Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 32, 95 – 110 (1975)

Sur les processus de diffusion de dimension 2

B. Roynette

Hypothèses et Introduction

1. Soit L un opérateur elliptique sur $\mathbb{R}^2$ qui s'écrit: $L=\frac{1}{2}[X_1^2+X_2^2]$, où X_1 et X_2 sont deux champs de vecteurs de classe C^∞ dont les coefficients, ainsi que leurs dérivées premières et secondes sont bornées. L s'écrit encore:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{2} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Si

$$X_i=\sum_{j=1}^{2}\sigma_j^i(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\qquad (i=1,2)$$

la matrice a s'écrit $\sigma\cdot\sigma^*$. D'autre part,

$$b_k(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\sigma_j^i\frac{\partial\sigma_k^i}{\partial x_j}.$$

Nous appellerons L^* l'opérateur adjoint de L défini par:

$$L^* u=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}(a_{ij}\,u)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\,u)$$

(u de classe C^2). Remarquons que la matrice σ peut être dégénérée, c'est-à-dire que nous supposons seulement:

$$0\leqq\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\,\theta_i\,\theta_j\leqq A\,|\theta|^2\qquad\text{pour tout }\theta\in\mathbb{R}^2.$$

2. Soit $\Omega=\mathscr{C}\{[0,\infty[\to\mathbb{R}^2\}$ l'espace des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathscr{F}_t$ la tribu engendrée par les coordonnées $X_S(0\leqq s\leqq t)$, et $\mathscr{F}=\bigvee_{t\geqq 0}\mathscr{F}_t$. Il est prouvé dans [2, § 1] qu'il existe, pour tout x de $\mathbb{R}^2$, une probabilité P_x et une seule sur $(\Omega,\mathscr{F})$ telle que $(\Omega,\mathscr{F}_t,\mathscr{F},X_t,P_x)$ est un processus de Markov, $P_t f(x)=f(x)+\int_0^t P_u\,Lf(x)\,du$, pour toute f de classe C^∞ nulle à l'infini, et où P_t est le semi-groupe associé à ce processus. Nous noterons G_t (resp. G) la complétée pour toutes les probabilités, P_v de la tribu $\mathscr{F}_t$ (resp. $\mathscr{F}$). C'est le processus (Ω,G_t,G,X_t,P_x) fortement markovien, que nous appelerons la diffusion associée à L.

3. Soit $\mathscr{L}(X_1,X_2)$ l'algèbre de Lie engendrée par les champs X_1 et X_2. Il est bien connu ([3]), lorsque la dimension de $\mathscr{L}(X_1,X_2)$ est égale à 2 en tout point, que L et le processus associé possèdent de «bonnes propriétés»:

α) principe du maximum dans tout ouvert connexe [3],

β) résolvantes fortement fëllériennes, fonctions excessives semi-continues inférieurement,

γ) dualité du processus, par rapport à la mesure de Lebesgue, au sens de [1, p. 196], avec un autre processus de diffusion [2, § 4].

Soit Γ l'ensemble des points où le rang de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ est strictement plus petit que 2. Nous allons voir ici (§ 1) que l'hypothèses $\Gamma = \emptyset$ peut être fortement affaiblie sans que L et le processus perdent leurs qualités essentielles. Cette hypothèse affaiblie, de plus, est nécessaire pour que le processus aît ces qualités. Ensuite, nous nous intéressons aux propriétés probabilistes du processus (comportement des fonctions excessives, fonctionnelles additives, ensembles semi-polaires) lorsque celui-ci a ces «bonnes propriétés». Enfin, nous montrons que, lorsque les coefficients des champs sont analytiques, la propriété $\Gamma = \emptyset$ est alors nécessaire pour que le processus satisfasse à α, β, γ.

4. Dans le paragraphe 2, sous les seules hypothèses de l'alinéa 1), nous donnons des propriétés des fonctionnelles additives et des ensembles semi-polaires:

Toute fonctionnelle additive a presque sûrement un seul saut.

Tout ensemble semi-polaire est effilé.

Nous donnons des exemples prouvant que ces propriétés ne sauraient être améliorées.

1. Quelques Équivalences

On suppose ici que $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} X_i^2$, où les champs X_i sont de classe C^∞, à coefficients bornés, ainsi que leurs deux premières dérivées. Nous appellerons $\Gamma = \{x$; le rang de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ engendrée par X_1 et X_2 est strictement plus petit que 2 au point $x\}$.

Rappelons quelques propriétés et définitions. 1. a) Lorsque l'un des vecteurs, par exemple X_1; est non nul en un point x_0, il est possible, dans un voisinage ouvert V de x_0, grâce à un difféomorphisme ϕ de classe C^∞, de transformer le champ X_1 en $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$. Le processus $\phi(X_t)$ est, dans l'ouvert $\phi(V)$ le processus de diffusion associé à $L' = \frac{1}{2}(X_1'^2 + C_2'^2)$, où $X_1' = d\phi \cdot X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $X_2' = d\phi \cdot X_2$, $d\phi$ étant la différentielle de ϕ. Nous aurons l'occasion de faire souvent cette transformation. D'autre part, cette remarque permet de voir que Γ est fermé. Soit en effet $x_0 \in \Gamma^c$. Il existe un vecteur, par exemple X_1, tel que $X_1(x_0) \neq 0$. Nous pouvons supposer alors, dans un voisinage U de x_0, que:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_2 = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y},$$

et il est facile de voir, en calculant les crochets de Lie successifs $[X_1, X_2]$, $[X_1[X_1, X_2]]$, etc., que:

$$U \cap \Gamma^c = \bigcup_{p \geqq 0} \left\{ \frac{\partial \beta^p}{\partial x^p} \neq 0 \right\}.$$

1. b) Nous savons que l'opérateur L^* s'écrit:

$$L^* u = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i^*(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c^*(x) \cdot u$$

où les vecteurs $b_i^*(x)$ sont lipschitziens et où la fonction $c^*(x)$ est bornée. Il existe donc $\lambda \geqq 0$ tel que $c^*(x) - \lambda \leqq \lambda_0 < 0$.

Soit $\{\Omega, G_t, G, X_t, P_x'\}$ la diffusion associée à l'opérateur L' défini par

$$L' u = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} b_i^*(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Considérons le processus tué par la fonctionnelle multiplicative $\exp \int_0^t (c^*(X_s) - \lambda)\, ds$. Soit $\Omega' = \{\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathscr{F}_t^* \; X_t^* \; Q_x^*\}$ ce nouveau processus, et soit $\{U^{*\mu}, \mu \geqq 0\}$ sa résolvante. De même, soit $\{\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathscr{F}_t', X_t' \, Q_x\}$ le processus obtenu en tuant la diffusion associée à L par la fonctionnelle $e^{-\lambda t}$. Soit $\{U^\mu, \mu \geqq 0\}$ la résolvante de ce processus. Nous savons ([2, th. IV, 1]) que $\langle U^\mu f, g\rangle_m = \langle f, U^{*\mu} g\rangle_m$, pour toutes f, g boréliennes bornées et $\mu \geqq 0$ (m est ici la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$).

1. c) Nous dirons, suivant [1, p. 196] que la mesure de Lebesgue m est mesure de référence si, pour tout x, et tout $\mu \geqq 0$, les mesures $U^\mu(x,.)$ sont absolument continues par rapport à m.

