités sur Ω, muni de la topologie de la convergence étroite, et on étudie les points extrémaux de $\mathscr{S}_x$. On examine enfin plus spécialement quelques cas particuliers de non-unicité des solutions de tels problèmes, dont l'un – classique – est dû à I.V. Girsanov:

$$d=1,\qquad (\mathscr{L}f)(x)=\frac{1}{2}\frac{|x|^{2\alpha}}{(1+|x|^{\alpha})^2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x)\quad\text{et}\quad 0<\alpha<1/2.$$

Les principaux résultats de ce travail ont été annoncés dans la note [24].

1. Résultats généraux

1.1. Préliminaires

(a) *Quelques notations.* Soit $(\Omega,\mathscr{F}^0)$ un espace mesurable. $(\mathscr{F}_t^0)_{t\geqq 0}$ est une famille croissante de tribus de Ω, telle que $\mathscr{F}^0=\bigvee_{(t)}\mathscr{F}_t^0$. $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{W}$) est la tribu prévisible (resp. optionnelle, ou bien-mesurable) relative à $(\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$, sur $\Omega \times [0, \infty[$. Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}^0)$, on note $\mathcal{F}(P)$ la complétée de $\mathcal{F}^0$ pour P, et $(\mathcal{F}_t(P))_{t \geq 0}$ la plus petite famille croissante et continue à droite de tribus contenant les ensembles négligeables de $\mathcal{F}(P)$ et telles que $\mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t(P)$. S'il n'y a pas de risque de confusion, on écrit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_t$ au lieu de $\mathcal{F}(P)$ et de $\mathcal{F}_t(P)$. Rappelons que tout $\mathcal{F}_t(P)$-temps d'arrêt est P-ps égal à un $\mathcal{F}_{t+}^0$-temps d'arrêt, ce qui permet bien souvent de ne considérer que les tribus $\mathcal{F}_{t+}^0$.

Sauf mention contraire, un «processus» est une application: $\Omega \times [0, \infty[\to [-\infty, +\infty]$. Si A est un processus à variation finie sur tout compact et Y un processus quelconque, on écrit comme d'habitude $Y \cdot A_t(\omega) = \int_0^t Y_s(\omega)\, dA_s(\omega)$ dès que cette expression a un sens.

Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}^0)$. A toute classe $\mathfrak{C}(P)$ de processus, on associe la classe «locale» $\mathfrak{C}_{\text{loc}}(P)$ constituée des processus A tels qu'il existe une suite (T_n) de $\mathcal{F}_t(P)$-temps d'arrêt (dite «suite localisante») croissant P-ps vers $+\infty$, pour laquelle les processus A^{T_n} (on note A^T le processus arrêté $A_t^T = A_{T \wedge t}$) appartiennent à $\mathfrak{C}(P)$. D'autre part, $\mathfrak{C}^0(P)$ est la classe des processus $A \in \mathfrak{C}(P)$ tels que $A_0 = 0$ P-ps. On note $\mathfrak{B}^+(P)$ l'ensemble des processus croissants A, adaptés à $\mathcal{F}_t(P)$, continus à droite, P-ps nuls à l'origine, intégrables (i.e. $E(A_\infty) < \infty$). Soit $\mathfrak{B}(P) = \mathfrak{B}^+(P) - \mathfrak{B}^+(P)$ l'ensemble des différences de deux éléments de $\mathfrak{B}^+(P)$.

(b) *Martingales.* Pour tout ce qui concerne les martingales et les intégrales stochastiques, nous renvoyons à [5], ou mieux à [15]. Le terme «martingale» signifie toujours «martingale continue à droite et limitée à gauche», et on identifie deux martingales P-indiscernables. Soient

$$\mathfrak{M}(P) = \text{ensemble des } (\Omega, \mathcal{F}_t(P), P)\text{-martingales uniformément intégrables},$$

$$\mathfrak{M}^c(P) = \{M \in \mathfrak{M}^0(P),\ M \text{ est à trajectoires continues}\},$$

$$\mathfrak{H}^p(P) = \{M \in \mathfrak{M}(P),\ \|M\|_{H^p} = (E[\sup_{(t)} |M_t|^p])^{1/p} < \infty\},$$

$$\mathfrak{BMO}(P) = \left\{ M \in \mathfrak{H}^2(P),\ \|M\|_{BMO} = \sup_{(T)} \frac{E(M_\infty - M_{T-})^2}{P(T < \infty)} < \infty \right\},$$

où le «sup» qui figure dans la définition de $\mathfrak{BMO}(P)$ porte sur tous les $\mathcal{F}_t(P)$-temps d'arrêt (ou, de manière équivalente, sur les $\mathcal{F}_{t+}^0$-temps d'arrêt). Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on écrit $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}^p$, $\mathfrak{BMO}$, etc. au lieu de $\mathfrak{M}(P)$, $\mathfrak{H}^p(P)$, $\mathfrak{BMO}(P) \dots$

On rappelle que toute $M \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ s'écrit de manière unique comme $M = M_0 + M^c + M^d$, avec $M^c \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}^c(P)$ et M^d vérifiant: $M^d N \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$, $\forall N \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}^c(P)$. M^c s'appelle la *partie continue* de M, tandis que si $M^c = 0$ on dit que M est une *somme compensée de sauts.*

Lorsque $M, N \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}^c(P)$, on connait le processus prévisible (continu) $\langle M, N \rangle$. A tout couple $M, N \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$, on associe le processus $[M, N]_t = \langle M^c, N^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta M_s \Delta N_s$, et si $[M, N] \in \mathfrak{B}_{\text{loc}}(P)$ on note $\langle M, N \rangle$ la projection prévisible duale (cf. [3]) de $[M, N]$. Rappelons les inégalités de Burkhölder-Davis-Gundy: pour tout $1 \leq p < \infty$ il existe deux constantes $0 < c_p < C_p < \infty$ telles que pour toute $M \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}^0(P)$,

$$c_p E([M, M]_\infty^{p/2}) \leq E(\sup_{(t)} |M_t|^p) \leq C_p E([M, M]_\infty^{p/2}).$$

Donc $\mathfrak{H}^{p,0}(P)=\{M\in\mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P),\ E([M,M]^{p/2}_\infty)<\infty\}$. On peut montrer que $\mathfrak{H}^1_{\text{loc}}(P)=\mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ (tandis que l'inclusion $\mathfrak{H}^1(P)\subset\mathfrak{M}(P)$ est stricte), et d'autre part il y a identité entre $\mathfrak{BMO}_{\text{loc}}(P)$ et l'ensemble des martingales locales localement bornées, et donc $\mathfrak{M}^c_{\text{loc}}(P)\subset\mathfrak{BMO}^0_{\text{loc}}(P)\subset\mathfrak{H}^{p,0}_{\text{loc}}(P)$ pour tout $p\geqq 1$.

(c) *Intégrales stochastiques.* Si $M\in\mathfrak{H}^2_{\text{loc}}(P)$, soit $L^2(M,P)=\{u \text{ prévisible}, u^2\cdot\langle M,M\rangle\in\mathfrak{B}^+(P)\}$. Si $u\in L^2_{\text{loc}}(M,P)$ on définit classiquement *l'intégrale stochastique* $u\cdot M$ comme l'unique élément de $\mathfrak{H}^{2,0}_{\text{loc}}(P)$ tel que: $\forall N\in\mathfrak{H}^2_{\text{loc}}(P)$, $\langle u\cdot M,N\rangle=u\cdot\langle M,N\rangle$.

Nous serons également amenés à utiliser l'intégrale stochastique par rapport à une *martingale locale quelconque*, telle qu'elle est définie dans [15]. Si $M\in\mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$, soit $L^p(M,P)=\{u \text{ prévisible}, (u^2\cdot[M,M])^{p/2}\in\mathfrak{B}^+(P)\}$; on a les inclusions $L^p_{\text{loc}}(M,P)\subset L^q_{\text{loc}}(M,P)$ si $q<p$ (inclusions en général strictes); de plus si $M\in\mathfrak{H}^2_{\text{loc}}(P)$, les deux définitions de $L^2(M,P)$ ci-dessus coïncident, tandis que $L^p_{\text{loc}}(M,P)=L^1_{\text{loc}}(M,P)$ $\forall p\geqq 1$ si $M\in\mathfrak{M}^c_{\text{loc}}(P)$. Si $u\in L^1_{\text{loc}}(M,P)$ on définit $u\cdot M$ comme l'unique élément de $\mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P)$ tel que: $\forall N\in\mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$, $[u\cdot M,N]=u\cdot[M,N]$; là encore si $M\in\mathfrak{H}^2_{\text{loc}}(P)$ et $u\in L^2_{\text{loc}}(M,P)$, les deux définitions de $u\cdot M$ coïncident, tandis que $u\cdot M\in\mathfrak{H}^{p,0}(P)$ si $M\in\mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ et $u\in L^p(M,P)$.

Dans la suite nous nous intéresserons surtout aux espaces $\mathfrak{H}^{p,0}$ et $\mathfrak{BMO}^0$. Nous étendons d'abord à ces espaces la notion d'*espace stable*, définie classiquement sur $\mathfrak{H}^{2,0}$:

(a) On appelle sous-espace stable de $\mathfrak{H}^{p,0}$ (resp. $\mathfrak{BMO}^0$) tout sous-espace $\mathfrak{H}$ fermé de cet espace, qui soit de plus stable par arrêt (i.e.: $M^T\in\mathfrak{H}$ pour tout $M\in\mathfrak{H}$ et tout temps d'arrêt T). Un argument de densité entraine alors que $\mathfrak{H}$ contient toutes les intégrales stochastiques $u\cdot Y$ où $Y\in\mathfrak{H}$ et $u\in L^p(Y,P)$.

(b) Si $p>1$, le dual de $\mathfrak{H}^{p,0}$ s'identifie à l'espace $\mathfrak{H}^{q,0}$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ par l'application qui à tout $l\in(\mathfrak{H}^{p,0})'$ fait correspondre un unique $L\in\mathfrak{H}^{q,0}$ à l'aide de la formule

$$l(Y)=E([Y,L]_\infty)\qquad\forall Y\in\mathfrak{H}^{p,0}.\tag{1}$$

Si $p=1$ le dual de $\mathfrak{H}^{1,0}$ s'identifie à $\mathfrak{BMO}^0$ au moyen de la même formule (1); c'est une conséquence immédiate du théorème: le dual de $\mathfrak{H}^1$ est $\mathfrak{BMO}$ (cf. [15]).

(c) Si $\mathfrak{H}$ est un sous-espace stable de $\mathfrak{H}^{p,0}$ pour $p>1$ (resp. $p=1$) l'orthogonal de $\mathfrak{H}$ (dans la dualité décrite en (b)), noté $\mathfrak{H}^\perp$, est un sous-espace stable de $\mathfrak{H}^{q,0}$ (resp. $\mathfrak{BMO}^0$), et si $M\in\mathfrak{H}$, $N\in\mathfrak{H}^\perp$, on a $MN\in\mathfrak{M}_{\text{loc}}$ (M et N sont «orthogonales au sens fort»).

(d) Soit $\mathscr{U}\subset\mathfrak{H}^p_{\text{loc}}$. On appelle *p-espace stable engendré par* $\mathscr{U}$, et on note $\mathfrak{L}^p(\mathscr{U})$, le plus petit sous-espace fermé de $\mathfrak{H}^{p,0}$ qui contienne les intégrales stochastiques $u\cdot U$, avec $U\in\mathscr{U}$ et $u\in L^p(U,P)$: $\mathfrak{L}^p(\mathscr{U})$ est un sous-espace stable au sens de (a); on n'a pas nécessairement $\mathscr{U}\subset\mathfrak{L}^p(\mathscr{U})$ (sauf bien-sûr si $\mathscr{U}\subset\mathfrak{H}^{p,0}_{\text{loc}}$). Remarquons que, comme $\mathfrak{L}^p(\mathscr{U})$ est fermé dans $\mathfrak{H}^p$, on a: $\mathfrak{L}^p(\mathscr{U})=\mathfrak{L}^p_{\text{loc}}(\mathscr{U})\cap\mathfrak{H}^p$. Si $\mathscr{U}\subset\mathfrak{M}^c(P)$, l'espace $\mathfrak{L}^p_{\text{loc}}(\mathscr{U})$ ne dépend pas de $p\geqq 1$.

Supposons maintenant $\mathscr{U}$ réduit à une seule martingale locale M. Si $M\in\mathfrak{H}^2_{\text{loc}}$, il est classique que l'espace $\mathfrak{L}^2(M)$ est constitué des martingales $u\cdot M$, avec $u\in L^2(M,P)$. Ce résultat se généralise comme suit:

(1.1) **Lemme.** *Soit* $p\geqq 1$. *Soit* $M\in\mathfrak{H}^p_{\text{loc}}(P)$. *Alors* $\mathfrak{L}^p(M)=\{u\cdot M,\ u\in L^p(M,P)\}$.

Démonstration. Munissons l'espace $L^p(M,P)$ de la semi-norme: $\|u\|_p=\{E(u^2\cdot[M,M]_\infty)^{p/2}\}^{1/p}$. Il s'agit de montrer que l'espace $\{u\cdot M,\ u\in L^p(M,P)\}$ est fermé dans $\mathfrak{H}^p$ ou, d'après l'isométrie $\|u\cdot M\|_{H^p}=\|u\|_p$, que l'espace $L^p(M,P)$ est complet. D'une suite de Cauchy (f_n) pour $\|.\|_p$, on extrait une sous-suite (f_{n_j}) telle que $\sum_{(j)}\|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}\|_p<\infty$. Soit A l'ensemble (prévisible) de convergence de la série $\sum_{(j)}|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|(s,\omega)$. Posons $g=1_A\sum_{(j)}|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|$ et $f=1_A\sum_{(j)}(f_{n_{j+1}}-f_{n_j})$. Alors $\|1_{A^c}\|_p=0$, $\|f\|_p\leqq\|g\|_p\leqq\sum_{(j)}\|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}\|_p<\infty$, et $\|f-f_{n_j}\|_p$ tend vers 0 lorsque $j\uparrow\infty$. La suite de Cauchy (f_n) converge donc vers f. □

On en déduit, en particulier, la

(1.2) **Proposition.** *Soit $M\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *Tout élément borné $L\in\mathfrak{M}^0(P)$ peut s'écrire $L=u\cdot M$ avec $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(M,P)$* (on dit: admet une *représentation prévisible* par rapport à M).

(ii) *Tout élément de $\mathfrak{M}^0_{\mathrm{loc}}(P)$ admet une représentation prévisible par rapport à M.*

(iii) *On a $\mathfrak{L}^1(M)=\mathfrak{H}^{1,0}(P)$.*

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(iii), car les martingales bornées nulles en 0 sont denses dans $\mathfrak{H}^{1,0}(P)$. (iii)$\Rightarrow$(ii), d'après le lemme (1.1) et par localisation (car $\mathfrak{H}^1_{\mathrm{loc}}=\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}$). Enfin (ii)$\Rightarrow$(i) est évident. □

Remarques. (1) Etant donné le lemme (1.1), il suffit, pour obtenir les résultats de la proposition (1.2), de montrer que tout élément U appartenant à une famille de variables de $L^2(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P)$ totale dans cet espace, vérifie $E(U|\mathscr{F}_t)=E(U|\mathscr{F}_0)+u\cdot M_t$, pour un $u\in L^2(M,P)$.

(2) Supposons maintenant que $\mathscr{U}$ se compose d'un nombre fini de martingales locales $M^i\in\mathfrak{H}^p_{\mathrm{loc}}(P)$ $(1\leqq i\leqq d)$. On peut se demander si $\mathfrak{L}^p(\mathscr{U})=\{\sum_{i\leqq d}u_i\cdot M^i,\ u^i\in L^p(M^i,P)\}$: on sait qu'il en est ainsi (cf. [15]) lorsque $p=2$ et $M^iM^j\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ pour $i\neq j$. Par contre on ne peut rien dire de tel dans le cas général, car l'ensemble $\{\sum_{i\leqq d}u_i\cdot M^i,\ u_i\in L^p(M^i,P)\}$ n'est pas nécessairement fermé dans $\mathfrak{H}^p(P)$. Cette remarque nous semblant importante, nous donnons un contre-exemple: soient Y et Z deux mouvements browniens indépendants sur $(\Omega,\mathscr{F}_t(P),P)$ et u un processus prévisible à valeurs dans $]0,1[$. Soient les processus $M^1=Y$ et $M^2=u\cdot Y+(1-u)\cdot Z$. Il n'est pas difficile de voir que $\mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(Y,Z)=\mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(M^1,M^2)$; cependant si Z s'écrit $Z=v\cdot M^1+w\cdot M^2$, un calcul simple montre qu'on a nécessairement $v=\dfrac{u}{1-u}$: si par exemple on prend $u_0=1/2$, $u_s=1-s$ pour $0<s<1$ et $u_t=1/2$ pour $t\geqq 1$, on a $\int_0^1 v_s^2\,ds=\infty$, donc $v\notin L^2_{\mathrm{loc}}(M^1,P)$ et l'intégrale stochastique $v\cdot M^1$ n'est pas définie. □

1.2. Le théorème fondamental

On suppose fixée, une fois pour toutes, une famille $\mathscr{N}$ de processus, continus à droite et limitées à gauche. *On note $\mathscr{M}_{\mathscr{N}}=\{P$* probabilité sur $(\Omega,\mathscr{F}^0)$: $N\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ $\forall N\in\mathscr{N}\}$. Bien que, à cause de la définition d'une martingale locale, on ne puisse pas montrer en général que $\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$ est un ensemble convexe, la notion de point extrémal de $\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$ a toujours un sens: $P\in\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$ est extrémal dans $\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$ si et seulement si, pour tous $\alpha\in]0,1[$ et $P',P''\in\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$, tels que $P=\alpha P'+(1-\alpha)P''$, on a $P=P'=P''$.

On note $\mathscr{E}_{\mathcal{N}}$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathscr{M}_{\mathcal{N}}$. L'objet de ce paragraphe est la caractérisation des points de $\mathscr{E}_{\mathcal{N}}$.

Auparavant, nous rappelons un résultat bien connu: soient P et P' deux probabilités sur $(\Omega, \mathscr{F}^0)$ telles que $P' \ll P$. Soit Z une version continue à droite de la martingale $E\left(\frac{dP'}{dP}\Big|\mathscr{F}_t\right)$; si $R_n = \inf(t\colon Z_t \leqq 1/n)$, on a le

(1.3) **Lemme.** *Soit M un processus quelconque. Alors $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P')$ si et seulement si $(MZ)^{R_n} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ pour tout n.*

(1.4) **Proposition.** *Si $P \in \mathscr{M}_{\mathcal{N}}$ les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *On a $P \in \mathscr{E}_{\mathcal{N}}$.*

(ii) *$\mathscr{F}_0$ est P-triviale, et toute $L \in \mathfrak{M}^0_{\mathrm{loc}}(P)$ localement bornée, telle que $NL \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ pour toute $N \in \mathcal{N}$, est nulle.*

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii): Si $A \in \mathscr{F}_0$ n'est pas P-trivial, les probabilités $P' = \frac{P(A \cap .)}{P(A)}$ et $P' = \frac{P(A^c \cap .)}{P(A^c)}$ appartiennent à $\mathscr{M}_{\mathcal{N}}$ et l'égalité $P = P(A)\,P' + P(A^c)\,P''$ contredit l'extrémalité de P. Soit $L \in \mathfrak{M}^0_{\mathrm{loc}}(P)$ localement bornée (avec la suite localisante (T_n)), telle que $LN \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ $\forall N \in \mathcal{N}$. Alors, si $L^n = L^{T_n}$, on a encore $NL^n \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ $\forall N \in \mathcal{N}$. Soit $k_n = \sup_{(\omega, t)} |L^n_t(\omega)|$. Les probabilités $P' = \left(1 + \frac{L^n_\infty}{2k_n}\right) \cdot P$ et $P'' = \left(1 - \frac{L^n_\infty}{2k_n}\right) \cdot P$ appartiennent encore à $\mathscr{M}_{\mathcal{N}}$ d'après le lemme (1.3). Comme $P = (P' + P'')/2$, on a $P = P' = P''$, ce qui entraine $L^n = 0$, et donc $L = 0$.

(ii)$\Rightarrow$(i): Soit $P \in \mathscr{M}_{\mathcal{N}}$ admettant une décomposition $P = \alpha P' + (1-\alpha) P''$, avec $\alpha \in]0, 1[$ et P', $P'' \in \mathscr{M}_{\mathcal{N}}$. La martingale $Z_t = E\left(\frac{dP'}{dP}\Big|\mathscr{F}_t\right)$ est bornée par $1/\alpha$ et vérifie $Z_0 = E(Z_0) = 1$. De plus si $R_n = \inf(t\colon Z_t \leqq 1/n)$ on a $(ZN)^{R_n} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ $\forall N \in \mathcal{N}$ d'après le lemme (1.3), donc $Z^{R_n} N \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ également. Mais alors (ii) implique $Z^{R_n} = Z_0 = 1$, ce qui n'est possible que si $R_n = \infty$ P-ps, donc si $Z = 1$. Ceci entraine $P' = P$, et de même $P'' = P$, d'où (i). $\square$

Cette proposition nous permet d'énoncer la caractérisation fondamentale suivante:

(1.5) **Théorème.** *Si $P \in \mathscr{M}_{\mathcal{N}}$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *On a $P \in \mathscr{E}_{\mathcal{N}}$.*

(ii) *$\mathscr{F}_0$ est P-triviale, et $\mathfrak{M}^0_{\mathrm{loc}}(P) = \mathfrak{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{N})$.*

Démonstration. (ii)$\Rightarrow$(i): D'après la proposition (1.4), il suffit de montrer que si $L \in \mathfrak{M}^0_{\mathrm{loc}}(P)$ est localement bornée (ou même: bornée) et vérifie $LN \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{P})$ $\forall N \in \mathcal{N}$, alors $L = 0$. Soit $\mathfrak{H} = \{M \in \mathfrak{H}^{1,0}\colon ML \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}\}$. $\mathfrak{H}$ est fermé pour la convergence dans $\mathfrak{H}^1$, et contient toutes les martingales $u \cdot N$ (où $N \in \mathcal{N}$ et $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(N, P)$) qui appartiennent à $\mathfrak{H}^{1,0}$. D'où: $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{L}^1(\mathcal{N}) = \mathfrak{H}^{1,0}$. En particulier, $L \in \mathfrak{H}$, ce qui entraine que L^2 est une martingale, et donc $L = L_0 = 0$. On en déduit $P \in \mathscr{E}_{\mathcal{N}}$.

(i)$\Rightarrow$(ii): D'après la proposition (1.4), $\mathscr{F}_0$ est P-triviale. Donc il suffit de montrer que $\mathfrak{H}^{1,0} = \mathfrak{L}^1(\mathcal{N})$. D'après le théorème de Hahn-Banach, $\mathfrak{H}^{1,0} = \mathfrak{L}^1(\mathcal{N})$ si et seulement si la seule forme linéaire continue l sur $\mathfrak{H}^{1,0}$, nulle sur $\mathfrak{L}^1(\mathcal{N})$, est la forme nulle. Soit l une telle forme linéaire, représentée par un $L \in \mathfrak{BMO}^0$ au moyen de la formule (1). $\mathfrak{L}^1(\mathcal{N})$ étant un sous-espace de $\mathfrak{H}^{1,0}$ stable par arrêt, on déduit de l'égalité: $E([M,L]_\infty)=0\ \forall M \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{N})$, qu'on a également: $ML \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}$ $\forall M \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{N})$. Les martingales de $\mathfrak{BMO}$ étant localement bornées, on déduit de la proposition (1.4), et de l'hypothèse (i), que $L=0$, d'où $l=0$, et le résultat cherché. □

Hormis la troisième partie, le reste de l'article est consacré à diverses applications de ce théorème. Le lecteur peut, dès à présent, se reporter à la suite de la proposition (2.4) où figurent certaines remarques générales sur le résultat qu'on vient d'obtenir. Quant à la fin de cette partie 1, elle est consacrée à des rappels sur les intégrales stochastiques par rapport aux mesures aléatoires-martingales, et à une nouvelle démonstration, basée sur ce qui précède, du résultat principal de [11].

1.3. Intégration stochastique par rapport à une mesure aléatoire-martingale

(a) *Mesures aléatoires.* Soit E un espace lusinien muni de sa tribu borélienne $\mathscr{E}$, et $\tilde{\Omega}=\Omega\times[0,\infty[\times E$ muni des tribus $\tilde{\mathscr{P}}=\mathscr{P}\otimes\mathscr{E}$ et $\tilde{\mathscr{W}}=\mathscr{W}\otimes\mathscr{E}$. On pose également $\tilde{E}=]0,\infty[\times E$ et $\tilde{\mathscr{E}}=\mathscr{B}(]0,\infty[)\otimes\mathscr{E}$. Une *mesure aléatoire* (sur E) est une famille $(\eta(\omega,.), \omega\in\Omega)$ de mesures positives sur $(\tilde{E},\tilde{\mathscr{E}})$, et pour toute application $W\colon \tilde{\Omega}\to\mathbb{R}$, on écrit $W*\eta_t(\omega)=\int_{]0,t]\times E} W(\omega,s,x)\,\eta(\omega;ds,dx)$ dès que cette expression a un sens. On dit que η est *prévisible* si l'application: $W \rightsquigarrow W*\eta$ transforme les fonctions $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurables positives en processus prévisibles. Si P est une loi sur $(\Omega,\mathscr{F}^0)$, la formule $M_\eta^P(W)=E(W*\eta_\infty)$, où $W\geqq 0$, définit une mesure positive M_η^P sur $\tilde{\Omega}$ muni de la tribu $\mathscr{F}(P)\otimes\mathscr{B}([0,\infty[)\otimes\mathscr{E}$.

