Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
36, 47–65 (1976)

Zeitschrift für
**Wahrscheinlichkeitstheorie**
und verwandte Gebiete


# Processus Gaussiens et volumes mixtes

Simone Chevet

Université de Clermont, U.E.R. de Mathématiques
Complexe Scientifique des Cézaux, B.P. 45, F-63170 Aubière, France

## Introduction et notations

Soit un processus gaussien centré $X=(X(t))_{t\in T}$ avec $T$ fini. En 1971, Sudakov a donné, dans [14], une interprétation géométrique de l'espérance mathématique de $\sup_{t\in T} X(t)$ au moyen de l'épaisseur mixte de l'enveloppe convexe $K$ de l'ensemble des points $X(t)$, $t\in T$, de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Tout récemment, Fernique [7] a donné, dans certains cas particuliers, une interprétation géométrique du moment d'ordre 2 de $\sup_{t\in T} X(t)$.

Ces résultats nous ont amenée à nous poser le problème suivant: «Peut-on exprimer les moments d'ordre $m\geqq 2$ de $\sup_{t\in T} X(t)$ au moyen des volumes mixtes de $K$?»

Nous obtenons une première réponse à ce problème: le moment d'ordre 2 de $\sup_{t\in T} X(t)$ est égal, à un terme correcteur près, à un volume mixte «normalisé» de $K$ (c'est-à-dire à un volume mixte indépendant de la dimension du sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ de dimension finie dans lequel l'on considère $K$). Ce résultat nous permet de retrouver les théorèmes (3.1) et (3.2) de Fernique [7].

Dans le § 1, nous montrons en particulier que la variance de la projection orthogonale de $\sup(X(t); t\in T)$ sur le supplémentaire orthogonal (dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$) de l'espace autoreproduisant $H_X$ de $X$ est fonction croissante de la distance du processus $X$.

Dans le § 2, nous donnons une expression de la variance de $\sup(X(t); t\in T)$ dans le cas où $X$ est propre.

Dans le § 3, nous introduisons les $k$-ièmes épaisseurs $h_k(K)$ d'un compact convexe $K$ d'un Hilbert $H$ et donnons une interprétation géométrique de la variance de $\sup(X(t); t\in t)$ au moyen de la 2-ième épaisseur de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $X(t)$, $t\in T$.

Enfin, dans le § 4, nous montrons que si $K$ est une partie compacte convexe d'un Hilbert $H$, $K$ est un G.B. ensemble [au sens Dudley [4]] si et seulement si $h_k(K)$ est fini pour un certain entier $k\geqq 1$; et nous terminons ce paragraphe par la donnée de quelques propriétés des (fonctions) $h_k$ obtenues à partir de résultats connus sur les volumes mixtes.

Nous remercions chaleureusement X. Fernique de nous avoir communiqué ses tous récents résultats; les problèmes qu'il s'est posés ont stimulé notre propre recherche.

Les notations utilisées sont celles de Fernique dans [7]:

(1) $X=((X(t))_{t\in T},\ (\Omega,\mathscr{F},P))$ désignera un processus gaussien centré, $\Gamma_X$ ou $\Gamma$ sa covariance, $H_X$ son espace autoreproduisant et $d_X$ sa «distance» (cf. [8]).

Dans le cas $T$ fini, on peut définir presque sûrement une variable aléatoire $\sigma=\sigma_X$ à valeurs dans $T$ muni de la tribu engendrée par les $d_X$-boules en posant

$$\sigma_X(\omega)=s \rightleftarrows X(\omega,s)=\sup_T X(\omega);$$

$\mu=\mu_X$ désignera la probabilité sur $T$, qui est la loi de $\sigma$.

(2) De plus, pour tout $(s,t)$ de $T\times T$, $(Y_{st}(u))_{u\in T}$ désignera le processus gaussien centré défini par

$$Y_{st}(u)=X(u)-E(X(u)|X(s)-X(t)).$$

Dans les paragraphes 1 et 2 nous supposons $T$ fini et égal à $\{1,\dots,n\}$.

## I. Lien entre $E(X^2(\sigma)-\gamma(\sigma,\sigma))$ et la distance du processus

Notons $\mathbf{P}_{H_X}$ le projecteur orthogonal de $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ sur l'espace autoreproduisant $H_X$ de $X=(X(1),\dots,X(n))$.

Tout d'abord, nous avons la

(1.1) **Proposition.** *Etant donné le vecteur gaussien centré $X=(X(1),\dots,X(n))$ on a:*

(1.1.1) $\mathbf{P}_{H_X}^{\perp}(X(\sigma_X))=\int (X(\sigma_X)-X(s))\,d\mu_X(s);$

(1.1.2) $$E(X^2(\sigma_X)-\gamma_X(\sigma_X,\sigma_X))=E[(\mathbf{P}_{H_X}^{\perp}(X(\sigma_X)))^2] -\tfrac{1}{2}\int_{T\times T} d_X^2(s,t)\,d(\mu_X\otimes\mu_X)(s,t).$$

*Preuve.* Elle est simple; tout d'abord, d'après [7],

$$\mathbf{P}_{H_X}(X(\sigma))=\int X(s)\,d\mu_X(s);$$

d'où (1.1.1) et

(1.1.3) $$E[(\mathbf{P}_{H_X}(X(\sigma)))^2]=\int_{T\times T}\gamma(s,t)\,d(\mu\otimes\mu)(s,t).$$

D'autre part, trivialement,

$$E(X^2(\sigma))=E[(\mathbf{P}_{H_X}(X(\sigma)))^2]+E[(\mathbf{P}_{H_X}^{\perp}(X(\sigma)))^2];$$

ainsi

$$E(X^2(\sigma)-\gamma(\sigma,\sigma))=E[(\mathbf{P}_{H_X}^{\perp}(X(\sigma)))^2]+\int_{T\times T}\gamma(s,t)\,d(\mu\otimes\mu)(s,t) - \int_T \gamma(t,t)\,d\mu(t);$$

mais, $\mu$ étant une probabilité,

$$\int_{T\times T} \gamma(s,t)\, d(\mu\otimes\mu)(s,t) - \int_T \gamma(t,t)\, d\mu(t) = \int_{T\times T} [\gamma(s,t) - \tfrac{1}{2}(\gamma(s,s)+\gamma(t,t))] \cdot d(\mu\otimes\mu)(s,t) = -\tfrac{1}{2}\int_{T\times T} d_X^2(s,t)\, d(\mu\otimes\mu)(s,t);$$

d'où la formule (1.1.2).

(1.2) *Remarque.* $\mathbf{P}_H(X(\sigma))$ est le point de Steiner (au sens de [12]) de l'enveloppe convexe des points $X(1), \ldots, X(n)$ de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

(1.3) *Remarque.* La proposition (1.1) permet de retrouver le théorème (3.3) de Fernique [7]:

«$E(X^2(\sigma) - \gamma(\sigma,\sigma))$ est une fonction de la seule distance du processus».

(1.4) *Remarque.* Trivialement: (a) $\mathbf{P}_{H_X}^{\perp}(X(\sigma))$ est positive p.s.;

(b) la distance dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ de $\sup(X(1), \ldots, X(n))$ à l'espace $H_X$ (c'est-à-dire $\sqrt{E[(\mathbf{P}_{H_X}^{\perp}(X(\sigma)))^2]}$) est égale à la distance de $\sup(X(1), \ldots, X(n))$ à l'enveloppe convexe des points $X(1), \ldots, X(n)$ de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$;

(c) $\frac{1}{2}\int d_X^2(s,t)\, d(\mu\otimes\mu)(s,t) = \min[E(\gamma_Z(\sigma_Z, \sigma_Z));$

$Z = (X(1) - Y, \ldots, X(n) - Y);\ Y \in H_X]$.