1. d) Nous aurons à utiliser le résultat suivant, qui se trouve dans [2]:

Il existe un espace de probabilité $(\Pi, \mathscr{A}, P)$, β un mouvement brownien de dimension 2, définie sur cet espace et des variables aléatoires Y_t^x définies sur Π telles que:

$$Y_t^x = x + \int_0^t \sigma(Y_s^x)\, d\beta_s + \int_0^t b(Y_s^x)\, ds, \qquad P \text{ p.s.}$$

De plus; si h^x est l'application de Π dans $\mathscr{C}\{[0, \infty[\to \mathbb{R}^2\}$ définie par $X_t(h^x(\omega)) = Y_t^x(\omega)$ et si P_x est l'image de P par h^x, alors:

$\{\mathscr{C}\{[0, \infty[\to \mathbb{R}^2\}, X_t, P_x\}$ est la diffusion associée à L.

1. e) Nous dirons que l'opérateur L satisfait au principe du maximum dans un ouvert connexe $\mathcal{O}$, si, pour toute fonction u de classe C^2 dans $\mathcal{O}$, les relations:

α) $Lu \geqq 0$ dans $\mathcal{O}$,

β) u atteint un maximum positif en x appartenant à $\mathcal{O}$, impliquent que u est constante dans $\mathcal{O}$.

Théorème 1. *Les propositions suivantes sont équivalentes*[1]*;*

A_1) *Toutes les fonctions excessives sont semi-continues inférieurement.*

A_2) *La mesure de Lebesgue, m, est mesure de référence.*

A_3) *Γ n'a pas de point finement intérieur.*

De plus l'une des hypothèses $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ *implique:*

A_4) *L satisfait au principe du maximum dans tout ouvert connexe.*

Si L n'est pas complétement dégénérée (i.e.: il n'existe pas de point x_0 tel que $X_1(x_0) = X_2(x_0) = 0$), alors A_4 *est équivalent à* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$.

[1] Cf. remarque 1, fin de la démonstration.

Démonstration. A_1 *implique* A_2: Soit E un borélien tel que $m(E)=0$. D'après 1.b, on sait que $\int m(dx)\, U^\lambda 1_E(x)=0$, et donc que la fonction $U^\lambda 1_E$ est m-presque partout nulle. Etant s.c.i. elle est nulle.

A_2 *implique* A_3: Raisonnons par l'absurde, et supposons que Γ ait un point x_0 finement intérieur. Le rang des vecteurs (X_1, X_2) au point x_0, soit $r(X_1, X_2)(x_0)$ vaut 0 ou 1.

Si $r(X_1, X_2)(x_0)=0$ alors le point x_0 est absorbant ([2], § 1) et m ne saurait être mesure de référence puisque $U^\lambda 1_{\{x_0\}}(x_0)=1/\lambda$.

Si $r(X_1, X_2)(x_0)=1$, d'après 1. a, on peut supposer que l'un des champs, soit par exemple X_1, s'écrit $\frac{\partial}{\partial x_1}$ dans un voisinage V de x_0, et supposons que $X_2=\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}$.

D'après le rappel de l'introduction 1.d, il existe un mouvement brownien $\beta=(\beta^1, \beta^2)$ tel que:

$$X_t^1=\beta_t^1+\int_0^t \alpha(X_s)\, d\beta_s^2+\frac{1}{2}\int_0^t (\alpha\alpha'_x+\beta\alpha'_y)(X_s)\, ds,$$

$$X_t^2=\int_0^t \beta(X_s)\, d\beta_s^2+\frac{1}{2}\int_0^t (\alpha\beta'_x+\beta\beta'_y)(X_s)\, ds.$$

Puisque x_0 est finement intérieur à Γ, τ, le temps de sortie de Γ est P_{x_0} p.s. positif. Soit $\tau'=\tau\wedge\sigma_V$, où σ_V est le temps de sortie de V. L'algèbre de Lie devant être de rang 1, on a $\beta(X^1_{s\wedge\tau'}, X^2_{s\wedge\tau'})=0$ P_{x_0} p.s. et $\beta'_x(X^1_{s\wedge\tau'}, X^2_{s\wedge\tau'})=0$ P_{x_0} p.s. d'où, en substituant dans les équations stochastiques précédentes $X^2_{s\wedge\tau'}=0$ P_{x_0} p.s. et donc $U^\lambda 1_\gamma(x_0)>0$, si γ est l'intersection de V avec la droite $\{x=x_0\}$, ce qui contredit A_2, puisque $m(\gamma)=0$.

A_3 *implique* A_1: Pour prouver A_1, il suffit de voir que $U^\lambda f$ est s.c.i. pour toute f borélienne bornée positive, et tout $\lambda>0$. Soit donc une telle $U^\lambda f$.

a) Tout d'abord, remarquons que $U^\lambda f$ est s.c.i. sur l'ouvert Γ^c. En effet, soit $x\in\Gamma^c$, $B(x,r)$ une boule ouverte incluse dans Γ^c. Modifions les coefficients de la diffusion en dehors de $B(x,r)$ de façon que la nouvelle diffusion (dont les éléments seront notés avec des primes) soit telle que $\Gamma'=0$. Dans ces conditions, cette diffusion est fortement fellérienne [2, § 5] et donc toute fonction excessive pour cette dernière est s.c.i. Or, il est clair que les topologies fines de ces deux diffusions coïncident sur $B(x,r)$; cela résulte de techniques de recollement (voir par exemple [8]):

Soit x appartenant à un ouvert U, et L^1 et L^2 deux opérateurs elliptiques tels que les coefficients de L^1 et L^2 coïncident sur U. Soient P_x^1 (resp. P_x^2) la probabilité, sur $\Omega=\mathscr{C}\{[0,\infty[\to\mathbb{R}^2\}$, au point x de la diffusion associée à L^1 (resp. L^2). Alors, les probabilités P_x^1 et P_x^2 coïncident sur la tribu $\mathscr{F}_\tau$ des évènements antérieurs à τ, où τ est le temps de sortie de U, ce qui prouve que $U^\lambda f(x)$ est s.c.i. sur Γ^c.

b) Soit maintenant une suite de boules fermées $0_1, 0_2, \ldots, 0_n, \ldots$ telles que $\bigcup_{n=1}^\infty 0_n=\Gamma^c$ et appelons $G_p=\bigcup_{n=1}^p 0_n$. L'ouvert G_p^c est un ouvert à frontière compacte dont tout point est fortement régulier, au sens suivant:

Si $x_0 \in \partial G_p^c$, pour tout $u>0$, tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage $V(x_0)$ tel que, si $x \in V(x_0) \cap G_p^c$, $P_x[\tau_p > u] < \varepsilon$, où τ_p désigne le temps de sortie de G_p^c. Cette propriété résulte des remarques suivantes:

Il suffit de prouver cette propriété pour $p=1$.

S'il existe en x_0 un vecteur parmi les X_i transverse à $\partial 0_1$, cela est évident ([2, th. IV, 3]).

Si les vecteurs X_1 et X_2 sont tangents à $\partial 0_1$ en x_0, et si pour tout voisinage V de x_0 sur $\partial 0_1$, il existe un point $y \in V$ tel que l'un des champs, X_1 ou X_2, n'est pas tangent à $\partial 0_1$ en y, alors cela résulte de la démonstration du théorème IV, 3, dans [2].

