Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
44, 141–144 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Sur un théorème de J.M. Bismut

M. Emery

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé complet pourvu d'une filtration $(\mathscr{F}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles de [2]. Si X est un processus mesurable, nous posons $X^* = \sup_t |X_t|$, et nous disons que X appartient à la classe (D), par définition, lorsque l'ensemble des variables aléatoires $X_T I_{\{T<\infty\}}$ (où T parcourt l'ensemble $\mathscr{T}$ de tous les temps d'arrêt) est uniformément intégrable.

J.M. Bismut a récemment démontré le théorème suivant [1]:

Théorème 1. a) *Soit X un processus càdlàg adapté. Pour que X appartienne à la classe (D), il faut et il suffit que X soit projection optionnelle d'un processus càdlàg mesurable Y tel que $E[Y^*]<\infty$.*

b) Si X est régulier, Y peut être choisi continu.

La méthode de Bismut repose sur la connaissance du dual de certains espaces de processus càdlàg, et ne permet pas d'aborder des processus à trajectoires irrégulières. Nous allons prouver ici:

Théorème 2. *Soit X un processus optionnel. Pour que X appartienne à la classe (D), il faut et il suffit que X soit projection optionnelle d'un processus mesurable Y tel que $E[Y^*]<\infty$.*

Ce résultat est équivalent à l'énoncé suivant:

Théorème 3. *Soit X un processus optionnel. Pour que X appartienne à la classe (D), il faut et il suffit qu'il existe une martingale M positive, continue à droite et uniformément intégrable, telle que $|X| \leqq M$.*

Le théorème 3 est dû à J.F. Mertens, qui l'a établi dans [4] par une méthode d'arrêt optimal. Nous allons en donner ici démonstration nouvelle et directe. Auparavant, montrons l'équivalence avec le théorème 2: Connaissant Y, on peut construire M par $M_t = E[Y^* | \mathscr{F}_t]$; connaissant M, on peut construire Y par $Y_t = (X_t/M_t) M_\infty$ (avec la convention $0/0=0$). Cela permet même de préciser un peu la partie a) du théorème 1. Si X est càdlàg, le processus Y ainsi construit l'est aussi (rappelons que si M_{t-} ou M_t s'annule, $M_\infty = 0$); si, en ajoutant éventuellement à M une constante, nous supposons M_∞ strictement positive, le processus

0044-3719/78/0044/0141/$01.00

Y a le même ensemble de zéros et le même signe que X. Il semble en revanche impossible d'établir par cette méthode la partie b) du théorème 1.

Démonstration du théorème 3. Le fait que toute martingale continue à droite et uniformément intégrable est dans la classe (D) est classique; il reste, X étant donné, à construire M.

Notre méthode utilise des résultats sur les fonctions de Young obtenus par P.A. Meyer dans un travail [6] sur le théorème de Bismut. Rappelons que, si φ est une fonction de Young, l'espace d'Orlicz L^φ est l'espace de Banach admettant pour boule unité l'ensemble des variables aléatoires U qui vérifient $E[\varphi\circ|U|]\leqq 1$; l'adhérence E^φ de L^∞ dans L^φ a pour dual l'espace L^ψ, où ψ est la fonction de Young conjuguée de φ (pour plus de détails sur tout ceci, voir [3]). On fixe dans toute la suite une fonction de Young a telle que $\int_1^\infty \frac{dt}{a(t)}<\infty$ (par exemple $a(t)=t^2$). Pour toute fonction de Young φ, on construit successivement les trois fonctions de Young suivantes: ψ est la conjuguée de φ, $\bar\psi=\psi\circ a$, $\bar\varphi$ est la conjuguée de $\bar\psi$.

D'après le lemme de la Vallée-Poussin ([2] nº II.22), un processus optionnel X est de la classe (D) si et seulement s'il existe une fonction de Young φ telle que $\|X\|_\varphi<\infty$, où l'on a posé

$$\|X\|_\varphi=\sup_{T\in\mathscr{T}}\|X_T I_{\{T<\infty\}}\|_{L^\varphi}.$$

Les fonctions φ et $\bar\varphi$ étant fixées, nous allons démontrer, au lieu du théorème 3, l'énoncé suivant, dans lequel c désigne une constante:

Théorème 4. *A tout processus optionnel X vérifiant $\|X\|_\varphi<\infty$, on peut associer une martingale M continue à droite et uniformément intégrable vérifiant $|X|\leqq M$ et telle que*

$$\|M_\infty\|_{L^{\bar\varphi}}\leqq c\|X\|_\varphi.$$

Le théorème 4 en dit un peu plus que le théorème 3. Par exemple, il permet de vérifier, selon une remarque de Meyer, que si (X^i) est une famille de processus optionnels uniformément de la classe (D) (toutes les variables aléatoires $X^i_T I_{\{T<\infty\}}$ sont uniformément intégrables), on peut trouver des processus mesurables Y^i dont les projections optionnelles sont X^i et tels que la famille des Y^{i*} soit uniformément intégrable (la version càdlàg de ce résultat se trouve dans [6]).

Démonstration. Elle se fait en trois étapes, les deux premières étant empruntées à [6]. La fonction φ étant fixée, c désigne dans la suite une constante qui peut changer de place en place.

1) Soit U une variable aléatoire positive telle que $\|U\|_{L^{\bar\psi}}\leqq 1$. On a alors

$$\int_0^\infty \|I_{\{U>t\}}\|_{L^\psi}\,dt\leqq c<\infty.$$

La démonstration de cette propriété se trouve dans [5], en haut de la page 390.

