Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 32, 133–138 (1975)

Croissance et mouvements browniens d'un groupe de Lie nilpotent et simplement connexe

B. Roynette

We give here a probabilistic characterization of the growth of a simply connected nilpotent Lie group.

Nous indiquons ici une caractérisation probabiliste du degré de croissance polynomiale d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe.

1. Introduction et notations

On pourra trouver une présentation détaillée des notions sur les groupes et algèbres de Lie que nous utilisons ici dans [1].

Soit $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension n, et $\mathscr{G}_1=\mathscr{G}$, $\mathscr{G}_2=[\mathscr{G},\mathscr{G}_1]\dots$ $\mathscr{G}_{k+1}=[\mathscr{G},\mathscr{G}_k],\dots,\mathscr{G}_{p+1}=(0)$ sa série centrale descendante. Soit $e_1,e_2,\dots,e_{i_1}$, $e_{i_1+1},\dots,e_{i_2},\dots,e_{i_p}=e_n$ une base de $\mathscr{G}$ adaptée à cette série (i.e.: pour tout $j=1,2,\dots,n$, $e_j\in\mathscr{G}_l-\mathscr{G}_{l+1}$ si $i_{l-1}<j\leqq i_l$). Dans ce qui suit nous identifions l'espace sous-jacent à $\mathscr{G}$ avec $\mathbb{R}^n$ à l'aide de la base $e_1,e_2,\dots,e_n$, et si $\lambda\in\mathscr{G}$, λ_i désigne sa $i^{\text{ème}}$ composante sur cette base. Nous notons V_l $(l=1,\dots,p)$ l'espace vectoriel engendré par $e_{i_{l-1}+1}$, $e_{i_{l-1}+2},\dots,e_{i_l}$, si bien que $\mathscr{G}=\bigoplus_{l=1}^p V_l$. Si $e_j\in V_l$, nous noterons l'indice l par a_j (ou $a(j)$).

Soit $A_n=\mathbb{N}^n$ l'ensemble des suites $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ de longueur n formées d'éléments de $\mathbb{N}$. Si $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ et si $\alpha\in A_n$, nous désignerons par $(\gamma)^\alpha$ l'élément $\gamma_1^{\alpha_1}\cdot\gamma_2^{\alpha_2}\dots\gamma_n^{\alpha_n}$. La formule de Campbell-Hausdorff (cf. [1]) permet de munir $\mathscr{G}(\approx\mathbb{R}^n)$ d'une structure de groupe nilpotent G. La multiplication dans G est polynomiale. Plus précisément on a, pour λ, $\mu\in\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
&(\lambda\cdot\mu)_1=\lambda_1+\mu_1,\qquad (\lambda\cdot\mu)_2=\lambda_2+\mu_2+P_2(\lambda_1,\mu_1),\\
&(\lambda\cdot\mu)_3=\lambda_3+\mu_3+P_3(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2),\dots,\\
&(\lambda\cdot\mu)_n=\lambda_n+\mu_n+P_n(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1},\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{n-1}),
\end{aligned}$$

où $P_2,P_3\dots P_n$ sont des polynomes. Pour tout $j=2,3,\dots,n$, il existe une partie finie B_j de $A_n\times A_n$ telle que:

$$P_j(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\mu_1,\dots,\mu_{j-1})=\sum_{(\alpha,\delta)\in B_j}c_{\alpha.\delta}(\lambda)^\alpha(\mu)^\delta. \tag{1}$$

Bien sûr, si $(\alpha,\delta)\in B_j$, on a: $\alpha_{i_{a_j-1}+1}=\delta_{i_{a_j-1}+1}=\dots=\alpha_n=\delta_n=0$.

Soit U un voisinage ouvert relativement compact de l'origine de G, et $U^d=\{\lambda_1\cdot\lambda_2\dots\lambda_d;\ \lambda_i\in U\ (i=1,\dots,d)\}$. Il existe un entier $c>0$ tel que $0<\varliminf_{d\to\infty}d^{-c}|U^d|\leqq\varlimsup_{d\to\infty}d^{-c}|U^d|<\infty$, où $|U^d|$ désigne la mesure de Haar de U^d. Nous dirons que cet entier c, indépendant de U et bien sûr unique, est le degré de croissance polynomiale du groupe G. Il est égal à: $c=\sum_{j=1}^{n} a(j)$.