Si les vecteurs X_1 et X_2 sont tangents à $\partial 0_1$ dans un voisinage de x_0, alors, il en est de même de tout champ de l'algèbre de Lie engendrée par X_1 et X_2, et donc $r(\mathscr{L}(X_1, X_2))(x_0) < 2$, ce qui est absurde puisque $x_0 \in \Gamma^c$.

De cette remarque, on déduit que, si f est une fonction continue (resp. s.c.i.) positive définie sur ∂G_p^c, la fonction $E_x[e^{-\lambda\tau_p} f(X_{\tau_p})]$ est continue (resp. s.c.i.) sur G_p^c (voir par ex. [2, th. IV, 2]). D'autre part, on a, pour $y_0 \in \Gamma$:

$$U^\lambda f(y_0) = E_{y_0}\left[\int_0^{\tau_p} e^{-\lambda s} f(X_s)\, ds\right] + E_{y_0}[e^{-\lambda\tau_p}\, U^\lambda f(X_{\tau_p})].$$

Choisissons $\varepsilon>0$, et posons $U^\lambda f(y_0) = a$. Puisque $\tau_p \underset{p\to\infty}{\searrow} 0$ P_x p.s. d'après A_3, on peut trouver p_0 tel que

$$E_{y_0}\left[\int_0^{\tau_{p_0}} e^{-\lambda s} f(X_s)\, ds\right] \leqq \varepsilon/2.$$

Cela implique $E_{\lambda_0}[e^{-\lambda\tau_{p_0}}\, U^\lambda f(X_{\tau_{p_0}})] \geqq a - \dfrac{\varepsilon}{2}$, et donc il existe un voisinage V de y_0, tel que pour tout $y \in V$:

$$U^\lambda f(y) = E_y \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(X_s)\, ds \geqq E_y[e^{-\lambda\tau_{p_0}}\, U^\lambda f(X_{\tau_{p_0}})] \geqq a - \varepsilon/2,$$

puisque $U^\lambda f$ est s.c.i. sur Γ^c.

A_1, A_2, A_3 *impliquent* A_4: Nous allons avoir besoin de la définition suivante, prise dans Bony [3]. Ici, Ω est un ouvert connexe.

Définition 1. Soit F un fermé de Ω. Nous dirons qu'un vecteur n est normal à F en x_0 ($x_0 \in F$), s'il existe une boule ouverte, contenue dans $\Omega - F$, centrée en x_1, telle que x_0 soit adhérent à cette boule et que les vecteurs $x_1 - x_0$ et n soient parallèles. Un champ de vecteurs $X(x)$ est tangent à F au point x_0, si, pour tout vecteur n normal à F en x_0, les vecteurs $X(x_0)$ et n sont orthogonaux. Nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme 1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soit F un fermé de $\mathbb{R}^2$. Nous dirons que F est absorbant pour le processus si pour tout $x \in F \cap \Omega$, $P_x[\sigma_F < \sigma_\Omega] = 0$ où σ_Ω* (resp. σ_F) *est le temps de sortie de Ω* (resp. F). *Cela étant, pour que F soit absorbant dans Ω, il faut et il suffit que chaque champ X_1 et X_2 soit tangent à F en tout point de $F \cap \Omega$.*

Démonstration. 1. La partie nécessaire de ce lemme est facile à prouver. Montrons la par l'absurde, et supposons qu'il existe un point $x_0 \in F \cap \Omega$, une boule B_1

ouverte de centre x_1, telle que $B_1 \subset F^c$, x_0 adhérent à B_1 et l'un des X_i, par exemple X_1, n'est pas perpendiculaire en x_0 à $x_0 - x_1$. Par difféomorphisme local, nous pouvons nous ramener à la situation suivante: il existe une droite D telle que F soit contenu dans un demi-espace déterminé par D et telle que $D \cap F = \{x_0\}$. Alors, la projection du mouvement sur la perpendiculaire à D en x_0 est la somme d'un mouvement brownien changé de temps et d'un processus croissant, de densité bornée par rapport au temps, et pénètre donc immédiatement dans le demi-espace déterminé par D et disjoint de F.

2. La réciproque, beaucoup plus profonde et difficile, est la conséquence du résultat suivant, dû à Strook et Varadhan [7]:

Considérons l'espace $\mathscr{C} = \mathscr{C}\{[0, \infty[\to \mathbb{R}^2\}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Soit Π_x l'ensemble des fonctions Φ appartenant à $\mathscr{C}$ telles qu'il existe une fonction ψ, constante par morceaux (ψ: $[0, \infty[\to \mathbb{R}^2$) et telles que:

$$\Phi(t) = x + \int_0^t \sigma(\Phi(u))\, \psi(u)\, du.$$

Alors le support de la mesure P_x est égal à la fermeture de Π_x dans Ω. Le lemme en résulte facilement si on utilise le résultat suivant, dû à Bony [3, th. 2.2]: «Si les champs de classe C^∞, X_1 et X_2, sont tangents à F en tout point, alors toute courbe intégrale de $Z \in \mathscr{L}(X_1, X_2)$ qui remontre F en un point est entièrement contenue dans F» et si on remarque, en vertu de ce résultat que les relations:

$$\Phi \in \Pi_x, \quad \Phi(t) \in \Omega \quad \text{pour tout} \quad 0 \leqq t \leqq t_0$$

impliquent

$$\Phi(t) \in F \quad \text{pour tout} \quad 0 \leqq t \leqq t_0,$$

puisque les éléments de Π_x sont tangents en tout point à un élément de $\mathscr{L}(X_1, X_2)$.

Démonstration de A_3 *implique* A_4. a) Soit u une fonction de classe C^2 dans Ω, ouvert connexe, telle que $Lu \geqq 0$, et u atteint un maximum local positif en x_0. Alors, d'après [3, prop. 3.1], le fermé H, ensemble des points où u atteint son maximum, est tel que chaque X_i lui soit tangent.

C'est donc un fermé absorbant. Il nous suffit donc de prouver que le plus petit fermé absorbant dans Ω est Ω tout entier.

b) Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi, et soit F un fermé absorbant dans Ω différent de Ω écrivons:

$$\Omega = \mathcal{O}_1 \cup \partial F \cup \mathcal{O}_2 \qquad \text{où: } \mathcal{O}_2 \text{ est le complémentaire de } F \text{ (dans } \Omega).$$

$$F = \mathcal{O}_1 \cup \partial F \qquad \text{où: } \mathcal{O}_1 \text{ est l'intérieur de } F \text{ (dans } \Omega).$$

Soit $0_2 \in \mathcal{O}_2$, et B_1 une boule ouverte incluse dans $\mathcal{O}_1$ (si une telle boule n'existe pas, la démonstration, comme il va apparaître par la suite, est plus facile).

Alors: $P_{0_2}[\tau_{B_1} < \infty] = 0$ (où τ_{B_1} est le temps d'entrée dans B_1).

