Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete
44, 103–115 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete
© by Springer-Verlag 1978

Sous-espaces stables de Martingales

Jean Jacod

Université de Rennes, Laboratoire de Probabilités,
Avenue du Géneral Leclerc, Rennes-Beaulieu, F-35042, Rennes Cedex, France

On connait depuis longtemps (voir l'article fondamental de Kunita et Watanabe [3]) la structure des sous-espaces stables (i.e., stables par intégration stochastique) de martingales de carré intégrable, et on sait définir des systèmes orthogonaux de martingales engendrant ces sous-espaces (voir Meyer [6], et Davis et Varaiya [1] pour une étude plus approfondie). Plus récemment, Galtchouk [2] dans le cas fini et Métivier et Pistone [9] dans le cas dénombrable ont montré que le sous-espace de martingales de carré intégrable engendré par une famille $(X^i)_{i\in I}$ de martingales est simplement l'ensemble des «intégrales stochastiques», judicieusement définies, par rapport à cette famille (X^i).

Nous proposons ici une étude de la structure des espaces stables de martingales appartenant à un espace $\mathscr{H}^p$, pour p quelconque dans $[1, \infty[$, dans le cas où ces espaces stables sont engendrés par une famille finie de martingales. Nous donnons une caractérisation analogue à celle de Galtchouk en termes d'intégrales stochastiques, puis nous définissons les notions de bases et de dimension d'un sous-espace stable. Par rapport au cas $p=2$, les difficultés proviennent de ce que d'une part on perd la structure hilbertienne de l'espace $\mathscr{H}^2$, d'autre part et surtout le «crochet oblique» de deux martingales quelconques n'étant pas défini il faut utiliser le «crochet droit», qui n'est pas prévisible.

0. Notations et rappels

On se donne un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geqq 0}$ vérifiant les «conditions habituelles»: croissante, continue à droite, chaque $\mathscr{F}_t$ contient les ensembles P-négligeables de $\mathscr{F}$; cette dernière condition n'est pas essentielle.

Si $\mathscr{C}$ est une classe de processus, on note $\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ la *classe localisée*, c'est-à-dire l'ensemble des processus X pour lesquels il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissant P-p.s. vers $+\infty$, telle que chaque processus arrêté X^{T_n} (défini par $X_t^{T_n}=X_{T_n\wedge t}$) appartienne à $\mathscr{C}$.

$\mathscr{A}$ est l'ensemble des processus continus à droite, nuls à l'origine, adaptés à $(\mathscr{F}_t)_{t\geqq 0}$, et à variation intégrable. $\mathscr{M}$ est l'ensemble des martingales locales uni-

0044-3719/78/0044/0103/$02.60

formément intégrables et continues à droite, avec la convention qu'on identifie deux martingales P-indiscernables. Ainsi, $\mathscr{M}_{\text{loc}}$ est-il l'ensemble des *martingales locales*, et pour simplifier les notations on écrit $\mathscr{L}$ pour désigner l'ensemble des martingales locales nulles à l'origine.

Si $X \in \mathscr{L}$ on a une décomposition unique $X = X^c + X^d$ où X^c est un élément continu de $\mathscr{L}$ et X^d est une somme compensée de sauts (i.e. est orthogonale à tout élément continu de $\mathscr{L}$, ou encore vérifie $(X^d)\, Y \in \mathscr{L}$ pour tout élément continu Y de $\mathscr{L}$: cf. Meyer [7] auquel nous nous référons pour tout ce qui concerne les martingales et intégrales stochastiques). Si X, $Y \in \mathscr{L}$ on leur associe le processus variation quadratique $[X, Y]$; quand $[X, Y] \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$ on note $\langle X, Y \rangle$ la projection prévisible duale de $[X, Y]$. On sait que

$$[X, Y] = \langle X^c, Y^c \rangle + \sum_{s \leqq .} \Delta X_s \Delta Y_s$$

où ΔX désigne le «processus des sauts» du processus continu à droite et limité à gauche X, avec la convention $\Delta X_0 = 0$.

Pour tout $p \in [1, \infty[$ on note $\mathscr{H}^p$ l'ensemble des $X \in \mathscr{L}$ tels que $\sup_{(s)} |X_s|$ soit de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable ou, de manière équivalente, tels que $[X, X]_\infty^{1/2}$ soit de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable (*Attention*: les éléments de $\mathscr{H}^p$ sont nuls à l'origine, ce qui constitue une différence avec les notations habituelles; nous nous intéressons en effet aux martingales nulles à l'origine, mais on pourrait transposer tout ce qui suit au cas général, en utilisant les intégrales stochastiques non nécessairement nulles à l'origine, selon ce qui est fait en [7]; nous laissons cette généralisation au lecteur). Nous munissons $\mathscr{H}^p$ de la norme

$$\|X\|_{\mathscr{H}^p} = \{E([X, X]_\infty^{p/2})\}^{1/p}. \tag{1}$$

On note $H \circ X$ le *processus intégrale* (de Stieltjes si X est à variation bornée, stochastique si $X \in \mathscr{L}$) de H par rapport à X. Si $X \in \mathscr{L}$ on sait qu'on peut définir l'intégrale prévisible $H \circ X$ et celle-ci appartient à $\mathscr{H}^p$, si et seulement si H appartient à l'espace

$$L^p(X) = \{H \text{ prévisible: } E\{(H^2 \circ [X, X]_\infty)^{p/2}\} < \infty\}. \tag{2}$$

Enfin, les symboles représentant une grandeur ou un processus à valeurs vectorielles (resp. matricielles) sont soulignés une (resp. deux) fois: on écrit $\underline{H}$ (resp. $\underline{\underline{H}}$), de composantes (H^i) (resp. (H^{ij})). La transposition est signalée par «^{t}»: par exemple $^t\underline{H}$ ou $^t\underline{\underline{H}}$.