On pourra, pour avoir plus de précisions sur la croissance des groupes, et sur la formule précèdente, consulter [2].

Le but de ce qui suit est de prouver que le degré c de croissance polynomiale de G est un invariant de certains mouvements browniens du groupe G.

2. Mouvements browniens de G

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_r$, $Y (r+1)$ éléments de $\mathcal{G}$, et $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_r$, $\tilde{Y}$ les champs de vecteurs sur G invariants à gauche correspondants. Soit L l'opérateur elliptique (éventuellement dégénéré) défini sur G par $L=\frac{1}{2}\{\sum_{i=1}^{r} \tilde{X}_i^2\}+\tilde{Y}$. Nous appellerons mouvement brownien gauche associé à $X_1, X_2, \ldots, X_r$ et Y le processus de diffusion sur G ($\approx \mathbb{R}^n$) dont le générateur différentiel est L (cf. [4] pour une définition prècise).

Le but de cet alinéa est d'indiquer une formule simple permettant une construction explicite de tout mouvement brownien gauche sur G. Soit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ r mouvements browniens linéaires indépendants.

Si $X_i=\sum_{j=1}^{n} a_j^i e_j$ $(i=1, 2, \ldots, r)$ et $Y=\sum_{j=1}^{n} b_j e_j$, définissons le processus gaussien Z à valeurs dans $\mathcal{G}$ par:

$$Z_i(t)=\sum_{j=1}^{r} a_i^j \beta_j(t)+b_i \cdot t \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Le processus $Z_i(t)$ est pour tout $i=1, \ldots, n$, une quasi-martingale, c'est à dire la somme d'une martingale de carré intégrable et d'un processus croissant intégrable. Nous noterons $\langle Z_i, Z_j\rangle$ le produit scalaire des deux quasi-martingales Z_i et Z_j, i.e.:

$$\langle Z_i, Z_j\rangle(t)=\left(\sum_{l=1}^{r} a_i^l a_j^l\right) \cdot t.$$

Proposition 1. *Avec les notations précédentes, soit γ le mouvement brownien gauche associé à L. Alors γ est donné par la formule de récurrence suivante:*

$$\begin{aligned} &\gamma_1(t)=Z_1(t)\\ &\gamma_j(t)=Z_j(t)+\sum_{(\alpha,\delta)\in B_j} c_{\alpha,\delta} \int_0^t (\gamma(s))^\alpha \, dM_\delta(s) \qquad (j=2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{2}$$

où M_δ est défini par:

si $\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leqq 2$, alors $M_\delta=(Z)^\delta$ (où, dans le symbole $(Z)^\delta$, il convient de remplacer les expressions du type $Z_i \cdot Z_j$ par $\langle Z_i, Z_j\rangle$)

si $\sum_{i=1}^{n} \delta_i>2$, alors $M_\delta=0$.

Remarque. La formule (2) est effectivement une formule de récurrence puisque si $(\alpha, \delta)\in B_j$, alors $\alpha_{i_{a_j-1}+1}=\cdots=\alpha_n=0$. D'autre part, parler du mouvement brownien associé à L support l'unicité de celui-ci, qui n'existe bien sûr qu'à une équivalence près.

Démonstration. a) Soit T_i $(i=1, \ldots, r)$ le champ de vecteur sur G égal à la partie d'ordre 1 de l'opérateur $\tilde{X}_i^2$. Alors $\gamma(t)$ est égal à la solution de l'équation différentielle stochastique:

$$\gamma(t)=\sum_{i=1}^{r}\left\{\int_0^t \tilde{X}_i(\gamma_s)\,d\beta_i(s)+\frac{1}{2}\int_0^t T_i(\gamma_s)\,ds\right\}+\int_0^t \tilde{Y}(\gamma_s)\,ds. \tag{3}$$

Ceci résulte en effet de la formule d'Itô (cf. [4]).

b) Soit $\lambda\in\mathbb{R}^n$. Ecrivons le produit $\lambda\cdot X_i$ à l'aide d'une somme de monômes de Lie. On a, d'après la formule de Campbell-Hausdorff (cf. [1]):

$$\lambda\cdot X_i=\lambda+X_i+\tfrac{1}{2}[\lambda,X_i]+\tfrac{1}{12}[\lambda,[\lambda,X_i]]+\tfrac{1}{12}[X_i,[X_i,\lambda]]+\cdots. \tag{4}$$