S'il n'en était pas ainsi, il existerait d'après [7] un élément de Π_{0_2}, soit Φ tel que pour un t_0, on ait $\Phi(t_0) = 0_1, 0_1 \in B_1$. Mais c'est que Φ appartient au support de Π_{0_1}, et qu'il existe une boule $B_2, B_2 \subset \mathcal{O}_2$, telle que $P_{0_1}[\tau_{B_2} < \infty] > 0$, ce qui est absurde.

c) Prouvons que les champs X_1 et X_2 sont tangents en tout point de ∂F à $\partial F \cup \mathcal{O}_2$. Sinon, il existerait $x \in \partial F$, B_1 boule ouverte incluse dans 0_1, de centre x_1, telle que par exemple, $x_1 - x$ soit non perpendiculaire à $X_1(x)$ et telle que $x \in \partial B_1$. Mais alors, d'après la démonstration du 1) du lemme 1: $E_x[e^{-\tau_{B_1}}] = 1$. D'autre part, on peut toujours choisir B_1 suffisamment petite pour que ∂B_1 soit fortement régulière. Alors, la fonction $E_x[e^{-\tau_{B_1}}]$ est continue sur B_1^c, et est donc positive en des points de $\mathcal{O}_2$, puisque x est adherent à $\mathcal{O}_2$. Cela est absurde d'après b).

d) Prouvons que $\partial F \subset \Gamma$, en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe y, $y \in \partial F$, tel que le rang de (X_1, X_2) soit 2 en y. Alors ce rang est 2 dans une boule B ouverte contenant y: alors, $P_y[\tau_C < \infty] > 0$, où C est une boule ouverte incluse dans B [pour voir cela, on peut remarquer par exemple que la fonction $v(x) = E_x[e^{-\tau_C}]$, qui satisfait à $Lv = 0$, ne saurait s'annuler en un point sans être nulle sur $B - C$ (principe du maximum), alors, que, $\lim_{x \to x_0} E_x(e^{-\tau_C}) = 1$ si $x_0 \in \partial c$]. Or, d'après c), $\partial F \cup \mathcal{O}_2$ est absorbant. Donc ∂F est absorbant. On en déduit que $\partial F \supset B$, ce qui est absurde puisque ∂F n'a pas de point intérieur.

e) Il reste alors à remarquer que $\partial F \subset \Gamma$, ∂F absorbant impliquent que Γ possède un point finement intérieur.

Prouvons que A_4 *implique* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ (*si L n'est pas totalement dégénéré*). Nous allons prouver que (non A_3) implique (non A_4). Supposons donc que Γ ait un point finement intérieur x_0. Puisqu'il n'existe pas de point absorbant, et d'après la démonstration de A_2 implique A_3, on peut se ramener à la situation suivante: On suppose $x_0 = (0, 0)$. Il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_2 = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{avec } b(x, 0) = 0 \text{ pour } |x| \leqq \alpha.$$

Soit B la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon $\alpha/4$. Soient M_1 et M_2 les points d'intersections de ∂B avec l'axe des x. Soit Φ une fonction de classe C^2 définie sur ∂B telle que: $\Phi \geqq 0$, Φ atteint son maximum, soit A, en M_1 et M_2; $\Phi < A$, en tout point de $B - M_1 - M_2$.

Dans ces conditions, soit $u(x) = E_x[\Phi(X\,\sigma_B)]$ (σ_B, temps de sortie de B, tel que $\sigma_B < +\infty$ presque sûrement).

u est de classe C^2 à l'intérieur de B satisfait à $Lu = 0$.

$u(x, 0) = A$ pour tout x tel que $|x| \leqq \alpha/4$.

D'après Pinsky [5], $X\sigma_B \in \partial B - M_1 - M_2\, P_x$ p.s., pour tout x de l'intérieur de B qui n'appartient pas à l'axe des x. Donc: $E_x[\phi(X\sigma_B)] < A$ en tout point de l'intérieur de B qui n'est pas sur l'axe des x. Ainsi, le principe du maximum n'est pas vérifié.

Remarque 1. Donnons les définitions suivantes:

Nous dirons que l'hypothèse D_0 est réalisée s'il existe un point x_0 de $\mathbb{R}^2$ tel que $X_1(x_0) = X_2(x_0) = 0$.

Nous dirons que l'hypothèse D_1 est réalisée s'il existe une sous-variété γ de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1 telle que les champs X_1 et X_2 soient tangents à γ en tout point de γ.

Avec ces définitions, et les techniques de la démonstration précédente il n'est pas difficile de voir que les conditions A_1, A_2, A_3 sont équivalentes à la condition complétement analytique suivante:

A) Ni D_0 ni D_1 ne sont réalisées.

Remarque 2. On peut voir que l'hypothèse A_3 est équivalente à l'hypothèse suivante: A'_3: Tout point de Γ est finement adhérent à V, où V est l'ensemble des points où le rang des vecteurs (X_1, X_2) est égal à 2.

$A_3 \Rightarrow A'_3$. Supposons qu'il existe $x_0 \in \Gamma$, x_0 non finement adhérent à V. De deux choses l'une:

Ou $r(X_1, X_2)(x_0)=0$, et cela est absurde, car x_0, absorbant, est ouvert fin.

Ou $r(X_1, X_2)(x_0)=1$, et il existe alors une variété intégrale de l'un des champs, soit V, tel que, partant de x_0, le processus commence par séjourner dans V. Mais cela est absurde, car sur V, dans un voisinage de x_0, $L(X_1, X_2)$ est de rang 1.

D'autre part, un raisonnement du même genre que le précédent permet d'obtenir facilement que $A'_3 \Rightarrow A_3$.

Remarquons que la démonstration. $A'_3 \Rightarrow A_1$ est plus simple que $A_3 \Rightarrow A_1$, car il est alors évident ([2] th. IV 3, a) que les boules 0_i telles que $\bigcup_{i=1}^{\infty} 0_i = U$ sont fortement régulières (le champ étant de rang 2 en tout point de $\partial 0_i$).

Remarque 3. L'hypothèse A_0: «Γ est de potentiel nul» implique facilement A_3. Mais on peut voir sur un exemple que la réciproque est fausse.

Exemple. Soit K un compact de $[0\ 1]$ tel que: K est sans point intérieur, de mesure de Lebesgue positive.

Soit ϕ une fonction de classe C^∞, bornée, définie sur $]-\infty, +\infty[$ telle que:

ϕ ainsi que toutes ses dérivées sont nulles sur K.

ϕ est strictement positive sur $\mathbb{R}-K$.

Considérons alors dans $\mathbb{R}^2$ le processus associé à $L = X_1^2 + X_2^2$ où

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \phi(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Il est clair ici que $\Gamma = K \times \mathbb{R}$, $U^\lambda 1_\Gamma(x) > 0$ pour tout x, et que cependant Γ n'a pas de point finement intérieur.

On voit de plus sur cet exemple que Γ peut être très «grand», c'est-à-dire que pour tout compact C et tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un processus dont l'ensemble des points de dégénérescence de l'algèbre de Lie, Γ_ε, soit tel que $m(C - \Gamma_\varepsilon) \leqq \varepsilon$, et qui cependant a de très «bonnes propriétés» $(A_1, \ldots, A_4)$.

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés probabilistes de la classe des processus décrite par le théorème 1.

Théorème 2. *Sous l'une des hypothèses* A_1, A_2, A_3 *ou* A_4, *le processus associé* L *est tel que:*

a) *Les fonctions excessives sont presque sûrement continues sur les trajectoires.*

b) *Les fonctionelles additives sont presque sûrement continues.*

c) *Tout ensemble presque borélien semi-polaire est polaire.*

La démonstration repose essentiellement sur le lemme suivant, indépendant des hypothèses A_1, A_2, A_3 ou A_4.

Lemme 2. *Soit T un temps d'arrêt terminal* (i.e.: $T=t+T\circ\theta_t$ *sur* $T>t$), *effilé* (*i.e.*: $P_x[T>0]=1$ *pour tout* x).