1. Sous-espaces stables

On peut donner des sous-espaces stables de $\mathscr{H}^p$ deux définitions, équivalentes d'après [7], à savoir:

(1.1) **Définition.** *Un p-sous-espace stable est un sous-espace vectoriel fermé $\mathscr{H}$ de $\mathscr{H}^p$, stable par intégration stochastique: $\forall X \in \mathscr{H}$, $\forall H \in L^p(X)$, on a $H \circ X \in \mathscr{H}$.*

(1.2) **Définition.** *Un p-sous-espace stable est un sous-espace vectoriel fermé $\mathscr{H}$ de $\mathscr{H}^p$, stable par arrêt: $\forall X \in \mathscr{H}$, $\forall T$ temps d'arrêt, on a $X^T \in \mathscr{H}$.*

Soit maintenant $\mathscr{K}$ une partie quelconque de $\mathscr{L}$. On pose

(1.3) **Définition.** *On appelle p-sous-espace stable engendré par $\mathscr{K}$, et on note $\mathscr{Z}^p(\mathscr{K})$, le plus petit p-sous-espace stable contenant l'ensemble $\{H \circ X: X \in \mathscr{K}, H \in L^p(X)\}$.*

Il est évident que si $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}^p$, alors $\mathscr{Z}^p(\mathscr{K})$ est le plus petit p-sous-espace stable contenant $\mathscr{K}$. Par contre si $\mathscr{K} \not\subset \mathscr{H}^p$ (resp. $\mathscr{H}^p_{\mathrm{loc}}$) on n'a pas l'inclusion $\mathscr{K} \subset \mathscr{Z}^p(\mathscr{K})$ (resp. $\mathscr{K} \subset \mathscr{Z}^p_{\mathrm{loc}}(\mathscr{K})$). Il se peut même que $\mathscr{Z}^p(\mathscr{K})$, donc $\mathscr{Z}^p_{\mathrm{loc}}(\mathscr{K})$, soient réduits à la martingale nulle, comme le montre l'exemple suivant.

(1.4) **Exemple.** Soit $U \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_1, P)$ vérifiant $E(U|\mathscr{F}_{1-})=0$, et $\mathscr{K}$ la famille constituée de la martingale $X = U 1_{[\![1,\infty[\![}$; alors $\mathscr{Z}^p(X)=\{0\}$ pour tout p tel que $E(|U|^p)=\infty$. ∎

D'après [5] on a le

(1.5) **Théorème.** *Si $X \in \mathscr{L}$, on a $\mathscr{Z}^p(X)=\{H \circ X: H \in L^p(X)\}$.*

Le résultat essentiel de cet article consiste à généraliser ce théorème au p-sous-espace stable engendré par une famille finie de martingales locales. Mais avant d'y arriver, nous allons poser quelques autres problèmes.

Si $\mathscr{H}$ est un p-sous-espace stable, posons:

(1.6) **Définitions.** (a) *Un p-système générateur de $\mathscr{H}$ est une partie $\mathscr{K}$ de $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ telle que $\mathscr{Z}^p(\mathscr{K})=\mathscr{H}$.*

(b) *Un p-système générateur libre de $\mathscr{H}$ est un p-système générateur $\mathscr{K}$ tel que pour toute partie propre $\mathscr{K}' \subset \mathscr{K}$, l'inclusion $\mathscr{Z}^p(\mathscr{K}') \subset \mathscr{H}$ soit stricte.*

(c) *La p-dimension de $\mathscr{H}$, notée* p-dim $\mathscr{H}$, *est le nombre minimal d'éléments contenus dans un p-système générateur.*

(d) *Une p-base est un p-système générateur dont le nombre d'éléments est* p-dim $\mathscr{H}$.

Dans (a) on a imposé $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ et non $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$, de façon à pouvoir dire par exemple que, si $X \in \mathscr{L}$, alors $\{X\}$ est un 1-système générateur de $\mathscr{Z}^1(X)$; par localisation il est d'ailleurs facile pour tout $X \in \mathscr{H}^p_{\mathrm{loc}}$ de trouver $H \in L^p(X)$ tel que $1/H$ soit localement borné et $H>0$: on a alors $H \circ X \in \mathscr{H}^p$ et $\mathscr{Z}^p(X)=\mathscr{Z}^p(H \circ X)$. On pourrait donc imposer dans (a) que $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$, ce qui n'entrainerait que des modifications de détail.

Toutes ces notions présentent des analogies avec les notions correspondantes définies pour les espaces vectoriels. Par exemple, il est clair que si p-dim $\mathscr{H} < \infty$ toute p-base est un p-système générateur libre (attention, p-dim $\mathscr{H}$ n'est pas la dimension de $\mathscr{H}$ considéré comme espace vectoriel, dimension qui est en général infinie). On verra plus loin que si $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ sont deux p-sous-espaces stables avec $\mathscr{H} \subset \mathscr{H}'$, alors p-dim $\mathscr{H} \leqq p$-dim $\mathscr{H}'$. Par contre on a:

(1.7) *Deux p-systèmes générateurs libres de $\mathscr{H}$ peuvent avoir des cardinaux différents:* soit $X \in \mathscr{L}$ et T un temps d'arrêt tel que $Y = X^T$ et $Z = X - Y$ ne soient pas nulles. Alors $\mathscr{Z}^1(X)=\mathscr{Z}^1(Y,Z)$ et les ensembles $\{X\}$ et $\{Y, Z\}$ sont des 1-systèmes générateurs libres. ∎

(1.8) *On peut avoir l'inclusion stricte* $\mathcal{H}\subset\mathcal{H}'$, *et* p-dim $\mathcal{H}=p$-dim $\mathcal{H}'<\infty$: si on reprend l'exemple (1.7), l'inclusion $\mathcal{L}^1(Y)\subset\mathcal{L}^1(X)$ est stricte, alors que ces sous-espaces sont de 1-dimension égale à 1. ■

2. p-Sous-espace stable engendré par une partie finie de $\mathcal{H}^p_{\mathrm{loc}}$

Dans ce paragraphe on fixe une martingale locale d-dimensionnelle $\underline{X}=(X^i)_{i\leqq d}$, *dont les composantes sont dans* $\mathcal{H}^p_{\mathrm{loc}}$ pour un $p\in[1,\infty[$. Posons

$$L^{p,0}(\underline{X})=\{\underline{H}=(H^i)_{i\leqq d}\colon H^i\in L^p(X^i) \text{ pour tout } i\leqq d\}.$$

Si $\underline{H}\in L^{p,0}(\underline{X})$ on pose

$$^t\underline{H}\circ\underline{X}=\sum_{i\leqq d}H^i\circ X^i \tag{3}$$

et

$$\mathcal{L}^{p,0}(\underline{X})=\{^t\underline{H}\circ\underline{X}\colon \underline{H}\in L^{p,0}(\underline{X})\}. \tag{4}$$

D'après (1.5) on a $\mathcal{L}^{p,0}(\underline{X})=\mathcal{L}^p(\underline{X})$ quand $d=1$, et on pourrait penser à première vue que cette égalité est vraie dans le cas général; mais il n'en est rien (voir un contre-exemple dans [5]). Dans le cas où $p=2$, l'étude de $\mathcal{L}^p(\underline{X})$ a fait l'objet de nombreux travaux (Galtchouk [2], Métivier et Pistone [9], Meyer [8]). Cependant, l'inclusion $\mathcal{L}^{p,0}(\underline{X})\subset\mathcal{L}^p(\underline{X})$ est évidente, et on a:

(2.1) **Théorème.** *$\mathcal{L}^p(\underline{X})$ est la fermeture dans $\mathcal{H}^p$ de $\mathcal{L}^{p,0}(\underline{X})$.*

Démonstration. Il est évident que $\mathcal{L}^p(\underline{X})$ est le plus petit p-sous-espace stable contenant $\mathcal{L}^{p,0}(\underline{X})$, qui est lui-même un sous-espace de $\mathcal{H}^p$ stable par arrêt; comme l'opération d'arrêt à un temps d'arrêt est une contraction de $\mathcal{H}^p$ dans lui-même, on en déduit le résultat. ■

Ce théorème nous donne donc une première caractérisation de $\mathcal{L}^p(\underline{X})$; remarquons qu'elle ne fait pas intervenir le fait que $X^i\in\mathcal{H}^p_{\mathrm{loc}}$ pour tout i.