Donnons maintenant le résultat fondamental de ce paragraphe.

(1.5) **Théorème.** *Soit* $X = (X(1), \ldots, X(n))$ *et* $Y = (Y(1), \ldots, Y(n))$ *deux vecteurs gaussiens centrés tels que*

(1.5.1) $\quad d_X(i,j) \geqq d_Y(i,j), \qquad \forall (i,j) \in T \times T.$

*Alors, pour* $p = 1, 2$,

$$E[(\mathbf{P}_{H_X}^{\perp}(\sup(X(1), \ldots, X(n)))^p] \geqq E[(\mathbf{P}_{H_Y}^{\perp} \sup(Y(1), \ldots, Y(n)))^p].$$

(1.6) *Remarque.* $E(X^2(\sigma) - \gamma(\sigma,\sigma))$ n'est pas fonction croissante de la distance: il suffit de prendre $n = 3$,

$$Y(1) = -\mu_1 \qquad Y(2) = \mu_1, \qquad Y(3) = \sqrt{3}\,\mu_2$$

et

$$X(1) = -\mu_1 \qquad X(2) = \mu_1, \qquad X(3) = 4\mu_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_2$$

avec $(\mu_1, \mu_2)$ vecteur gaussien normal; nous avons alors:

$$E(X^2(\sigma) - \gamma_X(\sigma,\sigma)) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} < E(Y^2(\sigma) - \gamma_Y(\sigma,\sigma)) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}.$$

*Preuve.* Comme

$$E(\mathbf{P}_{H_X}^{\perp}(X(\sigma)) = E(X(\sigma)),$$

le cas $p = 1$ ne fait que traduire un résultat de Sudakov (cf [14], ou [6], ou [8], ou [2]).

Supposons maintenant $p = 2$. Comme dans [2, p. 290], il suffit de montrer le théorème avec $(X(1), \ldots, X(n))$ et $(Y(1), \ldots, Y(n))$ vecteurs gaussiens centrés propres et indépendants.

Soit, pour tout réel $\alpha$ de $[0, 1]$, le vecteur gaussien centré

$$Z^\alpha = (Z^\alpha(1), \ldots, Z^\alpha(n))$$

avec

$$Z^\alpha(i) = \sqrt{\alpha}\, X(i) + \sqrt{1-\alpha}\, Y(i), \qquad 1 \leqq i \leqq n.$$

Nous allons montrer que la fonction

$$J: \alpha \to E\,[(\mathbf{P}^{\perp}_{H_{Z^\alpha}}(\sup(Z^\alpha(1), \ldots, Z^\alpha(n))))^2]$$

est croissante sur $[0, 1]$; ce qui impliquera le théorème. Plus précisément, nous allons montrer que

$$(1) \quad J'(\alpha) = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \frac{d}{d\alpha}(E(|Z^\alpha(i) - Z^\alpha(j)|^2)). \left[C_i\, C_j - \left\langle \frac{\partial^2 \Xi}{\partial x_i\, \partial x_j}, (\Xi - \sum_l C_l\, x_l) f_{\Gamma_\alpha} \right\rangle\right]$$

avec $f_{\Gamma_\alpha}$ densité de $Z^\alpha$, $\Gamma_\alpha$ matrice de covariance de $Z^\alpha$,

$$C_l = P(\sigma_{Z^\alpha} = l), \qquad 1 \leqq l \leqq n$$

et

$$\Xi(x) = \sup(x_1, \ldots, x_n), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Notons que, pour tout $(i, j)$ de $T \times T$,

$$(2) \quad E|Z^\alpha(i) - Z^\alpha(j)|^2 = \alpha\, d_X^2(i, j) + (1-\alpha)\, d_Y^2(i, j) = \gamma_\alpha(i, i) + \gamma_\alpha(j, j) - 2\gamma_\alpha(i, j);$$

et, grâce à l'hypothèse (1.5.1),

$$(3) \quad \frac{d}{d\alpha} E|Z^\alpha(i) - Z^\alpha(j)|^2 = d_X^2(i, j) - d_Y^2(i, j) \geqq 0.$$

D'autre part, par définition,

$$J(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} (\Xi(x) - \sum_l C_l\, x_l)^2\, f_{\Gamma_\alpha}(x)\, dx;$$

ainsi

$$J'(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} (\Xi(x) - \sum_l C_l\, x_l)^2 \frac{d f_{\Gamma_\alpha}}{d\alpha}(x)\, dx + 2 \sum_{1 \leqq k \leqq n} \frac{dC_k}{d\alpha} E(Z^\alpha(k)\, \mathbf{P}^{\perp}_{H_{Z^\alpha}}(Z^\alpha(\sigma)));$$

et donc

$$(4) \quad J'(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} (\Xi(x) - \sum_l C_l\, x_l)^2 \frac{d f_{\Gamma_\alpha}}{d\alpha}(x)\, dx.$$

Mais, grâce à un lemme de Slepian ([13] ou [2, p. 286]),

$$\frac{d f_{\Gamma_\alpha}}{d\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leqq i, j \leqq n} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}(f_{\Gamma_\alpha}) \cdot \frac{d\gamma_\alpha(i, j)}{d\alpha}.$$

Par suite

$$(5)\quad J'(\alpha)=\frac{1}{2}\sum_{1\leqq i,j\leqq n}\left\langle\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}(\Xi-\sum_l C_l\,x_l)^2,\,f_{\Gamma_\alpha}\right\rangle\frac{d\gamma_\alpha(i,j)}{d\alpha}.$$

Mais, si $1\leqq i,j\leqq n$;

$$\frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}(\Xi-\sum_l C_l\,x_l)^2,\,f_{\Gamma_\alpha}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial^2\,\Xi}{\partial x_i\,\partial x_j},(\Xi-\sum_l C_l\,x_l)\,f_{\Gamma_\alpha}\right\rangle$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial\Xi}{\partial x_i}-C_i\right)\left(\frac{\partial\Xi}{\partial x_j}-C_j\right)f_{\Gamma_\alpha}(x)\,dx;$$

et comme

$$\sum_{1\leqq i\leqq n}\frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}(\Xi-\sum_l C_l\,x_l)^2,\,f_{\Gamma_\alpha}\right\rangle=0,\quad j=1,\ldots,n$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial\Xi}{\partial x_i}-C_i\right)\left(\frac{\partial\Xi}{\partial x_j}-C_j\right)f_{\Gamma_\alpha}\,dx=-C_i\,C_j,\ \text{si } 1\leqq i<j\leqq n,$$

nous en déduisons (avec l'aide de (2)):

$$J'(\alpha)=\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\frac{d}{d\alpha}E|Z^\alpha(i)-Z^\alpha(j)|^2\left(C_i\,C_j+\left\langle\frac{-\partial^2\,\Xi}{\partial x_i\,\partial x_j},(\Xi-\sum_l C_l\,x_l)\,f_{\Gamma_\alpha}\right\rangle\right),$$

c'est-à-dire (1).

Par suite, compte tenu de (3), $J'(\alpha)$ est positif sur $[0,1]$. D'où le théorème.

(1.7) *Remarque.* Nous ignorons si les conclusions du théorème (1.5) restent vraies avec $p$ entier $>2$. Nous ne savons pas aussi si

$$\int_{T\times T} d_X^2(s,t)\,d(\mu_X\otimes\mu_X)(s,t)$$

est fonction croissante de la distance $d_X$ du processus $X$.

## II. Expression de $E(X^2(\sigma)-\gamma(\sigma,\sigma))$ quand $X=(X(1),\ldots,X(n))$ est propre

Donnons tout d'abord un lemme technique.