Soit $0_T=\{x, E_x(e^{-T})>0\}$. *Alors* $m(0_T)=0$.

La démonstration du lemme 2 repose sur le lemme suivant, indépendant lui aussi des hypothèses A_1, A_2, A_3 et A_4.

Lemme 3. *Les probabilités* P_m *et* Q_m^* *sont équivalentes sur les tribus* $\mathscr{F}_t$, *pour tout* $t\geqq 0$ (*avec les notations des* 1.b) $\left(P_m=\int m(dx)\,P_x,\ Q_m^*=\int m(dx)\,Q_x^*\right)$.

Démonstration. Il suffit pour prouver ce lemme de montrer que P_m et P_m' sont équivalentes, puisque on passe du processus $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \mathscr{F}, X_t, P_x'\}$ au processus $\{\Omega\times\mathbb{R}^+, \mathscr{F}_t^*, X_t^*, Q_x^*\}$ en tuant par une fonctionelle multiplicative à densité bornée.

Nous allons en fait prouver que les probabilités P_x et P_x' sont, pour tout x de $\mathbb{R}^2$, équivalentes sur $\mathscr{F}_t$ $(t\geqq 0)$. Notons que cela prouvera en particulier que les topologies fines et cofines sont les mêmes.

Soit donc $x\in\mathbb{R}^2$. Deux cas sont à envisager:

1. $X_1(x)=X_2(x)=0$. Alors le point x est P_x absorbant. Mais, en calculant les coefficients de L', qui s'annulent alors tous en x, il est clair que x est aussi P_x' absorbant, et P_x et P_x' sont donc équivalentes.

2. Supposons que l'un des champs, par exemple X_1, soit tel que $X_1(x)\neq 0$. On peut alors se ramener localement à la situation suivante:

$$\left.\begin{aligned} X_1&=\frac{\partial}{\partial x}\\ X_2&=a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad \text{dans } V, \text{ voisinage de } x.$$

Si nous prouvons que la formule de Cameron-Martin (voir par exemple [8]) permet de passer de la probabilité P_x à la probabilité P_x', cela prouvera que P_x et P_x' sont équivalentes, pour tout $t\geqq 0$, sur les tribus $\mathscr{F}_{t\wedge\sigma_V}$, où σ_V est le temps de sortie de V. Or, si M est un opérateur elliptique qui s'écrit $M=\frac{1}{2}\sigma\cdot\sigma^*+v$ (σ lipschitzien, v champ de vecteur borélien borné), nous savons que la formule de Cameron-Martin permet de passer des probabilités A_x (associée à $\frac{1}{2}\sigma\sigma^*$, au point x) à B_x (associée à $\frac{1}{2}\sigma\sigma^*+v$) si $v(y)$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de $\sigma(y)$ en tout point y, sauf peut être sur un ensemble de potentiel nul, pour A_x.

Or ici:
$$L=\tfrac{1}{2}(\sigma\sigma^*)+b_1,\quad \text{avec}\quad b_1=(a a_x'+b a_y')\frac{\partial}{\partial x}+(a b_x'+b b_y')\frac{\partial}{\partial y}.$$
$$L'=\tfrac{1}{2}(\sigma\sigma^*)+b_2,\quad \text{avec}\quad b_2=\big(3(a a_x'+b a_y')+2 a b_y'\big)\frac{\partial}{\partial x}$$
$$+\big(3(a b_x'+b b_y')+2ab\big)\frac{\partial}{\partial y}$$
et $\sigma=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}$.

Dans V, trois sortes de points sont à distinguer:

1. y est tel que $b(y) \neq 0$: les vecteurs $b^1(y)$ et $b^2(y)$ appartiennent à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de σ, puisque celui-ci est de dimension 2.

2. y est tel que $b(y)=0$, $b'_x(y)=0$: la situation est la même que dans le ca 1).

3. y est tel que $b(y)=0$, $b'_x(y) \neq 0$: en un tel point, ni b_1 ni b_2 n'appartiennent à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de σ, mais puisque $b'_x(y) \neq 0$, il existe un voisinage W de y, tel que:

Dans W, l'algèbre de Lie engendrée par X_1 et X_2 est de rang 2.

L'ensemble des points $z \in W$ tels que $b(z) \neq 0$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Aussi (d'après le théorème 1), l'ensemble des points de W pour lesquels b_1 n'appartient pas à l'espace engendré par les vecteurs colonnes de σ est-il de potentiel nul pour P_y (associé à L, au point y), donc de potentiel nul pour $\bar{P}_y$ (associée à $\frac{1}{2}\sigma \cdot \sigma^*$, au point y), donc de potentiel nul pour P'_y (associée à L', au point y).

En conséquence, les probabilités P_x et P'_x sont équivalentes sur les tribus $\mathscr{F}_{t \wedge \sigma_V}$. Par des techniques de recollement standards, on en déduit alors que P_x et P'_x sont équivalentes sur toutes les tribus $\mathscr{F}_t$, $t \geqq 0$.

Prouvons maintenant le lemme 2. 1. Sous l'hypothèse de dualité rappelée au 1.b, Šur [6, lemme 2] a prouvé un résultat que l'on peut traduire ici (avec les notations de 1.b) par:

«Si f est une fonction λ-excessive ($\lambda > 0$) du processus $(\Omega \times \mathbb{R}^+, X'_t, Q_x)$ alors $f(X'_t)$ est une fonction presque sûrement continue à gauche, pour la probabilité Q^*_m».

Mais ici, les mesures Q^*_m et P_m étant équivalentes (d'après le lemme 3) sur chaque tribu $\mathscr{F}_t$ ($t \geqq 0$), pour toute fonction f λ-excessive du processus associé à L, la fonction $t \to f(X_t)$ est presque sûrement continue à gauche pour P_m.

b) Remarquons que, pour tout temps d'arrêt terminal effilé, on a $t + T \circ \theta_t \xrightarrow[t \to 0]{} T$ p.s, et donc que la fonction $\phi(x) = E_x(e^{-T})$ est une fonction 1-excessive.

Comme d'autre part le processus est à trajectoires presque sûrement continues, le temps d'arrêt T est accessible, c'est-à-dire qu'il existe une suite T_n de temps d'arrêt tels que $T_n \nearrow_n T$ sur $T < \infty$ et $T_n < T$ pour tout n (p.s.).

D'après [1, chap. 4, (4.14)] (puisque tout temps terminal effilé est exact), on en déduit alors:

$$\lim_{n \to \infty} E_{X_{T_n}}[e^{-T}] \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \quad \text{sur } T < \infty.$$

De la continuité presque sûre (pour P_m), on déduit:

$$P_m[T < \infty] = P_m[T < \infty; E_{X_T}(e^{-T}) = 1] = 0$$

puisque T est effilé. Ce qui achève la démonstration du lemme 2.

Démonstration du Théorème. a) Soit $\varepsilon > 0$, et $T_\varepsilon = \inf\{t, |\phi(X_{t-}) - \phi(X_t)| \geqq \varepsilon\}$ où ϕ est une fonction excessive. Il suffit alors de remarquer que T_ε a les propriétés requises pour appliquer le lemme 2, que 0_{T_ε} est un ouvert fin et que la mesure de Lebesgue est mesure de référence, et donc que $0_{T_\varepsilon} = \emptyset$.

b) La démonstration est la même que la précédente (remarquons d'abord que toute fonctionnelle additive est naturelle, puisque les trajectoires sont presque sûrement continues).

c) Soit S un semi-polaire, $S=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ où E_n est effilé. D'après ce qui précède, E_n, et donc S est polaire.