Nous allons maintenant donner une autre caractérisation de $\mathcal{L}^p(\underline{X})$, en termes d'intégrales stochastiques, et analogue à (1.5). Il est facile de trouver un processus croissant $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ (et même, $A\in\mathcal{A}$) tel que $d[X^i,X^j]\ll dA$ pour tous $i,j\leqq d$; il existe alors un processus *optionnel* $\underline{\underline{M}}$ à valeurs dans l'espace des matrices symétriques non-négatives $d\times d$, tel que

$$[\underline{X},{}^t\underline{X}]=\underline{\underline{M}}\circ A \quad (\text{i.e. } [X^i,X^j]=M^{ij}\circ A \text{ pour } i,j\leqq d). \tag{5}$$

Un calcul simple montre que si $\underline{H}\in L^{p,0}(\underline{X})$ on a

$$[^t\underline{H}\circ\underline{X},{}^t\underline{H}\circ\underline{X}]=({}^t\underline{H}\underline{\underline{M}}\underline{H})\circ A. \tag{6}$$

Etant donné (1) il est naturel de poser

$$\|\underline{H}\|_{L^p(\underline{X})}=\{E[({}^t\underline{H}\underline{\underline{M}}\underline{H})\circ A_\infty)^{p/2}]\}^{1/p} \tag{7}$$

$$L^p(\underline{X})=\{\underline{H} \text{ prévisible: } \|\underline{H}\|_{L^p(\underline{X})}<\infty\}. \tag{8}$$

De la sorte, l'application: $\underline{H} \rightsquigarrow {}^t\underline{H} \circ \underline{X}$ est une isométrie de $L^{p,0}(\underline{X})$ sur $\mathscr{Z}^{p,0}(\underline{X})$ et d'après (2.1) il nous faut étudier la complétion de $L^{p,0}(\underline{X})$ pour la semi-norme $\|\cdot\|_{L^p(\underline{X})}$.

(2.2) **Lemme.** *$L^{p,0}(\underline{X})$ est dense dans $L^p(\underline{X})$ pour la semi-norme* $\|\cdot\|_{L^p(\underline{X})}$.

Démonstration. Soit $\underline{H} \in L^p(\underline{X})$. Pour tout $i \leqq d$ on note $(T(n,i))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite localisante pour le processus croissant localement intégrable $[X^i, X^i]^{p/2}$ (ce qui signifie que $\lim_{(n)} \uparrow T(n,i) = \infty$ P-p.s., et que $E([X^i, X^i]^{p/2}_{T(n,i)}) < \infty$). Soit

$$B(n) = \bigcap_{i \leqq d} ([\![0, T(n,i)]\!] \cap \{|H^i| \leqq n\})$$

et $\underline{H}_n = \underline{H}\, 1_{B(n)}$. D'une part $(H^i_n)^2 \circ [X^i, X^i]_\infty \leqq n^2 [X^i, X^i]_{T(n,i)}$ est de puissance $p/2^{\text{ième}}$ intégrable, donc $\underline{H}_n \in L^{p,0}(\underline{X})$; d'autre part

$$\|\underline{H} - \underline{H}_n\|^p_{L^p(\underline{X})} = E[({}^t\underline{H}\underline{\underline{M}}\underline{H}\, 1_{B(n)^c} \circ A_\infty)^{p/2}]$$

tend vers 0 quand $n \uparrow \infty$ d'après le théorème de Lebesgue. ∎

L'isométrie: $\underline{H} \rightsquigarrow {}^t\underline{H} \circ \underline{X}$ s'étend donc de manière unique à l'espace $L^p(\underline{X})$, et on note encore ${}^t\underline{H} \circ \underline{X}$ cette extension, pour laquelle (6) reste encore valide par passage à la limite. Voici alors le résultat essentiel de cet article:

(2.3) **Théorème.** *On a* $\mathscr{Z}^p(\underline{X}) = \{{}^t\underline{H} \circ \underline{X} : \underline{H} \in L^p(\underline{X})\}$.

(2.4) **Remarques.** 1) Le couple $(A, \underline{\underline{M}})$ vérifiant (5) n'est certainement pas unique. Mais deux couples différents conduisent à la même valeur de $\|\cdot\|_{L^p(\underline{X})}$.

2) Contrairement à ce qui se passe pour (2.1), *l'hypothèse $X^i \in \mathscr{H}^p_{\text{loc}}$ est essentielle pour la validité de ce théorème*, et du lemme (2.2) dans la démonstration duquel elle intervient explicitement. Donnons un contre-exemple. On suppose qu'il existe deux variables U et V intégrables, $\mathscr{F}_1$-mesurables, vérifiant $E(U|\mathscr{F}_{1-}) = E(V|\mathscr{F}_{1-}) = 0$, $E(U^2) = E(V^2) = \infty$ et $E[(U+V)^2] < \infty$. Soit $d = 2$ et $\underline{X}$ de composantes $X^1 = U\, 1_{[\![1,\infty[\![}$ et $X^2 = V\, 1_{[\![1,\infty[\![}$. D'après l'exemple (1.4) on a $\mathscr{Z}^{2,0}(\underline{X}) = \{0\}$, donc également $\mathscr{Z}^2(\underline{X}) = \{0\}$ d'après (2.1). Cependant le processus $\underline{H}$ de composantes $H^1 = H^2 = 1$ appartient à $L^2(\underline{X})$ et sa norme vérifie $\|\underline{H}\|^2_{L^2(\underline{X})} = E[(U+V)^2] \in]0, \infty[$: par suite (2.2) et (2.3) ne sont pas valides pour $p = 2$ dans cet exemple. En fait lorsque l'hypothèse $X^i \in \mathscr{H}^p_{\text{loc}}$ n'est pas satisfaite on ne peut pas en général définir l'intégrale stochastique ${}^t\underline{H} \circ \underline{X}$ pour tout $\underline{H} \in L^p(\underline{X})$.