Une mesure aléatoire μ est dite *à valeurs entières si*

(i) $\mu(\omega,A)\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}\ \forall\omega\in\Omega,\ \forall A\in\tilde{\mathscr{E}}$,

(ii) $\mu(\omega;\{t\}\times E)\leqq 1 \qquad \forall\omega\in\Omega,\ \forall t>0.$

A une telle mesure aléatoire μ on peut associer l'ensemble aléatoire $D=\{(\omega,t)\colon \mu(\omega;\{t\}\times E)=1\}$, et un processus (α_t) à valeurs dans E, tel que

$$\mu(\omega;dt,dx)=\sum_{s>0} 1_D(\omega,s)\,\varepsilon_{(s,\alpha_s(\omega))}(dt,dx). \tag{2}$$

Dans la suite du paragraphe, μ est une mesure aléatoire à valeurs entières, à laquelle on associe D et (α_t) par (2), et P est une probabilité sur $(\Omega,\mathscr{F}^0)$ vérifiant

la restriction de M_μ^P à $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{P}})$ est σ-finie; pour toute $W\geqq 0$, $\tilde{\mathscr{W}}$-mesurable, le processus $W*\mu$ est adapté à $\mathscr{F}_t(P)$. (3)

D'après la première partie de (3) (cf. [8]), il existe une mesure aléatoire prévisible ν et une seule (à un ensemble P-nul près) telle que: $\forall W\geqq 0$ $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable, $E[\int W(s,x)\,d\mu(s,x)]=E[\int W(s,x)\,d\nu(s,x)]$, c'est-à-dire, avec nos notations: $M_\mu^P(W)=M_\nu^P(W)$. ν s'appelle la *projection prévisible duale* de μ, et on peut en choisir une version satisfaisant identiquement $\nu(\omega;\{t\}\times E)\leqq 1$.

Afin d'alléger les notations, on pose $a_t(\omega)=\nu(\omega;\{t\}\times E)$ et, pour toute fonction $W\colon\tilde{\Omega}\to\mathbb{R}$,

$$\hat{W}_t(\omega)=\int_E W(\omega,t,x)\,\nu(\omega;\{t\},dx)$$

dès que cette expression a un sens (en particulier, $a=\hat{1}$).

Remarque. Voici un exemple typique de mesure aléatoire à valeurs entières. Soit X un processus continu à droite et limité à gauche, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors la formule

$$\mu(\omega; dt, dx) = \sum_{s>0} 1_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \varepsilon_{(s, \Delta X_s(\omega))}(dt, dx) \tag{4}$$

définit une mesure aléatoire à valeurs entières (avec $D = \{\Delta X \neq 0\}$ et $\alpha_t = \Delta X_t$) sur $E = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. De plus toute probabilité P pour laquelle X est adapté à $\mathscr{F}_t(P)$ vérifie la condition (3) ([8]: plus précisément, $\mu(]0, t] \times A) \in \mathfrak{V}^+_{\text{loc}}(P)$, $\forall A \in \mathscr{E}$ tel que $d(0, A) > 0$). On appelle alors ν le *système de Lévy* de X. On sait ([8], p. 230) que le processus X est quasi-continu à gauche (pour P) si et seulement si l'ensemble $\{a > 0\}$ est P-évanescent. □

(b) *Intégrale stochastique par rapport à* $(\mu - \nu)$. Pour la construction de l'intégrale stochastique, nous renvoyons à [8]. Rappelons simplement les résultats indispensables. Si W est une fonction $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable et si $\alpha \geqq 0$, on pose

$$\begin{aligned} W'(\alpha) &= (W - \hat{W}) 1_{\{|W - \hat{W}| > \alpha\}} + \hat{W} 1_{\{|\hat{W}| > \alpha\}}, \qquad W''(\alpha) = W - W'(\alpha) \\ C_t^\alpha(\nu, W) &= [1_{\{a=0\}}(|W'(\alpha)| + W''(\alpha)^2)] * \nu_t \\ &\quad + \sum_{s \leqq t} [\widehat{(W''(\alpha)^2)}_s - (\widehat{W''(\alpha)}_s)^2 + |\widehat{W'(\alpha) - \widehat{W'}(\alpha)}|_s + (1 - a_s) |\widehat{W'}(\alpha)_s|], \end{aligned} \tag{5}$$

en faisant la convention $W'(\alpha) = +\infty$ (resp. $W''(\alpha) = +\infty$, $C_t^\alpha(\nu, W) = +\infty$) lorsque les expressions ci-dessus ne sont pas définies. Chaque $C^\alpha(\nu, W)$ est un processus croissant prévisible, et il y a deux cas possibles: soit $C^\alpha(\nu, W) \in \mathfrak{V}^+_{\text{loc}}(P)$ pour tout $\alpha \in]0, \infty[$, soit $C^\alpha(\nu, W) \notin \mathfrak{V}^+_{\text{loc}}(P)$ pour tout $\alpha \in]0, \infty[$. Soit $\mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P) = \{W$: $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable, $C^1(\nu, W) \in \mathfrak{V}^+_{\text{loc}}(P)\}$. Si $W \in \mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$ il existe un élement et un seul de $\mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P)$, noté $W * (\mu - \nu)$, qui est une somme compensée de sauts vérifiant

$$\Delta [W * (\mu - \nu)]_t = \int_E W(t, x) [\mu(\{t\}, dx) - \nu(\{t\}, dx)] = 1_D(t) W(t, \alpha_t) - \hat{W}_t. \tag{6}$$

De plus $W * (\mu - \nu)$ appartient à $\mathfrak{H}^{2,0}(P)$ (resp. à $\mathfrak{V}_{\text{loc}}(P)$) si et seulement si $C^\infty(\nu, W)$ (resp. $C^0(\nu, W)$) appartient à $\mathfrak{V}^+_{\text{loc}}(P)$. Remarquons enfin que toutes ces expressions se simplifient considérablement lorsque l'ensemble $\{a > 0\}$ est P-évanescent; par exemple, il vient $C^\alpha(\nu, W) = [|W| 1_{\{|W| > \alpha\}} + W^2 1_{\{|W| \leqq \alpha\}}] * \nu$.

Remarque. L'intégrale stochastique par rapport à $(\mu - \nu)$ est une sorte d'intégrale optionnelle, et il est naturel de comparer la théorie précédente et la théorie de l'intégrale optionnelle de Meyer [15]. Plus précisément supposons que μ soit associée par (4) à une martingale locale X, pour une loi P. Alors si $(W^2 * \mu)^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{V}_{\text{loc}}$ et si $u_t = 1_{\{\Delta X_t \neq 0\}} \dfrac{W(t, \Delta X_t)}{\Delta X_t}$, on peut construire l'intégrale optionnelle $u \cdot X$ et on a $u \cdot X = W * (\mu - \nu)$ (la première assertion, facile, est laissée au lecteur; la seconde découle immédiatement de ce que les martingales locales $u \cdot X$ et $W * (\mu - \nu)$ sont des sommes compensées de sauts ayant mêmes sauts). Ainsi, dans ce cas, la théorie de l'intégrale stochastique optionnelle faite en [15] contient celle faite en [8]. Par contre, dans le cas où X est une martingale locale vectorielle, et a-fortiori lorsque μ est seulement une mesure aléatoire à valeurs entières, seule la théorie de [8] peut être utilisée. $\square$

Terminons ce paragraphe par le calcul du crochet $\langle M, N\rangle$, lorsqu'il existe, de deux martingales locales dont l'une est de la forme $W*(\mu-\nu)$. Si $M\in\mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$, on sait d'après [8] qu'on peut prendre «l'espérance conditionnelle» de ΔM (considérée comme fonction sur $\tilde{\Omega}$) par rapport à la tribu $\tilde{\mathscr{P}}$, pour la mesure M_μ^P. En particulier si $W\in\mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$ et $M=W*(\mu-\nu)$, on a

$$M_\mu^P(\Delta M|\tilde{\mathscr{P}})=W-\hat{W}\ M_\mu^P\text{-ps}. \tag{7}$$

(1.6) **Lemme.** *Soient* $W\in\mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$ *et* $M=W*(\mu-\nu)$. *Soient* $N\in\mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ *et* $V=M_\mu^P(\Delta N|\tilde{\mathscr{P}})$. *Si* $[M, N]\in\mathfrak{V}_{\text{loc}}(P)$, *on a* $\langle M, N\rangle=VW*\nu$.

Démonstration. Soit $A=\langle M, N\rangle$. D'après [8] on a les formules suivantes, où T est un temps d'arrêt prévisible tel que $\Delta N_T 1_{\{T<\infty\}}$ soit intégrable, et U une fonction $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable telle que $1_D(T)\,U(T,\alpha_T)$ soit intégrable:

$$\begin{aligned} &\hat{V}_T=-E(\Delta N_T 1_{D^c}(T)|\mathscr{F}_{T-}) && \text{sur } \{T<\infty\}\\ &V(T,\alpha_T)=E(\Delta N_T|\mathscr{F}_{T-}\vee\sigma(\alpha_T)) && \text{sur } \{T<\infty\}\cap\{T\in D\}\\ &\hat{U}_T=E(1_D(T)\,U(T,\alpha_T)|\mathscr{F}_{T-}) && \text{sur } \{T<\infty\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Si T est un temps prévisible tel que ΔN_T et $\Delta[M, N]_T$ soient intégrables sur $\{T<\infty\}$, il découle alors de (6) et des formules précédentes que

$$\begin{aligned} \Delta A_T&=E(\Delta[M,N]_T|\mathscr{F}_{T-})=E(\Delta M_T\,\Delta N_T|\mathscr{F}_{T-})\\ &=E[(1_D(T)\,W(T,\alpha_T)-\hat{W}_T)\,\Delta N_T|\mathscr{F}_{T-}]\\ &=E[1_D(T)\,(W(T,\alpha_T)-\hat{W}_T)\,E(\Delta N_T|\mathscr{F}_{T-}\vee\sigma(\alpha_T))|\mathscr{F}_{T-}]\\ &\quad-\hat{W}_T\,E(1_{D^c}(T)\,\Delta N_T|\mathscr{F}_{T-})\\ &=E[1_D(T)\,(W(T,\alpha_T)-\hat{W}_T)\,V(T,\alpha_T)|\mathscr{F}_{T-}]+\hat{W}_T\,\hat{V}_T\\ &=(\widehat{VW})_T-\hat{V}_T\,\hat{W}_T+\hat{V}_T\,\hat{W}_T=(\widehat{VW})_T \qquad P\text{-ps sur } \{T<\infty\}. \end{aligned}$$

Comme A n'a que des sauts prévisibles, le théorème de section prévisible [3] entraine que $\Delta A=\widehat{VW}$ à un ensemble évanescent près.

Soient alors $J=\{a>0\}\in\mathscr{P}$, $A^d=\sum_{s\leq t}\Delta A_s$ et $A^c=A-A^d$. On vient de montrer que $A^d=(VW\,1_J)*\nu$ P-ps (car J est à coupes dénombrables, et $\widehat{VW}=0$ sur J^c). Si u est un processus prévisible tel que $u\cdot A\in\mathfrak{V}(P)$,

$$\begin{aligned} E(u\cdot A_\infty^c)&=E(u\,1_{J^c}\cdot A_\infty)=E\big(\textstyle\sum_{(s)}1_{J^c}(s)\,u_s\,\Delta M_s\,\Delta N_s\big)\\ &=E\big(\textstyle\sum_{(s)}1_{J^c\cap D}(s)\,u_s\,W(s,\alpha_s)\,\Delta N_s\big)\\ &=M_\mu^P(u\,W\Delta N\,1_{J^c})=M_\mu^P(u\,VW\,1_{J^c})=M_\nu^P(u\,VW\,1_{J^c})=E(u\,VW\,1_{J^c}*\nu_\infty), \end{aligned}$$

ce qui entraine $A^c=(VW\,1_{J^c})*\nu$. $\square$

1.4. Solutions extrémales d'un second problème de martingales

Nous proposons ci-dessous une autre démonstration du résultat principal de [11], s'appuyant sur la proposition (1.4).

Rappelons d'abord le problème de martingales posé dans [11]. *On fixe une mesure aléatoire à valeurs entières μ, et une famille $(X^i)_{i\in I}$ de processus* continus à droite et limités à gauche. On fixe également un ensemble de «caractéristiques locales» $\mathfrak{Q}=(\nu, W, A, B)$ constitué de:

une mesure aléatoire prévisible ν,
une famille $W=(W^i)_{i\in I}$ de fonctions $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurables sur $\tilde{\Omega}$,
une famille $A=(A^i)_{i\in I}$ de processus prévisibles, continus à droite et limités à gauche,
une famille $B=(B^{ij})_{i,j\in I}$ de processus continus adaptés.

On note $\mathscr{S}(\mathfrak{Q})$ *l'ensemble des probabilités P sur $(\Omega, \mathscr{F}^0)$ pour lesquelles*

(i) μ satisfait la condition (3) relativement à P et admet ν pour projection prévisible duale;

(ii) pour tout $i\in I$, $W^i\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$, $A^i\in\mathfrak{V}_{\mathrm{loc}}(P)$, et le processus

$$M^i=X^i-X_0^i-A^i-W^i*(\mu-\nu) \tag{9}$$

appartient à $\mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}(P)$;

(iii) pour tous $i,j\in I$, on a $\langle M^i, M^j\rangle=B^{ij}$.

Il est montré dans [11] que $\mathscr{S}(\mathfrak{Q})$ est convexe, et on note $\mathscr{E}(\mathfrak{Q})$ l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathscr{S}(\mathfrak{Q})$. Nous nous proposons de prouver le

(1.7) **Théorème.** *Soit $P\in\mathscr{S}(\mathfrak{Q})$. Il y a équivalence entre*

(i) *On a $P\in\mathscr{E}(\mathfrak{Q})$.*

(ii) *$\mathscr{F}_0$ est P-triviale; $\mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}(P)=\mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(M^i,\ i\in I)$; tout élément L de $\mathfrak{M}^0_{\mathrm{loc}}(P)$, somme compensée de sauts, s'écrit $L=W*(\mu-\nu)$, avec $W\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$.*

Remarque. Ce résultat ne constitue qu'une partie du théorème 2 de [11]: plus précisément on ne traite ici que le cas où (avec les notations de [11]) l'ensemble $\mathscr{Q}$, ne contient qu'un seul point. De plus, dans un but de simplification, on ne fait pas intervenir la «condition initiale» (ce qui revient à dire, du point de vue de [11], que la tribu $\mathscr{F}_0^0$ est la tribu triviale). $\square$

Nous allons construire une famille $\mathscr{N}$ de processus telle que $\mathscr{S}(\mathfrak{Q})\subset\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$: soit $\tilde{\mathscr{P}}_0$ l'ensemble des $A\in\tilde{\mathscr{P}}$ tels que $1_A*\mu_\infty\leqq 1$. On note $\mathscr{N}$ la famille constituée des processus $1_A*\mu-1_A*\nu$ pour $A\in\tilde{\mathscr{P}}_0$ (ce sont des processus à valeurs dans $[-\infty, 1]$), et des processus $X^i-X_0^i-A^i$ pour tout $i\in I$.

(1.8) **Lemme.** *On a $\mathscr{S}(\mathfrak{Q})\subset\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$, et $\mathscr{E}(\mathfrak{Q})=\mathscr{S}(\mathfrak{Q})\cap\mathscr{E}_{\mathscr{N}}$.*

Démonstration. Si $P\in\mathscr{S}(\mathfrak{Q})$ on a $W*\mu-W*\nu\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ pour toute fonction $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable W telle que $M_\mu^P(|W|)<\infty$; par suite l'inclusion $\mathscr{S}(\mathfrak{Q})\subset\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$ est évidente, ainsi d'ailleurs que l'inclusion $\mathscr{S}(\mathfrak{Q})\cap\mathscr{E}_{\mathscr{N}}\subset\mathscr{E}(\mathfrak{Q})$.

Soit inversement $P\in\mathscr{E}(\mathfrak{Q})$, et supposons que $P=\alpha P'+(1-\alpha)P''$, avec $\alpha\in]0,1[$, et $P', P''\in\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$. La restriction de M_μ^P à $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{P}})$ étant σ-finie, on vérifie aisément l'existence d'une suite (A_n) d'éléments de $\tilde{\mathscr{P}}_0$ telle que $M_\mu^P(\tilde{\Omega}\setminus\cup A_n)=0$; comme $P'\leqq\frac{1}{\alpha}P$, on a aussi $M_\mu^{P'}(\tilde{\Omega}\setminus\cup A_n)=0$. Mais par ailleurs $P'\in\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$, donc $M_\mu^{P'}(A)=M_\nu^{P'}(A)$ $\forall A\in\tilde{\mathscr{P}}_0$, et il en découle immédiatement (car $A\in\tilde{\mathscr{P}}$, $A\subset B\in\tilde{\mathscr{P}}_0$ entraine

$A \in \tilde{\mathscr{P}}_0$) que $M_\mu^{P'}(W) = M_\nu^{P'}(W)$ $\forall W \geqq 0$ $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable. Autrement dit ν est la projection prévisible duale de μ pour P', et P' vérifie la condition (3).

Comme $P' \leqq \frac{1}{\alpha} P$, les assertions $A^i \in \mathfrak{V}_{\text{loc}}(P)$ et $C^1(\nu, W^i) \in \mathfrak{V}_{\text{loc}}(P)$ impliquent $A^i \in \mathfrak{V}_{\text{loc}}(P')$ et $C^1(\nu, W^i) \in \mathfrak{V}_{\text{loc}}(P')$, et par suite $W^i \in \mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P')$. Mais la méthode même de construction de l'intégrale stochastique montre qu'il existe une version commune de l'intégrale stochastique de W^i par rapport à $(\mu - \nu)$, pour les probabilités P et P' (pour un lecteur qui ne voudrait pas se reporter au détail des démonstrations de [8], signalons que ce fait découle également de la proposition (2.2) démontrée plus loin). Comme par ailleurs $X^i - X_0^i - A^i \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P')$ puisque $P' \in \mathscr{M}_{\mathscr{N}}$, les processus continus M^i définis par (9) sont des éléments de $\mathfrak{M}_{\text{loc}}^c(P')$. Enfin il est classique que $B^{ij} = \langle M^i, M^j \rangle$ est une version du crochet de M^i et M^j pour P' (voir [9] par exemple).

On a donc montré que $P' \in \mathscr{S}(\mathfrak{Q})$, et de même $P'' \in \mathscr{S}(\mathfrak{Q})$. Comme $P \in \mathscr{E}(\mathfrak{Q})$, on a $P' = P'' = P$, donc $P \in \mathscr{E}_{\mathscr{N}}$. □

Démonstration de (1.7). (ii)⇒(i): Soit $L \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}^0(P)$ localement bornée, telle que: $LN \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ $\forall N \in \mathscr{N}$. Soit $V = M_\mu^P(\Delta L | \tilde{\mathscr{P}})$. Si $A \in \tilde{\mathscr{P}}_0$ et $N = 1_A * (\mu - \nu) \in \mathscr{N}$, le lemme (1.6) entraine $\langle N, L \rangle = 1_A V * \nu$, donc: $1_A V * \nu = 0$ $\forall A \in \tilde{\mathscr{P}}_0$. Par suite $M_\nu^P(|V|) = 0$, $M_\mu^P(\Delta L | \tilde{\mathscr{P}}) = 0$ et d'après (ii) on a $L^d = 0$ (utiliser le théorème (4.1) de [8]). Mais alors $L(X^i - X_0^i - A^i) \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ entraine $LM^i \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ $\forall i \in I$, et d'après (ii), $L^c = 0$. Donc $L = 0$. Comme de plus $\mathscr{F}_0$ est P-triviale, la proposition (1.4) entraine $P \in \mathscr{E}_{\mathscr{N}}$, donc (i) d'après le lemme (1.8).

(i)⇒(ii): Toujours d'après la proposition (1.4) et le lemme (1.8), il suffit de montrer que si (ii) n'est pas satisfaite, la condition (ii) de la proposition (1.4) n'est pas non plus satisfaite. C'est évident lorsque $\mathscr{F}_0$ n'est pas P-triviale. Si maintenant $\mathscr{F}_0$ est P-triviale, et si cependant la condition (ii) n'est pas satisfaite, il existe alors d'après le théorème (4.1) de [8] un $L \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}^0(P)$ non nul, tel que $LM^i \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ $\forall i \in I$ et $M_\mu^P(\Delta L | \tilde{\mathscr{P}}) = 0$. D'après le lemme 1 de [11], il existe un tel L qui, de plus, est localement borné. Mais alors si $W \in \mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$, on a $\langle L, W * (\mu - \nu) \rangle = 0$ d'après le lemme (1.6): par suite $L(1_A * (\mu - \nu)) \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ si $A \in \tilde{\mathscr{P}}_0$ et $L(X^i - X_0^i - A^i) \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$. Donc $LN \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ $\forall N \in \mathscr{N}$ et comme L n'est pas nulle, la condition (ii) de la proposition (1.4) n'est pas satisfaite. □

Remarque. La démonstration précédente repose sur la proposition (1.4). On serait tenté de vouloir démontrer le même résultat en utilisant toute la puissance du théorème (1.5) (ce qui éviterait notamment de recourir au lemme 1 de [11]). Cependant une telle démonstration, si elle existait, reposerait sur l'assertion suivante (où $P \in \mathscr{S}(\mathfrak{Q})$):

(a) L'ensemble $\mathscr{U}$ des éléments de $\mathfrak{H}^{1,0}(P)$ se mettant sous la forme $U * (\mu - \nu)$ (avec $U \in \mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$) est fermé dans $\mathfrak{H}^1(P)$.

En effet on remarque que si $M = U * (\mu - \nu) \in \mathscr{U}$, on a

$$E([M, M]_\infty^{1/2}) = E([(U - \hat{U})^2 * \mu_\infty + \textstyle\sum_{(s)} \hat{U}_s^2]^{1/2}) \leqq E[(U^2 * \mu_\infty)^{1/2}].$$

Lorsque μ est quasi-continue à gauche (i.e.: l'ensemble $\{a > 0\}$ est P-évanescent), les deux membres extrêmes ci-dessus sont égaux; on a donc une isométrie entre $\mathscr{U}$

et une partie de $\mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$ et on peut reproduire la démonstration du lemme (1.1) pour prouver (a). Par contre dans le cas général, on ne sait rien dire.

Remarquons que la situation est analogue en ce qui concerne les intégrales optionnelles de Meyer [15]: si $X \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$, on ne sait pas montrer que $\mathscr{U} = \{u \cdot X$: u optionnel, $\|u\| = E[(u^2 \cdot [X, X]_\infty)^{1/2}] < \infty\}$ est fermé dans $\mathfrak{H}^1(P)$, car on a seulement l'inégalité $E([u \cdot X, u \cdot X]_\infty^{1/2}) \leqq \|u\|$; cependant dans le cas où X est quasi-continu à gauche, l'inégalité précédente est une égalité, et là encore $\mathscr{U}$ est fermé dans $\mathfrak{H}^1(P)$.

Cependant soulignons que, d'après le théorème (1.7) lui-même, *on a la propriété (a) dès que* $P \in \mathscr{E}(\mathfrak{Q})$ (cela découle immédiatement de la représentation des sommes compensées de sauts). □

2. Le cas particulier où card($\mathscr{N}$) est fini

Nous allons dorénavant étudier le cas où $\mathscr{N}$ ne comporte qu'un nombre fini de processus, ce qui nous permettra de compléter le théorème (1.5). Mais, auparavant, nous étudions comment se transforme une martingale locale lorsqu'on opère un changement absolument continu de probabilité: les résultats du paragraphe 2.1, bien qu'étant des outils essentiels pour la suite, sont un peu en dehors du sujet de cet article, et il n'y a aucun inconvénient à sauter directement au paragraphe 2.2.

2.1. Généralisation du théorème de Girsanov

Les résultats ci-dessous, rassemblés sous la dénomination de «théorème de Girsanov», sont plus ou moins bien connus: voir notamment l'article [19] de Van-Schuppen et Wong pour une présentation voisine de la proposition (2.1).

On suppose que P est une loi sur $(\Omega, \mathscr{F}^0)$, et que μ est une mesure aléatoire à valeurs entières satisfaisant la condition (3) relativement à P. On associe à μ: l'ensemble D et le processus (α_t) par (2), et la projection prévisible duale ν de μ.