(2.1) **Lemme.** *Supposons $X=(X(1),\ldots,X(n))$ vecteur gaussien centré propre; et soit $f_\Gamma$ sa densité. Soit aussi $h$ la densité d'une mesure sur $\mathbb{R}^n$ absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$) telle que la distribution associée à $h$ soit tempérée. Alors*

$$\mathbf{P}_{H_X}(h(X(1),\ldots,X(n)))=\sum_{1\leqq k\leqq n}s_k(h)\,X(k)$$

*avec*

$$s_k(h)=\left\langle\frac{\partial h}{\partial x_k},\,f_\Gamma\right\rangle=E\,[(\sum_l\tilde\gamma(k,l)\,X(l))\,h(X(1),\ldots,X(n))],$$

*où $(\tilde\gamma(k,l))_{k,l}$ est la matrice inverse de la matrice de covariance $\Gamma$ de $X$.*

*Preuve.* Elle est simple; en effet, comme $(\sum_l \tilde{\gamma}(k,l)\,X(l);\ 1 \leqq k \leqq n)$ est la base de $H_X$ duale de la base $(X(k);\ 1 \leqq k \leqq n)$ de $H_X$,

$$s_k(h) = E\left[\left(\sum_l \tilde{\gamma}(k,l)\,X(l)\right) h(X(1), \ldots, X(n))\right], \qquad k = 1, \ldots, n;$$

et donc

$$s_k(h) = \left\langle h, -\frac{\partial f_\Gamma}{\partial x_k}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x_k}, f_\Gamma\right\rangle, \quad \text{CQFD.}$$

(2.2) *Remarque.* a) Trivialement, pour $k = 1, \ldots, n$

$$E(h(X(1), \ldots, X(n))\,X(k)) = E(\mathbf{P}_{H_X}(h(X(1), \ldots, X(n))\,X(k)) = \sum_{1 \leqq i \leqq n} \gamma(i,k)\,s_i(h);$$

et on retrouve en particulier la formule (2.1.3) de Fernique dans [7].

b) Pour $i = 1, \ldots, n$

$$\mathbf{P}_{H_X}(1_{\{\sigma_X = i\}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq i} \frac{X(i) - X(k)}{d_X(i,k)}\, P(\{\sigma_X = i\} \mid X(k) = X(i));$$

car, en posant $\Xi(x) = \sup(x_1, \ldots, x_n)$, nous avons

$$\mathbf{P}_{H_X}(1_{\{\sigma_X = i\}}) = \sum_{1 \leqq k \leqq n} \left\langle \frac{\partial^2 \Xi}{\partial x_i\, \partial x_k}, f_\Gamma\right\rangle X(k).$$

Le lemme (2.1) permet d'ailleurs de retrouver le lemme (2.1) de Fernique [7], qui donne en particulier le

(2.3) **Lemme** [7]. *Supposons toujours $(X(1), \ldots, X(n))$ propre; alors, pour $f(x) = x^n$ avec $n$ entier et pour tout $s$ de $T$,*

(2.3.1) $$E([X(s)\,f(X(s)) - f'(X(s))\,\gamma(s,s)]\,1_{\{\sigma = s\}}) = \sum_{t \neq s} \frac{\gamma(s,s) - \gamma(s,t)}{\sqrt{2\pi}\, d_X(s,t)}\, E(f(Y_{st}(s))\,1_{\{\sigma_{Y_{st}} = s\}});$$

(2.3.2) $$E(X(\sigma)\,f(X(\sigma)) - f'(X(\sigma))\,\gamma(\sigma,\sigma)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{1 \leqq s < t \leqq n} d_X(s,t)\, E[f(Y_{st}(s))\,1_{\{\sigma_{Y_{st}} = s\}}],$$

*avec* $Y_{st}(s) = X(s) - E(X(s) \mid X(s) - X(t))$.
[(2.3.1) ne fait que traduire l'identité

$$E(X(s)\,f(X(s))\,1_{\{\sigma = s\}}) = E(X(s)\,\mathbf{P}_{H_X}(f(X(s))\,1_{\{\sigma = s\}}))]$$

Avec l'aide ce lemme et en posant

(2.4.1) $$M_2(X) = E(X^2(\sigma) - \gamma(\sigma,\sigma)),$$

nous allons établir le

(2.4) **Théorème.** *Supposons que* $n$ *est un entier* $\geqq 3$ *et que* $X=(X(1), \ldots, X(n))$ *est un vecteur gaussien centré propre. Alors:*

(2.4.2) $M_2(X(1), X(2))=0$;

(2.4.3) $M_2(X(1), X(2), X(3))=\dfrac{1}{2\pi}|\det(X(1)-X(2), X(1)-X(3))|$;

(2.4.4) $M_2(X(1), \ldots, X(n))$

$$= \sum_{1\leqq i<j<k\leqq n} M_2(X(i), X(j), X(k)) \cdot P\big(\sup_l (X(l)-X(i))\leqq 0 \,|\, X(i)=X(j)=X(k)\big).$$

*Preuve.* En utilisant la formule (2.3.2) du lemme (2.3) avec $f(x)=x$, nous obtenons

$$M_2(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{1\leqq s<t\leqq n} d_X(s,t)\, E(Y_{st}(s)\, 1_{\{\sigma Y_{st}=s\}}),$$

avec

$$Y_{st}(u)=X(u)-E(X(u)|X(s)-X(t)); \qquad u=1, \ldots, n.$$

Mais, pour tout $(s,t)$ tel que $1\leqq s<t\leqq n$, la matrice de covariance du vecteur gaussien centré

$$(Y_{st}(u), u\in T\setminus\{t\})$$

est aussi régulière; ainsi, nous pouvons à nouveau appliquer le lemme (2.3.1) avec $f\equiv 1$:

$$E(Y_{st}(s)\, 1_{\{\sigma Y_{st}=s\}})=\sum_{\substack{l\neq s,t\\ 1\leqq l\leqq n}} \frac{\gamma_{Y_{st}}(s,s)-\gamma_{Y_{st}}(s,l)}{\sqrt{2\pi}\, d_{Y_{st}}(s,l)}\, P(\sup_v Z_{stl}(v)=Z_{stl}(s))$$

avec, pour tout $u$ de $T$,

$$Z_{stl}(u)=Y_{st}(u)-E(Y_{st}(u)|\, Y_{st}(s)-Y_{st}(l));$$

notons que, pour tout $u$ de $T$,

$$Z_{stl}(u)=X(u)-E(X(u)|X(s)-X(t), X(s)-X(l)).$$

D'où, si $n=3$,

$$M_2(X(1), X(2), X(3))=\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{1\leqq s<t\leqq 3\\ l\neq s,t}} d_X(s,t)\, \frac{\gamma_{Y_{st}}(s,s)-\gamma_{Y_{st}}(s,l)}{d_{Y_{st}}(s,l)};$$

c'est-à-dire

$$M_2(X(1), X(2), X(3))=\frac{1}{2\pi}|\det(X(1)-X(2), X(1)-X(3))|,$$

compte tenu du théorème 3.2 de Fernique [7] ou encore compte tenu du lemme (3.8) à venir; et si $n\geqq 3$, nous avons aussi

$$M_2(X)=\sum_{1\leqq s<t<l\leqq n} M_2(X(s), X(t), X(l)) \cdot P\big(\sup_u (X(u)-X(s))=0 \,|\, X(s)=X(t)=X(l)\big).$$

D'où le théorème.