3) Supposons que $p \geqq 2$. On a alors $[X^i, X^j] \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$ et si $\tilde{A}$ désigne la projection prévisible duale de A on a $d\langle X^i, X^j\rangle \ll d\tilde{A}$. Il existe alors un processus *prévisible* $\tilde{\underline{\underline{M}}}$ à valeurs matricielles symétriques non-négatives $d \times d$ tel que

$$\langle \underline{X}, {}^t\underline{X} \rangle = \tilde{\underline{\underline{M}}} \circ \tilde{A} \tag{9}$$

(d'ailleurs $\tilde{M}^{ij} \circ \tilde{A}$ est la projection prévisible duale de $M^{ij} \circ A$). On a alors aussi, pour $p = 2$:

$$\|\underline{H}\|^2_{L^2(\underline{X})} = E[({}^t\underline{H}\tilde{\underline{\underline{M}}}\underline{H}) \circ \tilde{A}_\infty]$$

et on retrouve les résultats de Galtchouk et de Métivier et Pistone. ∎

Avant de démontrer ce théorème, nous allons introduire quelques notions, qui joueront un rôle fondamental dans toute la suite.

D'abord, on note $\underline{X}^c$ et $\underline{X}^d$ les processus vectoriels de composantes respectives $((X^i)^c)_{i\leq d}$ et $((X^i)^d)_{i\leq d}$. $\tilde{A}$ désigne la *projection prévisible duale* de A et $M_{\tilde{A}}$ est la mesure $M_{\tilde{A}}(d\omega, dt)=P(d\omega)\,d\tilde{A}_t(\omega)$. De même si η est une *mesure aléatoire* sur $\mathbb{R}^d$ (i.e. une mesure de transition positive $\eta(\omega; dt, d\underline{x})$ de $(\Omega, \mathscr{F})$ sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$), on note M_η la mesure $M_\eta(d\omega, dt, d\underline{x})=P(d\omega)\,\eta(\omega; dt, d\underline{x})$ sur $\tilde{\Omega}=\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$.

$\mathscr{P}$ désigne la tribu prévisible sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$ et $\tilde{\mathscr{P}}=\mathscr{P}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. On associe à $\underline{X}$ la mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^d$:

$$\mu(\omega; dt, d\underline{x})=\sum_{(s)} 1_{\{\Delta\underline{X}_s(\omega)\neq 0\}}\,\varepsilon_{(s,\,\Delta\underline{X}_s(\omega))}(dt, d\underline{x}). \tag{10}$$

Pour tout ce qui concerne les mesures aléatoires nous renvoyons à [4]. Si W est une fonction sur $\tilde{\Omega}$, on note $W*\eta$ le processus (s'il existe) défini par

$$W*\eta_t(\omega)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} W(\omega, s, \underline{x})\,\eta(\omega; ds, d\underline{x}).$$

On note ν la projection prévisible duale de μ, c'est-à-dire l'unique (à un ensemble P-nul près) mesure aléatoire telle que $W*\nu$ soit la projection prévisible duale de $W*\mu$, pour toute fonction $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable W telle que $W*\mu\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

(2.5) **Lemme.** *Il existe un processus prévisible $\underline{\underline{N}}$ à valeurs matricielles symétriques non-négatives $d\times d$, et une mesure de transition positive F de $(\Omega\times\mathbb{R}_+, \mathscr{P})$ dans $\mathbb{R}^d$, tels que*

$$\begin{aligned}&\langle\underline{X}^c, {}^t(\underline{X}^c)\rangle=\underline{\underline{N}}\circ\tilde{A}\\ &\nu(\omega; dt, d\underline{x})=d\tilde{A}_t(\omega)\,F_{\omega,t}(d\underline{x}).\end{aligned} \tag{11}$$

La seconde relation (11) signifie simplement que $M_\nu(d\omega, dt, d\underline{x})=M_{\tilde{A}}(d\omega, dt)\cdot F_{\omega,t}(d\underline{x})$, puisqu'on sait que ν est entièrement déterminée par M_ν, et même par la restriction de M_ν à $\tilde{\mathscr{P}}$, qui coïncide d'ailleurs avec la restriction de M_μ à $\tilde{\mathscr{P}}$.

Démonstration. L'existence de $\underline{\underline{N}}$ vérifiant les conditions requises suit immédiatement de ce que $d\langle(X^i)^c, (X^j)^c\rangle\ll dA$, donc a-fortiori $d\langle(X^i)^c, (X^j)^c\rangle\ll d\tilde{A}$. D'après le commentaire qui suit l'énoncé il suffit, pour obtenir la fin du lemme, de montrer qu'on a une factorisation $M_\mu(d\omega, dt, d\underline{x})=M_{\tilde{A}}(d\omega, dt)\,F_{\omega,t}(d\underline{x})$ sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{P}})$, où F est une transition de $(\Omega\times\mathbb{R}_+, \mathscr{P})$ dans $\mathbb{R}^d$; mais si $C\in\mathscr{P}$ vérifie $M_{\tilde{A}}(C)=0$ on a $E(1_C\circ A_\infty)=E(1_C\circ\tilde{A}_\infty)=0$, donc $\{\Delta\underline{X}\neq\underline{0}\}\subset C$ à un ensemble P-évanescent près et $M_\mu(C\times\mathbb{R}^d)=0$: la factorisation cherchée en découle. ■

Soit alors $\underline{U}(\omega, t, \underline{x})=\underline{x}$, de composantes $(U^i)_{i\leq d}$. Etant donnés (5), (6) et (10), un calcul élémentaire montre alors que si $\underline{H}\in L^p(\underline{X})$,

$$\begin{aligned}&[{}^t\underline{H}\circ\underline{X}, {}^t\underline{H}\circ\underline{X}]=({}^t\underline{H}\underline{\underline{N}}\underline{H})\circ\tilde{A}+({}^t\underline{H}\underline{U})^2*\mu\\ &\|\underline{H}\|^p_{L^p(\underline{X})}=E\{[({}^t\underline{H}\underline{\underline{N}}\underline{H})\circ\tilde{A}_\infty+({}^t\underline{H}\underline{U})^2*\mu_\infty]^{p/2}\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Définissons encore pour chaque (ω, t) les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}&L_c(\omega, t)=\text{espace engendré par les vecteurs propres correspondant aux}\\ &\qquad\qquad\text{valeurs propres non nulles de } \underline{\underline{N}}(\omega, t),\\ &L_d(\omega, t)=\text{espace engendré par le support de } F_{\omega,t},\\ &L(\omega, t)=\text{espace engendré par } L_c(\omega, t)\cup L_d(\omega, t).\end{aligned} \tag{13}$$

On remarque que ces espaces dépendent «prévisiblement» de (ω, t).