Soit P' une autre probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F}^0)$, telle que $P' \ll P$. Soient Z une version continue à droite de la martingale $E\left(\frac{dP'}{dP}\middle|\mathscr{F}_t\right)$ et $R = \inf(t\colon Z_t = 0)$; on peut trouver une telle version de Z, avec $Z_t = 0$ si $t \geqq R$, et $Z_t > 0$, $Z_{t-} > 0$ si $t < R$. Afin d'alléger les notations, on convient que $1/\alpha = 0$ si $\alpha = 0$. Enfin les «crochets» de martingales et les intégrales stochastiques sont, sauf mention contraire, relatifs à P.

(2.1) **Proposition.** *Soit* $M \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ *telle que* $[M, Z] \in \mathfrak{V}_{\text{loc}}(P)$. *Soient* $A = \frac{1}{Z_-} \cdot \langle Z, M\rangle$ *et* $M' = M - M_0 - A$ (avec la convention $A = \infty$ ou $M' = \infty$ si ces expressions ne sont pas définies). *Alors*

(i) *On a* $A \in \mathfrak{V}_{\text{loc}}(P')$ *et* $M' \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P')$.

(ii) *Si* $M \in M^c_{\text{loc}}(P)$, *alors* $M' \in \mathfrak{M}^c_{\text{loc}}(P')$ *et* $\langle M, M\rangle$ *est une version du crochet associé à* M' *pour* P'.

(iii) *Si* $M = u \cdot N$, *avec* $N \in \mathfrak{M}^c_{\text{loc}}(P)$ *et* $u \in L^2_{\text{loc}}(N, P)$, *et si* $N' = N - \frac{1}{Z_-} \cdot \langle N, Z\rangle$, *alors* $u \in L^2_{\text{loc}}(N', P')$ *et* M' *est l'intégrale stochastique de* u *par rapport à* N', *pour* P'.

(iv) *Si* M *est une somme compensée de sauts, il en est de même pour* M'.

Démonstration. (i) est montré dans [19] et (ii) dans [9] (par exemple). Soit ${}^{P'}\langle .,. \rangle$ le crochet associé à deux éléments de $\mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}(P')$, pour la loi P'. Montrons (iii): d'après (ii) on a ${}^{P'}\langle M', N'\rangle = \langle M, N\rangle = u \cdot \langle N, N\rangle = u \cdot {}^{P'}\langle N', N'\rangle$. Donc $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(N', P')$ et si $\tilde{M}'$ désigne l'intégrale stochastique de u par rapport à N' pour P', alors $\hat{M}' = M' - \tilde{M}'$ vérifie ${}^{P'}\langle \hat{M}', N'\rangle = 0$. Mais ${}^{P'}\langle M', M'\rangle = \langle M, M\rangle = u^2 \cdot \langle N, N\rangle = u^2 \cdot {}^{P'}\langle N', N'\rangle$, et ${}^{P'}\langle M', M'\rangle = {}^{P'}\langle \tilde{M}', \tilde{M}'\rangle + {}^{P'}\langle \hat{M}', \hat{M}'\rangle$. Donc ${}^{P'}\langle \hat{M}', \hat{M}'\rangle = 0$, d'où $\hat{M}' = 0$ et $M' = \tilde{M}'$ P'-ps.

(iv) Il nous faut montrer que: $M'N' \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P')$ $\forall N' \in \mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}(P')$. Soient alors $R_n = \inf(t\colon Z_t \leqq 1/n)$, $N' \in \mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}(P')$ et $N = N'Z$. D'après le lemme (1.3) on a $N^{R_n} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, et la formule d'intégration par parties (formule d'Ito) entraine alors que

$$(M'N)^{R_n}_t = M'_- \cdot N^{R_n}_t + N_- \cdot M^{R_n}_t - N_- \cdot A^{R_n}_t + [N^{R_n}, M]_t - \textstyle\sum_{s \leqq t \wedge R_n} \Delta N_s \Delta A_s.$$

Le dernier terme n'est autre que $\Delta A \cdot N^{R_n}_t$, donc c'est un élément de $\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ (nous ne faisons qu'appliquer le résultat général suivant, dû à Yoeurp [21]: si A est un élément prévisible de $\mathfrak{V}_{\mathrm{loc}}(P)$ et si $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, alors $[M, A] \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$). Par ailleurs $\Delta N' = 0$ implique que $\Delta N = \frac{N_-}{Z_-} \Delta Z$ sur $]0, R_n]$, et comme $M^c = 0$ par hypothèse, on a $[N^{R_n}, M] = \frac{N_-}{Z_-} \cdot [Z, M]^{R_n}$, qui admet $N_- \cdot A^{R_n}$ pour projection prévisible duale. Par conséquent $(M'N)^{R_n} = ((M'N')Z)^{R_n} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, donc $M'N' \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P')$. □

(2.2) **Proposition.** (i) *Il existe une fonction positive $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable Y telle que $M^P_\mu(\Delta Z|\tilde{\mathscr{P}}) = Z_-(Y-1)$, et la mesure aléatoire $\nu'(\omega; dt, dx) = Y(\omega, t, x)\, \nu(\omega; dt, dx)$ est une version de la projection prévisible duale de μ pour P'.*

(ii) *Soit $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ telle que $[M, Z] \in \mathfrak{V}_{\mathrm{loc}}(P)$. Si $A = \frac{1}{Z_-} \cdot \langle M, Z\rangle$ et $M' = M - M^0 - A$, on a*

$$M^{P'}_\mu(\Delta M'|\tilde{\mathscr{P}}) = \frac{1}{Y}\left[M^P_\mu(\Delta M|\tilde{\mathscr{P}}) + \frac{1}{Z_-} M^P_\mu(\Delta M\, \Delta Z|\tilde{\mathscr{P}})\right] - \Delta A.$$

(iii) *Soit $W \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$ tel que $M = W * (\mu - \nu)$ vérifie $[M, Z] \in \mathfrak{V}_{\mathrm{loc}}(P)$. Alors $W \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P')$, $\frac{1}{Z_-} \cdot \langle M, Z\rangle = [W(Y-1)] * \nu$ P'-ps, et $M' = M - \frac{1}{Z_-} \cdot \langle M, Z\rangle$ est l'intégrale stochastique de W par rapport à $(\mu - \nu')$ pour P'.*

Démonstration: (i) est montré dans [9]. Montrons (ii): soit (T_n) une suite localisante pour $[M, Z] \in \mathfrak{V}_{\mathrm{loc}}(P)$. On a $M^P_\mu(|\Delta M\, \Delta Z|\, 1_{]0, T_n]}) \leqq E(\int_{]0, T_n]} |d[M, Z]|_s) < \infty$, donc $W = M^P_\mu(\Delta M\, \Delta Z|\tilde{\mathscr{P}})$ existe. Soient par ailleurs $U = M^P_\mu(\Delta M|\tilde{\mathscr{P}})$ et $U' = M^{P'}_\mu(\Delta M|\tilde{\mathscr{P}})$. Pour toute fonction $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable V telle que $M^{P'}_\mu(|\Delta M\, V|) < \infty$, on a

$$\begin{aligned} M^{P'}_\mu(U'V) &= M^{P'}_{\nu'}(U'V) = E'[(U'VY) * \nu_\infty] = E[(Z_- U'VY) * \nu_\infty] \\ &= M^P_\nu(Z_- U'VY) = M^P_\mu(Z_- U'VY), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{P'}_\mu(\Delta M\, V) &= E'[(\Delta M\, V) * \mu_\infty] = E[(Z\, \Delta M\, V) * \mu_\infty] = M^P_\mu(Z\, \Delta M\, V) \\ &= M^P_\mu(Z_- \Delta M\, V + \Delta Z\, \Delta M\, V) = M^P_\mu(Z_- UV + VW) \end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que $E'(B_\infty)=E(Z\cdot B_\infty)$ (resp. $=E(Z_-\cdot B_\infty)$) lorsque $B\in\mathfrak{B}(P')$ (resp. $B\in\mathfrak{B}(P')$ est prévisible)). On en déduit que $Z_-U'Y=Z_-U+W$ M^P_μ-ps, d'où (ii).

(iii): L'égalité $\frac{1}{Z_-}\cdot\langle M,Z\rangle=[W(Y-1)]*\nu$ découle du lemme (1.6). Donc $\Delta M'_t=1_D(t)\,W(t,\alpha_t)-(\widehat{WY})_t$ d'après (6), et $M^{P'}_\mu(\Delta M'|\tilde{\mathscr{P}})=W-\widehat{WY}$. Le théorème (4.1) de [8] implique alors que

$$W'(t,x)=W(t,x)-(\widehat{WY})_t+\frac{1}{1-\nu'(\{t\}\times E)}\int_E \nu'(\{t\},dy)[W(t,y)-(\widehat{WY})_t]$$

appartient à $\mathscr{G}_{\rm loc}(\mu,P')$ (on rappelle que $1/\alpha=0$ si $\alpha=0$ par convention). Mais un calcul simple montre que $W=W'+1_{\{Y=1\}}\widehat{WY}$, et que $C^1(\nu',1_{\{Y=1\}}\widehat{WY})=0$. Par suite $W\in\mathscr{G}_{\rm loc}(\mu,P')$. Si $\tilde{M}'$ est l'intégrale stochastique de W par rapport à $(\mu-\nu')$ pour P', la formule (6) entraine

$$\Delta\tilde{M}'_t=1_D(t)\,W(t,\alpha_t)-(\widehat{WY})_t=\Delta M'_t.$$

Comme $\tilde{M}'$ et M' (d'après la proposition (2.1)) sont des sommes compensées de sauts pour P', on en déduit que $\tilde{M}'=M'$ P'-ps. □

2.2. Caractérisation de $\mathscr{E}_{\mathscr{N}}$ lorsque card$(\mathscr{N})$ est fini

On suppose dorénavant, et *jusqu'à la fin de cet article*, que $\mathscr{N}=(X^i, 1\leq i\leq d)$. On note X le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de composantes X^i. On pose $E=\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, et μ désigne la mesure aléatoire à valeurs entières associée à X par (4). Enfin on écrit $\mathscr{M}_X$ pour $\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$ et $\mathscr{E}_X$ pour $\mathscr{E}_{\mathscr{N}}$.

Soit $P\in\mathscr{M}_X$. On note toujours ν la projection prévisible duale de μ pour P, et on considère les fonctions $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurables: $U^i(\omega,t,x)=x^i$ si $x=(x^i)\in E$.

(2.3) **Proposition.** *Si $P\in\mathscr{M}_X$ on a $U^i\in\mathscr{G}_{\rm loc}(\mu,P)$ et*

$$X^i=X^i_0+(X^i)^c+U^i*(\mu-\nu). \tag{10}$$

De plus on peut choisir une version de ν vérifiant identiquement

$$\hat{U}^i_t(\omega)=\int_E x^i\,\nu(\omega;\{t\},dx)=0. \tag{11}$$

Démonstration. Par définition de μ et de U^i on a $M^P_\mu(\Delta X^i|\tilde{\mathscr{P}})=U^i$, donc $U^i\in\mathscr{G}_{\rm loc}(\mu,P)$ d'après [8], et $\hat{U}^i$ est bien défini. Si T est un temps prévisible tel que ΔX^i_T soit intégrable, on a d'après (8):

$$\hat{U}^i_T=E(1_{\{\Delta X_T\neq 0\}}U^i(T,\Delta X_T)|\mathscr{F}_{T-})=E(\Delta X^i_T|\mathscr{F}_{T-})=0$$

et, d'après le théorème de section prévisible [3], le processus $\hat{U}^i$ est P-évanescent, d'où (11). Enfin X^i et $U^i*(\mu-\nu)$ ont mêmes sauts, d'où (10). □

Nous introduisons maintenant une série de conditions, incluant les conditions intervenant dans la proposition (1.4) et le théorème (1.5), et dont nous allons étudier l'équivalence (rappelons que $P\in\mathscr{M}_X$):

I. $P \in \mathscr{E}_X$.

II. $\mathscr{F}_0$ est P-triviale et $\mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P) = \mathfrak{L}^1_{\text{loc}}(X^i, i \leqq d)$.

II*. $\mathscr{F}_0$ est P-triviale, et pour toute $M \in \mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P)$ il existe des processus prévisibles v_i et une suite (A_n) d'éléments de $\tilde{\mathscr{P}}$, croissant vers $\Omega \times [0, \infty[$, tels que $1_{A_n} v_i \in L^1_{\text{loc}}(X^i, P)$ et $1_{A_n} \cdot M = \sum_{i \leqq d} (1_{A_n} v_i) \cdot X^i$ pour tout n.

III. $\mathscr{F}_0$ est P-triviale et toute $M \in \mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P)$ telle que $MX^i \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ $\forall 1 \leqq i \leqq d$ est nulle.

IV. $\mathscr{F}_0$ est P-triviale et toute $M \in \mathfrak{M}^0(P)$ bornée, telle que $MX^i \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ $\forall 1 \leqq i \leqq d$ est nulle.

V. P est standard (au sens de [20]), i.e. si $P' \in \mathscr{M}_X$, $P' \sim P$, alors $P' = P$.

VI. Si $P' \in \mathscr{M}_X$ vérifie $P' \ll P$, alors $P' = P$.

Voici d'abord une série d'implications faciles (la partie (a) ci-dessous est d'ailleurs prouvée dans [22], et nous en reprenons la démonstration). Dans le théorème (2.5) nous verrons (entre autres) que, même lorsque $d \geqq 2$, toutes ces conditions sont équivalentes entre elles.

(2.4) **Proposition.** *Soit* $P \in \mathscr{M}_X$.

(a) *On a les implications* II* $\Rightarrow$ III $\Rightarrow$ VI $\Rightarrow$ V $\Rightarrow$ IV $\Leftrightarrow$ I $\Leftrightarrow$ II.

(b) *Si* $d = 1$, *toutes ces conditions sont équivalentes entre elles, et à* II'. *Toute* $M \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ *s'écrit* $M = E(M_0) + v \cdot X$, *avec* $v \in L^1_{\text{loc}}(X, P)$.

Démonstration. II* $\Rightarrow$ III: Soit $M \in \mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P)$ vérifiant $MX^i \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ pour tout i. Soient (A_n) et (v_i) associés à M comme dans II*: on peut évidemment supposer que $|v_i| \leqq n$ sur A_n. Par hypothèse $\sum_{j \leqq d} 1_{A_n} v_i \cdot [X^i, X^j] = 1_{A_n} \cdot [M, X^i] \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$. En intégrant v_i et en sommant sur i, on obtient:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i,j \leqq d} 1_{A_n} v_i v_j \cdot [X^i, X^j] &= \left[\textstyle\sum_{i \leqq d} 1_{A_n} v_i \cdot X^i, \sum_{i \leqq d} 1_{A_n} v_i \cdot X^i\right] \\ &= 1_{A_n} \cdot [M, M] \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P), \end{aligned}$$

ce qui est impossible (car $[M, M]$ est un processus croissant), sauf si $1_{A_n} \cdot [M, M] = 0$. Par suite $[M, M] = 0$ et $M = 0$.

III $\Rightarrow$ VI: cette implication se montre comme l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) de la proposition (1.4).

VI $\Rightarrow$ V: Evident.

V $\Rightarrow$ IV: Si IV n'est pas vérifiée, il existe $M \in \mathfrak{M}^0(P)$ bornée par 1/3, telle que M_∞ ne soit pas P-ps constant, et que $MX^i \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$ $\forall 1 \leqq i \leqq d$. Soit alors $P' = (1 + M - E(M_\infty)) \cdot P$: on a $P' \sim P$, et $P' \in \mathscr{M}_X$ d'après le lemme (1.3); donc $P' = P$, d'où $M = E(M_\infty)$, ce qui contredit l'hypothèse.

Les équivalences IV $\Leftrightarrow$ I $\Leftrightarrow$ II ont été démontrées dans la proposition (1.4) et le théorème (1.5). Enfin lorsque $d = 1$, II $\Rightarrow$ II' d'après la proposition (1.2), et II' $\Rightarrow$ II* est évident, d'où la partie (b). □

Remarque. A l'exception de ce qui concerne II*, les implications ci-dessus restent valides lorsque $\mathscr{N}$ est une famille quelconque de processus. Cependant c'est l'équivalence des conditions précédentes qui semble intéressante, et nous ne savons montrer cette équivalence que lorsque card$(\mathscr{N})$ est fini. □

Commentaires. Supposons démontrée, dans les commentaires suivants, l'équivalence de toutes les conditions précédentes.

1) En particulier, l'équivalence III$\Leftrightarrow$IV peut s'énoncer comme suit: si la seule martingale *bornée* (nulle en 0), *fortement orthogonale* aux martingales locales X^i est la martingale nulle, alors l'espace des martingales locales (nulles en 0) est l'espace stable engendré par les X^i. L'énoncé analogue pour un espace de Hilbert de fonctions est clairement faux, comme le montre l'exemple suivant: soient f et g deux fonctions réelles orthogonales d'un espace de Hilbert, et H le sous-espace engendré par f et g. On suppose g *non bornée;* il est alors vrai que la seule fonction de H bornée et orthogonale à f est la fonction nulle, et pourtant g n'appartient pas à l'espace engendré par f. La différence fondamentale entre les deux situations est que, dans le premier cas, si X et Y sont deux martingales locales fortement orthogonales, il en est de même de X et Y^T, pour tout temps d'arrêt T. Dans le second cas, l'opération analogue – qui est l'opération de troncature – ne conserve pas l'orthogonalité.

2) Si les martingales locales X^i sont dans $\mathfrak{H}^2_{\text{loc}}(P)$, les différentes conditions ci-dessus (toujours supposées équivalentes) sont de plus équivalentes à

$\widetilde{\text{II}}$. $\mathscr{F}_0$ est P-triviale et $\mathfrak{H}^{2,0}_{\text{loc}}(P)=\mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(X^i, 1\leqq i\leqq d)$.

En effet $\widetilde{\text{II}}\Rightarrow$IV car, si $L\in\mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P)$ est bornée et orthogonale aux X^i, elle est orthogonale à $\mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(X^i, 1\leqq i\leqq d)$, donc à elle-même. Inversement, II*$\Rightarrow\widetilde{\text{II}}$ car, en bornant les processus v_i qui interviennent dans cette condition II*, on obtient $\mathfrak{H}^{2,0}(P)\subset \mathfrak{L}^2(X^i, 1\leqq i\leqq d)$. Finalement lorsque $X^i\in\mathfrak{H}^2_{\text{loc}}(P)$, on a prouvé l'équivalence des conditions:

(i) $\mathfrak{H}^{2,0}_{\text{loc}}(P)=\mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(X^i, 1\leqq i\leqq d)$,

(ii) $\mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P)=\mathfrak{L}^1_{\text{loc}}(X^i, 1\leqq i\leqq d)$. $\square$

On introduit maintenant une propriété de représentation optionnelle que l'on comparera par la suite avec la propriété de représentation prévisible, dégagée dans la première partie de l'article (voir la condition (ii) du théorème (1.7), également). Par définition, on dit que *P satisfait la propriété de représentation optionnelle* (sous-entendu: par rapport à X) *si*:

(i) *On a* $\mathfrak{L}^2_{\text{loc}}((X^i)^c, 1\leqq i\leqq d)=\mathfrak{M}^c_{\text{loc}}(P)$.

(ii) *Toute somme compensée de sauts* $M\in\mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P)$ *s'écrit* $M=W*(\mu-\nu)$ *avec* $W\in\mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$.

Convenons de quelques notations: si B et B' sont deux éléments prévisibles de $\mathfrak{V}_{\text{loc}}(P)$, on désigne par $\frac{dB'}{dB}$ une version prévisible de la mesure $dB'_t(\omega)\,dP(\omega)$ par rapport à la mesure $dB_t(\omega)\,dP(\omega)$; remarquons (et nous l'utiliserons par la suite) que $u=\frac{dB'}{dB}$ vérifie $u\cdot(B'-u\cdot B)=0$. Si $A\subset\mathbb{R}^d$ on note $Ev(A)$ l'espace vectoriel engendré par les points de A. Enfin K désigne l'ensemble des familles finies $(x_i)_{i\leqq n}$ de points de $\mathbb{R}^d$, telles que la dimension de $Ev(x_i, i\leqq n)$ égale le nombre de points x_i distincts et non nuls (ce nombre est évidemment au plus d).

Voici le théorème principal du paragraphe 2.

(2.5) **Théorème.** *Soit $P \in \mathcal{M}_X$. Il y a équivalence entre les conditions I, II, II*, III, IV, V, VI et*

VII. *On a:* (a) *$\mathcal{F}_0$ est P-triviale.*

(b) *P satisfait la propriété de représentation optionnelle.*

(c) *Il existe un élément prévisible $C \in \mathfrak{V}^+_{\mathrm{loc}}(P)$, des versions $\lambda^j_i = \frac{d\langle (X^i)^c, (X^j)^c\rangle}{dC}$ et $(d+1)$ processus prévisibles α_i (resp. β_i) à valeurs dans $[0, \infty[$ (resp. $\mathbb{R}^d$), vérifiant*

$$\beta_1 \neq 0, \quad \Delta C \textstyle\sum_{i \leq d} \alpha_i < 1, \quad \{\alpha_i \neq 0\} = \{\beta_i \neq 0\}, \quad (\beta_i(\omega, t), 1 \leq i \leq d) \in K, \tag{12}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_{d+1} = \beta_{d+1} = 0 & si\ \Delta C = 0 \\ \alpha_{d+1} = \frac{1}{\Delta C} - \sum_{i \leq d} \alpha_i, \quad \beta_{d+1} = -\frac{1}{\alpha_{d+1}} \sum_{i \leq d} \alpha_i \beta_i & si\ \Delta C > 0, \end{array}\right. \tag{13}$$

$$Ev(\beta_i(t, \omega), 1 \leq i \leq d) \cap Ev(\lambda_i(\omega, t), 1 \leq i \leq d) = \{0\} \tag{14}$$

(λ_i est le vecteur de coordonnées $(\lambda^j_i)_{j \leq d}$), *et tels que la formule suivante donne une version de v:*

$$v(\omega; dt, dx) = dC_t(\omega) \textstyle\sum_{i \leq d+1} \alpha_i(\omega, t)\, \varepsilon_{\beta_i(\omega, t)}(dx). \tag{15}$$

La condition VII a un aspect technique, bien qu'il s'agisse d'un maillon important dans la chaîne d'implications. (14) est une sorte «d'orthogonalité» entre les parties continues $(X^i)^c$ et sommes compensées de sauts $(X^i)^d$; (13) implique d'une part que $a_t = v(\{t\} \times E)$ ne prend que les valeurs 0 et 1, d'autre part que (11) est vérifiée; la condition $\Delta C \sum_{(i)} \alpha_i < 1$ entraine que si $\Delta C > 0$ on a $\alpha_{d+1} \neq 0$ et $\beta_{d+1} \neq 0$: les sauts de X peuvent être «épuisés» par une suite de temps d'arrêt totalement inaccessibles, et une suite de temps d'arrêt prévisibles (et pas seulement accessibles); enfin en dehors d'un ensemble P-évanescent on a $\Delta X_t(\omega) \in \{\beta_i(\omega, t), 1 \leq i \leq d\}$ dès que $\Delta X_t(\omega) \neq 0$.

Lorsque $d = 1$, la condition VII prend une forme bien plus agréable:

(2.6) **Corollaire.** *Supposons $d = 1$. Soit $P \in \mathcal{M}_X$. Il y a équivalence entre les conditions I, II, II*, II', III, IV, V, VI et*

VII'. *On a* (a) *et:* (b') *Toute $M \in \mathfrak{M}^0_{\mathrm{loc}}(P)$ s'écrit $M = u \cdot X^c + W * (\mu - v)$, avec $u \in \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(X^c, P)$ et $W \in \mathcal{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$.*

(c') *Il existe un élément prévisible $C \in \mathfrak{V}^+_{\mathrm{loc}}(P)$ tel que les mesures aléatoires dC et $d\langle X^c, X^c\rangle$ soient étrangères, et deux processus prévisibles α et β tels que $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$ et*

$$v(\omega; dt, dx) = dC_t(\omega)\,[\alpha_t(\omega)\, \varepsilon_{\beta_t(\omega)}(dx) + \alpha'_t(\omega)\, \varepsilon_{\beta'_t(\omega)}(dx)], \tag{16}$$

où $\alpha' = \beta' = 0$ si $\Delta C = 0$, et $\alpha' = \frac{1}{\Delta C} - \alpha$, $\beta' = -\frac{\alpha\beta}{\alpha'}$ si $\Delta C > 0$.