Une conséquence triviale du théorème (2.4) est le

(2.5) **Corollaire.** *Soit $n$ un entier $\geqq 3$ et $X=(X(1), \dots, X(n))$ un vecteur gaussien centré propre; donc $X$ admet la représentation*

$$(2.5.1) \quad X(i)=\sum_{1\leqq k\leqq m} A_k(i)\,\mu_k \qquad i=1, \dots, n,$$

*avec $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ vecteur gaussien normal et $A(1), \dots, A(n)$ points de $\mathbb{R}^m$. Et*

$$M_2(X(1), X(2), X(3))=\frac{1}{\pi}\operatorname{Aire}(A(1), A(2), A(3)),$$

$$M_2(X)=\frac{1}{\pi}\sum_{1\leqq i<j<k\leqq n}\operatorname{Aire}(A(i), A(j), A(k))\,\gamma_{\mathbb{R}^m}\{x; \sup_l(\mathfrak{P}_{ijk}^{\perp}(x)|\overrightarrow{A(l)\,A(i)})\leqq 0\},$$

*avec $\mathfrak{P}_{ijk}$ projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^m$ sur l'espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{A(i)\,A(j)}$ et $\overrightarrow{A(i)\,A(k)}$ et avec $\gamma_{\mathbb{R}^m}$ probabilité gaussienne normale sur $\mathbb{R}^m$.*

(Dans (2.5.1), on peut prendre $m=n-1$.)

Le lecteur familiarisé avec la notion de volumes mixtes (au sens de [1] par exemple) verra immédiatement que, à un coefficient près, $M_2(X)$, c'est-à-dire $E(X^2(\sigma)-\gamma(\sigma, \sigma))$, est «un» volume mixte de l'enveloppe convexe $K$ des $n$ points $A(1), \dots, A(n)$ de $\mathbb{R}^m$. Cependant pour expliciter ce résultat (proposition (3.6)) nous avons besoin d'introduire des définitions; ce sera l'objet du début du paragraphe suivant.

## III. $k^{\text{ièmes}}$ épaisseurs dans un Hilbert et interprétation géométrique de $E(X^2(\sigma)-\gamma(\sigma, \sigma))$

Dans tout ce qui suit, $H$ est un Hilbert réel et $\mathfrak{S}_H$ sa boule unité; $\mathscr{K}_H$ désignera la classe des compacts convexes de $H$; et si $H$ est de dimension finie, $\lambda_H$ désignera la mesure de Lebesgue sur $H$; on pose aussi

$$(3.0) \quad V_n=\lambda_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{S}_{\mathbb{R}^n})=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \qquad (n\in\mathbb{N}^*).$$

Tout d'abord, rappelons un résultat bien connu sur les compacts convexes de dimension finie:

(3.1) **Lemme** *(Formule de Steiner-Minkowski)* [1]. *Supposons $H$ de dimension finie $m$. Alors il existe $m+1$ applications croissantes $W_k^H$, $0\leqq k\leqq m$ de $\mathscr{K}_H$ dans $[0, \infty[$ telles que, pour tout réel $\varepsilon>0$ et tout $K$ de $\mathscr{K}_H$,*

$$(3.1.1) \quad \lambda_H(K+\varepsilon\,\mathfrak{S}_H)=\sum_0^m \binom{m}{k} W_k^H(K)\,\varepsilon^k;$$

*(et donc $W_0^H(K)=\lambda_H(K)$ et $W_m^H(K)=V_m$); de plus les $W_K^H$, $0\leqq k\leqq m$, sont continues sur $\mathscr{K}_H$ muni de la distance de Hausdorff.*

Nous en déduisons facilement la

(3.2) **Proposition et définition.** *Soit $H$ un Hilbert et $\phi(H)$ la classe des sous-espaces vectoriels de dimension finie de $H$. Alors, pour tout entier $k \geqq 0$ et pour tout compact convexe $K$ de $H$ de dimension finie, les réels $\geqq 0$*

$$\binom{\dim N}{k} \frac{W^N_{\dim N-k}(K)}{V_{\dim N-k}}, \qquad N \in \phi(H),\ N \supset K,\ \dim N \geqq k,$$

*sont tous égaux entre eux; leur valeur commune sera notée $h^H_k(K)$ ou $h_k(K)$ et sera appelée $k^{\text{ième}}$ épaisseur de $K$ dans $H$. En particulier $h_0 \equiv 1$; $h_k(K)$ est nul si $k > \dim K$; et $h_k(K)$ est strictement positif si l'entier $k$ est inférieur ou égal à* $\dim K$.

Ce résultat est facile à vérifier et est bien connu (cf. par exemple Hadwiger [10, p. 215] ou Dieudonné [3, Ch. XVI, § 26, exercice 7]).

Comme les $h_k$, $k>0$, sont trivialement croissantes sur la classe des compacts convexes de dimension finie de $H$, nous pouvons prolonger les fonctions $h_k$ à la classe des convexes fermés $K$ de $H$ comme suit:

(3.3) *Définition.* Etant donnés un Hilbert $H$, un entier $k>0$ et une partie convexe fermée $K$ de $H$, on pose

$$h_k(K) = \sup\{h_k(C);\ C \subset K;\ C \in \mathscr{K}_H;\ \dim C < \infty\};$$

et le nombre $h_k(K)$ est encore appelé $k^{\text{ième}}$ épaisseur de $K$ (dans $H$).

Trivialement, compte tenu du lemme (3.1), les applications $h_k$, $k>0$, sont positives, croissantes, invariantes par translation et positivement $k$-homogène sur la famille des convexes fermés de $H$.

(3.4) *Remarque.* $h_1(K)$ est l'épaisseur mixte de $K$ introduite par Sudakov dans [14].

Notons que:

(3.5.1) Si $\mathfrak{S}_n$ est la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et si $1 \leqq k \leqq n$,

$$h_k(\mathfrak{S}_n) = \binom{n}{k} \frac{V_n}{V_{n-k}}$$

$$\left(\text{et donc } h_1(\mathfrak{S}_n) = \frac{n V_n}{V_{n-1}} \text{ et } h_2(\mathfrak{S}_n) = (n-1)\,\pi\right).$$

(3.5.2) Si $K$ est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ de *dimension* $k$, $h_k(K)$ est le volume $k$-dimensionnel de $K$ et $h_{k-1}(K)$ est la $\frac{1}{2}$ aire $(k-1)$-dimensionnelle de $K$.

Et, pour un polytope, nous avons le

(3.5) **Lemme.** *Soit $H$ un Hilbert de dimension finie ou non, $\gamma_H$ la mesure cylindrique gaussienne normale sur $H$; soit aussi $K$ un polytope arbitraire de $H$ de sommets $p_1, \ldots, p_m$. Alors, pour tout entier $k$ de* $[1, \dim K[$,

$$h_k(K) = \sum_{\substack{F \text{ face de } K \\ \dim F = k}} \operatorname{Vol}_k(F)\, \gamma_H\{x;\ x \in H;\ \sup_{1 \leqq l \leqq m} (\mathbf{P}^{\perp}_F(x) | p_l - p_i) \leqq 0\},$$

*où $p_i$ est un sommet de $F$, $\mathbf{P}_F$ la projection orthogonale de $H$ sur l'espace vectoriel $E_F$ (de dimension $k$) associé à la variété linéaire engendrée par $F$ et où $\mathrm{Vol}_k(F)$ est le volume $k$-dimensionnel de la face $F$.*

*Preuve.* Nous pouvons supposer que 0 appartient à $K$; et soit $N$ le sous-espace vectoriel de $H$ engendré par $K$.