(2.6) **Lemme.** *Soit $\underline{H}$ un processus vectoriel prévisible d-dimensionnel. Pour que $\|\underline{H}\|_{L^p(\underline{X})}=0$ il faut et il suffit que pour $M_{\tilde{A}}$-presque tout (ω, t) le vecteur $\underline{H}(\omega, t)$ soit orthogonal à $L(\omega, t)$.*

Démonstration. D'après (12) on a $\|\underline{H}\|_{L^p(\underline{X})}=0$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites: (i) on a ${}^t\underline{H}\underline{\underline{N}}\underline{H}=0$ $M_{\tilde{A}}$-p.s. ce qui signifie que $\underline{H}$ est orthogonal à L_c. Et (ii): on a ${}^t\underline{H}\underline{U}=0$ M_μ-p.s.; étant donnés que ${}^t\underline{H}\underline{U}$ est une fonction $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable, et que M_μ et M_ν coïncident sur $\tilde{\mathscr{P}}$, (11) entraine que (ii) équivaut à ce que $M_{\tilde{A}}$-p.s. $\underline{H}$ soit orthogonal à tout $\underline{x}$ appartenant au support de F, donc que $\underline{H}$ soit orthogonal à L_d. ■

Démonstration de (2.3). Etant donnés (2.1) et (2.2) il suffit de montrer que si $(\underline{H}_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $L^{p,0}(\underline{X})$ telle que $\sum_{(n)}\|\underline{H}_n\|<\infty$ (où, pour simplifier l'écriture, on note $\|.\|$ la seminorme $\|.\|_{L^p(\underline{X})}$), il existe $\underline{H}\in L^p(\underline{X})$ avec

$$\lim_{(n)}\|\underline{H}-\sum_{m\leq n}\underline{H}_m\|=0.$$

Grâce à (2.6), et quitte à décomposer chaque $\underline{H}_n$ en une somme de deux vecteurs à valeurs respectives dans L et dans l'orthogonal de L, on peut supposer que $\underline{H}_n(\omega, t)\in L(\omega, t)$ identiquement.

De l'hypothèse $\sum_{(n)}\|\underline{H}_n\|<\infty$ et de (12), on déduit aisément les conséquences suivantes. D'une part si

$$B'=\{\sum_{(n)}\sqrt{{}^t\underline{H}_n\underline{\underline{N}}\underline{H}_n}<\infty\}$$

on a $M_{\tilde{A}}(B'^c)=0$. D'autre part $\sum_{(n)}|{}^t\underline{H}_n\underline{U}|<\infty$ M_μ-p.s., donc M_ν-p.s.; si

$$B''=\{(\omega, t)\colon \sum_{(n)}|{}^t\underline{H}_n(\omega, t)\underline{x}|<\infty\ F_{\omega,t}\text{-p.s. en } \underline{x}\}$$

on a alors $M_{\tilde{A}}(B''^c)=0$ d'après (11). Soit $B=B'\cap B''$: on a $B\in\mathscr{P}$, et $M_{\tilde{A}}(B^c)=0$.

Mais $\underline{H}_n\in L$; il découle alors immédiatement des définitions de L, de B' et de B'', que sur B on a $\sum_{(n)}|\underline{H}_n|<\infty$ ($|.|$ est la norme usuelle sur $\mathbb{R}^d$). On définit un processus prévisible $\underline{H}$ à valeurs dans L en posant $\underline{H}=1_B\sum_{(n)}\underline{H}_n$. Il nous reste à vérifier que $\underline{H}\in L^p(\underline{X})$ et que $\lim_{(n)}\|\underline{H}-\sum_{m\leq n}\underline{H}_m\|=0$. Mais, avec la convention $\sum_{m\leq 0}=0$, il vient sur l'ensemble B:

$$\underline{H}-\sum_{m\leq n}\underline{H}_m=\sum_{m>n}\underline{H}_m;$$

d'autre part $M_{\tilde{A}}(B^c)=0$, donc d'après (11) et (12) on a $\|1_{B^c}\underline{K}\|=0$ pour tout vecteur prévisible $\underline{K}$. On en déduit que

$$\|\underline{H}-\sum_{m\leq n}\underline{H}_m\|=\|\sum_{m>n}\underline{H}_m\|\leq\sum_{m>n}\|\underline{H}_m\|.$$

Le résultat est alors immédiat (prendre $n=0$, puis faire tendre n vers l'infini) ■

(2.7) *Remarque.* Lorsque $p=2$ on peut d'après la remarque (2.4, 3) utiliser $\underline{\underline{\tilde{M}}}$ et $\tilde{A}$ au lieu de $\underline{\underline{M}}$ et de A; ces processus étant prévisibles on peut recopier la démonstration précédente en remplaçant $\underline{\underline{N}}$ par $\underline{\underline{\tilde{M}}}$, sans s'occuper de ce qui concerne la mesure μ: la démonstration devient donc beaucoup plus simple (c'est, essentiellement, celle de Métivier et Pistone). ∎

A titre de corollaire, énonçons le théorème suivant, qui figure dans [5].

(2.8) **Théorème.** *Pour que $\mathscr{Z}^p(\underline{X})=\mathscr{H}^p$ il faut et il suffit que tout élément de $\mathscr{L}$ orthogonal à toutes les composantes X^i soit nul.*

On rappelle que par hypothèse $X^i\in\mathscr{H}^p_{\mathrm{loc}}$. Pour la condition suffisante nous renvoyons à [5]. Par contre la démonstration de la condition nécessaire est très compliquée dans [5].

Démonstration de la condition nécessaire. Comme $\mathscr{H}^p$ est dense dans $\mathscr{H}^1$, si $\mathscr{Z}^p(\underline{X})=\mathscr{H}^p$ on a aussi $\mathscr{Z}^1(\underline{X})=\mathscr{H}^1$. Soit $Y\in\mathscr{L}$ telle que $YX^i\in\mathscr{L}$ pour tout $i\leqq d$. Quitte à localiser on peut supposer que $Y\in\mathscr{H}^1$ et il existe d'après (2.3) un $\underline{H}\in L^1(\underline{X})$ tel que $Y={}^t\underline{H}\circ\underline{X}$. Soit $A(n)=\{|\underline{H}|\leqq n\}$ et $Y_n=1_{A(n)}\circ Y$; il est facile de voir que Y_n tend vers Y dans $\mathscr{H}^1$, tandis que

$$[Y_n, Y_n]=\sum_{i\leqq d} H^i 1_{A(n)}\circ[Y, X^i].$$

La condition $YX^i\in\mathscr{L}$ implique $[Y, X^i]\in\mathscr{L}$ et comme $|H^i 1_{A(n)}|\leqq n$ on en déduit que $[Y_n, Y_n]\in\mathscr{L}$, donc $[Y_n, Y_n]=0$ et $Y_n=0$, donc finalement $Y=0$. ∎