De plus si X est quasi-continu à gauche pour P, on peut remplacer (c') par: (c'_g) *Il existe un processus prévisible β tel que $\Delta X = \beta 1_{\{\Delta X \neq 0\}}$ en dehors d'un ensemble P-évanescent et, si $d\xi_s(\omega)$ désigne la projection prévisible duale*[1] *de la mesure $d\eta_s(\omega) = \sum_{(t)} 1_{\{\Delta X_t(\omega) \neq 0\}}\, \varepsilon_t(ds)$, alors les mesures $d\xi$ et $d\langle X^c, X^c\rangle$ sont étrangères.*

[1] La mesure ξ existe, car la première partie de la condition (c'_g) entraine que la restriction de M^P_η à $(\Omega \times [0, \infty[, \mathcal{P})$ est σ-finie

Démonstration. Comme $\mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(X^c)=\{u\cdot X^c\colon\ u\in L^2_{\mathrm{loc}}(X^c,P)\}$, (b′) n'est autre que la formulation de (b) lorsque $d=1$, donc VII$\Leftrightarrow$VII′.

Supposons X quasi-continue à gauche. Si on a (c′), il est clair que $\Delta X=\beta 1_{\{\Delta X\neq 0\}}$ en dehors d'un ensemble P-évanescent (car on a alors $\alpha'=0$ puisque $\Delta C=0$), et comme $d\xi_t=\alpha_t\,dC_t$ on a (c'_g). Supposons inversement (c'_g). Il est facile de trouver un élément prévisible $C\in\mathfrak{V}^+_{\mathrm{loc}}(P)$ et une mesure de transition positive $n_t(\omega,dx)$ de $(\Omega\times[0,\infty[,\mathscr{P})$ dans (E,ξ), tels que

$$v(\omega;dt,dx)=dC_t(\omega)\,n_t(\omega,dx) \tag{17}$$

(on peut prendre $C=W*v$, où W est une fonction $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable strictement positive telle que $W*v\in\mathfrak{V}^+_{\mathrm{loc}}(P)$: il en existe, car la restriction de M^P_μ à $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{P}})$ est σ-finie; n est alors une désintégration prévisible de v selon C). Si $A=\{(\omega,t,\beta_t(\omega))\colon \omega\in\Omega,\ t\geqq 0\}$, on a $M^P_v(A^c)=M^P_\mu(A^c)=0$ par hypothèse, donc on peut choisir une version de n telle que le support de $n_t(\omega,.)$ soit $\beta_t(\omega)$ si $\beta_t(\omega)\neq 0$, et un réel quelconque fixé a-priori si $\beta_t(\omega)=0$: autrement dit, v se met sous la forme (16) avec $\alpha'=\beta'=\Delta C=0$, $\alpha>0$. Enfin $d\xi_t=\alpha_t dC_t$, donc dC et $d\langle X^c,X^c\rangle$ sont étrangères, et on a (c'). □

Remarque. Si on combine la démonstration ci-dessus avec (11), on vérifie facilement que: $(c'_g)\Rightarrow X$ est quasi-continu à gauche pour P; en effet (c'_g) entraine immédiatement une factorisation du type (16), avec $\alpha'=0$, et (11) implique alors $\Delta C=0$. □

Avant d'aborder la démonstration de (2.5), nous avons besoin de deux lemmes (le premier est d'ailleurs sans objet lorsque $d=1$).

(2.7) **Lemme.** *Soient B un élément prévisible de $\mathfrak{V}^+_{\mathrm{loc}}(P)$, $(Y^i)_{i\leqq d}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{H}^2_{\mathrm{loc}}(P)$ et $\rho^i_j=\dfrac{d\langle Y^i,Y^j\rangle}{dB}$. Si $M\in\mathfrak{H}^2_{\mathrm{loc}}(P)$ il existe des processus prévisibles (u_i) tels que $\dfrac{d\langle Y^i,M\rangle}{dB}=\sum_{j\leqq d}u_j\,\rho^j_i$.*

Démonstration. Soit $\hat{M}$ la projection de M sur $\mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(Y^i,\ 1\leqq i\leqq d)$. Par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt on construit des éléments $Z^i\in\mathfrak{H}^2_{\mathrm{loc}}(P)$ engendrant $\mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(Y^i,1\leqq i\leqq d)$, de la forme $Z^i=\sum_{k\leqq d}\alpha^i_k\cdot Y^k$, avec $\alpha^i_k\in L^2_{\mathrm{loc}}(Y^k,P)$, et vérifiant $\langle Z^i,Z^j\rangle=0\ \forall i\neq j$. Mais alors il existe des $v_i\in L^2_{\mathrm{loc}}(Z^i,P)$ tels que $\hat{M}=\sum_{i\leqq d}v_i\cdot Z^i$ et

$$\langle M,Y^i\rangle=\langle\hat{M},Y^i\rangle=\sum_{j\leqq d}v_j\cdot\left[\sum_{k\leqq d}\alpha^j_k\cdot\langle Y^i,Y^k\rangle\right].$$

Si $\mu_i=\dfrac{d\langle M,Y^i\rangle}{dB}$, il vient

$$\mu_i\cdot B=\sum_{j\leqq d}v_j\cdot\left[\sum_{k\leqq d}\alpha^j_k\,\rho^k_i\cdot B\right].$$

On ne peut pas ci-dessus intervertir a-priori l'ordre de sommations. Cependant si $D_n=\{(\omega,t)\colon |v_i(\omega,t)|\leqq n,\ |\alpha^j_i(\omega,t)|\leqq n,\ |\rho^j_i(\omega,t)|\leqq n,\ \forall i,j\leqq d\}$ on a $D_n\in\mathscr{P}$ et

$$1_{D_n}\mu_i\cdot B=\sum_{j\leqq d}v_j\cdot\left[\sum_{k\leqq d}\alpha^j_k\,\rho^k_i\,1_{D_n}\cdot B\right]=\left[\sum_{k\leqq d}\rho^k_i\sum_{j\leqq d}v_j\,\alpha^j_k\right]1_{D_n}\cdot B.$$

Si $u_k=\sum_{j\leqq d}v_j\,\alpha^j_k$, il vient $\mu_i=\sum_{k\leqq d}u_k\rho^k_i\ dB_t(\omega)\,P(d\omega)$-ps sur D_n. Comme D_n croit vers $\Omega\times[0,\infty[$, on en déduit le résultat. □

(2.8) **Lemme.** *Supposons que pour tout $W \in \mathscr{G}_{loc}(\mu, P)$ borné, tel que $U^i W * \nu = 0$ $\forall 1 \leqq i \leqq d$, on ait $W * (\mu - \nu) = 0$. Il existe alors un élément prévisible $C \in \mathfrak{V}^+_{loc}(P)$ et $(d+1)$ processus prévisibles α_i* (resp. β_i) *à valeurs dans* $[0, \infty[$ (resp. $\mathbb{R}^d$), *vérifiant* (12), (13) *et* (14).

Remarque. L'énoncé réciproque est également vrai, et facile à montrer. □

Démonstration. Soit T un temps prévisible tel que $0 < a_T < 1$ P-ps sur $\{T < \infty\}$. Si $W(\omega, t, x) = 1_{\{t = T(\omega)\}}$ on a bien-sûr $W \in \mathscr{G}_{loc}(\mu, P)$, $U^i W * \nu_t = \hat{U}^i_T 1_{\{T \leqq t\}} = 0$ d'après (11), et cependant $\Delta(W * (\mu - \nu))_T = 1_{\{T = t, \Delta X_T \neq 0\}} - a_T$: cela contredit l'hypothèse, sauf si $P(T < \infty) = 0$. Par suite, et quitte à modifier ν sur un ensemble P-nul, on peut supposer que $\{0 < a < 1\} = \emptyset$.

Etant donnés (11) et le fait que $\nu(]0, t] \times A) \in \mathfrak{V}^+_{loc}(P)$ $\forall A \in \mathscr{E}$ tel que $d(0, A) > 0$, on peut bien-sûr trouver une factorisation (17) vérifiant identiquement

$$\begin{aligned} &n_t(\omega, E) > 0, \quad \Delta C_t(\omega) \textstyle\int_E n_t(\omega, dx)\, x = 0, \\ &\qquad\qquad n_t(\omega, A) < \infty \qquad\qquad \text{si } A \in \mathscr{E} \text{ vérifie } d(0, A) > 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Soit $\mathscr{J}$ l'ensemble des boules fermées J de $\mathbb{R}^d$ de rayon rationnel, centrées en un point de coordonnées rationnelles, telles que $d(0, J) > 0$. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble (dénombrable) des familles finies $I = (I_i)_{i \leqq n}$, où les I_i sont dans $\mathscr{J}$ et deux-à-deux disjointes. Soit $I = (I_i)_{i \leqq n} \in \mathscr{I}$. On pose $\rho_i(\omega, t) = \int_{I_i} x\, n_t(\omega, dx)$: les processus ρ_i sont prévisibles et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, à cause de (18). Soit $B_I = \{(\omega, t)$: $\exists i \leqq n$ tel que $\rho_i(\omega, t) \neq 0$; $(\rho_i(\omega, t))_{i \leqq n} \notin K$; si $a_t(\omega) = 1$, $\dim \mathrm{Ev}(\rho_i(\omega, t), i \leqq n) \leqq p(\omega, t) - 2$, où $p(\omega, t)$ est le nombre de points $\rho_i(\omega, t)$ distincts et non nuls$\}$. On a $B_I \in \mathscr{P}$, et il n'est pas difficile de voir qu'il existe des processus prévisibles finis γ_i tels que

$$\textstyle\sum_{i \leqq n} \gamma_i(\omega, t)\, \rho_i(\omega, t) = 0, \tag{19}$$

$$(\omega, t) \in B_I \cap \{a = 0\} \Rightarrow \exists i \leqq n \qquad \text{tel que } \gamma_i(\omega, t)\, n_t(\omega, I_i) \neq 0, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} (\omega, t) \in B_I \cap \{a = 1\} \Rightarrow \exists i, j \leqq n,\ i \neq j \quad &\text{tels que } \gamma_i(\omega, t) \neq \gamma_j(\omega, t), \\ &\gamma_i(\omega, t)\, n_t(\omega, I_i) \neq 0 \text{ et } \gamma_j(\omega, t)\, n_t(\omega, I_j) \neq 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Soient alors

$$D_m = \{(\omega, t) \colon t \leqq m, |\gamma_i(\omega, t)| \leqq m\ \forall i \leqq n\}$$

et

$$W^m(\omega, t, x) = 1_{D_m}(\omega, t) \textstyle\sum_{i \leqq n} \gamma_i(\omega, t)\, 1_{I_i}(x).$$

On a $|W^m| \leqq mn$ et $|W^m| * \nu_\infty \leqq m \sum_{i \leqq n} \nu(]0, m] \times I_i) < \infty$, donc $W^m \in \mathscr{G}_{loc}(\mu, P)$. De plus (19) implique $W^m U^i * \nu = 0$ $\forall 1 \leqq i \leqq d$, donc $W^m * (\mu - \nu) = 0$ par hypothèse. Comme a ne prend que les valeurs 0 et 1, le processus $C^0(\nu, W^m)$ se calcule facilement:

$$C^0(\nu, W^m) = \Big[1_{\{a=0\}} \textstyle\sum_{i \leqq n} |\gamma_i|\, n(I_i) + 1_{\{a=1\}} \sum_{i \leqq n} n(I_i)\, |\gamma_i - \sum_{j \leqq n} \gamma_j\, n(I_j)\, \Delta C|\Big]\, 1_{D_m} \cdot C,$$

et $W^m * (\mu - \nu) = 0$ implique $C^0(\nu, W^m) = 0$ P-ps [8]. Comme $\Delta C > 0$ si $a = 1$, les conditions (20) et (21) impliquent alors que $1_{B_I \cap D_n} \cdot C = 0$: mais D_m croit vers $\Omega \times [0, \infty[$, donc $1_{B_I} \cdot C = 0$ P-ps.

Quitte à modifier encore ν sur un ensemble P-nul, on peut donc supposer que $B_I = \emptyset$ $\forall I \in \mathscr{I}$.

(a) Soit (ω,t) tel que $a_t(\omega)=0$. Si $n_t(\omega,.)$ admet (au moins) $(d+1)$ points $(x_i,\ 1\leqq i\leqq d+1)$ dans son support, on peut trouver $I=(I_i)_{1\leqq i\leqq d+1}\in\mathscr{I}$ tel que $x_i\in I_i$ et $\rho_i(\omega,t)\neq 0$, ce qui contredit $(\rho_i(\omega,t))_{1\leqq i\leqq d+1}\in K$; donc le support de $n_t(\omega,.)$ est constitué de p points $(x_i)_{1\leqq i\leqq p}$, avec $1\leqq p\leqq d$. De plus il existe $I=(I_i)_{i\leqq p}\in\mathscr{I}$ tel que $x_i\in I_i$, et comme $n_t(\omega,I_i\setminus\{x_i\}=0$ on a $\rho_i(\omega,t)=x_i$: par suite $(x_i)_{1\leqq i\leqq p}\in K$.

(b) Soit (ω,t) tel que $a_t(\omega)=1$. On montre de la même manière que le support de $n_t(\omega,.)$ consiste en $(p+1)$ points (x_i), avec $2\leqq p+1\leqq d+1$, $(x_i)_{1\leqq i\leqq p}\in K$ et $x_{p+1}\in \mathrm{Ev}(x_i,\ 1\leqq i\leqq p)$, puisque la relation $a_t(\omega)=\Delta C_t(\omega)\,n_t(\omega,E)=1$ est une relation linéaire entre les x_i.

(c) Avec les notations ci-dessus, on pose $\beta_i(\omega,t)=x_i$ si $1\leqq i\leqq p$, $\beta_i(\omega,t)=0$ si $p+1\leqq i\leqq d$, et $\beta_{d+1}(\omega,t)=0$ (resp. $=x_{p+1}$) si $a_t(\omega)=0$ (resp. $=1$). Par un numérotage adéquat des x_i, on peut évidemment obtenir des processus β_i prévisibles, et $\beta_1\neq 0$ par construction: alors ν se met sous la forme (15), avec des processus α_i prévisibles convenables, et on a clairement (12) et (13) (rappelons que (13) signifie que a ne prend que les valeurs 0 et 1, et qu'on a (11)). $\square$

Démonstration du théorème (2.5). D'après la proposition (2.4) il nous reste à montrer les implications $\mathrm{I}\Rightarrow\mathrm{VII}\Rightarrow\mathrm{II}^*$.

$\mathrm{I}\Rightarrow\mathrm{VII}$: Supposons $P\in\mathscr{E}_X$. Soit l'ensemble de «caractéristiques locales» (cf. paragraphe 1.5) $\mathfrak{Q}=(\nu,(W^i=U^i,\ i\leqq d),0,(B^{ij}=\langle (X^i)^c,(X^j)^c\rangle))$. Il est clair que $P\in\mathscr{E}(\mathfrak{Q})$, donc (a) et (b) sont vérifiés d'après le théorème (1.7).

Supposons maintenant qu'il existe $N\in\mathfrak{M}^0_{\mathrm{loc}}(P)$ non nulle telle que si $W=M^P_\mu(\Delta N|\tilde{\mathscr{P}})$, on ait

$$|\Delta N|\leqq 1,\qquad WU^i*\nu+\langle N^c,(X^i)^c\rangle=0\qquad \forall 1\leqq i\leqq d. \tag{22}$$

Quitte à remplacer N par N^T, où $T=\inf(t\colon |N_t|\geqq 1)$, on peut supposer que $|N|\leqq 2$. Soient alors $Z'=1+N/4$, $Z''=1-N/4$, $P'=Z'_\infty\cdot P$, $P''=Z''_\infty\cdot P$. On a $M^P_\mu(\Delta Z'|\tilde{\mathscr{P}})=W/4$ et $\langle Z'^c,(X^i)^c\rangle=\frac{1}{4}\langle N^c,(X^i)^c\rangle$, donc d'après le lemme (1.6), (10) et (22) on a $\langle Z',X^i\rangle=0$. Donc $Z'X^i\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, d'où $P'\in\mathscr{M}_X$ d'après le lemme (1.3), et de même $P''\in\mathscr{M}_X$. Comme $P=\frac{1}{2}(P'+P'')$, cela contredit l'extrémalité de P: donc toute $N\in\mathfrak{M}^0_{\mathrm{loc}}(P)$ vérifiant (22) est nulle.

Soit alors $V\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu,P)$ borné par 1/2, tel que $VU^i*\nu=0$ $\forall i\leqq d$, et posons $N=V*(\mu-\nu)$. On a $|\Delta N|\leqq 1$ et $W=M^P_\mu(\Delta N|\tilde{\mathscr{P}})=V-\hat{V}$; comme $\hat{U}^i=0$, on a $WU^i*\nu=VU^i*\nu=0$ et N satisfait (22). Donc $N=0$, et l'hypothèse du lemme (1.8) est satisfaite, ce qui prouve l'existence de processus C, α_i et β_i satisfaisant (12), (13) et (15).

Soit enfin $D=\{(\omega,t)\colon \mathrm{Ev}(\beta_i(\omega,t),\ i\leqq d)\cap\mathrm{Ev}(\lambda_i(\omega,t),\ i\leqq d)\neq\{0\}\}$. Comme $\langle (X^i)^c,(X^j)^c\rangle\ll\langle (X^i)^c,(X^i)^c\rangle$, on peut choisir des versions λ_i^j telles que $\{\lambda_i^i=0\}\subset\{\lambda_i^j=0\}$. Il est alors immédiat qu'on peut construire des processus prévisibles à valeurs réelles u_i et w_i tels que

$$\textstyle\sum_{i\leqq d} w_i\,\alpha_i\,\beta_i+\sum_{i\leqq d} u_i\,\lambda_i=0,\qquad \{\lambda_j^j=0\}\subset\{u_j=0\}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i,j\leqq d}|w_i\,\beta_i^j|>0\quad \text{sur } D,\\ &|u_i|\leqq 1,\quad |w_i|\leqq 1/2,\quad \textstyle\sum_{i\leqq d}|w_i\,\beta_i|\leqq 1.\end{aligned} \tag{24}$$

Si $V(\omega,t,x)=\sum_{i\leqq d} w_i(\omega,t)\,1_{\{x=\beta_i(\omega,t)\}}$ on a alors $V\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu,P)$ et $N=V*(\mu-\nu)+\sum_{i\leqq d} u_i\cdot(X^i)^c$ vérifie $|\Delta N|\leqq 1$. De plus $W=M^P_\mu(\Delta N|\tilde{\mathscr{P}})=V-\hat{V}$ vérifie (comme ci-dessus) $WU^i * \nu = VU^i * \nu$. Si $\hat{B}^{ij} = \langle (X^i)^c, (X^j)^c \rangle - \lambda_j^i \cdot C$, on a alors

$$WU^i * \nu + \langle N^c, (X^i)^c \rangle = \sum_{j \leqq d} [w_j \beta_j^i \alpha_j + u_j \lambda_j^i] \cdot C + \sum_{j \leqq d} u_j \cdot \hat{B}^{ij} = 0$$

d'après (23) et le fait que $\hat{B}^{ij} \ll \hat{B}^{ii}$ et $\lambda_i^i \cdot \hat{B}^{ii} = 0$. Donc N vérifie (22) et par conséquent est nulle, ce qui d'après (24) implique $1_D \cdot C = 0$ P-ps. Quitte à remplacer λ_j^i par $1_{D^c} \lambda_j^i$, ce qui ne change pas les relations définissant λ_j^i, on a (14), ce qui achève de montrer VII.

VII $\Rightarrow$ II*: Soit $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}^0(P)$. D'après (b), $M = M^c + W*(\mu - \nu)$, où $W \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$. Mais (13) implique que a ne prend que les valeurs 0 et 1, et il est facile d'en déduire que $\hat{W}*(\mu-\nu)=0$: quitte à remplacer W par $W - \hat{W}$, on peut donc supposer que $\hat{W} = 0$.

Posons $w_i(\omega, t) = W(\omega, t, \beta_i(\omega, t))\, 1_{\{\beta_i(\omega, t) \neq 0\}}$, $B = \sum_{i \leqq d} \langle (X^i)^c ; (X^i)^c \rangle$, $h = dB/dC$, $\rho_j^i = \dfrac{d\langle (X^i)^c, (X^j)^c \rangle}{dB}$, $\mu_i = \dfrac{d\langle M^c, (X^i)^c \rangle}{dB}$. Il existe $A \in \mathscr{P}$ tel que $1_A \cdot C = C$ et $h = 0$ sur A^c. Considérons le système d'équations

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i \leqq d} v_i \beta_j^i 1_A = w_j 1_A, \qquad 1 \leqq j \leqq d+1 \\ &\textstyle\sum_{i \leqq d} v_i \rho_j^i = \mu_j, \qquad 1 \leqq j \leqq d. \end{aligned} \tag{25}$$

En utilisant (13) et le fait que $\hat{W} = 0$, on voit que la $(d+1)^{\text{ème}}$ équation est une combinaison linéaire des d premières, tandis que si $\beta_j = 0$ la $j^{\text{ème}}$ équation est une identité: si $r = \dim[\mathrm{Ev}(\beta_i 1_A,\ 1 \leqq i \leqq d)]$, les $(d+1)$ premières équations se réduisent donc à r équations linéairement indépendantes. Par ailleurs le lemme (2.7) implique que (pour des versions convenables) $\mu_i = \sum_{j \leqq d} u_j \rho_i^j$, donc si $s = \dim[\mathrm{Ev}(\rho_i,\ 1 \leqq i \leqq d)]$, les d dernières équations (25) se réduisent à s équations linéairement indépendantes. Enfin sur A^c on a $r = 0$, tandis que sur A on a $\rho_j^i = \dfrac{1}{h} 1_{\{h>0\}} \lambda_j^i$: (14) implique alors que le système (25) admet (au moins) une solution (v_i), qu'on peut évidemment choisir prévisible.

Soit alors (T_n) une suite localisante commune aux $X^i \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$. Soit $A_n = \{(\omega, t)\colon t \leqq T_n(\omega),\ |v_i(\omega, t| \leqq n\ \forall 1 \leqq i \leqq d\}$. On a $A_n \in \mathscr{P}$, $1_{A_n} v_i \in L^1(X^i, P)$ et A_n croit vers $\Omega \times [0, \infty[$. Posons $N(n) = 1_{A_n} \cdot M - \sum_{i \leqq d} (1_{A_n} v_i) \cdot X^i$. Comme $\hat{W} = 0$ et comme $\Delta X \in \{\beta_i,\ 1 \leqq i \leqq d+1\}$ si $\Delta X \neq 0$ et $A^c \subset \{\Delta X = 0\}$ en dehors d'un ensemble P-évanescent, on déduit facilement de (25) que $\Delta N(n) = 0$, donc $N(n)^d = 0$. D'autre part d'après (25),

$$\langle N(n)^c, (X^i)^c \rangle = 1_{A_n} \mu_i \cdot B - \sum_{j \leqq d} (1_{A_n} v_j \rho_i^j) \cdot B = 0.$$

La condition (b) entraine alors que $N(n)^c = 0$. Autrement dit $1_{A_n} \cdot M = \sum_{i \leqq d} (1_{A_n} v_i) \cdot X^i$, et on a II*. $\square$

Nous appliquons maintenant ce résultat à deux problèmes voisins, dont le premier nous a été posé par M. Sharpe.

2.3. Première application (le problème de Sharpe)

On suppose dans cette section que $d = 1$. On considère un processus croissant prévisible ou continu A. $\mathscr{M}(A)$ est l'ensemble des $P \in \mathscr{M}_X$ tels que: $X \in \mathfrak{H}_{\mathrm{loc}}^2(P)$ et $\langle X, X \rangle = A$.

Comme $P \in \mathcal{M}(A)$ si et seulement si les deux processus X et $(X)^2 - A$ sont dans $\mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$, $\mathcal{M}(A)$ est l'ensemble des solutions du problème des martingales associé à ces deux processus. Le théorème (2.5) nous donne donc, entre autres, *l'équivalence des conditions suivantes:*

(i) P est extrémal dans $\mathcal{M}(A)$.

(ii) $\mathscr{F}_0$ est P-triviale, et $\mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P) = \mathfrak{L}^1_{\text{loc}}(X, (X)^2 - A)$.

La condition VII de (2.5) s'exprime en fonction de la mesure aléatoire μ^Y associée par (4) au processus Y à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de composantes $Y^1 = X$ et $Y^2 = (X)^2 - A$, et les relations entre μ et μ^Y sont compliquées. Aussi nous contenterons-nous d'examiner le cas où A est continu.

(2.9) **Proposition.** *Soit A un processus croissant continu. Alors $\mathcal{M}(A)$ est un ensemble convexe. De plus si $P \in \mathcal{M}(A)$, P est extrémal si et seulement si on a:*

(a) *$\mathscr{F}_0$ est P-triviale.*

(b) *Toute $M \in \mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P)$ s'écrit $M = u \cdot X^c + W * (\mu - \nu)$, avec $u \in L^2_{\text{loc}}(X^c, P)$ et $W \in \mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$.*

(c_A) *Il existe des processus prévisibles α, α', β et β' tels que: $\alpha > 0$, $\alpha' \geqq 0$, $\beta \neq 0$, $\beta' \neq \beta$, $\alpha\beta^2 \leqq 1$, $\alpha' = 0$ si $\beta' = 0$ et $\alpha\beta^2 + \alpha'\beta'^2 = 1$ si $\beta' \neq 0$, et que*

$$\nu(dt, dx) = dA_t[\alpha_t\, \varepsilon_{\beta_t}(dx) + \alpha'_t\, \varepsilon_{\beta'_t}(dx)]. \tag{26}$$

Remarque. Sous ces conditions, on vérifie facilement que $\langle X^d, X^d \rangle = (\alpha\beta^2 + \alpha'\beta'^2) \cdot A$ et que $\langle X^c, X^c \rangle = (1 - \alpha\beta^2 - \alpha'\beta'^2) \cdot A$. □

Démonstration. Afin de ne pas confondre exposant et indice, on écrit ici $(z)^2$ pour désigner le carré de z.