Il est bien connu que, pour tout entier $k$ de $[1, \dim K[$,

$$h_k(K) = \sum_{\substack{F \text{ face de } K \\ \dim F = k}} \mathrm{Vol}_k(F) \frac{\mathrm{Vol}_{n-k}(K_F \cap \mathfrak{S}_{N \ominus E_F})}{V_{n-k}},$$

avec $n = \dim K$; et où $K_F$ est le cône des normales extérieures à $\mathbf{P}_F^\perp(K - p_i)$ au point 0 avec $p_i$ sommet de $F$:

$$K_F = \{x; x \in H; \sup_{1 \leqq j \leqq m} (x | \mathbf{P}_F^\perp(p_j - p_i)) \leqq 0\}$$

(cône qui est bien indépendant du choix du sommet $p_i$ de $F$). Mais

$$\frac{\mathrm{Vol}_{n-k}(K_F \cap \mathfrak{S}_{N \ominus E_F})}{V_{n-k}} = \gamma_{N \ominus E_F}(K_F \cap (N \ominus E_F)) = \gamma_H(K_F).$$

D'où le lemme.

Nous en déduisons immédiatement une interprétation géométrique de $E(X^2(\sigma) - \gamma(\sigma, \sigma))$ dans le cas où $X = (X(1), \ldots, X(n))$ est *propre*:

(3.6) **Proposition.** *Les hypothèses étant celles du Corollaire* (2.5), *nous avons*

$$(3.6.1) \quad E(X^2(\sigma) - \gamma(\sigma, \sigma)) = \frac{1}{\pi} h_2(\mathrm{conv}\{A(i); 1 \leqq i \leqq n\}).$$

Plus généralement, nous avons la

(3.6′) **Proposition.** *Toujours sous les hypothèses du Corollaire* (2.5) *et pour tout entier $k$ de $[2, n-1[$, l'enveloppe convexe $K$ des points $A(i)$, $1 \leqq i \leqq n$, de $\mathbb{R}^m$ vérifie*

$$(3.6.2) \quad \frac{k!}{(\sqrt{2\pi})^k} h_k(K) = E(X(\sigma)^k) - \sum_0^{k-2} (k - i - 1)\, \rho_k(i);$$

*où, pour $i = 0$,*

$$\rho_k(0) = \sum_{1 \leqq i \leqq n} \gamma(i, i)\, E(X(i)^{k-2}\, 1_{\{\sup_l X(l) = X(i)\}});$$

*et, pour $i$ dans $[1, k-2]$,*

$$\rho_k(i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^i} \sum_{\substack{J \subset T \\ \mathrm{card}\, J = i+1}} |\det(X(s) - X(t); t \in J \setminus \{s\})|\, E((Z_J^{(k)})^2).$$
$$E[(Z_J^{(k)})^{k-2-i}\, 1_{\{\sup_l X(l) = Z_J^{(k)}\}} | X(s) - X(t) = 0;\ t \in J \setminus \{s\}],$$

*avec $s$ dans $J$, $Z_J^{(k)} = \mathbf{P}_J^\perp(X(s))$ et $\mathbf{P}_J$ le projecteur orthogonal de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ sur l'espace vectoriel $E_J$ engendré par les $X(s) - X(t)$, $t \in J \setminus \{s\}$.*

(3.7) *Remarque.* Malheureusement nous ne pouvons rien dire sur le terme

$$\sum_{0}^{k-2} (k-i-1)\, \rho_k(i)!$$

*Preuve* (Esquisse). (3.6.2) s'obtient par récurrence en utilisant les lemmes (2.3), (3.5) et le lemme suivant.

(3.8) **Lemme.** *Soit $m$ un entier $\geqq 2$ et $X=(X(1), \ldots, X(m))$ un vecteur gaussien centré propre; notons $E_X$ la variété linéaire engendrée par les points $X(1), \ldots, X(m)$ de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ et $Z$ la projection orthogonale de l'origine sur $E_X$. Alors, en posant $T=\{1, \ldots, m\}$ et*

$$V(X)=|\det(X(1)-X(2), \ldots, X(1)-X(m))|,$$

*nous avons*

$$(3.8.1) \quad V(X)=\sum_{1\leqq k\leqq m} V(X(i); i\in T\setminus\{k\})\, \delta_k$$

*où le module de $\delta_k$ est égal à la distance de $Z$ à l'hyperplan $E_k$ de $E_X$ engendré par les $X(i)$, $i\in T\setminus\{k\}$; et où le signe de $\delta_k$ est positif ou négatif selon que $Z$ et $X(k)$ sont du même côté de cet hyperplan ou non. Plus précisément, si $1\leqq k\leqq m$,*

$$(3.8.2) \quad \delta_k=\frac{E[X(i)\, Q_k^{\perp}(X(i)-X(k))]}{\sqrt{E[(Q_k^{\perp}(X(i)-X(k)))^2]}},$$

*où $Q_k$ est le projecteur orthogonal de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ sur le sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ associé à la variété linéaire $E_k$.*

*Preuve.* Comme $V(X)/(m-1)!$ est égal au volume $(m-1)$-dimensionnel du $(m-1)$-simplexe $S$ de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ engendré par $X(1), \ldots, X(m)$, (3.8.1) est une conséquence immédiate d'un théorème bien connu d'analyse convexe (voir par exemple le théorème (3.7) de [5]).

D'autre part, comme

$$E[X(i)\, Q_k^{\perp}(X(i)-X(k))]=E[Q_k^{\perp}(X(i)-Z)\, Q_k^{\perp}(X(i)-X(k))],$$

nous en déduisons facilement (3.8.2). D'où le lemme.

Maintenant nous désirons supprimer l'hypothèse «$X$ *propre*» intervenant dans la proposition (3.6); et même nous désirons nous passer de l'hypothèse $T$ fini. Pour cela nous avons besoin de la proposition suivante.

(3.9) **Proposition.** *Soit $H$ un Hilbert. Alors:*

(1) *Pour tout entier $k>0$ et tout sous-espace $N$ de $H$ de dimension finie, la restriction de $h_k$ à la classe des parties compactes convexes de $N$ est continue (pour la distance de Hausdorff);*

(2) *Pour toute partie convexe fermée $K$ de $H$ et tout entier $k>0$, on a*

$$(3.9.1): \quad h_k(K)=\sup\{h_k(P); P\subset K; P \text{ polytope}\};$$

*et plus généralement, si $D$ est une partie de $K$ dont l'enveloppe convexe fermée coïncide avec $K$,*

$$(3.9.2) \quad h_k(K)=\sup\{h_k(\mathrm{conv}(I)); I\subset D; I \text{ fini}\}.$$

*Preuve.* (1) résulte immédiatement du lemme (3.1); (3.9.1) s'en déduit immédiatement compte tenu du fait que tout compact convexe $K$ de dimension finie (dans $H$) peut être approché (pour la distance de Hausdorff) par des polytopes contenus dans $K$. Par contre (3.9.2), qui est bien connu dans le cas $k=1$ [2, p. 260], est plus long à montrer; et le lecteur trouvera la preuve de (3.9.2) en appendice; le lecteur peut cependant noter dès maintenant que:

(3.9.3) $\sup\{h_k(\mathrm{conv}(I));\, I\subset D;\, I \text{ fini}\}=\sup\{h_k(P);\, P\subset\mathrm{conv}(D);\, P \text{ polytope}\}$.

Grâce à la partie (1) de la proposition 3.9, nous allons obtenir le

(3.10) **Théorème.** *Soit $X=(X(1),\dots,X(n))$ un vecteur gaussien centré propre ou non. Donc $X$ admet la représentation*

$$X(t)=\sum_{1\leq k\leq m} A_k(t)\,\mu_k,\qquad t=1,\dots,n,$$

*avec $(\mu_1,\dots,\mu_m)$ vecteur gaussien normal et $A(1),\dots,A(n)$ $n$ points de $\mathbb{R}^m$. Alors, si $K$ désigne l'enveloppe convexe des $n$ points $A(1),\dots,A(n)$,*

(3.10.1) $\quad E(X^2(\sigma)-\gamma(\sigma,\sigma))=\dfrac{1}{\pi}h_2(K)$

*et*

(3.10.2) $\quad E(X(\sigma))=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}h_1(K)$.