3. p-Systèmes générateurs d'un sous-espace stable

Dans ce paragraphe on se fixe comme précédemment une martingale locale d-dimensionnelle $\underline{X}=(X^i)_{i\leqq d}$ dont les composantes appartiennent à $\mathscr{H}^p_{\mathrm{loc}}$. On utilise les notations A, $\tilde{A}$, $\underline{\underline{N}}$, F, L_c, L_d et L définies ci-dessus, et on note $\zeta(\omega, t)$ la dimension de l'espace vectoriel $L(\omega, t)$. On rappelle que ces termes ne sont pas univoquement déterminés et en particulier on a une grande latitude dans le choix de A, donc de $\tilde{A}$; mais ce choix effectué, les termes $\underline{\underline{N}}$, F, L_c, L_d, L et ζ sont définis de manière unique à un ensemble $M_{\tilde{A}}$-nul près.

Nous allons nous intéresser aux p-systèmes générateurs finis de $\mathscr{Z}^p(\underline{X})$. Un tel système est une famille $\underline{X}'=(X'^i)_{i\leqq d'}$ dont les composantes X'^i appartiennent à $\mathscr{Z}^p_{\mathrm{loc}}(\underline{X})$, donc d'après (2.3) on peut écrire en notation matricielle $\underline{X}'=\underline{\underline{K}}\circ\underline{X}$, où $\underline{\underline{K}}$ est un processus matriciel $d'\times d$ dont les vecteurs ligne $\underline{K}^{i\cdot}$ appartiennent localement à $L^p(\underline{X})$, ce qui signifie qu'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissant vers ∞, telle que $\underline{K}^{i\cdot}\, 1_{[\![0, T_n]\!]}\in L^p(\underline{X})$ pour chaque n.

Soit donc $\underline{\underline{K}}$ un tel processus matriciel $d'\times d$ et $\underline{X}'=\underline{\underline{K}}\circ\underline{X}$. Il est évident que $\mathscr{Z}^p(\underline{X}')\subset\mathscr{Z}^p(\underline{X})$ et nous cherchons des conditions pour que $\mathscr{Z}^p(\underline{X}')=\mathscr{Z}^p(\underline{X})$ (i.e., $\underline{X}'$ est un p-système générateur de $\mathscr{Z}^p(\underline{X})$). On associe à $\underline{X}'$ les termes A', $\tilde{A}'$, $\underline{\underline{N}}'$, F', L'_c, L'_d, L' et ζ'.

(3.1) **Lemme.** *On peut choisir A', $\tilde{A}'$, $\underline{\underline{N}}'$ et F' de sorte que $A'=A$, $\tilde{A}'=A$, $\underline{\underline{N}}'=\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{N}}\,{}^t\underline{\underline{K}}$, et que F' soit l'image de F par l'application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d'}$ associée à la matrice $\underline{\underline{K}}$. Dans ce cas, L'_c (resp. L'_d, L') est l'image de L_c (resp. L_d, L) par cette application, et on a $\zeta'\leqq\zeta$.*

Démonstration. D'une part $\Delta \underline{X}' = \underline{\underline{K}}\, \Delta \underline{X}$; d'autre part un calcul simple montre que $\langle \underline{X}'^c, {}^t(\underline{X}'^c)\rangle = (\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{N}}\,{}^t\underline{\underline{K}}) \circ \tilde{A}$. On en déduit immédiatement qu'on peut prendre $A' = A$, donc $\tilde{A}' = \tilde{A}$, ainsi que $\underline{\underline{N}}' = \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{N}}\,{}^t\underline{\underline{K}}$ et $F' = F \circ (\underline{\underline{K}})^{-1}$ (on désigne par le même symbole une matrice et l'application linéaire associée).

Soit $\underline{x}' \in \mathbb{R}^{d'}$: $\underline{x}'$ est orthogonal à L'_c si et seulement si ${}^t\underline{x}'\,\underline{\underline{N}}'\,\underline{x}' = {}^t\underline{x}'\,\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{N}}\,{}^t\underline{\underline{K}}\,\underline{x}' = 0$, donc si et seulement si $\underline{x} = {}^t\underline{\underline{K}}\,\underline{x}'$ est orthogonal à L_c. Par suite l'orthogonal (dans $\mathbb{R}^{d'}$) de L'_c est l'image réciproque par ${}^t\underline{\underline{K}}$ de l'orthogonal (dans $\mathbb{R}^d$) de L_c, et par définition même de la transposition on en déduit que $L'_c = \underline{\underline{K}}(L_c)$. Comme $F' = F \circ (\underline{\underline{K}})^{-1}$ on a clairement $L'_d = \underline{\underline{K}}(L_d)$. On en déduit immédiatement que $L' = \underline{\underline{K}}(L)$ et donc que $\zeta' \leqq \zeta$. ■

(3.2) **Théorème.** *Pour que $\mathscr{L}^p(\underline{X}') = \mathscr{L}^p(\underline{X})$ il faut et il suffit que $\zeta = \zeta'$ $M_{\tilde{A}}$-p.s., ou que la restriction à L de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{K}}$ soit $M_{\tilde{A}}$-p.s. injective.*

La dernière condition équivaut à dire que le rang de la restriction à L de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{K}}$ est $M_{\tilde{A}}$-p.s. égal à ζ; cela implique en particulier que $\zeta \leqq d'$ $M_{\tilde{A}}$-p.s.

Démonstration. D'après (3.1) il est évident que ζ' égale le rang de la restriction à L de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{K}}$, d'où l'équivalence des deux dernières conditions de l'énoncé.

Si $\mathscr{L}^p(\underline{X}') = \mathscr{L}^p(\underline{X})$, on peut intervertir $\underline{X}$ et $\underline{X}'$ dans (3.1), et on en déduit que $\zeta = \zeta'$ $M_{\tilde{A}}$-p.s.