Soit $P = \alpha P' + (1-\alpha) P''$, avec $\alpha \in]0, 1[$ et $P', P'' \in \mathcal{M}(A)$. Soit $T_n = \inf(t: A_t \geqq n)$: on a $X^{T_n} \in \mathfrak{H}^2(P') \cap \mathfrak{H}^2(P'')$ et $(X^{T_n})^2 - A^{T_n} \in \mathfrak{M}(P') \cap \mathfrak{M}(P'')$, donc $X^{T_n} \in \mathfrak{H}^2(P)$ et $(X^{T_n})^2 - A^{T_n} \in \mathfrak{M}(P)$; comme $\lim_{(n)} T_n = +\infty$ P'-ps et P''-ps, on a aussi $\lim_{(n)} T_n = +\infty$ P-ps: donc $P \in \mathcal{M}(A)$, qui est convexe.

Le processus Y est défini avant l'énoncé. Si $\mathcal{M}_Y$ est l'ensemble des lois P telles que $Y^i \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P)$, $i = 1, 2$, on a $\mathcal{M}_Y = \mathcal{M}(A)$ (car si $P \in \mathcal{M}_Y$, A est $\mathscr{F}_t(P)$-adapté, donc $\mathscr{F}_t(P)$-prévisible puisque continu). Posons $E^Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\tilde{\Omega}^Y = \Omega \times [0, \infty[\times E^Y$; on désigne par μ^Y la mesure aléatoire sur $]0, \infty[\times E^Y$ associée à Y par (4), et ν^Y sa projection prévisible duale. A toute fonction W^Y sur $\tilde{\Omega}^Y$ on associe la fonction τW sur $\hat{\Omega}$: $\tau W(\omega, t, x) = W^Y(\omega, t, x, (x)^2 + X_{t-}(\omega) x)$. Comme $\Delta Y_t^2 = (\Delta X_t)^2 + 2X_{t-}\Delta X_t$, on a $W^Y * \mu^Y = \tau W * \mu$, $W^Y * \nu^Y = \tau W * \nu$, et si $W^Y \in \mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu^Y, P)$, alors $\tau W \in \mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$ et $W^Y * (\mu^Y - \nu^Y) = \tau W * (\mu - \nu)$. Comme $Y^2 = 2X_- \cdot X + [X, X] - A$, il est clair que $\mathfrak{L}^2_{\text{loc}}((Y^i)^c, i = 1, 2) = \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(X^c) = \{u \cdot X^c: u \in L^2_{\text{loc}}(X^c, P)\}$: par suite (b) équivaut à la condition VII-(b) relative à Y.

Soit $C = \langle X^d, X^d \rangle$: on a $C = h \cdot A$ pour un processus prévisible $0 \leqq h \leqq 1$. De plus $X^d \in \mathfrak{H}^2_{\text{loc}}(P)$ et X^d est quasi-continu à gauche, donc $C^\infty(\nu, U) = (U)^2 * \nu = C$ [8]. Etudions maintenant la condition VII(c) relative à Y: on peut trouver une factorisation (15) de ν^Y avec le processus C ci-dessus, et deux processus β_i seulement, car (13) est vide, et vérifiant de plus $\beta_i^2 = (\beta_i^1)^2 + 2X_- \beta_i^1$. Posons $\alpha = h\alpha_1$, $\alpha' = h\alpha_2$, $\beta = \beta_1^1$, $\beta' = \beta_2^1$: on a (26) et $h = \alpha(\beta)^2 + \alpha'(\beta')^2$. Si $\beta' \neq 0$ il est facile de vérifier que $\dim[\mathrm{Ev}(\beta_1, \beta_2)] = 2$; comme $\lambda_1^1 = \dfrac{1-h}{h}$, $\lambda_1^2 = \lambda_2^1 = 2X_- \dfrac{1-h}{h}$,

$\lambda_2^2 = 4(X_-)^2 \dfrac{1-h}{h}$, (14) montre que si $\beta' \neq 0$ on a $1-h=0$, donc $\alpha(\beta)^2 + \alpha'(\beta')^2 = 1$: par suite on a (c_A).

Inversement supposons (c_A). Soient $h = \alpha(\beta)^2 + \alpha'(\beta')^2$, $C = h \cdot A$, $\alpha_1 = \dfrac{\alpha}{h} 1_{\{h>0\}} + 1_{\{h=0\}}$, $\alpha_2 = \dfrac{\alpha'}{h} 1_{\{h>0\}}$, $\beta_1^1 = \beta\, 1_{\{h>0\}} + 1_{\{h=0\}}$, $\beta_2^1 = \beta'$ et $\beta_i^2 = (\beta_i^1)^2 + 2X_- \beta_i^1$, on a clairement (12) et (15); (13) est vide; enfin (14) découle des remarques suivantes: $\lambda_2 = 2X_- \lambda_1$, les vecteurs λ_1 et β_1 sont linéairement indépendants dès que $\lambda_1 \neq 0$, et $\lambda_1 = 0$ si $h=1$, c'est-à-dire si $\beta' \neq 0$. Donc (c_A) entraine la condition VII(c) relative à Y. □

2.4. *Seconde application: loi des surmartingales*

Là encore dans un but de simplification on suppose $d=1$. Soit $\mathscr{K}_D$ (resp. $\mathscr{K}_{DL}$) l'ensemble des lois P pour lesquelles X est une *surmartingale de classe* (D) (resp. (DL)). Rappelons [14] que $P \in \mathscr{K}_D$ si et seulement s'il existe un élement prévisible $A \in \mathfrak{V}^+(P)$ tel que $X + A \in \mathfrak{M}(P)$, tandis que $P \in \mathscr{K}_{DL}$ si et seulement si pour tout $s>0$, X^s est une P-surmartingale de la classe (D). Enfin si $P \in \mathscr{K}_{DL}$, la décomposition $X = Y - A$, avec $Y \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ et $A \in \mathfrak{V}_{\mathrm{loc}}^+(P)$ prévisible, est unique; d'après [11], (proposition 4, avec une démonstration légèrement modifiée) on sait qu'alors $U(\omega, t, x) = x \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$ et que $Y^d = Y_0 + U * (\mu - \nu)$ (dans cette formule, μ est toujours reliée à X par (4)).

(2.10) **Proposition.** *Les ensembles $\mathscr{K}_D$ et $\mathscr{K}_{DL}$ sont convexes. Soient $P \in \mathscr{K}_D$ (resp. $\mathscr{K}_{DL}$) et A l'unique élément prévisible de $\mathfrak{V}_{\mathrm{loc}}^+(P)$ tel que $Y = X + A$ soit une P-martingale. Il y a équivalence entre:*

(i) *P est extrémal dans $\mathscr{K}_D$* (resp. $\mathscr{K}_{DL}$).

(ii) *Toute $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ s'écrit $M = E(M_0) + v \cdot Y$, avec $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(Y, P)$, et les mesures dA et $dB = d\langle Y^c, Y^c\rangle + dC^1(v, U)$ sont étrangères.*

Remarques. 1) Dans (ii) on peut bien-sûr remplacer $C^1(v, U)$ par $C^\alpha(v, U)$ pour tout $\alpha \in]0, \infty[$. De plus lorsque $Y \in \mathfrak{H}^2_{\mathrm{loc}}(P)$ (ou, ce qui est équivalent: X est localement de carré intégrable) on a $C^\infty(v, U) = \langle Y^d, Y^d\rangle \in \mathfrak{V}^+_{\mathrm{loc}}(P)$ et *on peut remplacer dB par $d\langle Y, Y\rangle$.*

2) Considérons une factorisation $\nu(dt, dx) = dC_t\, n_t(dx)$, où $C \in \mathfrak{V}^+_{\mathrm{loc}}(P)$ et $n_t(E) > 0$ identiquement. Il pourrait sembler a-priori que les mesures dC et $dC^1(v, U)$ soient équivalentes, mais il n'en est rien en général; cependant, si $F = \{(\omega, t) : a_t(\omega) = 1$ et $n_t(\omega, .)$ admet un seul point dans son support$\}$, alors $dC^1(v, U) \sim 1_F \cdot dC$ et on peut remplacer dB par $d\langle Y^c, Y^c\rangle + 1_F \cdot dC$.

3) Supposons X *quasi-continu à gauche* pour P. On sait que A est P-ps continu [14] et on peut remplacer $dC^1(v, U)$ par la mesure $d\xi$, projection prévisible duale de la mesure $d\eta_s = \sum_{(t)} 1_{\{\Delta X_t \neq 0\}}\, \varepsilon_t(ds) = \sum_{(t)} 1_{\{\Delta Y_t \neq 0\}}\, \varepsilon_t(ds)$ (cette mesure existe: même démonstration qu'au corollaire (2.6)).

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer ce qui concerne $\mathscr{K}_D$. Soit $P = \alpha P' + (1-\alpha) P''$, avec $\alpha \in]0, 1[$ et $P', P'' \in \mathscr{K}_D$. Il est clair que le processus X est de classe (D) pour P et est une P-surmartingale. Donc, $P \in \mathscr{K}_D$ et $\mathscr{K}_D$ est convexe.

Soit $P \in \mathscr{K}_D$. P appartient donc à l'ensemble $\mathscr{M}_Y$ des lois faisant de Y une martingale locale. Supposons (i). Si $P = \alpha P' + (1-\alpha) P''$, avec $\alpha \in]0, 1[$, $P', P'' \in \mathscr{M}_Y$, il est clair que, comme $P' \leqq \frac{1}{\alpha} P$ et $Y \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P')$, on a $A \in \mathfrak{V}^+(P')$ et $Y \in \mathfrak{M}(P')$. Donc $P' \in \mathscr{K}_D$, et de même $P'' \in \mathscr{K}_D$; par suite (i) implique $P = P' = P''$: donc $P \in \mathscr{E}_Y$ et on a la première partie de (ii) d'après l'implication I$\Rightarrow$II' de la proposition (2.4), pour $\mathscr{M}_Y$.

Toutes les mesures $dC^\alpha(v, U)$ sont équivalentes, pour $\alpha \in]0, \infty[$ et $C^\alpha(v, U) = C^0(v, U'(\alpha)) + C^\infty(v, U''(\alpha))$. Si les mesures dA et dB ne sont pas étrangères, il existe donc $\alpha \in]0, \infty[$ tel que les mesures dA et $dB' = d\langle Y^c, Y^c\rangle + dC^\infty(v, U''(\alpha))$ ne sont pas étrangères (car $U'(\alpha) \to 0$ si $\alpha \to \infty$); pour simplifier l'écriture, on pose $U'' = U''(\alpha)$. Par ailleurs il est facile de trouver un processus $k > 0$ prévisible tel que le processus $B''_t = \sum_{s \leqq t} 1_{\{a_s > 0\}} k_s(\widehat{U'(\alpha)(U'' - \hat{U}'')})_s$ soit dans $\mathfrak{V}_{\text{loc}}(P)$. Un calcul élémentaire montre que $[kU(U'' - \hat{U}'')] * v = k \cdot C^\infty(v, U'') + B''$. Comme les mesures dA et $k \cdot dB'$ ne sont pas étrangères, il existe un processus prévisible h tel que $|hk| \leqq 1/\alpha$, $E(|hk| \cdot B'_\infty) > 0$, et que les deux processus $A \pm |h| \cdot (k \cdot B' + B'')$ soient croissants et intégrables.

Soient alors $N' = (hk) \cdot Y^c + (hkU'') * (\mu - v)$, $T = \inf(t: |N'_t| \geqq 1)$ et $N = N'^T$: on a $|N| \leqq 2$, $|\Delta N| \leqq 1$, $N \in \mathfrak{M}(P)$ et N n'est pas identiquement nul puisque $E(|hk| \cdot B'_\infty) > 0$. Soient $Z' = 1 + N/4$, $Z'' = 1 - N/4$, $P' = Z'_\infty \cdot P$, $P'' = Z''_\infty \cdot P$. Comme $M^P_\mu(\Delta N' | \tilde{\mathscr{P}}) = hk(U'' - \hat{U}'')$, le lemme (1.6) entraine

$$\langle Y, Z'\rangle = \tfrac{1}{4} hk \cdot [\langle Y^c, Y^c\rangle + [(U'' - \hat{U}'') U] * v] = \tfrac{1}{4} h \cdot (k \cdot B' + B'')$$

et la proposition (2.1) entraine $X + A - \dfrac{h}{4Z'_-} \cdot (k \cdot B' + B'') \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P')$. Mais $Z' \leqq 3/2$ et $1/Z'_- \leqq 2$, donc $P' \leqq \frac{3}{2} P$, le processus X est de la classe (D) pour P', et le processus $A - \dfrac{h}{4Z'_-} \cdot (k \cdot B' + B'')$ est croissant et P'-intégrable: on en déduit $P' \in \mathscr{K}_D$, et de même $P'' \in \mathscr{K}_D$. Comme $P = \frac{1}{2}(P' + P'')$, cela contredit (i), et il faut donc que dA et dB soient étrangères.

Réciproquement supposons (ii). Soient $P', P'' \in \mathscr{K}_D$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que $P = \alpha P' + (1-\alpha) P''$. Soient Z' et Z'' des versions continues à droite de $E\left(\dfrac{dP'}{dP}\middle|\mathscr{F}_t\right)$ et $E\left(\dfrac{dP''}{dP}\middle|\mathscr{F}_t\right)$, telles qu'on ait $Z' + (1-\alpha) Z'' = 1$ identiquement: donc $Z' \leqq 1/\alpha$, $Z'' \leqq \dfrac{1}{1-\alpha}$, $[Z', Y] \in \mathfrak{V}_{\text{loc}}(P)$ et $[Z'', Y] \in \mathfrak{V}_{\text{loc}}(P)$. Par hypothèse $\alpha Z'$ s'écrit $\alpha Z' = \alpha + v \cdot Y$, avec $v \in L^1_{\text{loc}}(Y, P)$, et $(1-\alpha) Z'' = 1 - \alpha - v \cdot Y$. Soit par ailleurs $W = M^P_\mu(\alpha \Delta Z' | \tilde{\mathscr{P}}) = -M^P_\mu((1-\alpha) \Delta Z'' | \tilde{\mathscr{P}})$. Si on applique les propositions (2.1) à Y^c et (2.2) à $Y^d = Y_0 + U * (\mu - v)$, on voit que $Y - \dfrac{1}{\alpha Z'_-} \cdot \hat{A}$ (où $\hat{A} = v \cdot \langle Y^c, Y^c\rangle + WU * v$) appartient à $\mathfrak{M}_{\text{loc}}(P')$; comme $P' \in \mathscr{K}_D$, il faut que le processus $A' = A - \dfrac{1}{\alpha Z'_-} \cdot \hat{A}$ soit P'-ps croissant, et on montre de la même manière que $A'' = A + \dfrac{1}{(1-\alpha) Z''_-} \cdot \hat{A}$ est P''-ps croissant. Mais d'après ([8], (4.4)) on peut choisir W de sorte que

$|W| 1_{\{a=1\}} * \nu_\infty = 0$, et d'après la remarque 2 suivant l'énoncé il s'ensuit que $d\hat{A} \ll d\langle Y^c, Y^c\rangle + dC^1(\nu, U)$. Par hypothèse les mesures dA et $d\hat{A}$ sont étrangères, donc A' (resp. A'') ne peut être P'-ps (resp. P''-ps) croissant que si $\hat{A}=0$ P'-ps et P''-ps, donc P-ps. Autrement dit, on a montré que $P', P'' \in \mathcal{M}_Y$; mais d'après la proposition (2.4), P est extrémal dans $\mathcal{M}_Y$; on a donc $P=P'=P''$, d'où (i).

2.5. Quelques remarques supplémentaires

(a) *Représentation des martingales et tribu optionnelle.* Pour toute probabilité P on note $\mathscr{W}(P)$ (resp. $\mathscr{P}(P)$) la tribu optionnelle (resp. prévisible) relative à la famille $(\mathscr{F}_t(P))_{t\geqq 0}$.

(2.11) **Proposition.** *Supposons que $P \in \mathcal{M}_X$ vérifie la propriété de représentation optionnelle* (par rapport à X). *Alors*

(i) *On a $\mathscr{W}(P) = \mathscr{P}(P) \vee \sigma(X)$.*

(ii) *Pour tout $\mathscr{F}_t(P)$-temps d'arrêt T, $\mathscr{F}_T(P) = \mathscr{F}_{T-}(P) \vee \sigma(X_T 1_{\{T<\infty\}})$. En particulier X est quasi-continu à gauche si, et seulement si, la famille $\mathscr{F}_t(P)$ l'est.*

Démonstration. Remarquons de façon générale que si $\mathscr{C} = \mathscr{P}(P) \vee \sigma(M$: martingale bornée), on a $\mathscr{C} = \mathscr{W}(P)$. En effet d'après le théorème de classe monotone, il suffit de démontrer que la projection optionnelle [3] des processus mesurables bornés $H = U 1_{[r,s]}$, où $0 \leqq r \leqq s$ et U est une variable $\mathscr{F}$-mesurable bornée, est $\mathscr{C}$-mesurable. Or, cette projection optionnelle est $Z 1_{[r,s]}$, où $Z=(Z_t)$ est une version continue à droite de la martingale $E(U|\mathscr{F}_t)$, d'où le résultat $\mathscr{C} = \mathscr{W}(P)$.

Soit maintenant M une martingale bornée. Par hypothèse il existe $W \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$ tel que $M_t = M_t^c + M_{t-}^d + 1_{\{\Delta X_t \neq 0\}} W(t, \Delta X_t) - \hat{W}_t$: par suite M est $\mathscr{P}(P) \vee \sigma(X)$-mesurable, et on a (i). La partie (ii) découle de (i), car d'une part $\mathscr{F}_T(P)$ est engendrée après les variables $Z_T 1_{\{T<\infty\}}$, où Z est un processus $\mathscr{W}(P)$-mesurable quelconque, et d'autre part si H est $\mathscr{P}(P)$-mesurable, $H_T 1_{\{T<\infty\}}$ est $\mathscr{F}_{T-}(P)$-mesurable [3]. La fin de la proposition découle immédiatement de (ii). □

Remarque. Il est clair que, si l'on remplace le processus $X=(X^i, 1\leqq i \leqq d)$ par une famille $\mathscr{N}$ quelconque, la proposition (2.11) reste valable pour $P \in \mathscr{E}_{\mathscr{N}}$. □

(b) *Propriété de représentation optionnelle des martingales d'un processus à accroissements indépendants.* On suppose que P est une probabilité pour laquelle X est un processus d-dimensionnel à accroissements indépendants et stationnaires, vérifiant $P(X_0=0)=1$ (la stationnarité n'est imposée que pour des raisons de simplicité d'écriture). Si μ est encore la mesure associée à X par (4), P est alors solution du problème $\mathscr{S}(\mathfrak{Q})$ (voir paragraphe 1.4) avec $\nu(\omega; dt, dx) = dt \times F(dx)$, $W^i = U^i$, $A_t^i = a^i t$, $B_t^{ij} = b^{ij} t$, où F est la mesure de Lévy de X, et a^i et b^{ij} sont respectivement les coefficients de translation et de diffusion. Mais il est alors bien connu que $\mathscr{S}(\mathfrak{Q})$ ne comporte qu'un seul élément P tel que $P(X_0=0)=1$ et le théorème (1.7) entraine alors que P *satisfait la propriété de représentation optionnelle* par rapport à X.

Mais il existe d'autres démonstrations de ce résultat, basées sur une méthode maintenant classique, et que nous décrivons en deux mots (on pourra par exemple se reporter à Galtchouk [25] pour une démonstration complète de ce type): on construit une famille $\mathcal{U}$ totale dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$, de sorte que pour tout $u \in \mathcal{U}$, si on désigne par U une version continue à droite de la martingale $E(u|\mathcal{F}_t)$, alors $U^c \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}((X^i)^c, 1 \leq i \leq d)$ et $U^d = W * (\mu - \nu)$ pour un $W \in \mathcal{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$ convenable (ici, $(X^i)^c$ est la «partie continue» de la semi-martingale X^i; voir la remarque 1 suivant la proposition (1.2)).

Signalons enfin comment des arguments de ce type peuvent, inversement, être utilisées, via la propriété de représentation des martingales, pour donner des conditions suffisantes d'extrémalité. Pour simplifier, on ne considérera que le cas des martingales locales continues, lorsque $d=1$. On note Δ l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies sur $\mathbb{R}_+$, bornées, nulles en dehors d'un compact.

(2.12) **Proposition.** *Soit X une P-martingale locale réelle continue. Si les variables*

$$\mathcal{E}^f = \exp\left(\int_0^\infty f(u)\, dX_u - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty f^2(u)\, d\langle X, X\rangle_u\right) \qquad (f \in \Delta)$$

sont totales dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}^0, P)$, alors on a II', et donc $P \in \mathcal{E}_X$.

Démonstration. Pour tout t on pose $f_t = f\, 1_{[0,t]}$ (qui est dans Δ lorsque $f \in \Delta$) et $\mathcal{E}_t^f = \mathcal{E}^{f_t}$. D'après la formule d'Ito, on a $\mathcal{E}_t^f = 1 + \int_0^t f(u)\, \mathcal{E}_u^f\, dX_u$; on en déduit que: $\langle \mathcal{E}_\cdot^f, \mathcal{E}_\cdot^f \rangle_\infty = \int_0^\infty f^2(u)(\mathcal{E}_u^f)^2\, d\langle X, X\rangle_u$ est intégrable, car $\mathcal{E}^f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}^0, P)$. L'espace $H = \{Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}^0, P)\colon Y = a + (u \cdot X)_\infty$ où $a \in \mathbb{R}$ et $u \in L^2(X, P)\}$ est fermé dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}^0, P)$ et contient les variables $(\mathcal{E}^f, f \in \Delta)$. D'après l'hypothèse on a donc $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}^0, P)$, dont découle facilement que $\mathcal{F}_0$ est P-triviale et, à l'aide de la proposition (1.2), que toute $M \in \mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P)$ s'écrit $M = u \cdot X$ avec $u \in L^1_{\text{loc}}(X, P)$. □

Signalons que l'on a le même résultat lorsqu'on remplace les variables $(\mathcal{E}^f, f \in \Delta)$ par 1 et $H_n^f = H_n((f \cdot X)_\infty, \int_0^\infty f^2(s)\, d\langle X, X\rangle_s)$, où $f \in \Delta$, $n \in \mathbb{N}$, et où $H_n(x, t)$ désigne le n^{eme} polynôme d'Hermite: on obtient alors la démonstration usuelle de la propriété de représentation des martingales pour le mouvement brownien.

(c) *Un contre-exemple.* On suppose que X est un processus réel continu tel que $X_0 = 0$ et que $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Soit $P \in \mathcal{M}_X$, telle que $\langle X, X\rangle_\infty = \infty$ P-ps. Soit $Y_t = X_{\tau_t}$, où (τ_t) est le changement de temps inverse de $A = \langle X, X\rangle$, et notons $\mathcal{F}^Y(P)$ la complétée de $\sigma(Y_s, s \geq 0)$ dans $\mathcal{F}(P)$. Il est bien connu que Y est un mouvement brownien pour P. En conséquence, si $Q \in \mathcal{M}_X$ et $Q \sim P$, les restrictions de P et Q à $\mathcal{F}^Y(P)$ sont égales (en effet A est encore le crochet de X pour Q, et $Q(A_\infty = \infty) = 1$, donc Y est un mouvement brownien pour Q, alors que la mesure de Wiener est «standard» au sens de la condition V). Ainsi, *si* $\mathcal{F}^Y(P) = \mathcal{F}(P)$ (ou, ce qui est équivalent: si A_t est $\mathcal{F}^Y(P)$-mesurable pour tout t), *on a $Q = P$ et $P \in \mathcal{E}_X$*. On pourrait alors se demander si l'hypothèse $P(A_\infty = \infty) = 1$ n'entraine pas $\mathcal{F}^Y(P) = \mathcal{F}(P)$ et $P \in \mathcal{E}_X$: l'exemple suivant, plus ou moins classique, montre qu'il n'en est rien.