*Preuve.* (3.10.2) est bien connue [2]. Montrons donc (3.10.1); pour cela nous allons approcher le vecteur $X$ par des vecteurs gaussiens centrés propres: considérons un vecteur gaussien normal $(\Lambda(1),\dots,\Lambda(n))$ indépendant de $(X(1),\dots,X(n))$ et soit, pour tout réel $\varepsilon>0$, le vecteur gaussien centré

$$X_\varepsilon=(X(1)+\varepsilon\Lambda(1),\dots,X(n)+\varepsilon\Lambda(n)).$$

Comme $X_\varepsilon$ est propre, il résulte de la proposition (3.6) que

$$M_2(X_\varepsilon)=E(X_\varepsilon(\sigma_\varepsilon)-\gamma_X(\sigma_\varepsilon,\sigma_\varepsilon))=\frac{1}{\pi}h_2(K_\varepsilon),$$

avec $K_\varepsilon$ enveloppe convexe des $n$ points

$$A^\varepsilon(t)=(A_1(t),\dots,A_m(t),\underbrace{0,\dots,0,\varepsilon}_{t},0,\dots),\qquad t=1,\dots,n$$

de $\mathbb{R}^{m+n}$. Mais quand $\varepsilon$ tend vers zéro, $K_\varepsilon$ converge (pour la distance de Hausdorff $\delta$ de $\mathbb{R}^{m+n}$) vers $K$, car $\delta(K_\varepsilon,K)\leq\varepsilon$; et, compte tenu du caractère gaussien de $X$ et $\Lambda$, $M_2(X_\varepsilon)$ converge vers $M_2(X)$. D'où

$$M_2(X)=E(X^2(\sigma)-\gamma(\sigma,\sigma))=\frac{1}{\pi}h_2(K).$$

Et le théorème est démontré.

Compte tenu de la remarque (3.5.2), nous retrouvons ainsi les théorèmes (3.1) et (3.2) de Fernique de [7]:

(3.10.3) *Si le rang de $X$ est égal à 2, $\pi E(X^2(\sigma)-\gamma(\sigma,\sigma))$ est égale à l'aire de $K$;*

(3.10.4) *Si le rang de $X$ est égal à 3, $2\pi(E(X^2(\sigma)-\gamma(\sigma,\sigma))$ est égale à l'aire latérale de $K$.*

(3.11) *Remarque.* Pour tout $k$ tel que $A(k)$ est sommet de $K$, le nombre $P(\sigma_X=k)$ est égal à l'angle externe $\psi(A(k),K)$ (au sens de [9, p. 308]) du polytope $K$ au sommet $A(k)$; le point $I$ de $\mathbb{R}^m$ tel que

$$\sum_{1\leqq k\leqq n} P(\sigma_X=k\overrightarrow{IA(k)},$$

est alors le point de Steiner de $K$ (au sens de [12]); et

$$\tfrac{1}{2}\int d_X(i,j)\,d\mu\otimes\mu(i,j)=\sum_{M\,\text{sommet de}\,K}\|\overrightarrow{IM}\|^2\,\psi(M,K).$$

Introduisons maintenant la

(3.12) *Définition.* Soit $(X(t))_{t\in T}$ un processus gaussien centré avec $T$ arbitraire; et soit $\phi(T)$ la famille des parties finies de $T$. Alors, pour tous $I$, $J$ de $\phi(T)$ tels que $I\subset J$,

$$M_2(X(t);t\in I)\leqq M_2(X(t);t\in J);$$

et donc la suite généralisée $(M_2(X(t);t\in I))_{I\in\phi(T)}$ admet une limite finie ou non (mais $\geqq 0$); *cette limite sera encore notée $M_2(X(t);t\in T)$.*

Alors, compte tenu de la proposition (3.9.2) et du théorème (3.10), nous obtenons immédiatement le

(3.13) **Théorème.** *Soit $(X(t))_{t\in T}$ un processus gaussien centré avec $T$ arbitraire. Alors:*

(3.13.1) $$M_2(X(t);t\in T)=\frac{1}{\pi}h_2(K),$$

*où $K$ est l'enveloppe convexe fermée dans $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ de l'ensemble des points $X(t)$, $t\in T$ de $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$.*

(3.14) *Remarque.* Si, dans le théorème (3.13), $X=(X(t))_{t\in T}$ *est de rang fini $m$*, $X$ admet la représentation

$$X(t)=\sum_{i=1}^m A_i(t)\,\mu_i,\qquad t\in T$$

avec $(\mu_1,\ldots,\mu_m)$ vecteur gaussien normal.

Si $C$ désigne l'enveloppe convexe fermée des points

$$A(t)=(A_i(t))_{1\leqq i\leqq m},\qquad t\in T,$$

de $\mathbb{R}^m$, $I$ le point de Steiner de $C$, $\mathbf{H}$ la fonction d'appui de $C-I$:

$$\mathbf{H}(\vec{x})=\sup_{M\in C}(\overrightarrow{IM}|\vec{x}),\qquad \text{si } \vec{x}\in\mathbb{R}^m;$$

et si $C$ est suffisamment lisse,

$$(\tfrac{1}{2}\textstyle\int_J d_{X_J}(s,t)\,d\mu_{X_J}\otimes d\mu_{X_J}(s,t))_{J\in\phi(T)}$$

(avec $X_J=(X(j), j\in J)$) converge vers

$$\int_{\Sigma_m} \sum_{1\leqq k\leqq m} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_k}(\vec{u})\right)^2 d\sigma_m(\vec{u}),$$

où $\sigma_m$ désigne encore la mesure de Haar normalisée sur la sphère unité $\sum_m$ de $\mathbb{R}^m$; et

$$h_2(K)=\pi \int_{\Sigma_m} \left(\sum_{1\leqq k\leqq m} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial^2 x_k}(\vec{u})\, H(\vec{u})\right) d\sigma_m(\vec{u}).$$

## IV. Autres propriétés des $k$-épaisseurs

Tout d'abord, nous avons la

(4.1) **Proposition.** *Soit $H$ un Hilbert de dimension infinie et $K$ un compact convexe de $H$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(1) *$K$ est un G.B. ensemble (au sens de [4]);*
(2) *il existe un entier $k\geqq 1$ tel que $h_k(K)<\infty$;*
(3) *pour tout entier $k\geqq 1$, $h_k(K)$ est fini.*

Pour montrer cette proposition, nous avons besoin du

(4.2) **Lemme.** *Pour tout compact convexe $K$ de $H$ et tout entier $k\geqq 1$,*

(4.2.1) $$h_k^2(K)\geqq \frac{k+1}{k}\, h_{k-1}(K)\, h_{k+1}(K);$$

*en particulier*

(4.2.2) $$h_k(K)\leqq \frac{1}{k!}(h_1(K))^k.$$

(4.3) *Remarque.* Comme pour tout compact convexe $K$ de $H$ de dimension infinie les $h_k(K)$, $k\in\mathbb{N}$, sont tous strictement positifs, (4.2.1) n'est pas ambiguë: on ne peut avoir la forme «indéterminée» $0.\,\infty$ dans le membre de droite de (4.2.1).

*Preuve du lemme* (4.2). Soit $k\geqq 1$ fixé arbitrairement.

Notons qu'il suffit de montrer (4.2.1) et (4.2.2) avec $K$ compact convexe de dimension finie.