Supposons inversement que $\zeta = \zeta'$ $M_{\tilde{A}}$-p.s. Quitte à modifier K sur un ensemble $M_{\tilde{A}}$-nul, ce qui ne change pas $\underline{X}'$, on peut supposer que $\zeta = \zeta'$ identiquement. Pour chaque (ω, t) il existe alors une application linéaire de $\mathbb{R}^{d'}$ dans $\mathbb{R}^d$, représentée par une matrice $\underline{\underline{K}}'(\omega, t)$, telle que la restriction à $L(\omega, t)$ du produit $\underline{\underline{K}}'(\omega, t)\,\underline{\underline{K}}(\omega, t)$ soit l'application identique. Il est facile de voir qu'on peut choisir $\underline{\underline{K}}'$ dépendant prévisiblement de (ω, t), puisqu'il en est de même de $\underline{\underline{K}}$ et de L. Soit $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{K}}'\,\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{I}}_d$ ($\underline{\underline{I}}_d$ = matrice identité $d \times d$). Si $\underline{x} \in L$ on a $\underline{\underline{H}}\,\underline{x} = \underline{0}$, ce qui prouve que les vecteurs ligne $\underline{H}^{i\cdot}$ sont orthogonaux à L: d'après (2.6) on a alors $\underline{\underline{H}} \in L^p(\underline{X})$ et $\underline{\underline{H}} \circ \underline{X} = \underline{0}$. On en déduit que $\underline{X} = (\underline{\underline{K}}'\,\underline{\underline{K}}) \circ \underline{X} = \underline{\underline{K}}' \circ \underline{X}'$, donc $\mathscr{L}^p(\underline{X}) \subset \mathscr{L}^p(\underline{X}')$. ■

En guise d'application nous allons déduire de ce théorème une condition pour que $\mathscr{L}^p(\underline{X}^c) \subset \mathscr{L}^p(\underline{X})$ ou, ce qui est équivalent, pour que $(X^i)^c \in \mathscr{L}^p_{\text{loc}}(\underline{X})$ pour tout $i \leqq d$. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, cette propriété n'est pas toujours vraie; par exemple si Y est un mouvement brownien et Z un processus de Poisson compensé, indépendant de Y, $X = Y + Z$ appartient à $\mathscr{H}^p_{\text{loc}}$ pour tout $p \in [1, \infty[$ et $X^c = Y$; dans cet exemple, X^c n'appartient pas à $\mathscr{L}^p_{\text{loc}}(X)$, comme le lecteur le vérifiera aisément.

(3.3) **Théorème.** *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *On a $\mathscr{L}^p(\underline{X}^c) \subset \mathscr{L}^p(\underline{X})$.*

(b) *On a $\mathscr{L}^p(\underline{X}^d) \subset \mathscr{L}^p(\underline{X})$.*

(c) *On a $\mathscr{L}^p(\underline{X}) = \mathscr{L}^p(\underline{X}^c) + \mathscr{L}^p(\underline{X}^d)$* (somme directe).

(d) *On a $\mathscr{L}^p(\underline{X}) = \mathscr{L}^p(\underline{X}^c, \underline{X}^d)$.*

(e) *On a $M_{\tilde{A}}$-p.s. $L_c \cap L_d = \{\underline{0}\}$.*

(dans l'exemple précédant l'énoncé, on a $d = 1$, et $L_c = L_d = \mathbb{R}$, donc (e) n'est pas satisfaite).

Démonstration. L'équivalence des quatre premières conditions est triviale, une fois remarqué qu'on a $\underline{X}=\underline{X}^c+\underline{X}^d$, que nécessairement $\mathscr{L}^p(\underline{X})\subset\mathscr{L}^p(\underline{X}^c,\underline{X}^d)$ et que pour tout $Y\in\mathscr{L}$ la décomposition $Y=Y^c+Y^d$ est unique, tandis que $({}^t\underline{H}\circ\underline{X})^c={}^t\underline{H}\circ\underline{X}^c$ et $({}^t\underline{H}\circ\underline{X})^d={}^t\underline{H}\circ\underline{X}^d$ si $\underline{H}\in L^p_{\text{loc}}(\underline{X})$.

Soit $\underline{X}'=(X'^i)_{i\leqq 2d}$ de composantes $X'^i=(X^i)^c$ et $X'^{i+d}=(X^i)^d$ pour $i\leqq d$. On a $\underline{X}=\underline{\underline{K}}\circ\underline{X}'$ où $\underline{\underline{K}}$ est la matrice constante $\underline{\underline{K}}=(\underline{\underline{I}}_d,\underline{\underline{I}}_d)$. Il n'est pas difficile de voir que les termes $\tilde{A}'$, $\underline{\underline{N}}'$, F' et L' associés à $\underline{X}'$ peuvent être choisis ainsi:

$$\tilde{A}'=\tilde{A},\quad \underline{\underline{N}}'=\begin{pmatrix}\underline{\underline{N}} & \underline{\underline{0}}\\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}}\end{pmatrix},\quad F'(d\underline{x},dy)=\varepsilon_0(d\underline{x})\,F(dy)$$

où $\underline{\underline{0}}$ est la matrice nulle $d\times d$ et $\underline{0}$ le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$, et $(\underline{x},\underline{y})$ représente un vecteur de $\mathbb{R}^{2d}$. De la sorte on a

$$L'=\{(\underline{x},\underline{y})\colon \underline{x}\in L_c,\ \underline{y}\in L_d\}$$

et la dimension ζ' de L' est la somme des dimensions de L_c et L_d. Si on applique (3.2) (en intervertissant les rôles de $\underline{X}$ et $\underline{X}'$) on voit alors que $\mathscr{L}^p(\underline{X})=\mathscr{L}^p(\underline{X}')$ (c'est-à-dire la condition (d)) si et seulement si $\zeta'=\zeta$, soit $L_c\cap L_d=\{\underline{0}\}$ $M_{\tilde{A}}$-p.s. ■

4. p-Dimension d'un sous-espace stable

Nous allons étudier dans ce paragraphe les p-sous-espaces stables $\mathscr{H}$ de p-dimension finie.

En choisissant un p-système générateur fini $\underline{X}$ de $\mathscr{H}$, on voit qu'on peut associer à $\mathscr{H}$:

– un processus croissant prévisible $\tilde{A}\in\mathscr{A}_{\text{loc}}$ (ou même, $\tilde{A}\in\mathscr{A}$);

– un processus prévisible ζ à valeurs entières (qui est la dimension de l'espace L associé à $\underline{X}$ et $\tilde{A}$ par (13)).

D'après (3.1) et (3.2), $\tilde{A}$ et ζ peuvent être choisis indépendamment du p-système générateur $\underline{X}$ utilisé. $\tilde{A}$ s'appelle le *processus de référence de* $\mathscr{H}$, *et* ζ la *p-dimension instantanée* de $\mathscr{H}$.

Attention, le couple $(\tilde{A},\zeta)$ n'est pas unique: si $\tilde{A}$ est un processus de référence, tout autre processus croissant prévisible $\tilde{A}'\in\mathscr{A}_{\text{loc}}$ tel que $d\tilde{A}\ll d\tilde{A}'$ est également un processus de référence. Mais $\tilde{A}$ étant choisi, ζ est unique à un ensemble $M_{\tilde{A}}$-nul près.