Soit donc (B^1, B^2) le mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}_t(P), P)$. Considérons $Y = B^1 \cdot B^2$. On a $\langle Y, Y\rangle_\infty = \int (B_u^1)^2\, du = \infty$ P-ps, d'après la propriété de récurrence du mouvement brownien linéaire. Comme $\frac{d\langle Y, Y\rangle_t}{dt} = (B_t^1)^2$, la martingale $M_t = (B_t^1)^2 - t$ est adaptée aux tribus $\mathcal{F}_t^Y(P)$ (avec des notations évidentes pour $\mathscr{F}_t^Y(P)$). Si Y avait la propriété de représentation prévisible, la martingale M admettrait une représentation prévisible par rapport à Y, donc par rapport à B^2; or, $M=2B^1 \cdot B^1$ étant orthogonale à B^2, on aurait $M=0$, ce qui est faux. Par suite $P\in\mathscr{M}_Y$, $P(\langle Y, Y\rangle_\infty=\infty)=1$, et cependant $P\notin\mathscr{E}_Y$.

(d) *Le problème «aux semi-martingales».* On dit que $P\in\mathscr{S}_X$ si chaque X^i est une semi-martingale pour P, c'est-à-dire si $X^i=X_0^i+M^i+A^i$, où $M^i\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}^0(P)$ et A^i est un processus à variation P-ps finie sur tout compact, adapté à $\mathscr{F}_t(P)$. On peut montrer que $\mathscr{S}_X$ est *convexe*.

Contrairement à ce qui se passe pour les ensembles $\mathscr{M}_X$ et $\mathscr{K}_D$, la recherche des points extrémaux de $\mathscr{S}_X$ est facile, mais sans grand intérêt (le cas où X est remplacé par une famille quelconque $\mathscr{N}$ n'entraine aucune modification):

(2.13) **Proposition.** *Les points extrémaux de $\mathscr{S}_X$ sont les probabilités P sur $(\Omega, \mathscr{F}^0)$ telles que $\mathscr{F}^0$ soit P-triviale et que X soit P-indistinguable d'une fonction $a\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^d$ (déterministe), continue à droite et à variation finie sur tout compact.*

Remarque. Dans cet énoncé, la première condition d'extrémalité est que $\mathscr{F}^0$ soit P-triviale (et non pas $\mathscr{F}_0$, comme pour le théorème (1.5) par exemple). Dans le cas où $\mathscr{F}^0$ est engendrée (aux ensembles P-négligeables près) par le processus X, la première condition est impliquée par la seconde. □

Démonstration. D'après [9] (ou [15]), si l'on remplace P par une probabilité équivalente Q, toute semi-martingale pour P en est encore une pour Q.

Soit P point extrémal de $\mathscr{S}_X$. Si L est une martingale bornée par k, avec $E(L_0)=0$, les lois $P'=\left(1-\frac{L_\infty}{2k}\right)\cdot P$ et $P''=\left(1+\frac{L_\infty}{2k}\right)\cdot P$ appartiennent donc à $\mathscr{S}_X$. L'égalité $P=\frac{1}{2}(P'+P'')$ entraine alors $L=0$. Toute martingale bornée est donc constante, ce qui entraine facilement la proposition. □

3. Représentation intégrale des solutions de problèmes aux martingales

3.1. Préliminaires

Notre objectif est de représenter les solutions de certains problèmes de martingales comme barycentres de mesures portées par l'ensemble des solutions extrémales, ceci dans le cadre posé au paragraphe 2 (où, rappelons le, X est un processus fixé à valeurs dans $\mathbb{R}^d$). On ne sait pas y parvenir pour l'ensemble $\mathscr{M}_X$, dont on ignore même s'il est convexe, aussi va t'on examiner les ensembles suivants $(1\leqq p<\infty)$:

$\mathscr{H}^p=$ ensemble des lois P telles que chaque X^i soit une $\mathscr{F}_t(P)$-martingale vérifiant: $E(\sup_{s\leqq t}|X_s^i|^p)<\infty$ $\forall t<\infty$,

$\mathscr{K}^p=$ ensemble des lois P telles que chaque X^i soit une $\mathscr{F}_t(P)$-surmartingale vérifiant: $E(\sup_{s\leqq t}|X_s^i|^p)<\infty$ $\forall t<\infty$.

Remarquons que $\mathscr{H}^p\subset\mathscr{M}_X$, et $\mathscr{K}^p\subset\mathscr{K}_{DL}$ lorsque $d=1$. D'après l'inégalité de Doob, on peut remplacer la seconde condition dans la définition de $\mathscr{H}^p$ par: $E(|X_t|^p)<\infty$ $\forall t<\infty$, dès que $p>1$. $\mathscr{H}^p$ est aussi l'ensemble des P tels que $(X^i)^s\in\mathfrak{H}^p(P)$ $\forall 1\leqq i\leqq d$, $\forall s>0$.

Il est clair que $\mathscr{H}^p$ et $\mathscr{K}^p$ sont convexes et on note $\tilde{\mathscr{H}}^p = \mathbb{R}_+ \times \mathscr{H}^p$ et $\tilde{\mathscr{K}}^p = \mathbb{R}_+ \times \mathscr{K}^p$ les cônes qu'ils engendrent dans l'espace $\mathscr{M}_b^+(\Omega)$ des mesures positives bornées sur $(\Omega, \mathscr{F}^0)$.

Si $n \in \mathbb{N}$ on considère l'espace D^n des fonctions: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, continues à droite et limitées à gauche. Si $u \in D^n$ on note $p_t(u)$ la valeur de u au point t, et $\mathscr{D}_t^n = \sigma(p_s, s \leqq t)$, $\mathscr{D}^n = \bigvee_{(t)} \mathscr{D}_t^n$. On munit D^n de la topologie de Skorokhod sur tout compact (cf. [1] et [13]), pour laquelle D^n est un espace polonais muni de sa tribu borélienne $\mathscr{D}^n$. On note $\mathscr{M}_b^+(D^n)$ l'espace des mesures positives bornées sur $(D^n, \mathscr{D}^n)$, muni de la topologie de la convergence étroite, pour laquelle il est lui aussi polonais.

Afin de pouvoir appliquer la théorie de Choquet, il nous faut faire des hypothèses de nature topologique sur l'ensemble $\mathscr{M}_b^+(\Omega)$. Nous serons donc amenés à nous placer dans l'un des deux cas suivants:

$\mathscr{F}_t^0 = \sigma(X_s, s \leqq t)$ et l'ensemble $\{\mu \circ X^{-1}, \mu \in \mathscr{M}_b^+(\Omega)\}$ est fermé dans $\mathscr{M}_b^+(D^d)$.

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Omega = D^n$ et $\mathscr{F}_t^0 = \mathscr{D}_t^n$.

Dans le premier cas, l'application: $\mu \rightsquigarrow \mu \cdot X^{-1}$ est une bijection de $\mathscr{M}_b^+(\Omega)$ dans un fermé de $\mathscr{M}_b^+(D^d)$, et on munit $\mathscr{M}_b^+(\Omega)$ de la topologie pour laquelle cette bijection est un homéomorphisme: $\mathscr{M}_b^+(\Omega)$ est alors un espace polonais pour cette topologie.

Enfin, on dit qu'*un processus H: $D^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est universellement presque continu* si pour toute $\mu \in \mathscr{M}_b^+(D^n)$ il existe une partie Lebesgue-négligeable $N_\mu \subset \mathbb{R}_+$ telle que: $\forall t \notin N_\mu$, $u \rightsquigarrow H_t u)$ est μ-ps continu sur D^n.

3.2. Un théorème général de représentation intégrale

Le théorème suivant généralise le théorème 4 obtenu en [22]. Dans ce théorème intervient la notion de *chapeau* d'un cône, notion pour laquelle nous renvoyons à [14]. Rappelons que $\tilde{\mathscr{H}}^p$ et $\tilde{\mathscr{K}}^p$ sont munis des topologies induites par la topologie de $\mathscr{M}_b^+(\Omega)$ définie en 3.1.

(3.1) **Théorème.** *Soit $1 \leqq p < \infty$. Supposons l'une des deux hypothèses suivantes vérifiée:*

(i) *On a $\mathscr{F}_t^0 = \sigma(X_s, s \leqq t)$ et $\{\mu \circ X^{-1}, \mu \in \mathscr{M}_b^+(\Omega)\}$ est fermé dans $\mathscr{M}_b^+(D^d)$.*

(ii) *On a* (a) *Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Omega = D^n$ et $\mathscr{F}_t^0 = \mathscr{D}_t^n$.*

(b) *Chaque X^i est universellement presque continu.*

(c) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe des constantes positives a_k et b_k telles que*

$$\sup_{\omega \in \Omega, t \leqq k} |p_t(\omega)| \leqq a_k \sup_{\omega \in \Omega, t \leqq k} |X_t(\omega)| + b_k. \tag{27}$$

Alors les cônes $\tilde{\mathscr{H}}^p$ et $\tilde{\mathscr{K}}^p$ sont réunions de leurs chapeaux, qui sont métrisables.

Avant d'énoncer le corollaire suivant, qui fait l'intérêt de ce théorème, nous avons besoin d'un lemme qui permet de se ramener par la suite aux points extrémaux de $\mathscr{M}_X$ (resp. $\mathscr{K}_{DL}$).

(3.2) **Lemme.** *Pour tout $1 \leqq p < \infty$, on a:* $\mathrm{Ext}(\mathscr{H}^p) = \mathscr{E}_X \cap \mathscr{H}^p$, *et:* $\mathrm{Ext}(\mathscr{K}^p) = \mathrm{Ext}(\mathscr{K}_{DL}) \cap \mathscr{K}^p$ *(la définition de $\mathscr{K}_{DL}$ lorsque $d \geqq 2$ est évidente).*

Démonstration. On ne la développe que pour $\mathscr{H}^p$. L'inclusion $\mathscr{H}^p \subset \mathscr{M}_X$ entraine $\mathscr{H}^p \cap \mathscr{E}_X \subset \mathrm{Ext}(\mathscr{H}^p)$. Inversement si $P \in \mathrm{Ext}(\mathscr{H}^p)$ s'écrit $P = \alpha P' + (1-\alpha) P''$, avec

$\alpha \in]0,1[$ et $P', P'' \in \mathcal{M}_X$, on a $P' \leqq \frac{1}{\alpha} P$, donc $E'(\sup_{s \leqq t} |X_s|^p) < \infty$ $\forall t > 0$, donc $P' \in \mathcal{H}^p$ et de même $P'' \in \mathcal{H}^p$, ce qui entraine $P' = P'' = P$ et $P \in \mathcal{E}_X$. $\square$

Le théorème de représentation intégrale de Choquet (voir, par exemple, [14], XI, T24, T25 et 37) permet de déduire du théorème (3.1), modulo un argument de normalisation dû à Dellacherie ([2], p. 16) le

(3.3) **Corollaire.** *Supposons que l'une des hypothèses* (i) *ou* (ii) *ci-dessus soit satisfaite. Pour tout* $P \in \mathcal{H}^1$ *(resp.* $\mathcal{K}^1$*) il existe une probabilité* Λ^P *portée par une partie borélienne de l'ensemble* $\mathcal{E}^1$ *des points extrémaux de* $\mathcal{H}^1$ *(resp.* $\mathcal{K}^1$*), telle que*

$$E(f) = \int_{\mathcal{E}^1} d\Lambda^P(\mu)\, \mu(f),$$

pour toute f mesurable bornée sur $(\Omega, \mathcal{F}^0)$.

Remarques. 1) On aurait un énoncé analogue avec $\mathcal{H}^p$ (resp. $\mathcal{K}^p$). Mais ce résultat est contenu dans le corollaire, puisque si, par exemple, $P \in \mathcal{H}^p$, il n'est pas difficile de voir que Λ^P est portée par $\mathcal{E}^1 \cap \mathcal{H}^p = \mathrm{Ext}(\mathcal{H}^p)$.

2. Les hypothèses (i) et (ii) constituent des extensions, dans deux directions différentes, de la situation la plus usuelle où $\Omega = D^d$, $X = p$, $\mathcal{F}_t^0 = \mathcal{D}_t^d$:

L'hypothèse (ii) correspond à la situation suivante: on considère le «processus canonique» n-dimensionnel défini sur D^n, et X est une «fonctionnelle» d-dimensionnelle de ce processus.

Par contre l'hypothèse (i) vise à étudier le cas où le «processus de base» est X, mais où ce processus est défini sur un espace Ω autre que l'espace canonique naturel D^d: en particulier cette hypothèse est satisfaite si Ω est une partie fermée de D^d, si X est la restriction de p à Ω, et si $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s, s \leqq t)$.

3) A cause d'exigences de nature topologique il ne semble pas que l'on puisse beaucoup affiner les conditions (i) ou (ii) sous lesquelles le théorème (3.1) est valide. Par contre le corollaire reste valable sous des conditions bien moins restrictives. Par exemple supposons:

(R) Il existe un espace mesurable $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}^0)$ muni d'une filtration $(\hat{\mathcal{F}}_t^0)$ et d'un processus $\hat{X}$ continu à droite et limité à gauche, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant l'une des hypothèses (i) ou (ii); Ω est une partie universellement mesurable de $\hat{\Omega}$, $\mathcal{F}_t^0 = \Omega \cap \hat{\mathcal{F}}_t^0$ et X est la restriction de $\hat{X}$ à Ω.

Alors, *sous (R), le corollaire reste valide*, et Λ^P est une probabilité sur $\mathcal{M}_b^+(\hat{\Omega})$ portée par l'ensemble des $P \in \mathcal{M}_b^+(\hat{\Omega})$ vérifiant $P(\hat{\Omega} - \Omega) = 0$, et dont la restriction à $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ soit un élément de $\mathcal{E}^1$.

Cette remarque s'applique en particulier au cas où X est le processus canonique défini sur l'espace C^d des fonctions *continues:* $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ (cependant dans ce cas il est possible de faire une étude directe, et notamment d'obtenir l'analogue du théorème (3.1): cf. [22]). $\square$

Démonstration de (3.1). Nous reproduisons en grande partie la démonstration de [22]. Comme X est une martingale si et seulement si X et $-X$ sont des surmartingales, nous allons faire la démonstration pour $\mathcal{K}^p$ seulement, et le lecteur vérifiera que la même démonstration s'applique à $\mathcal{H}^p$.

Sous l'hypothèse (i) on pose $D=D^d$, $W=\{\mu\circ X^{-1},\ \mu\in\mathscr{K}^p\}$, $Y=p$. Dans le cas (ii) on pose $D=D^n$, $W=\mathscr{K}^p$, $Y=X$: il nous faut montrer que tout élément de W est contenu dans un chapeau du cône W.

Rappelons d'abord, d'après [1, théorème 15.3] ou [13], que pour qu'une famille $(\nu_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{M}_b^+(D)$ soit relativement compacte, il suffit que:

(C) $\forall\varepsilon>0,\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall\eta>0,\ \exists\alpha>0,\ \exists\beta>0,\ \exists\gamma<p,\ \exists\delta>0$, avec:

$$
\begin{aligned}
&\sup\nolimits_I \nu_i(\sup\nolimits_{t\leqq p}|p_t|>\alpha)\leqq\varepsilon\\
&\sup\nolimits_I \nu_i(\sup\nolimits_{s,t<\beta}|p_s-p_t|>\eta)\leqq\varepsilon\\
&\sup\nolimits_I \nu_i(\sup\nolimits_{\gamma\leqq s<t<p}|p_s-p_t|>\eta)\leqq\varepsilon\\
&\sup\nolimits_I \nu_i(\sup\nolimits_{t<t'<p,\,t'-t\leqq\delta}\sup\nolimits_{t<s<t'}\min\{|p_t-p_s|,|p_{t'}-p_s|\}>\eta)\leqq\varepsilon\\
&\sup\nolimits_I \nu_i(D)<\infty.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Soit donc $\mu\in W$. On a $\mu(\sup_{s\leqq t}|Y_s|^p)<\infty\ \forall t<\infty$ par hypothèse. Si pour $m\in\mathbb{N}$ on note μ_m^* la loi sur $\mathbb{R}_+$ de la variable aléatoire $\sup_{t\leqq m}|Y_t|$ il existe donc une suite (α_m) de réels positifs tels que

$$\sum\nolimits_{(m)}\alpha_m\int_{\mathbb{R}_+}(1+t^p)\,\mu_m^*(dt)<\infty.$$

Soit η la mesure bornée sur $\mathbb{R}_+$ définie par $\eta=\sum\alpha_m\mu_m^*$. Comme $\int t\,\eta(dt)<\infty$ il existe, d'après le théorème de La Vallée-Poussin ([14], II, T22) une fonction g: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, continue, croissante, convexe, telle que $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t}=+\infty$, et $\int g(t)\,\eta(dt)<\infty$ (si $p>1$, on peut bien-sûr prendre $g(t)=t^p$). Posons alors

$$r(\mu)=\sum\nolimits_{(m)}\alpha_m\,\mu[1+g(\sup\nolimits_{t\leqq m}|Y_t|)]<\infty. \tag{29}$$

Par ailleurs on a $\mu(\sup_{s\leqq t}|p_s|^p)<\infty\ \forall t<\infty$ (utiliser (27) dans le cas (ii)). En utilisant le théorème de convergence dominée, on en déduit l'existence d'une suite (ε_m) décroissant vers 0 et, pour tout $m\in\mathbb{N}$, de deux suites (γ_k^m) et (δ_k^m) décroissant vers 0 quand $k\to\infty$, avec

$$
\begin{aligned}
&s(\mu)=\sum\nolimits_{(m)} m\,\mu(\sup\nolimits_{s,t\leqq\varepsilon_m}|p_s-p_t|)<\infty\\
&u_m(\mu)=\sum\nolimits_{(k)} k\,\mu(\sup\nolimits_{m-\gamma_k^m\leqq s,t<m}|p_s-p_t|)<\infty\\
&v_m(\mu)=\sum\nolimits_{(k)} k\,\mu(\sup\nolimits_{t<t'<m,\,t'-t<\delta_k^m}\sup\nolimits_{t<s<t'}\min\{|p_t-p_s|,|p_{t'}-p_s|\})<\infty.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Il existe alors des réels β_m strictement positifs tels que

$$t(\mu)=\beta_0[r(\mu)+s(\mu)]+\sum\nolimits_{m\geqq 1}\beta_m[u_m(\mu)+v_m(\mu)]=1. \tag{31}$$

Pour toute $\nu\in\mathscr{M}_b^+(D)$ on définit $t(\nu)$ par les formules (29), (30) et (31). Soit $H=\{\nu\in\mathscr{M}_b^+(D),\ t(\nu)\leqq 1\}$. D'après la définition de t, il est facile de voir que la famille H vérifie la condition (C) (utiliser (27) pour obtenir (28) dans le cas (ii)), donc H est relativement compact dans $\mathscr{M}_b^+(D)$. Par ailleurs on déduit facilement du fait que chaque processus p^i est universellement presque continu sur D ([1], p. 124) que chacune des fonctions r, s, u_m, v_m est semi-continue inférieurement sur $\mathscr{M}_b^+(D)$: il en est de même de t, et H est fermé, donc compact. Enfin la fonction t est «positivement linéaire», donc H est un chapeau de $\mathscr{M}_b^+(D)$.

Il nous reste à montrer que $W \cap H$ est fermé. Soit donc (v_k) une suite d'éléments de $H \cap W$ convergeant vers une limite $v_\infty \in H$. Etant donnée la définition de Y_t et les conditions sur les tribus $\mathscr{F}_t^0$, on aura $v_\infty \in W$ si pour tout $m \in \mathbb{N}$, toute suite $0 \leqq s_1 < \cdots < s_m = s < t$ et toute fonction continue bornée f sur $(\mathbb{R}^d)^m$ (resp. $(\mathbb{R}^n)^m$) dans le cas (i) (resp. (ii)), on a

$$v_\infty[f(p_{s_1}, \ldots, p_{s_m}) Y_t] \leqq v_\infty[f(p_{s_1}, \ldots, p_{s_m}) Y_s], \tag{32}$$

sachant que (32) est vérifié pour v_k, $\forall 1 \leqq k < \infty$.

Comme p^i, et X^i dans le cas (ii), sont universellement presque continus, l'ensemble T des réels pour lesquels les applications: $u \rightsquigarrow Y_t^i(u)$ et $u \rightsquigarrow p_t^i(u)$ sont v_k-ps continues sur D, $\forall 1 \leqq k < \infty$, est dense dans $\mathbb{R}_+$. A cause de la continuité à droite de Y et de p, et d'après le théorème de convergence dominée (rappelons que $v(\sup_{s \leqq t} |Y_s|) < \infty$ $\forall v \in H$, $\forall t < \infty$), il suffit de montrer (32) lorsque s_i, $t \in T$.

Soit alors, pour $j \in \mathbb{N}$, une fonction continue bornée h_j sur $\mathbb{R}^d$, telle que $h_j(x) = x$ si $|x| \leqq j$. Si s_i, $t \in T$ on a:

$$\lim v_k[f(p_{s_1}, \ldots, p_{s_m}) h_j(Y_u)] = v_\infty[f(p_{s_1}, \ldots, p_{s_m}) h_j(Y_u)] \ \forall j \in \mathbb{N}, u = s \quad \text{et} \quad u = t.$$

Par ailleurs (29) et les propriétés de g entrainent que

$$\sup_H v(|Y_u| 1_{\{|Y_u| > j\}}) \to 0 \quad \text{si} \quad j \uparrow \infty.$$

Il est facile d'en déduire que

$$\lim v_k[f(p_{s_1}, \ldots, p_{s_m}) Y_u] = v_\infty[f(p_{s_1}, \ldots, p_{s_m}) Y_u]$$

si $u = s$ ou $u = t$, d'où le résultat. □

Remarque. C'est parce que le critère de Prokhorov fait intervenir les variables aléatoires $\sup_{s \leqq t} |p_s|$ que nous avons dû introduire les ensembles $\mathscr{H}^p$ et $\mathscr{K}^p$ pour $p \geqq 1$; en particulier on ne sait pas montrer les résultats du théorème (3.1) et de son corollaire pour le cône des mesures positives bornées P sur D^d, faisant de (p_t) une martingale telle que $E(|p_t|)$ soit fini pour tout t. □

On développe maintenant quelques exemples.

Exemple 1. L'objet de [22] est l'étude de $\mathscr{H}^p$ lorsque $\Omega = D^1$, $d = 1$, $X = p$. Le processus X est alors universellement presque continu [1], par suite l'hypothèse (ii) du théorème (3.1) est satisfaite. Cependant les applications $u \rightsquigarrow X_t(u)$ ne sont pas continues, ce qui justifie l'hypothese (ii)(b).

Exemple 2 (le problème de Sharpe, suite). On reprend l'exemple 2.3, formulé convenablement de façon à pouvoir appliquer le théorème (3.1): on suppose $d = 1$ et on considère une processus croissant prévisible ou continu A. On note $\mathscr{H}^2(A)$ l'ensemble des $P \in \mathscr{H}^2$ telles que $\langle X, X \rangle = A$: on a bien-sûr $\mathscr{H}^2(A) = \mathscr{M}(A) \cap \mathscr{H}^2$, et de même que pour le lemme (3.2), $\mathrm{Ext}(\mathscr{H}^2(A)) = \mathrm{Ext}(\mathscr{M}(A)) \cap \mathscr{H}^2(A)$.

(3.4) **Proposition.** *Supposons $\Omega = D^1$, $d = 1$, $X = p$ et $\mathscr{F}_t^0 = \mathscr{D}_t^1$. Soit A un processus croissant prévisible ou continu, universellement presque continu. Pour toute $P \in \mathscr{H}^2(A)$ il existe une probabilité Λ^P portée par une partie borélienne de l'ensemble $\mathscr{E}^2(A)$ des* *points extrémaux de $\mathscr{H}^2(A)$, telle que*

$$E(f)=\int_{\mathscr{H}^2(A)} d\Lambda^P(\mu)\,\mu(f)$$

pour toute f mesurable bornée sur $(\Omega, \mathscr{F}^0)$.

Démonstration. Soit Y le processus de composantes $Y^1=X$ et $Y^2=(X)^2-A$: avec les hypothèses faites sur A, on sait (cf. paragraphe 2.3) que $\mathscr{M}(A)=\mathscr{M}_Y$. Si $P\in\mathscr{H}^2(A)$, M. Pratelli [16] a montré que $E(A_t)\leqq cE([X,X]_t)$, où c est une constante universelle; donc, d'après les inégalités de Burkhölder-Davis-Gundy rappelées au paragraphe 1.1 b, on a $E(A_t)\leqq c' E(\sup_{s\leqq t}|X_s|^2)$. Ainsi, si

$\mathscr{H}_Y^1=$ ensemble des lois P telles que chaque Y^i soit une P-martingale vérifiant $E(\sup_{s\leqq t}|Y_s^i|)<\infty\ \forall t<\infty$,

on a $\mathscr{H}^2(A)\subset\mathscr{H}_Y^1$. De plus le processus Y vérifie l'hypothèse (ii) du théorème (3.1). D'après le corollaire (3.3), si $P\in\mathscr{H}^2(A)$ il existe donc une mesure Λ^P portée par une partie borélienne de l'ensemble $\mathscr{E}_Y^1$ des points extrémaux de $\mathscr{H}_Y^1$, telle que $E(f)=\int_{\mathscr{E}_Y^1} d\Lambda^P(\mu)\,\mu(f)$. Enfin Λ^P est évidemment portée par les mesures $\mu\in\mathscr{E}_Y^1$ telles que $\mu(|X_t|^2)<\infty$ pour tout t, mesures qui appartiennent à l'ensemble $\mathscr{E}^2(A)$. $\square$

3.3. *Non-unicité de la représentation intégrale de Choquet*

On peut se poser la question de savoir si la probabilité Λ^P intervenant dans le corollaire (3.3) est unique. Nous allons voir qu'en général, *il n'en est rien.*

En fait nous allons nous contenter d'examiner un cas extrêmement simple: $d=1$, X est continu (donc $\mu=0$). Soient P' et P'' deux éléments extrémaux distincts de $\mathscr{H}^p$ (resp. $\mathscr{M}_X$) et $P=\alpha' P'+\alpha'' P''$, avec $\alpha'+\alpha''=1$ et $\alpha'\in\,]0,1[$ (lorsque X est continu, $\mathscr{M}_X$ est convexe).