Lorsque les coefficients, au lieu d'être supposés seulement de classe C^∞, sont analytiques, alors la condition $\Gamma=\emptyset$ devient nécessaire pour que le processus ait de bonnes propriétés. Plus précisement:

Théorème 3. *Lorsque les coefficients des champs X_i sont analytique les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $\Gamma=\emptyset$.
2. *Γ est de potentiel nul.*
3. *Le processus est fortement fèllérien (i.e. $U^\lambda f$ est continue pour toute f bornée positive borélienne).*
4. A_1, A_2, A_3, A_4 *(s'il n'y a pas de points absorbants).*

D'après [2] et le théorème 1 il suffit bien sûr de prouver que A_3 implique que $\Gamma=\emptyset$. Soit donc un point $x\in\Gamma$. D'après un théorème dû à Nagato [4] il existe un voisinage W de x_0 et une variété V passant par x, de dimension au plus égale a $n-1$ (n est la dimension de l'espace (cf. remarque suivante)), telle que:

En tout point de $W\cap V$, chaque champ X_i est tangent à V. $\Gamma\subset V\cap W$.

D'après le lemme 1, cela prouve que V est absorbant dans W, et donc que, si on suppose A_3 (ou A_2) que Γ est vide.

Remarque 1. Dans la démonstration du théorème 1, seules les démonstrations concernant A_3 font intervenir la dimension. A l'aide du théorème précédemment rappelé, il est facile de voir que le théorème 3 est vrai quelque soit la dimension.

2. Les ensembles semi-polaires

Ici, nous ne supposons réalisée aucune des conditions A_1, A_2, A_3, A_4 les seules hypothèses sont celles de l'introduction: X_1 et X_2 sont de classe C^∞, avec des coefficients ainsi que leurs deux premières dérivées bornées.

Définition 1. Soit S un presque borélien. Nous dirons que S est presque polaire si $m(0_S)=0$, où $0_S=\{x, E_x(e^{-\tau_S})>0\}$ (τ_S temps d'entrée dans S).

Theorème 4. 1. *Tout ensemble semi-polaire est presque polaire.*

2. *Tout ensemble semi-polaire est effilé.*

Le point 1) a été prouvé dans le § précédent (lemme 2[2]). Cependant, donnons un exemple prouvant que l'ensemble 0_S ne saurait être éliminé.

Exemple. Soit $\sigma(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & b(x)\end{pmatrix}$, $L=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+b^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

On suppose que $b(x)=0$ si $x\leqq 0$, $b(x)>0$ si $x>0$.

[2] Remarquons qu'une réunion dénombrable d'ensembles presque polaires est un ensemble presque polaire.

Soit $S=(0,0)$. En utilisant par exemple les résultats de [2, chap. 3] on peut voir, que, si $F_S=0_S^c$ alors $F_S\supset\{x>0\}$ et donc que F_S contient tout $\mathbb{R}^2$, sauf peut être les points de la demi-droite $D=\{x\leqq 0,\ y=0\}$. Il est clair que les points de $D'=\{x<0, y=0\}$ appartiennent à 0_S. Prouvons que $(0,0)\notin 0_S$: en effet, si $(0,0)$ appartenait à 0_S, 0_S étant ouvert fin, on aurait $P_{(0,0)}[\sigma_S>0]=1$, (σ_S, temps de sortie de S) ce qui est absurde puisque le processus pénètre immédiatement dans $\{x>0\}\subset F_S$. De cela, on déduit: $0_S=D'$, S est effilé (donc semi-polaire).

Démontrons maintenant 2. Pour prouver 2, nous allons, en nous inspirant de l'exemple qui précède, prouver le lemme plus fort suivant:

Lemme 4. *Soit S semi-polaire, et $F_S=0_S^c$. Alors $S\subset F_S$.*

a) Prouvons que $\Gamma^C\subset F_S$.

Soit $x\in\Gamma^C$. Puisque Γ^C est ouvert, il existe une boule ouverte B, de centre x, incluse dans Γ^C.

Nous pouvons alors modifier les coefficients de la diffusion en dehors de B de façon à ce que l'algèbre de Lie du processus modifié soit en tout point de rang 2. Mais alors, puisque la mesure de Lebesgue est mesure de référence, tout ouvert fin non vide est de mesure de Lebesgue positive (pour le processus modifié). On en déduit donc: tout voisinage fin non vide de x (pour le processus de départ) est de mesure de Lebesgue positive. Aussi est-il absurde de supposer que $E_x(e^{-\tau_S})>0$, puisque $x\to E_x(e^{-\tau_S})$ est une fonction finement continue.

b) Raisonnons maintenant par l'absurde, et choisissons un point x_0 appartenant à $S\cap 0_S$. D'après ce qui précède, $r(\mathscr{L}(X_1,X_2))(x_0)<2$. Deux cas sont donc possibles.

α) $r(\mathscr{L}(X_1,X_2))(x_0)=0$. Mais alors x_0 est absorbant, et S ne saurait être semi-polaire.

β) $r(\mathscr{L}(X_1,X_2))(x_0)=1$. Prouvons qu'alors x_0 est nécessairement finement adhérent à Γ^C; en effet, s'il n'en était pas ainsi, d'après un raisonnement fait dans la démonstration du théorème 1, le processus commencerait par se déplacer sur la ligne intégrale $\mathscr{Y}_{x_0}$ de l'un des champs non nul en x_0. Ce mouvement sur cette ligne $\mathscr{Y}_{x_0}$ serait, (à un processus croissant de densité bornée par rapport au temps près) un mouvement brownien changé de temps, et x appartenant à S, S ne saurait être semi-polaire. On en déduit alors, d'après a) que $P_x[\tau_{F_S}=0]=1$, et donc que x appartient à F_S car F_S est un fermé fin absorbant.

Avant de voir les conséquences du théorème 4 aux fonctionnelles additives, nous allons voir, sur un exemple, que le lemme précédent ne saurait être généralisé à une diffusion dans $\mathbb{R}^n$, pour $n\geqq 3$. Cet exemple illustre également les difficultés auxquelles on se heurte pour généraliser le théorème à une dimension supérieure.

Exemple ($n=3$). Soit

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b(x,y,z)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+C(x,z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

où:

$$\{b>0\}=\{x>0\} \quad \text{et} \quad \{C>0\}=\{x>0\}.$$

Soit

$$S=D_1\cup D_2\cup\{-1,0,0\}\quad\text{avec}\quad D_1=\{x=0,z=0\}\ \text{et}\ D_2=\{x=0,y=0\}.$$

Il est clair que $0_S\supset\{z=0,x<0\}\cup\{y=0,x>0\}$ et cependant $(-1,0,0)\in 0_S$.

Nous allons voir que, sur cet exemple, tout ensemble semi-polaire est effilé.