Alors:

i) $\tilde{X}_i(\lambda)$ est égal à la somme des monômes de Lie figurant dans (4) pour lequels l'occurrence de la lettre X_i est égal à 1. En effet, cela résulte de: $\tilde{X}_i(\lambda)=\frac{d}{dt}\,\lambda\cdot tX_i|_{t=0}$.

ii) La $j^{\text{ième}}$ composante de $T_i(\lambda)$ est égale au double de la somme des $j^{\text{ième}}$ composantes des monômes de Lie figurant dans (4) pour lesquels l'occurrence de la lettre X_i est égale à 2. En effet, si $(T_i(\lambda))_j$ désigne la $j^{\text{ième}}$ composante de $T_i(\lambda)$ et si f_j: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est la $j^{\text{ième}}$ fonction coordonnée, on a:

$$(T_i(\lambda))_j=\tilde{X}^2 f_j(\lambda)=\frac{d^2}{dt^2}f_j(\lambda\cdot tX_i)|_{t=0}\qquad \text{(cf. (3), p. 96)}.$$

c) Prouvons maintenant le théorème. Ecrivons la $j^{\text{ième}}$ ligne de l'équation (3). On a:

$$\gamma_j(t)=\sum_{i=1}^{r}\left\{\int_0^t (\tilde{X}_i)_j(\gamma_s)\,d\beta_i(s)+\frac{1}{2}\int_0^t (T_i)_j(\gamma_s)\,ds\right\}+\int_0^t \tilde{Y}_j(\gamma_s)\,ds. \tag{3j}$$

En fait, l'équation (3j) est une définition de γ_j car le membre de droite de (3j) ne dépend que de $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{j-1}$. Il ne reste plus, pour prouver la proposition 1 qu'à calculer $\gamma_j(t)$ à l'aide de (3j) en utilisant comme valeurs de $\tilde{X}_i$, $\tilde{Y}$ celles calculées en *b*, i) et comme valeurs de T_i celles calculées en *b*, ii).

3. Croissance et mouvements browniens de G

A partir de maintenant, nous ne considèrerons plus que des mouvements browniens γ sur G n'ayant pas de termes de translation, c'est-à-dire tels que $Y=0$. Soit $\lambda\in G$. Disons que $\lambda\in\operatorname{supp}(\gamma)$ s'il existe un voisinage ouvert V de λ tel que la probabilité pour γ d'atteindre V soit strictement positive. On sait (voir [5]) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{supp}(\gamma)=G$ est que l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(X_1,X_2,\ldots,X_r)$ engendrée par $X_1,X_2,\ldots,X_r$ soit égale à $\mathscr{G}$. Notre but étant de caractériser le degré c de croissance polynomiale de G à l'aide des mouvements browniens de G, il est bien clair, dans ces conditions, que nous devons nous limiter aux mouvements browniens γ correspondants à des $X_1,\ldots,X_r$ tels que $\mathscr{L}(X_1,\ldots,X_r)=\mathscr{G}$.

Théorème. *Soit γ le mouvement brownien gauche sur G correspondant à $X_1,\ldots,X_r$, Y tels que:*

$$Y=0,\qquad \mathscr{L}(X_1,\ldots,X_r)=\mathscr{G}.$$

Alors

1. *Pour tout* $j=1,2,\ldots,n$, $E\{(\gamma_j(t))^2\}$ *est un polynôme en t de degré* $d(j)$,

2. $d(j)=a_j$, *si bien que* $\sum_{j=1}^n d(j)=c$, *où c est le degré de croissance polynomiale de G.*

Remarques 1. Le théorème n'est pas vrai si $Y \neq 0$, comme on le voit en considérant le «mouvement brownien» défini sur $\mathbb{R}$ par $\gamma(t)=\beta_t+t$.

2. D'après la proposition 1, γ_j est une quasi-martingale. Comme on le verra à la suite de la démonstration, si $A_j(t)$ désigne le processus croissant associé à $\gamma_j(t)$, alors $E(A_j(t))$ est également un polynôme en t de degré $d(j)$.