(3.5) **Proposition.** *Sous les hypothèses précédentes, pour qu'il existe (au moins) une combinaison linéaire convexe $P=\hat\alpha'\hat P'+\hat\alpha''\hat P''$ différente de $\alpha' P'+\alpha'' P''$, avec $\hat P'$ et $\hat P''$ extrémaux dans $\mathscr{H}^p$ (resp. $\mathscr{M}_X$), il faut et il suffit que $\alpha'=\alpha''=1/2$, qu'il existe un temps d'arrêt T tel que les restrictions de P' et P'' à $\{0<T<\infty\}\cap\mathscr{F}_{T-}$ coïncident, et qu'il existe un ensemble $C\in\{0<T<\infty\}\cap\mathscr{F}_{T-}$ avec $0<P(C)<P(0<T<\infty)$.*

On pourrait d'ailleurs montrer le même résultat lorsque $d\geqq 2$, ou lorsque X n'est pas continu, mais dans ce dernier cas la preuve en serait beaucoup plus compliquée.

Cette proposition implique notamment que la représentation intégrale de Choquet *n'est pas nécessairement unique:* par exemple si $P', P''\in\mathscr{H}^2$, $\mathscr{F}_t^0=\sigma(X_s, s\leqq t)$ et si ${}^{P'}\langle X,X\rangle_t=t$ tandis que ${}^{P''}\langle X,X\rangle_t=t1_{\{t\leqq 1\}}+(2t-1)1_{\{t>1\}}$, alors P' et P'' sont extrémales dans $\mathscr{M}_X$ (car, par exemple, la condition II' est satisfaite), donc dans $\mathscr{H}^2$ d'après le lemme (3.2). Le temps d'arrêt $T=1$ vérifie les conditions de la proposition ci-dessus, et d'après cette proposition la représentation $P=\frac{1}{2}(P'+P'')$ n'est pas unique pour la loi P.

Etant donné le lemme (3.2), il suffit de faire la démonstration pour $P', P''\in\mathscr{E}_X$. La démonstration repose sur l'étude des dérivées de Radon-Nikodym $Z_t'=$

$E\left(\frac{dP'}{dP}\middle|\mathscr{F}_t\right)$ et $Z''_t = E\left(\frac{dP''}{dP}\middle|\mathscr{F}_t\right)$. On peut choisir de «bonnes» versions continues à droite, vérifiant identiquement $\alpha' Z' + \alpha'' Z'' = 1$: si $R' = \inf(t\colon Z'_t = 0)$, $R'' = \inf(t\colon Z''_t = 0)$, $R = R' \wedge R''$, les ensembles $B' = \{R'' < R' = \infty\}$ et $B'' = \{R' < R'' = \infty\}$ constituent une partition $\mathscr{F}_R$-mesurable de $\{R < \infty\}$. Enfin on pose $U = \frac{1}{\alpha'} 1_{B'} - \frac{1}{\alpha''} 1_{B''}$, et on fait la convention $\mathscr{F}_{0-} = \{\emptyset, \Omega\}$.

La proposition suivante est cruciale, et intéressante en elle-même.

(3.6) **Proposition.** (i) *R est un temps d'arrêt $\mathscr{F}_t$-prévisible tel que $P(R > 0)$ égale 0 ou 1.*

(ii) *On a*

$$\begin{aligned} &Z'_t = Z''_t = 1 && \text{sur } \{t < R\} \\ &Z'_t = 1/\alpha', \quad Z''_t = 0 && \text{sur } \{R \leqq t\} \cap B' \\ &Z'_t = 0, \quad Z''_t = 1/\alpha'' && \text{sur } \{R \leqq t\} \cap B'', \end{aligned} \tag{33}$$

$$E(U | \mathscr{F}_{R-}) = 0. \tag{34}$$

(iii) *Toute $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ s'écrit*

$$M_t = E(M_0) + u \cdot X_t + 1_{\{R \leqq t\}} U V \tag{35}$$

avec $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(X, P)$ et V, variable $\mathscr{F}_{R-}$-mesurable.

Commençons par trois lemmes.

(3.7) **Lemme.** (i) *Si V est $\mathscr{F}_0$-mesurable, on a $V = E(V)$ P-ps sur $\{R > 0\}$.*

(ii) *$P(R > 0)$ ne prend que les valeurs 0 et 1.*

Démonstration. Soient $V' = E'(V) = E(Z'_0 V)$ et $V'' = E''(V) = E(Z''_0 V)$. Comme d'après le théorème (2.5) $\mathscr{F}_0$ est P'-triviale et P''-triviale, on a $V = V'$ P'-ps et $V = V''$ P''-ps. Par suite $V = V' = V''$ P-ps sur $\{R > 0\}$. Mais $\alpha' Z' + \alpha'' Z'' = 1$, donc $E(V) = \alpha' V' + \alpha'' V''$, d'où (i). Enfin (ii) se déduit de (i) appliqué à $V = 1_{\{R > 0\}}$. □

(3.8) **Lemme.** *On a $Z'^c = Z''^c = 0$, et tout élément $M \in \mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}(P)$ s'écrit $M = u \cdot X$, avec $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(X, P)$.*

Démonstration. Soit $M \in \mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}(P)$ tel que $\langle X, M \rangle = 0$. Comme Z' est borné, la proposition (2.1) entraine que, si $M' = M - \frac{1}{Z'} \cdot \langle Z'^c, M \rangle$, on a ${}^{P'}\langle X, M' \rangle = \langle X, M \rangle = 0$ P'-ps. Mais P' vérifie la condition II', donc $M' = 0$ P'-ps. Comme M et $\langle Z', M \rangle$ sont continus, on a donc $M^{R'} = \frac{1}{Z'} \cdot \langle Z'^c, M \rangle^{R'}$ P-ps, ce qui implique $M^{R'} = 0$. On montre de même $M^{R''} = 0$, donc $M = 0$ et on a la seconde partie du lemme. Enfin comme $P \in \mathscr{M}_X$, on a $\frac{1}{Z'} \cdot \langle Z'^c, X \rangle = 0$ P'-ps et $\frac{1}{Z''} \cdot \langle Z''^c, X \rangle = 0$ P''-ps, ce qui implique $\alpha' \langle Z'^c, X \rangle = -\alpha'' \langle Z''^c, X \rangle = 0$ P-ps, donc $Z'^c = Z''^c = 0$. □

(3.9) **Lemme.** *Soient $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, $A \in \mathfrak{V}_{\mathrm{loc}}(P)$, T un temps d'arrêt et u un processus prévisible localement borné sur $[0, T[$. Si $M = A$ sur $[0, T[$ on a $u \cdot M = u \cdot A$ sur $[0, T[$.*

Démonstration. Par localisation on peut supposer que $A \in \mathfrak{V}(P)$, que u est borné, et que $M = M^1 + M^2$, avec $M^1 \in \mathfrak{M}(P) \cap \mathfrak{V}(P)$ et $M^2 \in \mathfrak{H}^{2,0}(P)$ [5]. Si u est «étagée sur $\mathbb{R}_+$», le résultat est évident. Si u est quelconque, prévisible bornée, il existe évidemment une suite (u_n) étagée sur $\mathbb{R}_+$, telle que $u_n \cdot A_t \to u \cdot A_t$ P-ps, $u_n \cdot M_t^1 \to u \cdot M_t^1$ P-ps, et $u_n \cdot M_t^2 \to u \cdot M_t^2$ dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$, d'où le résultat. □

Démonstration de (3.6). (a) Soit M un processus de la forme $M = E(M_0) + 1_{[R,\infty[} V$, où V est une variable $\mathscr{F}_R$-mesurable. Il est alors immédiat que $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ si et seulement si $E(V | \mathscr{F}_{R-}) = 0$.

(b) Soit $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ tel que $M^c = 0$. Soit $N = M - M^R$: on a $\Delta N = 0$ sur $[0, R]$ et $\Delta Z' = \Delta Z'' = 0$ sur $]R, \infty[$, donc $[N, Z'] = [N, Z''] = 0$. D'après la proposition (2.1) on a alors $N \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P') \cap \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P'')$, et N est une somme compensée de sauts pour P' et P'': par suite la condition II' appliquée à P' et P'' implique $N = 0$ P'-ps et P''-ps, donc P-ps, et finalement $M = M^R$. Soit alors $B = \alpha' \langle Z', M \rangle = -\alpha'' \langle Z'', M \rangle$. On a $M' = M - M_0 - \frac{1}{\alpha' Z'_-} \cdot B \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P')$ et $M'' = M - M_0 + \frac{1}{\alpha'' Z''_-} \cdot B \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P'')$. D'après II' on a encore $M' = 0$ P'-ps et $M'' = 0$ P''-ps, donc

$$M_t = \begin{cases} M_0 + \dfrac{1}{\alpha' Z'_-} \cdot B_t & \text{si } t < R' \\[2ex] M_0 - \dfrac{1}{\alpha'' Z''_-} \cdot B_t & \text{si } t < R''. \end{cases} \tag{36}$$

En appliquant $\alpha' Z' + \alpha'' Z'' = 1$ et le lemme (3.9), on voit que

$$M_t - M_0 = 1 \cdot M_t = (\alpha' Z'_- + \alpha'' Z''_-) \cdot M_t = 0 \qquad \text{si } t < R,$$

et finalement il existe une variable $\mathscr{F}_R$-mesurable W telle que

$$M_t = M_0 + 1_{\{0 < R \leq t\}} W. \tag{37}$$

(c) Montrons (ii): il est clair que si $P(R > 0) = 0$ on a (33). De plus $Z'_0 = 1 + \alpha'' U = E(Z'_0) + \alpha'' U$, donc (34) découle de la partie (a). Lorsque $P(R > 0) = 1$, on a $Z'_0 = Z''_0 = 1$ d'après le lemme (3.7); de plus le lemme (3.8) et la partie (b) montrent que Z' s'écrit $Z'_t = 1 + 1_{\{R \leq t\}} W$; d'après la définition de R, on a alors nécessairement $W = \alpha'' U$, ce qui implique (34) d'après (a), et (33) par un calcul élémentaire.

(d) Montrons (iii): d'après le lemme (3.8), il suffit de montrer que toute somme compensée de sauts $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ s'écrit $M_t = E(M_0) + 1_{\{R \leq t\}} U V$, avec V, $\mathscr{F}_{R-}$-mesurable. Lorsque $P(R > 0) = 1$, on a $M_0 = E(M_0)$ P-ps (lemme (3.7)) et, d'après (36), (33) et (37), $M_t = E(M_0) + 1_{\{R \leq t\}} U \Delta B_R$, alors que ΔB_R est $\mathscr{F}_{R-}$-mesurable. Lorsque $P(R > 0) = 0$, la démonstration du lemme (3.7) montre que $M_0 = E(Z'_0 M_0)$ sur B' et $M_0 = E(Z''_0 M_0)$ sur B'': (33) implique alors $M_0 = E(M_0) + \alpha' \alpha'' U E(U M_0)$, et (37) entraine $M = M_0$.

(e) Montrons (i): lorsque $P(R > 0) = 0$, R est évidemment $\mathscr{F}_t$-prévisible. Supposons $P(R > 0) = 1$. Soient $A_t = 1_{\{R \leq t\}}$, B la projection prévisible duale de A, et $M = A - B$. D'après (iii) il existe une variable $\mathscr{F}_{R-}$-mesurable intégrable V telle que $M_t = 1_{\{R \leq t\}} U V$, et par suite $UV = 1 - \Delta B_R$; (34) implique $E(UV | \mathscr{F}_{R-}) = 0$, par suite $UV = 0$, donc $\Delta B_R = 1$, $M = 0$ et $B = A$: donc R est $\mathscr{F}_t$-prévisible. □

Démonstration de (3.5). (a) Soit $P=\hat\alpha'\hat P'+\hat\alpha''\hat P''$ une autre combinaison linéaire convexe, avec $\hat P', \hat P''\in\mathscr{E}_X$. Il est clair que $0<\hat\alpha'<1$. Définissons $\hat Z', \hat Z'', \hat B', \hat B'', \hat R$ et $\hat U$ à partir de $\hat P'$ et $\hat P''$ comme avant l'énoncé de (3.6). Comme $\hat Z'^c=\hat Z''^c=0$, la formule (35) implique que $\hat Z'=\hat Z''=1$ sur $[0,R[$: donc $R\leqq\hat R$, et on montre de même que $\hat R\leqq R$, donc $\hat R=R$. Mais $\hat Z'$ et $\hat Z''$ sont données par les formules (33), convenablement modifiées; la formule (35), encore, entraine alors l'existence d'une variable $\mathscr{F}_{R-}$-mesurable V telle que $\hat U=UV$ sur $\{R<\infty\}$. Si $C=\{V>0, R<\infty\}=B'\cap\hat B'+B''\cap\hat B''$, on a donc

$$\hat B'=C\cap B'+C^c\cap B'',\qquad \hat B''=C^c\cap B'+C\cap B''. \tag{38}$$

Les formules (34) et $P(B'+B''|\mathscr{F}_{R-})=1_{\{R<\infty\}}$ entrainent alors

$$\begin{aligned} &P(B'|\mathscr{F}_{R-})=\alpha',\qquad P(B''|\mathscr{F}_{R-})=\alpha''\qquad \text{sur } \{R<\infty\},\\ &0=E(\hat U|\mathscr{F}_{R-})=\left(\frac{\alpha'}{\hat\alpha'}-\frac{\alpha''}{\hat\alpha''}\right)1_C+\left(\frac{\alpha''}{\hat\alpha'}-\frac{\alpha'}{\hat\alpha''}\right)1_{C^c}\qquad \text{sur } \{R<\infty\}, \end{aligned} \tag{39}$$

ce qui n'est possible que si $\alpha'\hat\alpha''=\hat\alpha'\alpha''$ sur C et $\alpha''\hat\alpha''=\alpha'\hat\alpha'$ sur C^c, P-ps. Mais les combinaisons $\alpha'P'+\alpha''P''$ et $\hat\alpha'\hat P'+\hat\alpha''\hat P''$ étant différentes, on a $0<P(C)<P(0<R<\infty)$: les relations précédentes ne peuvent donc être vérifiées que si $\alpha'=\alpha''=\hat\alpha'=\hat\alpha''=1/2$. Enfin $C\in\mathscr{F}_{R-}$, donc la condition de l'énoncé est remplie avec $T=R$.

(b) Réciproquement supposons que $\alpha'=\alpha''=1/2$, et que T soit un temps d'arrêt satisfaisant la condition de l'énoncé avec l'ensemble C. D'après (33) on a nécessairement $T\leqq R$, donc $C\in\mathscr{F}_{R-}$. Définissons $\hat B'$ et $\hat B''$ par (38), et $\hat Z'$ et $\hat Z''$ par (33) à l'aide de $\hat B', \hat B'', \hat R=R$ et $\hat\alpha'=\hat\alpha''=1/2$. D'après (39), $\hat Z'$ et $\hat Z''$ sont des éléments positifs de $\mathfrak{M}(P)$ tels que $\mathrm{E}(\hat Z'_\infty)=E(\hat Z''_\infty)=1$ et $\frac12(\hat Z'+\hat Z'')=1$. On pose $\hat P'=\hat Z'_\infty\cdot P$ et $\hat P''=\hat Z''_\infty\cdot P$: les combinaisons $P=\frac12(P'+P'')$ et $P=\frac12(\hat P'+\hat P'')$ sont différentes, et il nous reste à montrer que $\hat P', \hat P''\in\mathscr{E}_X$.

Comme $X=X^c$, on a $[\hat Z', X]=0$, $X\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(\hat P')$ et $\hat P'\in\mathscr{M}_X$. Les hypothèses faites impliquent $P(R>0)=1$, donc $\hat Z'_0=1$; d'après le lemme (3.7) on a donc $V=E(V)=E(\hat Z'_0V)=\hat E'(V)$ P-ps pour toute variable $\mathscr{F}_0$-mesurable V: donc $\mathscr{F}_0$ est $\hat P'$-triviale. Soit $\hat R'=\inf(t\colon \hat Z'_t=0)=\inf(t\colon \hat Z'_t\leqq\frac12)=\hat R_{\hat B''}$. Si $N\in\mathfrak{M}^0_{\mathrm{loc}}(\hat P')$, on a alors $M=(N\hat Z')^{\hat R'}\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, et un calcul facile montre que $M_R=0$ sur $\hat B''$, que $M=M^{\hat R'}$, et que

$$\begin{aligned} &M_t=N_t+\tfrac12\hat U N_t 1_{\{R\leqq t\}} && P\text{-ps}\\ &N_t=M_t+\frac{\hat U-6}{8}M_t 1_{\{R\leqq t\}} && \hat P'\text{-ps.} \end{aligned} \tag{40}$$

Supposons d'abord que $N\in\mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}(\hat P')$ vérifie ${}^{\hat P'}\langle N,X\rangle=0$. On a $\Delta M_R=\frac{\hat U}{2}N_{R-}$, donc $E(\Delta M_R|\mathscr{F}_{R-})=0$ et $\hat M_t=1_{\{R\leqq t\}}\Delta M_R\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(P)$. Mais $M-\hat M$ est continu, donc $M-\hat M=M^c$, et (40) implique que $M^c=N+\frac{\hat U}{2}(N-N^R)$; comme $\langle M^c,\hat Z'\rangle=0$ on a $M^c\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(\hat P')$, et $\langle M^c,X\rangle^{\hat R'}={}^{\hat P'}\langle M^c,X\rangle=\left(1+\frac{\hat U}{2}1_{]R,\infty[}\right)\cdot{}^{\hat P'}\langle N,X\rangle=0$: le lemme (3.8) entraine alors que $M^c=(M^c)^{\hat R'}=0$, donc $N_{R-}=M^c_{R-}=0$, donc $\Delta M_R=0$, $M=0$ et $N=0$.

Supposons enfin que $N \in \mathfrak{M}^0_{\mathrm{loc}}(P')$ soit une somme compensée de sauts. Il en est évidemment de même de M, et la proposition (3.6)(iii) entraine que $M_t = 1_{\{R \leqq t\}} UV$, avec V, $\mathscr{F}_{R-}$-mesurable. Mais si $A = \{V=0\}$, on a $\hat{B}'' \cap A = \emptyset$ (car $M_R = 0$ sur $\hat{B}''$), donc $P(\hat{B}' \cap A) = \frac{1}{2} P(A) = P(\hat{B}'' \cap A) = 0$. Par suite $V=0$ sur $\{R<\infty\}$, $M=0$ et $N=0$. Finalement on a montré que $\hat{P}'$ vérifie la condition II': donc $\hat{P}' \in \mathscr{E}_X$, et de même $\hat{P}'' \in \mathscr{E}_X$. $\square$

3.4. *Une représentation intégrale élémentaire*

On se place dans la situation du paragraphe 3.3, avec les mêmes notations: on suppose donc fixée $P = \alpha' P' + \alpha'' P'' \in \mathscr{M}_X$, avec $P', P'' \in \mathscr{E}_X$, $\alpha' + \alpha'' = 1$, $\alpha' \in]0, 1[$. On considère l'ensemble convexe:

$\mathscr{M}_X^P$ = ensemble des lois $Q \in \mathscr{M}_X$ telles que $Q \ll P$.

On considère également l'ensemble L^P des classes d'équivalence (pour la relation «égalité P-ps») de variables $\mathscr{F}_{R-}$-mesurables V telles que $V=0$ sur $\{R=\infty\}$ et $-\alpha' \leqq V \leqq \alpha''$, et l'ensemble E^P des classes d'équivalence des parties $\mathscr{F}_{R-}$-mesurables de $\{R<\infty\}$.

(3.10) **Proposition.** (i) *L'application: $V \rightsquigarrow P_V = (1+UV) \cdot P$ est une bijection de L^P sur $\mathscr{M}_X^P$.*

(ii) *L'application: $A \rightsquigarrow P_A = [1 + U(\alpha'' 1_{A^c} - \alpha' 1_A) 1_{\{R<\infty\}}] \cdot P$ est une bijection de E^P sur $\mathscr{E}_X^P$* (ensemble des points extrémaux de $\mathscr{M}_X^P$).

Démonstration. (i) Si $Q \in \mathscr{M}_X^P$, soient $Z_t = E\left(\frac{dQ}{dP}\middle|\mathscr{F}_t\right)$ et $R = \inf(t: Z_t = 0)$. Comme $X \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}(Q)$, on a $\langle Z, X\rangle^R = 0$ et le lemme (3.8) entraine alors $Z^c = (Z^c)^R = 0$. La proposition (3.6) implique donc que $Z_t = 1 + 1_{\{R \leqq t\}} UV$, avec V, $\mathscr{F}_{R-}$-mesurable nul sur $\{R=\infty\}$. De plus $Z \geqq 0$ implique $-\alpha' \leqq V \leqq \alpha''$, donc $V \in L^P$ et $Q = P_V$. Inversement si $V \in L^P$, il est clair que la formule $Z_t = 1 + 1_{\{R \leqq t\}} UV$ définit un élément positif de $\mathfrak{M}(P)$ tel que $\langle Z, X\rangle = 0$, donc $P_V \in \mathscr{M}_X^P$; enfin $P_V = P_{V'}$ si et seulement si $V' = V$ P-ps, d'où (i).

(ii) Cela découle immédiatement du fait que $P_{\alpha V + (1-\alpha) V'} = \alpha P_V + (1-\alpha) P_{V'}$, et de la bijection (triviale) entre E^P et les éléments extrémaux de L^P. $\square$

Or, on a une représentation intégrale immédiate des éléments de L^P: si $V \in L^P$ et si $A_t^V = \{t \leqq \alpha'' - V\}$, alors

$$V = \int_0^1 dt(-\alpha' 1_{A_t^V} + \alpha'' 1_{(A_t^V)^c}). \tag{41}$$

Plus précisément on munit L^P de la topologie de la convergence dans L^1: c'est alors un espace polonais, dont E^P est un fermé, et on note $\mathscr{E}^P$ la tribu borélienne de E^P. On a alors:

(3.11) **Proposition.** *Soit $Q \in \mathscr{M}_X^P$. Il existe alors une probabilité Λ^Q sur $(E^P, \mathscr{E}^P)$ telle que*

$Q = \int_{E^P} d\Lambda^Q(A)\, P_A$.

Démonstration. Soient $V \in L^P$ associé à Q par $Q = P_V$, et $A_t^V = \{t \leqq \alpha'' - V\}$. L'application ϕ: $[0, 1] \to E^P$ définie par $\phi(t) = A_t^V$ est clairement continue à droite, donc borélienne, et la formule de l'énoncé se déduit immédiatement de (41) si on prend, pour Λ^Q, l'image de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ par ϕ. $\square$

4. Solutions extrémales et représentation des solutions, pour un problème de martingales associé à un opérateur intégro-différentiel

4.1. Définition du problème

Nous allons maintenant étudier un problème de martingales qui sort du cadre défini auparavant. Comme d'habitude, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ (resp. $C_b^n(\mathbb{R}^d)$) désigne l'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}^d$, indéfiniment dérivables à support compact (resp. n fois continuement dérivables, et dont les dérivées jusqu'à l'ordre n sont bornées); on écrit $C_b(\mathbb{R}^d)$ au lieu de $C_b^0(\mathbb{R}^d)$. Si $y \in \mathbb{R}^d$, on note (contrairement à ce qui précède) y_i la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de y.