Démonstration. Soit S un semi-polaire, et $0_S=\{x;\,E_x(e^{-\tau_S})>0\}$, $F_S=0_S^C$. On sait que $m(0_S)=0$.

a) Si $s\in 0_S$, et si $s\in\{x<0\}$, on peut voir facilement que le demi-plan horizontal inclus dans $\{x<0\}$ passant par s appartient encore à 0_S. De même, si $s\in 0_S$ et si $s\in\{x>0\}$, le demi-plan vertical inclus dans $\{x>0\}$ passant par s appartient à 0_S. Appelons:

$$0_{S^-}=0_S\cap\{x<0\},\qquad 0_{S^+}=0_S\cap\{x>0\},\qquad 0_{S^0}=0_S\cap\{x=0\}.$$

b) Prouvons que, pour tout point $q\in\{x=0\}$, $P_q\{\tau_{F_S}=0\}=1$.

Tout d'abord, si $p\in\{x>0\}\cap F_S$, il est clair que $U^\lambda 1_{0_{S^-}}(p)=0$.

Si $p\in\{x>0\}\cap 0_S$, $U^\lambda 1_{0_{S^-}}(p)$ est également nul. En effet, on aurait sinon $U^\lambda 1_{0_{S^-}}$ positif sur un voisinage fin de p; la projection du mouvement sur le plan des (x,z) étant un processus de diffusion dont le générateur est en p de rang 2, la trace de 0_{S^-} sur le plan des (x,z) étant de mesure de Lebesgue nulle, cela est absurde.

Donc, $U^\lambda 1_{0_{S^-}}(p)=0$ pour tout $p\in\{x>0\}$. D'autre part, comme le processus pénètre immédiatement dans $\{x>0\}$, et la fonction $U^\lambda 1_{0_{S^-}}$ étant continue à droite, on en tire que $U^\lambda 1_{0_{S^-}}(q)=0$ pour tout $q\in\{x=0\}$.

c) Puisque 0_{S^-} est un ouvert fin, cela implique que $P_q\{\tau_{0_{S^-}}<\infty\}=0$, pour tout $q\in\{x=0\}$. Cela prouve que $P_q\{\tau_{F_S}=0\}=1$, et donc que $S\cap\{x=0\}$ est effilé.

d) Dans une demi-feuille horizontale incluse dans $\{x<0\}$, le processus étant fortement fèllérien dans toute boule ouverte, il n'est pas difficile de voir, en utilisant le résultat de [1, p] que le processus ne saurait, partant d'un point $p\in\{x<0\}\cap\{0_{S^-}\}$ atteindre S avant $\{x=0\}$. Le résultat annoncé se déduit alors facilement du fait que F_S est un fermé absorbant et de c).

Remarque. Le théorème 4 est évidemment faux si L, au lieu d'être de la forme $\frac{1}{2}[X_1^2+X_2^2]$, est de la forme $\frac{1}{2}[X_1^2+X_2^2]+Y$. Il suffit pour le voir de considérer le processus de translation sur $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant nous intéresser aux fonctionnelles additives.

Definition 2. Nous dirons qu'une fonctionnelle additive A est presque continue, si pour presque tout x (pour la mesure de Lebesgue), A_t est une fonction continue P_x presque surement.

Définition 3. Nous dirons qu'une fonctionnelle additive n'a presque surement qu'au plus un saut si pour tout x, la fonction A_t est continue sauf peut-être en un point, P_x presque sûrement.

Théorème 5. *Toute fonctionnelle additive du processus de diffusion associé à L est tel que:*

1. *Elle est presque continue.*
2. *Elle n'a presque surement qu'au plus un seul saut.*

Démonstration. Le point 1) est une conséquence immédiate du lemme 2. Prouvons 2:

Soit $\varepsilon > 0$, et $T_\varepsilon = \inf\{t, A_t - A_{t-} \geqq \varepsilon\}$, et $0_\varepsilon = \{x, E_x(e^{-T_\varepsilon}) > 0\}$. Soit $0 = \bigcup_n 0_{1/n}$.

D'après ce qui précède, nous savons que $m(0) = 0$. D'après le raisonnement fait pour prouver le lemme 4, a), $\Gamma^C \cap 0 = \emptyset$. Soit $x \in 0$. Deux cas sont donc à priori possibles:

α) $r(\mathscr{L}(X_1, X_2))(x) = 0$. Dans ce cas, de la relation $A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t$ P_x p.s., et du fait que l'ensemble des ω tels que $\omega = \theta_t \omega$ est de P_x mesure égale à 1, on déduit que $A_t = k t P_x$ p.s., et donc que la fonctionnelle A_t n'a pas de sauts lorsque le processus part de x.

On voit donc qu'un tel x ne saurait appartenir à 0.

β) $r(\mathscr{L}(X_1, X_2))(x) = 1$. Ici, deux cas sont à priori envisageables:

β_1) x est finement adhérent à Γ^C: mais cela n'est pas possible, car le processus pénètre immédiatement dans l'ensemble des points à partir desquels la fonctionnelle A n'a pas de saut.

β_2) Le processus, partant de x, séjourne dans Γ un temps positif. Soit γ_x la ligne intégrale maximale du champ non nul en x. D'après la démonstration du théorème 1, le processus commence à se deplacer sur γ_x. Il existe, sur γ_x, 2 points p et q tels que:

Sur le segment $[p, q]$ de γ_x, l'algèbre de Lie est de rang 1.

Le segment $[p, q]$ est le segment maximal de γ_x à posséder cette propriété: Remarquons que, d'après β_2, x appartient à l'intérieur du segment $[pq]$; d'autre part p, ou q peuvent «être à l'infini».

Si p et q sont à l'infini, γ_x est absorbant (puisque c'est un ensemble localement fermé tel que tout champ lui est tangent). Dans ce cas, le mouvement sur γ_x est, localement, un mouvement brownien changé de temps, et A ne saurait avoir de discontinuité; dans ce cas encore, x ne peut appartenir à 0.

Supposons l'un des deux points, par exemple p, à distance fini. Le processus, jusqu'à ce qu'il atteigne p ou q, étant un mouvement brownien changé de temps, la fonctionnelle A ne peut sauter qu'aux instants $\tau_{(p,q)}$, temps d'entrée dans p ou q. Mais p (et q s'il est à «distance finie») étant finement adhérent à Γ^C, la fonctionnelle saute, partant de x, au plus une fois, car le processus pénètre, après $\tau_{(p,q)}$, immédiatement dans $\Gamma^C \cap 0^C$.

Exemple. Revenons à l'exemple suivant le théorème 4.

Soit $T = T_{(0,0)}$, le temps d'entrée dans $(0,0)$ T^n son $\text{n}^{\text{ième}}$ itéré. Alors: $A_t = \sum_{n \geqq 1}^{\infty} 1\{T^n \leqq t\}$ est une fonctionnelle additive qui ne saute pas plus d'une fois, mais qui saute effectivement une fois lorsque le processus part d'un point x d'ordonnée nulle et d'abscisse strictement négative.

3. Irréductibilité

Les hypothèses sont ici les mêmes que dans le paragraphe précédent: $L = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2)$ où X_1 et X_2 sont deux champs de classe C^∞ à coefficients bornés.

On peut envisager trois notions d'irréductibilité:

I_1) pour tout ouvert 0, et tout x de $\mathbb{R}^2$, $P_x[\tau_0 < \infty] > 0$, où τ_0 est le temps d'entrée dans 0 (irréductibilité sur un fermé).

I_2) pour tout presque borélien A tel que $m(A)>0$, pour tout x de $\mathbb{R}^2$, $E_x \int_0^\infty 1_A(X_s)\, ds>0$ (où m est la mesure de Lebesgue) (m-irréductibilité).