Montrons donc (4.2.1) avec $K$ de dimension finie. (4.2.1) est triviale si $\dim K<k+1$, car $h_{k+1}(K)=0$. Supposons donc: $\dim K\geqq k+1$.

Mais, conformément aux notations du lemme (3.1) et d'après l'inégalité de Fenchel-Alexandroff ([1, p. 92]; [10, p. 282]),

$$W_{n-k}^N \geqq W_{n-k+1}^N\, W_{n-k-1}^N \qquad (\text{sur } \mathscr{K}_N),$$

pour tout sous-espace vectoriel $N$ de $H$ de dimension finie $n\geqq k+1$. Utilisant le définition de $h_k$, nous en déduisons que, pour $n=\dim K$ (et même pour tout

$n \geqq \dim K$),

$$\begin{aligned} h_k(K) &\geqq \frac{k+1}{k} \frac{(n-k+1) V_{n-k+1} V_{n-k-1}}{(n-k)(V_{n-k})^2} h_{k-1}(K)\, h_{k+1}(K) \\ &= \frac{k+1}{k} \frac{2\pi}{(n-k)(\alpha_{n-k})^2} h_{k-1}(K)\, h_{k+1}(K) \\ &\geqq \frac{k+1}{k} h_{k-1}(K)\, h_{k+1}(K); \end{aligned}$$

où $\alpha_i = \int_0^\pi \sin^i \varphi \, d\varphi$ et $V_i = \dfrac{\pi^{i/2}}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}$, si $i \in \mathbb{N}^*$.

Et (4.2.1) est démontrée.

*Montrons maintenant* (4.2.2) avec $K$ de dimension finie. (4.2.2) est triviale si $h_k(K)=0$; sinon les $h_i(K)$, $1 \leqq i \leqq k$ sont tous non nuls; par suite, grâce à (4.2.1), nous obtenons

$$\frac{i\, h_i(K)}{h_{i-1}(K)} \leqq h_1(K), \qquad \text{si } 1 \leqq i \leqq k.$$

D'où (4.2.2):

$$h_k(K) \leqq \frac{1}{k!} (h_1(K))^k.$$

Et le lemme est démontré.

*Preuve de la proposition* (4.1). Bien entendu cette proposition est triviale si $K$ est de dimension finie. Supposons donc $K$ de dimension infinie; alors, d'après Sudakov [14] (cf. aussi [2]), $K$ est un G.B. ensemble si et seulement si $h_1(K)$ est fini; donc

$$(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2);$$

d'autre part, (2) implique (3) par le lemme (4.2), compte tenu de la remarque (4.3). D'où la proposition.

Donnons maintenant quelques autres résultats facilitant le calcul des $h_k(K)$ (et donc le calcul de $E(X(\sigma))$ et de $E(X^2(\sigma)-\gamma(\sigma,\sigma))$); ces résultats sont obtenus à partir de formules connues sur les volumes mixtes.

Tout d'abord, compte tenu du lemme (4.2) et du fait que

$$[E(X(\sigma))]^2 \leqq E[(\mathbf{P}_{H_X}^{\perp}(X(\sigma)))^2],$$

nous obtenons

(4.4.1): Pour tout compact convexe $K$ de $H$,

$$h_2(K) \leqq \frac{(h_1(K))^2}{2} \leqq \pi \operatorname{diam}(K) + h_2(K).$$

D'autre part,

(4.4.2) [10, p. 215]. Si $A$ et $B$ sont deux compacts convexes de $H$ tels que, pour tout $(a, b)$ de $A \times B$, $(a|b)_H = 0$ alors, pour tout entier $k > 0$,

$$h_k(A+B) = \sum_{\substack{k'+k''=k\\ k' \geqq 0, k'' \geqq 0}} h_{k'}(A)\, h_{k''}(B);$$

en particulier:

(4.4.2') $h_2(A+B) = h_1(A)\, h_1(B) + h_2(A) + h_2(B)$.

Ensuite, d'après un résultat de Fenchel et Alexandroff (cité p. 249 de [10]),

(4.4.3) Les fonctions $K \to (h_k(K))^{1/k}$ sont *concaves* (et positivement homogènes) sur $\mathscr{K}_H$; donc, pour tous compacts convexes $K'$ et $K''$ de $H$,

$$(h_k(K'+K''))^{1/k} \geqq (h_k(K'))^{1/k} + (h_k(K''))^{1/k}.$$

Pour des compacts convexes de dimension finie, nous avons aussi

(4.4.4) (Formule de Kubota) [1]: Si $H$ est de dimension finie $n$, alors, pour tout entier $k$ de $]0, n[$ et tout compact convexe $K$ de $H$,

$$h_k(K) = \rho_{k,n} \int_{\Sigma_H} h_k(\mathbf{P}_{\vec{u}}^{\perp}(K))\, d\sigma_H(\vec{u}),$$

où $\mathbf{P}_{\vec{u}}$ désigne le projecteur orthogonal de $H$ sur la droite engendrée par le vecteur $\vec{u}$, $\sigma_H$ la mesure de Haar normalisée sur la sphère $\sum_H$ de $H$; et

$$\rho_{k,n} = \frac{n\,\alpha_n}{(n-k)\,\alpha_{n-k}}, \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \int_0^{\pi} \sin^i \varphi\, d\varphi, \qquad i \in \mathbb{N}^*.$$

(4.4) *Remarque.* En itérant (4.4.4) nous obtenons

(4.4.4') Pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}^n$ et pour tous entiers $i, k$ tels que $1 \leqq i \leqq n-k$

$$h_k(K) = \beta_{k,n}^i \int_{S_{n,i}} h_k(\mathbf{P}_W^{\perp}(K))\, d\sigma_n^i(W)$$

où $\sigma_n^i$ est la mesure de Haar normalisée sur la variété de Stiefel réelle $S_{n,i}$ ([3, p. 67]), $\mathbf{P}_W$ le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (de dimension $i$) engendré par les vecteurs $w_1, \ldots, w_i$ de l'élément $W = (w_1, \ldots, w_i)$ de $S_{n,i}$; de plus

$$\beta_{k,n}^i = \frac{h_k(\mathfrak{S}_n)}{h_k(\mathfrak{S}_{n-i})};$$

bien entendu on peut remplacer $S_{n,i}$ par la Grassmanienne réelle $G_{n,i}$ (cf [3, p. 68]) et $\sigma_n^i$ par la mesure de Haar normalisée $s_n^i$ sur $G_{n,i}$.

En particulier, on a

(4.4.4''): si $n-k \geqq 1$,

$$h_k(K) = \beta_{k,n}^{n-k} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{Vol}_k(\mathbf{P}_E^{\perp}(K))\, ds_n^{n-k}(E);$$

et si $n-k \geqq 2$,

$$h_k(K)=\beta_{k,n}^{n-k-1} \int_{G_{n,n-k-1}} \operatorname{Surf}_k(\mathbf{P}_E^{\perp}(K))\, d s_n^{n-k-1}(E).$$

Enfin signalons que dans le cas d'un polytope, on a une formule du type Euler [Shephard, 11]:

(4.4.5) Si $P$ est un polytope de $H$ de dimension $m$, alors, pour tout entier $k$ de $[0, m]$,

$$[(-1)^k-(-1)^m]\, h_k(P)=\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j \sum_{F_j \in \mathscr{F}_j} h_k(F_j),$$

où $\mathscr{F}_j$ désigne la famille des $j$-faces de $P$.

Notons que la formule (4.4.5) dans le cas $k=0$ donne des précisions sur les cardinaux des $\mathscr{F}_j$.