2) Soient X un processus optionnel positif, A un processus croissant adapté continu à droite. On a

$$E\left[\int_0^\infty X_s dA_s\right] \leqq c\|X\|_\varphi \, \|A_\infty\|_{L^{\bar{\Psi}}}.$$

Pour établir cela, introduisons les temps d'arrêt

$$S_t = \inf\{s \geqq 0 \colon A_s > t\};$$

alors

$$E\left[\int_0^\infty X_s dA_s\right] = E\left[\int_0^\infty X_{S_t} I_{\{S_t<\infty\}} dt\right] = \int_0^\infty E[X_{S_t} I_{\{S_t<\infty\}}]\, dt$$
$$\leqq 2\int_0^\infty \|X_{S_t}\|_{L^\varphi} \, \|I_{\{A_\infty>t\}}\|_{L^\psi} dt \leqq 2\|X\|_\varphi \int_0^\infty \|I_{\{A_\infty>t\}}\|_{L^\psi} dt.$$

Le 1) permet de conclure quand $\|A_\infty\|_{L^{\bar{\Psi}}} \leqq 1$, et, par homogénéité, dans le cas général.

3) Pour démontrer le théorème 4, nous ne restreignons pas la généralité en supposant X positif.

Soit $M^{\bar{\Psi}}$ l'espace de Banach des processus A à variation finie, continus à droite, adaptés, tels que $\int_0^\infty |dA_s| \in E^{\bar{\Psi}}$; sa norme est donnée par

$$\|A\|_{M^{\bar{\Psi}}} = \left\| \int_0^\infty |dA_s| \right\|_{L^{\bar{\Psi}}}.$$

Il résulte de 2) ci-dessus que la fonction

$$f(A) = E\left[\int_0^\infty X_s dA_s\right]$$

est une forme linéaire continue sur $M^{\bar{\Psi}}$, dont la norme est majorée par $c\|X\|_\varphi$.

Appelons alors C l'ensemble des variables aléatoires de la forme A_∞, où A est un processus croissant appartenant à $M^{\bar{\Psi}}$ tel que $f(A)=1$. L'ensemble C est un convexe de $E^{\bar{\Psi}}$ non vide (sauf dans le cas trivial où $X=0$) et qui ne rencontre pas la boule ouverte de centre 0 et de rayon $1/\|f\|$. Le théorème de Hahn-Banach permet alors de séparer cette boule de l'adhérence de C par un hyperplan affine: il existe une forme linéaire continue g sur $E^{\bar{\Psi}}$, à valeurs strictement inférieures à 1 sur la boule et au moins égales à 1 sur C. La forme g est un élément V de $L^{\bar{\varphi}}$ qui vérifie $\|V\|_{L^{\bar{\varphi}}} \leqq c\|X\|_\varphi$ et que l'on peut, quitte à le remplacer par $|V|$, supposer positif. On a donc, pour tout processus croissant A de $M^{\bar{\Psi}}$ tel que $f(A)=1$

$$E\left[\int_0^\infty X_s dA_s\right] = f(A) \leqq g(A_\infty) = E[VA_\infty].$$

Cela s'étend aussitôt, par homogénéité, au cas où $f(A)>0$, et de manière triviale au cas où $f(A)=0$. Prenant en particulier $A = I_B I_{[\![T,\infty[\![}$, où T est un temps d'arrêt fini et B un élément de $\mathscr{F}_T$, nous obtenons $E[X_T I_B] \leqq E[VI_B]$, d'où

$X_T \leqq E[V|\mathscr{F}_T]$ p.s. Comme X est optionnel, le théorème de section entraîne $X \leqq M$, où M est la martingale continue à droite $E[V|\mathscr{F}_t]$.

Les théorèmes 4, 3 et 2 sont donc établis.

Remarques. 1) Il est interessant de rappeler le principe de la démonstration du théorème 3 par Mertens: On construit l'enveloppe de Snell Z de $|X|$ (c'est-à-dire la plus petite surmartingale optionnelle forte majorant $|X|$) et on montre qu'elle appartient à la classe (D). Elle admet alors une décomposition de Mertens $Z = M - A$, où M est une martingale uniformément intégrable et A un processus croissant prévisible non nécessairement continu à droite; il est clair enfin que $|X| \leqq M$. Cette méthode permet, dans le théorème 2, de choisir Y tel que

$$E[Y^*] = \sup_{T \in \mathscr{T}} E[|X_T| I_{\{T < \infty\}}],$$

alors que la méthode de Bismut et la nôtre introduisent toutes deux un facteur $1 + \varepsilon$ dans ce résultat.

2) Par arrêt, tout ceci reste vrai pour des processus définis sur $[0, 1]$, ou, de manière équivalente sur $[0, \infty]$ (c'est dans ce cadre que se place Bismut).

3) Notre méthode s'étend de manière immédiate aux processus prévisibles.

Références

1. Bismut, J.M.: Article à paraître dans le Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
2. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel I. Paris: Hermann 1976
3. Krasnoselsky, M.A., Rutitsky, Y.B.: Convex functions and Orlicz spaces. Dehli: Hindustan 1962
4. Mertens, J.F.: Théorie des processus stochastiques généraux, applications aux surmartingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **22**, 45–68 (1972)
5. Meyer, P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes in Math. 511. Berlin: Springer-Verlag 1976
6. Meyer, P.A.: Sur le lemme de la Vallée-Poussin et un théorème de Bismut. Séminaire de Probabilités XII. Lecture Notes in Math. 649. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978

Reçu le 25 Janvier 1978