I_3) pour tout ouvert fin presque borélien 0_f, et tout x de $\mathbb{R}^2$, $P_x[\tau_{0_f}<\infty]>0$, où τ_{0_f} est le temps d'entrée dans 0_f (irréductibilité sur un fermé fin).

Le but du théorème qui suit est d'étudier les liens entre ces différents types d'irréductibilité et les hypothèses $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ du paragraphe 1.

Théorème 6. a) *Les hypothèses* I_1 *et* I_2 *sont équivalentes.*

b) *L'hypothèse* I_3 *implique* I_1 *et* I_2, *mais est strictement plus forte.*

c) *L'une quelconque des hypothèses* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ *est équivalente à* I_3.

Démonstration. a) Il suffit bien sûr, pour le point *a*, de prouver que I_1 implique I_2. Soit donc A, ensemble de mesure de Lebesgue positive. Appelons $\tilde{\Gamma}^c$ la fermeture fine de Γ^c. Envisageons deux cas:

α) il existe un point x_0 de $\tilde{\Gamma}^c$ tel que $E_{x_0} \int_0^\infty 1_A(X_s)\, ds>0$. Dans ce cas, la fonction $U\, 1_A(x)$ est positive en un point x de Γ^c, et donc sur un ouvert, puisque les fonctions excessives sont s.c.i. au voisinage de tout point de Γ^c (voir la démonstration du théorème 1). Voir que pour tout x de $\mathbb{R}^2$ $E_x \int_0^\infty 1_A(X_s)\, ds>0$ résulte alors de I_1 et de la propriété de Markov forte.

β) Pour tout point x de $\tilde{\Gamma}^c$, $E_x \int_0^\infty 1_A(X_s)\, ds=0$. Prouvons que cela est absurde. De la relation de dualité $\langle U^\lambda 1_A, 1\rangle_m=\langle 1_A, \hat{U}^\lambda 1\rangle_m$, on déduit que l'ensemble $H=\{x; U\, 1_A(x)>0\}$ est de mesure de Lebesgue positive.

Remarquons que l'ensemble H (inclus dans $(\tilde{\Gamma}^c)^c$) est «saturé», au sens suivant: nous savons que $\Pi=(\tilde{\Gamma}^c)^c$ est une réunion de lignes intégrales en tout point desquelles les champs X_1 et X_2 sont tangents. Si $x\in H$, alors toute la ligne intégrale $\gamma_x, \gamma_x\subset \Pi$, passant par x est dans H: cela résulte de la propriété de Markov forte.

D'autre part, toute ligne intégrale γ incluse dans Π possède au moins un bout où le champ ne s'annule pas: s'il n'en était pas ainsi, γ serait un ensemble localement fermé absorbant, et cela est en contradiction avec I_1.

Soit $\phi(x)=E_x(e^{-T_H})$. Cette fonction 1-excessive est nulle sur $\tilde{\Gamma}^c$: c'est l'hypothèses β). Elle vaut 1 sur H, puisque H est ouvert fin. Or, d'après ce qui précède, il y a une probabilité positive, partant d'un point de H, d'attendre $\tilde{\Gamma}^c$. Donc, H étant de mesure de Lebesgue positive, la fonction $\phi(x)$ n'est pas P_m presque sûrement continue à gauche sur les trajectoires, ce qui est absurde (voir lemme).

b) Il est évident que I_3 implique I_1. Prouvons sur un exemple que la réciproque n'est pas exacte. Soit $X_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2=b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$, où b, de classe C_∞ est telle que $\{b(x, y)=0\}=\{y=0, 0\leqq x\leqq 1\}=E$. A l'aide de ce qui précède, il n'est pas difficile de voir que:

$P_x\{\tau_0<\infty\}>0$ pour tout 0 ouvert et tout x, tandis que

$P_x\{\tau_{0_f}<\infty\}=0$ pour tout $x\in E^c$, si $0_f=\{y=0, 0<x<1\}$.

c) *Prouvons que* A_1, A_2 *et* A_3 *impliquent* I_3. Tout ouvert fin étant de mesure de Lebesgue positive, d'après A_2, il suffit de prouver I_2. Or, il existe une fonction $u(x, y)$, s.c.i. en x et en y, excessive en y, telle que:

$$E_x \int_0^\infty 1_A(X_s)\, ds= \int u(x, y)\, 1_A(y)\, dy.$$

Pour démontrer I_2, il suffit donc de voir que $u(x, y)>0$ pour tout x et tout y. Or: $H_x=\{y; u(x, y)=0\}$ est un fermé ($y \to u(x, y)$ étant s.c.i.) absorbant puisque:

$$P_t[u(x, .)](y) \leqq u(x, y)=0 \quad \text{si } y \in H_x.$$

Ceci prouve que H_x est vide puisque H_x ne saurait être égal à $\mathbb{R}^2$ tout entier, et que le plus petit fermé absorbant non vide est égal à $\mathbb{R}^2$ (voir la démonstration du théorème 1: A_3 implique A_4).

Prouvons que I_3 *implique* A_1, A_2, A_3. Remarquons que (non A_3) entraîne l'une ou l'autre des deux situations suivantes:

1. il existe un point x_0 tel que $X_1(x_0)=X_2(x_0)=0$. Mais cela entraîne (non I_3), puisque $P_{x_0}\{\tau_A<\infty\}=0$, pour tout A presque borélien tel que $A \cap \{x_0\}=\emptyset$.

2. il existe une variété γ de dimension 1 telle que les champs X_1 et X_2 lui soient tangents. De cela, on déduit l'existence d'un ouvert fin 0_f de mesure de Lebesgue nulle. Du fait que

$$\{x; P_x\{\tau_{0_f}<\infty\}>0\}=\left\{x; E_x \int_0^\infty 1_{0_f}(X_s)\, ds>0\right\}$$

puisque 0_f est ouvert fin, et de la relation de dualité, on en tire:

$$m\{x; P_x\{\tau_{0_f}<\infty\}>0\}=0,$$

ce qui implique (non I_3).

Bibliographie

1. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov process and potential theory. New York: Academic Press 1968
2. Bonami, A., Karoui, N., Rheinard, H., Roynette, B.: Processus de diffusion associé à un opérateur elliptique dégénéré. Ann. Inst. H. Poincaré **2**, 31–80 (1971)
3. Bony, J.M.: Principe du maximum et inégalités de Harnack pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Séminaire Brelot-Choquet Deny 1967–68, n° 10. 12ème année
4. Derridj, M.: Sur une classe d'opérateurs différentiels hypo-elliptiques à coefficients analytiques. Ecole Polytechnique, Séminaire Goulaouic Schwartz, Exposé n° 12, 1970–1971
5. Pinsky, M.: A note on degenerate diffusion process. Theor. probability Appl. **14**, n° 3, 502–506 (1969)
6. Šur, M.G.: Behavior of coexcessive functions near the Martin boundary. Theor. probability Appl. **14**, n° 2, 263–278 (1969)
7. Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: On the support of diffusion process with applications to the strong maximum principle. Proceedings of the sixth Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob. Vol. 3, 1970
8. Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: Diffusion processes with continuous coefficients (I, II). Comm. Pure Appl. Math. **22**, 349–400 (1969)

B. Roynette
4 Rue F. Villon
F-54630 Richardmeuil
France

(Received September 1, 1973)