Soit $\mathscr{L} = L + K$: $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \to C_b(\mathbb{R}^d)$ un opérateur intégro-différentiel défini par

$$\begin{aligned}(Lf)(x) &= \frac{1}{2} \sum\nolimits_{i,j \leqq d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) + \sum\nolimits_{i \leqq d} b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \\ (Kf)(x) &= \int S(x, dy) \left[f(x+y) - f(x) - \left(\sum\nolimits_{i \leqq d} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \frac{1}{1+|y|^2} \right]\end{aligned} \tag{42}$$

où:

les coefficients (a_{ij}) sont bornés, continus, et pour tout x, la matrice $a(x) = (a_{ij}(x))$ est semi-définie positive (éventuellement dégénérée);

les coefficients (b_i) sont bornés, continus;

S est une mesure de transition positive de $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ dans $(E, \mathscr{E}) = (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$, telle que

$$\begin{aligned}&\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d), \quad \int \frac{|y|^2}{1+|y|^2} f(y) \, S(\cdot, dy) \in C_b(\mathbb{R}^d) \\ &\sup\nolimits_{(x)} \int (|y|^2 1_{\{|y| \leqq 1\}} + |y| 1_{\{|y| > 1\}}) \, S(x, dy) < \infty.\end{aligned} \tag{43}$$

Sauf mention contraire, Ω est l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$, muni de la topologie de Skorokhod sur tout compact, X est le processus canonique défini sur Ω et $\mathscr{F}_t^0 = \sigma(X_s, s \leqq t)$: avec les notations de 3.1, on a $\Omega = D^d$, $X = p$, $\mathscr{F}_t^0 = \mathscr{D}_t^d$. On note Ω_c la partie de Ω constituée des fonctions continues, et on munit Ω_c de la topologie induite par celle de Ω, qui, d'après [1], est aussi la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

On note $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$ *l'ensemble des lois* P *sur* $(\Omega, \mathscr{F}^0)$ *telles que*

(i) $P(X_0 = x) = 1$.

(ii) $\forall f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $\quad C_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{L} f(X_s) \, ds \quad$ est une P-martingale.

Comme l'espace $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ appartient au domaine de l'opérateur $\mathscr{L}$, cela entraine que: $\forall f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, $C^f \in \mathfrak{H}_{\text{loc}}^{2,0}(P)$. Si $S = 0$, on verra que toute $P \in \mathscr{S}_x(\mathscr{L}) = \mathscr{S}_x(L)$ vérifie $P(\Omega_c) = 1$, et on peut donc poser le problème des martingales sur Ω_c.

Stroock et Varadhan ont montré en [17] que, si la matrice $a(x)$ est définie positive en tout x, $\mathscr{S}_x(L)$ est constitué d'une unique probabilité. Stroock a montré en [18] le même résultat pour $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$, en imposant en outre une condition supplémentaire de continuité sur S. Le cas intéressant pour notre étude est donc celui où l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}^d\colon a(x)$ est dégénérée$\}$ est non vide.

Le théorème d'équivalence suivant a été établi, sous diverses formes, par de nombreux auteurs (voir, par exemple, [13] et [18]). Il permet notamment, lorsque $S=0$ (donc $\mathscr{L}=L$) de se ramener au cadre défini dans les paragraphes précédents. Pour tout $\theta=(\theta_i)\in\mathbb{R}^d$ on pose

$$M_t^\theta=\sum_{i\leq d}\theta_i\Big[X_t^i-x_i-\sum_{s\leq t}\Delta X_s^i\,1_{\{|\Delta X_s|>1\}}$$
$$-\int_0^t\Big\{b_i(X_s)+\int_E S(X_s,dy)\,y_i\Big(1_{\{|y|\leq 1\}}-\frac{1}{1+|y|^2}\Big)\Big\}\,ds\Big].$$

(4.1) **Théorème.** *Soit P une probabilité sur $(\Omega,\mathscr{F}^0)$. Alors $P\in\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$ si et seulement si $P(X_0=x)=1$ et*

(a) *Pour tout $\theta\in\mathbb{R}^d$, $M^\theta\in\mathfrak{H}^{2,0}_{\text{loc}}(P)$ et*

$$\langle M^\theta,M^\theta\rangle_t=\int_0^t ds\sum_{i,j\leq d}\theta_i\theta_j\,a_{ij}(X_s)+\int_0^t ds\int_{|y|\leq 1}S(X_s,dy)\sum_{i\leq d}(\theta_i y_i)^2.$$

(b) *Pour toute fonction borélienne positive f sur $(\mathbb{R}^d)^2$ et tout processus prévisible positif φ,*

$$E\Big(\sum_{(s)}\varphi_s f(X_{s-},X_s)\,1_{\{\Delta X_s\neq 0\}}\Big)=E\Big(\int_0^\infty ds\,\varphi_s\int_E f(X_s,X_s+u)\,S(X_s,du)\Big).$$

Remarques. 1) La forme particulière du «drift» intervenant dans la définition de M provient de notre définition de l'opérateur K (comparer, par exemple, avec le théorème 12 de [13]).

2) La condition (b) équivaut à dire que, pour P, *la projection prévisible duale de la mesure aléatoire* μ associée à X par (4) *est la mesure* $\nu(\omega;dt,dx)=dt\,S(X_{t-}(\omega),dx)$. Cette condition (b) est d'ailleurs la définition classique du système de Lévy de X. La formule (43) est alors à rapprocher de la condition d'appartenance de $W(\omega,t,x)=x$ à $\mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu,P)$: elle exprime en effet que $dC_t^1(\nu,W)\ll dt$, et que $\dfrac{dC^1(\nu,W)}{dt}$ est uniformément bornée.

3) Lorsque $S=0$, la condition (b) implique $\mu=0$ P-ps, donc $P(\Omega_c)=1$. Par suite *pour qu'une loi P sur $(\Omega_c,\mathscr{F}^0)$ appartienne à $\mathscr{S}_x(L)$, il faut et il suffit que $P(X_0=x)=1$, et que*

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}^d$, $M_t^\theta=\sum_{i\leq d}\theta_i(X_t^i-x_i-\int_0^t b_i(X_s)\,ds)\in\mathfrak{H}^{2,0}_{\text{loc}}(P)$, et $\langle M^\theta,M^\theta\rangle_t=\sum_{i,j\leq d}\int_0^t\theta_i\theta_j\,a_{ij}(X_s)\,ds$. □

4.2. Représentation intégrale des éléments de $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$

Rappelons que $\mathscr{M}_b^+(\Omega)$ et $\mathscr{M}_b^+(\Omega_c)$ sont munis de la topologie (polonaise) de la convergence étroite.

(4.2) **Théorème.** *Pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$ (resp. $\mathscr{S}_x(L)$) est un convexe compact non vide de $\mathscr{M}_b^+(\Omega)$ (resp. $\mathscr{M}_b^+(\Omega_c)$).*

Démonstration. L'existence des solutions $P \in \mathscr{S}_x(\Omega)$ a été prouvée en [18], tandis que la relative compacité de $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$ est montrée en [13] (la condition (43) est cruciale).

Soit (ν_p) une suite d'éléments de $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$ convergeant vers $\nu_\infty \in \mathscr{M}_b^+(\Omega)$. Soit T l'ensemble des réels t tels que: $\omega \rightsquigarrow X_t(\omega)$ soit ν_p-ps continu sur Ω, $\forall 1 \leqq p \leqq \infty$: d'après [1], T contient 0 et est plein pour la mesure de Lebesgue. Donc $\nu_\infty(X_0 = x) = \lim \nu_p(X_0 = x) = 1$ et on aura $\nu_\infty \in \mathscr{S}_x(\mathscr{L})$ si: $\forall f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall 0 \leqq s_1 < \cdots < s_m = s < t$, avec $s_i, t \in T$, $\forall g \in C_b((\mathbb{R}^d)^m)$, on a $\nu_\infty[\varphi(C_t^f - C_s^f)] = 0$, avec $\varphi = g(X_{s_1}, \ldots, X_{s_m})$ et, pour obtenir cela, il suffit de montrer que $\nu_p[\varphi(C_t^f - C_s^f)]$ (qui égale 0) tend vers $\nu_\infty[\varphi(C_t^f - C_s^f)]$.

Comme $\mathscr{L} f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et comme T est plein pour la mesure de Lebesgue et contient s_i $(i \leqq m)$ et t, l'application: $\omega \rightsquigarrow \varphi(\omega)(C_t^f(\omega) - C_s^f(\omega))$ est ν_p-ps continue $\forall 1 \leqq p \leqq \infty$. Donc $\nu_p[\varphi(C_t^f - C_s^f)] \to \nu_\infty[\varphi(C_t^f - C_s^f)]$. Par suite $\nu_\infty \in \mathscr{S}_x(\mathscr{L})$, et $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$ est un convexe (ceci est immédiat) compact non vide. Enfin d'après ce qui précède $\mathscr{S}_x(L)$ est un convexe compact (pour la topologie de $\mathscr{M}_b^+(\Omega)$) non vide, contenu dans $\mathscr{M}_b^+(\Omega_c)$: il découle alors de ([1], p. 151) que $\mathscr{S}_x(L)$ est aussi un convexe compact non vide de $\mathscr{M}_b^+(\Omega_c)$, pour sa propre topologie. □

D'après le théorème de Choquet, *toute solution de $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$ est donc le barycentre d'une probabilité portée par les solutions extrémales de $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$.*

4.3. Caractérisation des éléments extrémaux de $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$

On va maintenant caractériser l'ensemble $\mathscr{E}_x(\mathscr{L})$ des éléments extrémaux de $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$. D'après le théorème (4.1), si $P \in \mathscr{S}_x(\mathscr{L})$, X^i est une P-semi-martingale, dont on note $(X^i)^c$ la «*partie continue*» ([15]): $(X^i)^c$ est définie comme la partie continue $(M^\theta)^c$, lorsque θ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^d$). Le théorème (4.1) et la remarque 2 qui le suit permettent alors d'appliquer le théorème (1.7) (le fait qu'il y ait une «condition initiale» $X_0 = x$ ne change rien: cf. [11]).

(4.3) **Théorème.** *Soit $P \in \mathscr{S}_x(\mathscr{L})$. Alors $P \in \mathscr{E}_x(\mathscr{L})$ si et seulement si*

(i) *On a $\mathfrak{L}^2_{\text{loc}}((X^i)^c, 1 \leqq i \leqq d) = \mathfrak{M}^c_{\text{loc}}(P)$.*

(ii) *Toute somme compensée de sauts $M \in \mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P)$ s'écrit $M = W * (\mu - \nu)$, avec $W \in \mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$.*

(iii) *$\mathscr{F}_0$ est P-triviale.*

De plus dans le cas où la matrice a est partout non dégénérée, on peut remplacer (i) par

(i′) *Toute $M \in \mathfrak{M}^c_{\text{loc}}(P)$ s'écrit $M = \sum_{i \leq d} u_i \cdot (X^i)^c$, avec $u_i \in L^2_{\text{loc}}((X^i)^c, P)$.*

Remarques. 1) Les conditions (i) et (ii) sont analogues à la condition de représentation optionnelle par rapport à X, bien que les X^i ne soient pas des martingales locales, mais seulement des semi-martingales.

2) Il convient de rapprocher (i′) de la remarque suivant la proposition (1.2): on a $\langle (X^i)^c, (X^j)^c \rangle_t = \int_0^t a_{ij}(X_s)\, ds$, qui n'est pas nécessairement nul si $i \neq j$, et les hypothèses faites sur a jouent un rôle essentiel pour la validité du résultat. □

Démonstration. Il nous reste à montrer: (i)$\Rightarrow$(i′), sous l'hypothèse de non-dégénérescence de a. Soit $a^{1/2}$ la racine carrée symétrique de a. L'application

$x \rightsquigarrow \operatorname{trace} a^{-1/2}(x)$ est continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ce qui entraine

$$\sup_{s \leqq t} |\operatorname{trace} a^{-1/2}(X_s)| < \infty$$

pour tout ω, et le processus

$$\int_0^t a_{ij}^{-1/2}(X_s)\, d\langle (X^j)^c, (X^j)^c\rangle_t \leqq \int_0^t (\operatorname{trace} a^{-1/2}(X_s))^2\, a_{jj}(X_s)\, ds$$

est fini pour tout $t<\infty$. Par suite $a_{ij}^{-1/2}(X_-) \in L^2_{\mathrm{loc}}((X^j)^c, P)$ et on peut définir $W^i = \sum_{j \leqq d} a_{ij}^{-1/2}(X_-) \cdot (X^j)^c$. Un calcul simple montre que $\langle W^i, W^j\rangle_t = t\,\delta_{ij}$, donc $W = (W^i)_{i \leqq d}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel.

On a également la formule de passage inverse $(X^i)^c = \sum_{j \leqq d} a^{1/2}(X_-) \cdot W^j$, d'où l'on tire $L^2_{\mathrm{loc}}((X^i)^c, 1 \leqq i \leqq d) = L^2_{\mathrm{loc}}(W^i, 1 \leqq i \leqq d)$. Donc toute $M \in \mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}(P)$ s'écrit, d'après (i): $M = \sum_{j \leqq d} u_j \cdot W^j$, avec $u_j \in L^2_{\mathrm{loc}}(W^j, P)$. Par suite

$$M = \sum_{i \leqq d} \Big(\sum_{j \leqq d} a_{ij}^{-1/2}(X_-)\, u_j\Big) \cdot (X^i)^c,$$

intégrales stochastiques qui sont bien définies, car pour tout $t<\infty$,

$$\int_0^t \Big(\sum_{i \leqq d} a_{ij}^{-1/2}(X_s)\, u_j\Big)^2 d\langle (X^i)^c, (X^i)^c\rangle_s$$
$$\leqq \sup_{s \leqq t} [\operatorname{trace} a^{-1/2}(X_s)]^2 \int_0^t \sum_{j \leqq d} |u_j|^2\, a_{ii}(X_s)\, ds < \infty \qquad P\text{-ps.} \quad \square$$

4.4. Un exemple de non-unicité des solutions

Supposons que X soit un processus markovien (resp. fortement markovien) homogène de lois $(P_x, x \in \mathbb{R}^d)$ sur $(\Omega, \mathscr{F}^0)$, tel que $P_x \in \mathscr{S}_x(\mathscr{L})$ pour tout x: une telle loi P_x sera appelée *solution markovienne* (resp. *fortement markovienne*).

Girsanov a étudié l'exemple suivant de non-unicité: $d=1$, et

$$\mathscr{L}^\alpha f(x) = \frac{1}{2} \frac{|x|^{2\alpha}}{(1+|x|^\alpha)^2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \qquad (0<\alpha<1/2).$$

Dans son étude, Girsanov a décrit *toutes les solutions fortement markoviennes de* $\mathscr{S}_x(\mathscr{L}^\alpha)$. Tous ces processus sont en fait des processus de Feller, et sont classifiés comme suit:

(i) Le point 0 est absorbant: pour tout $x \in \mathbb{R}$, la loi P_x est alors celle de l'unique solution arrêtée en $T_0 = \inf(t: X_t = 0)$ de l'équation stochastique

$$X_t = x + \int_0^t \frac{|X_s|^\alpha}{1+|X_s|^\alpha}\, dB_s,$$

où B est un mouvement brownien.

Dans les deux cas suivants, le point 0 est régulier:

(ii) Soit $0<c<\infty$; il existe alors un unique processus de Feller dont le générateur infinitésimal $(\mathscr{D}(A), A)$ est défini par

$\mathscr{D}(A) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bornée, de classe C^2 hors de 0, dérivable à droite et à gauche en $0\}$

$$f \in \mathscr{D}(A) \Rightarrow Af(x) = \begin{cases} \mathscr{L}^\alpha f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{d^+ f}{dx}(0) - \dfrac{d^- f}{dx}(0)\right) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(iii) Il existe un unique processus de Feller dont le générateur infinitésimal $(\mathscr{D}(A), A)$ est défini par

$\mathscr{D}(A) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bornée, de classe C^2 hors de 0, telle que

$\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|^{2\alpha}}{(1+|x|^\alpha)^2} \dfrac{d^2 f}{dx^2}(x)$ existe$\}$

$$f \in \mathscr{D}(A) \Rightarrow Af(x) = \begin{cases} \mathscr{L}^\alpha f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \lim_{x\to 0} \dfrac{|x|^{2\alpha}}{(1+|x|^\alpha)^2} \dfrac{d^2 f}{dx^2}(x) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a alors la

(4.4) **Proposition.** *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *toute solution fortement markovienne de* $\mathscr{S}_x(\mathscr{L}^\alpha)$ *est extrémale dans* $\mathscr{S}_x(\mathscr{L}^\alpha)$.

Démonstration. Soit $(U_\beta, \beta > 0)$ la résolvante associée à un processus de Markov fort tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, la loi correspondante P_x soit dans $\mathscr{S}_x(\mathscr{L}^\alpha)$.

Fixons x. Pour que $P_x \in \mathscr{E}_x(\mathscr{L}^\alpha)$, il faut et il suffit d'après le théorème (4.3) que $\mathscr{F}_0$ soit P_x-triviale (c'est la loi 0.1 de Blumenthal) et que toute $M \in \mathfrak{H}^{2,0}_{\text{loc}}(P_x)$ soit intégrale stochastique par rapport à X (d'après la forme de $\mathscr{L}^\alpha$ et le théorème (4.1), $X \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P_x)$). En fait d'après le lemme de Kunita-Watanabe [12], il suffit de démontrer cette propriété pour les martingales $(C^{U_\beta f}, \beta > 0, f \in C_b(\mathbb{R}))$. Posons $g = U_\beta f$.

Dans le cas (ii), g est donc de classe C^2 hors de 0, et dérivable à droite et à gauche en 0. La formule d'Ito s'étend à cette classe de fonctions (avec introduction du temps local de X en 0). On peut alors écrire $g(X_t) = g(X_0) + \int_0^t g'(X_s) dX_s + A_t$, où $A \in \mathfrak{V}_{\text{loc}}(P_x)$ est prévisible, et où $g'(0)$ est indifféremment la dérivée à droite ou à gauche. L'unicité de la décomposition de $g(X_t) - g(X_0)$ comme somme d'un élément de $\mathfrak{M}^0_{\text{loc}}(P_x)$ et d'un élement prévisible de $\mathfrak{V}_{\text{loc}}(P_x)$ (voir [15] pour les semi-martingales «spéciales» entraine alors $C^g = g'(X_-) X$.

Dans le cas (iii), le même raisonnement est encore valable.

Etudions le cas (i): posons $T_{1/n} = \inf(t\colon X_t \leqq 1/n)$. On sait que, le processus étant fellérien, toute martingale est continue, et on voit facilement ici que $\mathscr{F}_t(P_x) = \mathscr{F}_{t\wedge T_0}(P_x)$. Ainsi, si $M \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}(P_x)$, on a $M_t = M_{t\wedge T_0} = \lim M_{t\wedge T_{1/n}}$. Si $\sigma_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une suite de fonctions lipschitziennes telles que $\sigma_n(x) = |x|^\alpha (1+|x|^\alpha)^{-1}$ pour $|x| \geqq 1/n$, il y a unicité de la solution au problème $\mathscr{S}_x(\mathscr{L}(\sigma_n))$, où $\mathscr{L}(\sigma_n)$: $f \rightsquigarrow \frac{1}{2} \sigma_n^2(x) f''(x)$. Il est facile d'en déduire que pour tout n, il existe un élément $u_n \in L^2_{\text{loc}}(X, P)$ avec $u_n = (u_n)^{T_{1/n}}$ et $M^{T_{1/n}} = u_n \cdot X$; si on pose $u = u_n$ sur $]T_{1/(n-1)}, T_{1/n}]$, on a $M = u \cdot X$ et $u \in L^2_{\text{loc}}(X, P)$. □

Remarque. On peut se demander si les résultats de cette proposition sont valables en général pour les opérateurs $\mathscr{L}$ définis par (42). Cependant les raisonnements faits en [7] et l'application de la formule d'Ito faite ci-dessus sont très particuliers à la dimension 1. De plus l'exemple ci-après montre que ce résultat n'est pas vrai pour les solutions markoviennes, non fortement markoviennes, même en dimension 1. □

4.5. Un autre exemple de non-unicité des solutions

Là encore on suppose $d=1$. On considère une mesure positive finie H sur $]0,\infty[$, admettant une densité h. L'opérateur $\mathscr{L}=L+K$ est défini par (42), avec

$$Lf(x)=1_{\{x\neq 0\}}f'(x) \qquad (f\in\mathscr{D}(\mathbb{R})),$$

$$S(x,dy)=1_{\{x>0\}}\frac{h(x)}{H([x,\infty[)}\varepsilon_{-x}(dy).$$

On peut construire des solutions markoviennes appartenant à $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$ de la manière suivante: fixons $x\in\mathbb{R}$ et $a>0$. Soient $S_1=0$, $T_n=\inf(t>S_n, X_t=0)$, $S_{n+1}=\inf(t>T_n, X_t\neq 0)$. P_x^a est alors l'unique probabilité sur $(\Omega,\mathscr{F}^0)$ telle que:

les variables $(S_{n+1}-T_n, T_n-S_n, 1\leqq n<\infty)$ sont indépendantes;

les variables $(S_{n+1}-T_n)$ suivent une loi exponentielle de paramètre a;

les variables $(T_n-S_n, n\geqq 2)$ suivent la loi $\dfrac{H(\cdot)}{H(1)}$;

la variable T_1 suit la loi ε_{-x} $\left(\text{resp. } \dfrac{H(\cdot-x)}{H([x,\infty[)}\right)$ si $x\leqq 0$ (resp. $x>0$);

on a $X_t=t-S_n$ P_x^a-ps si $S_n\leqq t<T_n$.

X est alors P_x^a-ps un processus «en dents de scie» n'ayant qu'un nombre fini de sauts dans tout intervalle fini. Il est facile de voir que $P_x^a\in\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$ et que X est un processus de Markov (non fortement markovien) pour la famille $(P_x^a, x\in\mathbb{R})$: dans la terminologie de [10], X est le processus des âges de l'ensemble régénératif qui est l'image d'un subordinateur de drift a et de mesure de Lévy H.

Par conséquent P_x^a *est une solution markovienne de* $\mathscr{S}_x(\mathscr{L})$, *et cependant n'appartient pas à* $\mathscr{E}_x(\mathscr{L})$ puisque d'après [10] elle ne vérifie pas la propriété de représentation optionnelle: en effet la condition (ii) du théorème (4.3) n'est pas satisfaite, puisque les martingales de la forme $W*(\mu-\nu)$ ne sautent pas aux instants S_n, qui sont des temps d'arrêt totalement inaccessibles pour P_x^a.

References

1. Billingsley, P.: Convergence of probability measures. New York: Wiley 1968
2. Dellacherie, C.: Une représentation intégrale des surmartingales à temps discret. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **2**, 1–18, 1968
3. Dellacherie, C.: Capacités et processus stochastiques. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
4. Doleans-Dade, C.: Quelques applications de la formule du changement de variables pour les semi-martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete **16**, 181–194 (1970)
5. Doleans-Dade, C., Meyer, P.A.: Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Sém. Probab. Strasbourg IV, Lect. Notes Math. 124, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
6. Dubins, L., Schwarz, G.: On extremal martingale distributions. Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab., Univ. Calif. **II**, part I, 295–299, 1967
7. Girsanov, I.: An exemple of non-uniqueness of a solution of Ito's stochastic equation. Theo. Probability Appl. **7**, 336–342 (1962)
8. Jacod, J.: Un théorème de représentation pour les martingales discontinues. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete **34**, 225–244 (1976)

9. Jacod, J., Memin, J.: Caractéristiques locales et condition de continuité absolue pour les semi-martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete **35**, 1 – 37 (1976)
10. Jacod, J., Memin, J.: Un théorème de représentation des martingales pour les ensembles régénératifs. Sém. Proba. Strasbourg X, Lect. Notes Math. 511. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
11. Jacod, J.: A general theorem of representation for martingales. A.M.S. Meeting (à paraitre, 1976)
12. Kunita, K., Watanabe, S.: On square-integrable martingales. Nagoya Math. J. **30**, 209 – 245 (1967)
13. Lepeltier, J. P., Marchal, B.: Problème des martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégro-différentiel. Ann. I.H.P., B. **XII**, 43 – 103, 1976
14. Meyer, P. A.: Probabilités et potentiel. Hermann: Paris, 1966
15. Meyer, P. A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Proba. Strasbourg X, Lect. Notes Math. 511. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
16. Pratelli, M.: Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrable. Sém. Proba. Strasbourg X, Lect. Notes Math. 511. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
17. Stroock, D. W., Varadhan, S. R. S.: Diffusion processes with continuous coefficients. Comm. Pure Appl. Math. **22**, 345 – 400 et 479 – 530 (1969)
18. Stroock, D. W.: Diffusion processes associated with Lévy generators. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete **32**, 209 – 244 (1975)
19. Van Schuppen, J. H., Wong, E.: Transformations of local martingales under a change of law. Ann. Probability **2**, 879 – 888 (1974)
20. Yen, K. A., Yoeurp, C.: Représentation des martingales comme intégrales stochastiques de processus optionnels. Sém. Proba. Strasbourg X, Lect. Notes Math. 511. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
21. Yoeurp, C.: Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Sém. Probab. Strasbourg X, Lect. Notes Math. 511. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
22. Yor, M.: Représentation intégrale des martingales, étude des distributions extrémales. Article de Thèse de Doctorat, Paris 1976
23. Yor, M.: Représentation intégrale des martingales de carré intégrable. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A – B **282**, 899 – 901, 1976
24. Jacod, J., Yor, M.: Etude des solutions extremales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A – B **283**, 523 – 525, 1976
25. Galtchouk, L.: A paraître aux Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B (1977)

Reçu le 16 Juillet 1976