Démonstration. Nous allons procéder en plusieurs étapes:

a) *Mots en* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité sur lequel est défini r mouvements browniens linéaires indépendants $\beta_1, \ldots, \beta_r$, et $\mathcal{F}_t$ $(t \geqq 0)$ la σ-algèbre engendrée par $\beta_1(s), \ldots, \beta_r(s)$ $(s \leqq t)$. Les opérations suivantes sont définies sur l'espace des processus adaptés à la famille $\mathcal{F}_t$ $(t \geqq 0)$ et de carré intégrable.

$$O_1^i(M)(t)=\int_0^t M(s)\,d\beta_i(s) \qquad i=(1,2,\ldots,r),$$

$$O_2(M)(t)=\int_0^t M(s)\,ds,$$

$$O_3(M_1, M_2)(t)=(M_1, M_2)(t).$$

Nous appellerons mot en $\beta_1, \ldots, \beta_r$ (ou simplement mot) tout processus obtenu à partir des «mots élémentaires» $\beta_1, \ldots, \beta_r$ et d'une suite finie d'opérations choisies parmi O_1^i, O_2 et O_3.

Le degré d'un mot est calculé de la façon suivante; le degré des mots élémentaires $\beta_1, \ldots, \beta_r$ est égal à $\frac{1}{2}$ et: $\deg O_1^i(M)=\deg(M)+\frac{1}{2}$, $\deg O_2(M)=\deg(M)+1$, $\deg O_3(M_1, M_2)=\deg(M_1)+\deg(M_2)$.

Lemme 1. *Soit M un mot de degré d. Alors* $E\{M(t)\}=c_M\, t^d \cdot c_M$ *est nécessairement nul si d n'est pas entier. (Bien sur,* c_M *peut etre nul pour un mot de degré entier.)*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le degré de M, et on utilise la formule d'Itô pour calculer les mots M de la forme $M_1 \cdot M_2 \ldots M_k$, où chaque M_j apparaissant dans ce produit est égal à $O_1^i(M')$ ou à $O_2(M'')$. La première partie du théorème est ainsi démontrée puisque d'après la proposition 1, γ_j, et donc γ_j^2, est une combinaison linéaire de mots en $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$.

b) **Lemme 2.** *Pour tout j,* γ_j *est une combinaison linéaire de mots dont le degré n'excède pas* $\frac{1}{2}\, a_j$.

Nous raisonnons par récurrence sur j. Supposons la propriété annoncée dans le lemme vraie jusqu'à l'ordre $j-1$. On a, d'après (2):

$$\gamma_j(t)=Z_j(t)+\sum_{(\alpha,\delta)\,B_j} c_{\alpha,\delta}\int_0^t (\gamma(s))^\alpha\, dM_\delta(s).$$

Si $(\alpha, \delta) \in B_j$, on a, du fait que $[\mathcal{G}_p, \mathcal{G}_q] \subset \mathcal{G}_{p+q}$ $(p, q \geqq 0)$

$$\sum_{l=1}^{i_{a_j-1}} a_l \cdot \alpha_l + \sum_{l=1}^{i_{a_j-1}} a_l \cdot \delta_l \leqq a_j. \tag{5}$$

Distinguons deux cas:

1. $\sum_{l=1}^{i_{a_j-1}} \delta_l = 1$, et donc, d'après (5) $\sum_{l=1}^{i_{a_j-1}} a_l \cdot \alpha_l \leqq a_j - 1$. (6)

D'après la définition de M_δ, on a:

$$\begin{aligned} \deg\left(\int (\gamma(s))^\alpha \, dM_\delta(s)\right) &= \deg(\gamma)^\alpha + \tfrac{1}{2} \\ &= \sum_{l=1}^{i_{a_j-1}} \alpha_l \cdot (\deg \gamma_l) + \tfrac{1}{2} \\ &\leqq \frac{1}{2}\left\{\sum_{l=1}^{i_{a_j-1}} a_l \cdot \alpha_l\right\} + \tfrac{1}{2} \quad \text{(par récurrence)} \\ &\leqq \tfrac{1}{2} a_j \quad \text{d'après (6).} \end{aligned}$$