Terminons cet article par la donnée de deux exemples:

(4.5.1) *Exemple.* Soit $m$ un entier $>2$; soit $T_m$ un $(m-1)$-simplexe de $\mathbb{R}^m$ dont toutes les arêtes ont pour longueur un. Alors, d'après [2],

$$\sqrt{[\operatorname{Log}_2 m]} \leqq h_1(T_m) \leqq 5 \sqrt{\operatorname{Log} 5 m},$$

avec $[\operatorname{Log}_2 m]$ partie entière de $\operatorname{Log}_2 m$. Donc, par (4.4.1),

$$[\operatorname{Log}_2 m]-\pi \leqq h_2(T_m) \leqq \tfrac{25}{2} \operatorname{Log} 5 m.$$

De plus, si $I$ est le centre de $T_m$ (et donc son point de Steiner),

$$\|\overrightarrow{IM}\|=\sqrt{\frac{m-1}{2 m}},$$

pour tout sommet $M$ de $T_m$.

(4.5.2) *Exemple.* Soit $(a_n)_n$ une suite de réels $>0$; et soit, pour tout entier $m>2$,

$$\exists_{\infty}^m=\left\{(x_i)_{0 \leqq i \leqq m};\ \sup_{i \leqq m}\left|\frac{x_i}{a_i}\right| \leqq 1\right\}.$$

Alors

$$h_1(\exists_{\infty}^m)=2(a_1+\ldots+a_m)$$

et

$$h_2(\exists_{\infty}^m)=2 \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leqq i, j \leqq m}} a_i a_j;$$

plus généralement, d'après (4.4.2), pour tout $k$ de $[2, m[$:

$$h_k(\exists_{\infty}^m)=2^k \sum_{\operatorname{card} I=k} \prod_{i \in I} a_i.$$

## V. Appendice

Preuve de la formule (3.9.2) de la proposition (3.9). Pour montrer cette formule (3.9.2), nous avons besoin des deux petits lemmes suivants.

(5.1) **Lemme.** (Formule dite aussi de Steiner-Minkowski). *Soit $H$ un Hilbert, $K$ un compact convexe de $H$ de dimension finie et $N$ un sous-espace vectoriel de $H$ de dimension finie contenant $K$. Si $m$ désigne la dimension de $N$, nous avons alors, pour tout réel $\varepsilon>0$ et tout entier $k$ de $[0, m]$,*

$$h_k(K+\varepsilon\mathfrak{S}_N)-h_k(K)=\sum_1^k \binom{k}{i}\tau_{k,m}(i)\,h_{k-i}(K)\,\varepsilon^i$$

*avec*

$$\tau_{k,m}(i)=\frac{\binom{m}{k}}{\binom{m}{k-i}}\cdot\frac{V_{m-k+i}}{V_{m-k}}$$

($\mathfrak{S}_N$ désigne la boule unité de $N$).

Pour la preuve de ce lemme, le lecteur pourra consulter Bonnesen et Fenchel [1] (ou Hadwiger [10, p. 214] ou Dieudonné [3, p. 176, exercice 7]).

(5.2) **Lemme.** *Soit $H$ un Hilbert et $(K_n)_n$ une suite de compacts convexes de $H$ de dimension finie convergeant (au sens de la distance de Hausdorff) vers une partie compacte convexe $K$ de $H$. Supposons de plus*

$$\dim K<\infty \quad \textit{et} \quad \sup_n(\dim(K_n))<\infty.$$

*Alors, pour tout entier $k>0$, la suite $(h_k(K_n))_n$ converge vers $h(K)$.*

*Preuve.* Ce lemme est bien connu quand les $K_n$ sont tous contenus dans un certain sous-espace vectoriel de $H$ de dimension *finie* (cf. partie (1) de la proposition (3.9)); ce lemme est aussi bien connu dans le cas $k=1$ [2, p. 261].

Soit $k$ un entier $>0$ arbitraire; si $k\geqq k_0$ avec

$$k_0=1+\dim K+\sup_n(\dim K_n),$$

le lemme est trivial puisque $h_k(K)$ et les $h_k(K_n)$, $n>0$, sont alors nuls. Supposons maintenant $k<k_0$.

Par hypothèse, pour tout entier $n$, il existe un sous espace vectoriel $H_n$ de $H$ de dimension $k_0$ contenant $K$ et $K_n$; et, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un entier $n_\varepsilon$ tel que, si $n\geqq n_\varepsilon$,

$$K_n\subset K+\varepsilon\mathfrak{S}_{H_n} \quad \text{et} \quad K\subset K_n+\varepsilon\mathfrak{S}_{H_n}.$$

D'où

$$|h_k(K_n)-h_k(K)|\leqq h_k(K+\varepsilon\mathfrak{S}_{H_n})-h_k(K)+h_k(K_n+\varepsilon\mathfrak{S}_{H_n})-h_k(K_n);$$

et, pour tout entier $j>0$,

$$\sup_n h_j(K_n)<+\infty,$$

compte tenu du lemme (5.1) (et du fait que $h_j(K_n)\leqq h_j(K+\mathfrak{S}_{H_n})$ si $n\geqq n_1$). Enfin, en utilisant à nouveau le lemme (5.1), nous pouvons trouver un réel $>0$ $B$ indépendant de $n$ et de $\varepsilon$ tel que

$$|h_k(K_n) - h_k(K)| \leqq \varepsilon B, \qquad \text{si } n \geqq n_\varepsilon;$$

d'où le lemme.

Maintenant, *donnons la preuve de la formule* (3.9.2) de la proposition (3.9):

$$(3.9.2) \quad h_k(K) = \sup\{h_k(\operatorname{conv}(I)); I \subset D; I \text{ fini}\}.$$

Il est immédiat maintenant que (3.9.2) est une conséquence de (3.9.1), compte tenu du lemme (5.2), de (3.9.3) et du fait que tout polytope $P$ contenu dans $K$ peut être approché (pour la distance de Hausdorff) par des polytopes $P_k$ contenus dans conv $(D)$ et satisfaisant

$$\dim P_k \leqq m,$$

où $m$ est le nombre de sommets de $P$.

## Références


1. Bonnesen, T., Fenchel, W.: Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer 1934
2. Chevet, S., Badrikian, A.: Mesures cylindriques, espaces de Wiener et fonctions aléatoires gaussiennes. Lecture Notes in Math. **379**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1974
3. Dieudonné, J.: Eléments d'Analyse; tome 3. Cahiers Scientifiques; Fascicule XXXIII. Paris: Gauthier Villars 1970
4. Dudley, R.: The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. J. Functional Analysis **1**, 290–330 (1967)
5. Eggleston, H.G.: Convexity. Vol. 47 of the Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics (1969)
6. Fernique, X.: Minorations des fonctions aléatoires gaussiennes. Ann. Inst. Fourier. Grenoble **24**, 61–66 (1974)
7. Fernique, X.: Corps convexes et processus gaussiens de petit rang. [A paraître]
8. Fernique, X.: Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Lecture Notes in Math. **480**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
9. Grünbaum, A.: Convex polytopes. Wiley: Interscience 1967
10. Hadwiger, H.: Vorlesungen über Inhalt. Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957
11. Shephard, G.C.: Euler type relations for convex polytopes. Proc. London Math. Soc. **18**, 597-606 (1968)
12. Shephard, G.C.: The Steiner point of a convex polytope. Canad. J. Math. **18**, 1294–1300 (1966)
13. Slepian, D.: The one sided Barrier Problem for Gaussian Noise. The Bell System Technical J. **41**, 463–501 (1962)
14. Sudakov, V.N.: Gaussian random processes and measures of solid angles angles in Hilbert space. Dokl. Akad. Nauk SSSR **197**, 43–45 (1971); ou Soviet Math. Dokl. **12**, 412–415 (1971)


*Reçu le 20 février 1976*