2. $\sum_{l=1}^{i_{a_j-1}} \delta_l = 2$. On a, d'après (5):

$$\sum_{l=1}^{i_{a_j-1}} a_l \cdot \alpha_l \leqq a_j - 2. \tag{7}$$

D'autre part, d'après la définition de M_δ:

$$\begin{aligned} \deg\left(\int (\gamma(s))^\alpha \, dM_\delta(s)\right) &= \deg(\gamma)^\alpha + 1 \\ &= \sum_{l=1}^{i_{a_j-1}} \alpha_l \cdot \deg(\gamma_l) + 1 \\ &\leqq \frac{1}{2}\left\{\sum_{l=1}^{i_{a_j-1}} a_l \cdot \alpha_l\right\} + 1 \quad \text{(par récurrence)} \\ &\leqq \tfrac{1}{2} a_j \quad \text{d'après (7).} \end{aligned}$$

Le lemme 2 est ainsi prouvé puisque M_δ est nul dans les autres cas.

c) **Lemme 3.** *Dans γ_j, la somme des mots de degré $\frac{1}{2} a_j$ n'est pas nulle.*

Démonstration. Soit V_1 l'espace vectoriel engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_{i_1}$ et $\pi: \mathcal{G} \to V_1$ la projection sur V_1 parallèle à $\bigoplus_{k=2}^{p} V_k$. Soient $\bar{X}_i = \pi(X_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ et $\bar{\gamma}$ le mouvement brownien associé à $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_r$. Remarquons que:

$$\mathcal{L}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_r) = \mathcal{L}(X_1, X_2, \ldots, X_r) = \mathcal{G} \qquad \text{(cf. [1], exercice § 4,4, p. 119).}$$

La somme des mots de degré $\frac{1}{2} a_j$ dans γ_j est égale à $\bar{\gamma}_j$ (d'après la prop. 1). Le lemme en résulte alors, puisque $\bar{\gamma}_j$ n'est pas nul, le support de $\bar{\gamma}$ étant égal à G.

Le théorème s'en déduit alors sans peine: $E\{(\gamma_j(t))^2\}$ est un polynome en t d'après le lemme 1, de degré inferieur ou égal à a_j d'après le lemme 2, et de degré exactement égal à a_j d'après le lemme 3.

Il reste à prouver la remarque 2 qui suit l'énoncé du théorème. Notons $A_j(t)$ le processus croissant associé à $\gamma_j(t)$ (γ_j est somme d'une martingale γ_j^1 et d'un processus à variation bornée; A_j est tel que $(\gamma_j^1)^2 - A_j$ soit une martingale). En fait, il reste à prouver que dans γ_j^1 la somme des mots de degré $\frac{1}{2} a_j$ n'est pas nulle.

Par un argument de passage au quotient, on peut supposer que:

$$V_{a_j} \text{ est de dimension 1, égal à } (e_j),$$

$$V_{a_j+1} = V_{a_j+2} = \cdots = 0.$$

Avec les notations du lemme 3, la somme S_j des mots de degré $\frac{1}{2} a_j$ dans γ_j^1 est égale à $\bar{\gamma}_j^1$. Si donc S_i était nulle, on aurait, d'après 3j:

$$(\tilde{\bar{X}}_1(\lambda))_j = (\tilde{\bar{X}}_2(\lambda))_j = \cdots = (\tilde{\bar{X}}_r(\lambda))_j = 0$$

pour tout $\lambda \in V = \bigoplus_{k=1}^{a_j-1} V_k$. Dans ces conditions, les champs $\tilde{\bar{X}}_1, \tilde{\bar{X}}_2, \ldots, \tilde{\bar{X}}_r$ seraient tangents à V en tout point de V. Cela impliquerait que l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r)$ est incluse dans V, ce qui est absurde, puisque $\mathscr{L}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r) = \mathscr{G}$.

Bibliographie

1. Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie. Chap. 1, 2 et 3. Paris: Hermann 1960
2. Guivarc'h, Y.: Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. Bull. Soc. Math. France **101**, 333–379 (1973)
3. Helgason, S.: Differential Geometry and Symmetric spaces. New York: Academic Press 1962
4. Priouret, P.: Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour III. Lecture Notes in Mathematics **390**, 38–113. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
5. Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: On the support of diffusion process with application to the strong maximum principle. Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. **3**, Univ. Calif. 1970

B. Roynette
Université de Nancy I
UER de Sciences Mathématiques
Bd. des Aiguillettes
Case officielle 140
F-54037 Nancy Cédex
France

(Reçu le décembre 15, 1974)