La terminologie «p-dimension instantanée» pour ζ est justifiée par:

(4.1) **Théorème.** *La p-dimension de $\mathscr{H}$ est la borne supérieure essentielle de $\zeta(\omega,t)$ pour la mesure $M_{\tilde{A}}$.*

Démonstration. Soit $d=p\text{-dim}\,\mathscr{H}$ et $\underline{X}=(X^i)_{i\leqq d}$ une p-base de $\mathscr{H}$. D'après ce qui précède, il est évident que $\zeta\leqq d$. Soit d' la borne supérieure essentielle de ζ pour $M_{\tilde{A}}$; comme ζ n'est définie qu'à un ensemble $M_{\tilde{A}}$-nul près, on peut supposer que $\zeta\leqq d'$ identiquement. Soit L l'espace associé à $(\underline{X},\tilde{A})$ par (13). On construit facilement un processus matriciel prévisible $d'\times d$ dont les composantes sont bornées, soit $\underline{\underline{K}}$, tel que la restriction à L de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{K}}$ soit injective (puisque $\zeta=\dim(L)\leqq d'$). Si $\underline{X}'=\underline{\underline{K}}\circ\underline{X}$ il découle alors de (3.2) que $\mathscr{L}^p(\underline{X}')=\mathscr{L}^p(\underline{X})=\mathscr{H}$ et comme $\underline{X}$ est une p-base de $\mathscr{H}$ et que $d'\leqq d$, on doit avoir $d'=d$. ■

(4.2) **Théorème.** *Soit $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ deux p-sous-espaces stables tels que $\mathscr{H} \subset \mathscr{H}'$. On a alors p-*dim $\mathscr{H} \leqq p$-dim $\mathscr{H}'$. *Si de plus $d' = p$-*dim $\mathscr{H}' < \infty$ *il existe un processus de référence commun $\tilde{A}$ à $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ et les dimensions instantanées ζ et ζ' de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ vérifient $\zeta \leqq \zeta'$ $M_{\tilde{A}}$-p.s.*

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer le résultat lorsque $d' < \infty$, et dans ce cas il suffit même de montrer la seconde partie de l'énoncé.

Soit $\tilde{A}$ un processus de référence pour $\mathscr{H}'$. Si $\underline{X} = (X^i)_{i \leqq d}$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathscr{H}$, on a $\mathscr{L}^p(\underline{X}) \subset \mathscr{H}'$ donc d'après (3.1) $\tilde{A}$ est un processus de référence pour l'espace $\mathscr{L}^p(\underline{X})$, dont la p-dimension instantanée $\zeta_{\underline{X}}$ vérifie $\zeta_{\underline{X}} \leqq \zeta'$ $M_{\tilde{A}}$-p.s.; donc en particulier p-dim $\mathscr{L}^p(\underline{X}) \leqq d'$. Il n'est pas difficile d'en déduire d'abord que p-dim $\mathscr{H} \leqq d'$, puis en prenant une p-base de $\mathscr{H}$ que $\zeta \leqq \zeta'$ $M_{\tilde{A}}$-p.s. ■

Dans notre situation, l'analogue du «théorème de la base incomplète» peut s'énoncer ainsi:

(4.3) **Théorème.** *Soit $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ deux p-sous-espaces stables tels que $\mathscr{H} \subset \mathscr{H}'$ et $d' = p$-*dim $\mathscr{H}' < \infty$. *Soit $\tilde{A}$ un processus de référence commun à $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$, et ζ et ζ' les p-dimensions instantanées de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$. Si d'' est la borne supérieure essentielle de $\zeta' - \zeta$ pour la mesure $M_{\tilde{A}}$ il existe une famille $\underline{X}'' = (X''^i)_{i \leqq d''}$ telle que $\mathscr{H}' = \mathscr{L}^p(\mathscr{H}, \underline{X}'')$.*

On en déduit en particulier que $\mathscr{H} = \mathscr{H}'$ si et seulement si $\zeta = \zeta'$ $M_{\tilde{A}}$-p.s. (résultat qui découle aussi immédiatement de (3.2) et (4.2)). On pourrait d'ailleurs montrer que $X''^i \in \mathscr{H}'_{\text{loc}} \setminus \mathscr{H}_{\text{loc}}$ pour tout $i \leqq d''$.

Démonstration. Soit $\underline{X} = (X^i)_{i \leqq d}$ (resp. $\underline{X}' = (X'^i)_{i \leqq d'}$) une p-base de $\mathscr{H}$ (resp. $\mathscr{H}'$). Soit L l'espace associé à $\underline{X}'$ par (13). On a $\underline{X} = \underline{\underline{K}} \circ \underline{X}'$ d'après (2.3) et si $\hat{L}$ désigne le noyau de la restriction à L de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{K}}$, (3.1) montre que $\zeta' - \zeta$ est la dimension de $\hat{L}$. Il est facile de construire un processus matriciel $d'' \times d'$ prévisible borné $\underline{\underline{K}}''$ tel que la restriction à L de l'application linéaire associée soit de rang $\zeta' - \zeta$ et injective sur $\hat{L}$. Posons $\underline{X}'' = \underline{\underline{K}}'' \circ \underline{X}'$. Soit $\underline{Y}$ le vecteur $(d + d'')$-dimensionnel de composantes $Y^i = X^i$ si $i \leqq d$ et $Y^{d+i} = X''^i$ si $i \leqq d''$; on a évidemment $\mathscr{L}^p(\mathscr{H}, \underline{X}'') = \mathscr{L}^p(\underline{Y})$. Mais si $\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}} \\ \underline{\underline{K}}'' \end{pmatrix}$ on a aussi $\underline{Y} = \underline{\underline{H}} \circ \underline{X}'$, tandis que la restriction à L de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{H}}$ est clairement injective. (3.2) entraine alors que $\mathscr{L}^p(\underline{X}') = \mathscr{L}^p(\underline{Y})$, d'où le résultat. ■

Dans le cas $p \geqq 2$ on a une manière *beaucoup plus simple* d'exprimer la p-dimension instantanée de $\mathscr{H}$. Soit $\underline{X} = (X^i)_{i \leqq d}$ un p-système générateur. D'après (9) on lui associe un processus matriciel *prévisible* $\tilde{\underline{\underline{M}}}$ tel que $\langle \underline{X}, {}^t\underline{X} \rangle = \tilde{\underline{\underline{M}}} \circ \tilde{A}$, et on a:

(4.4) **Théorème.** *Le rang de la matrice symétrique $\tilde{\underline{\underline{M}}}$ est $M_{\tilde{A}}$-p.s. égal à ζ.*

Ce résultat permet notamment de construire des p-bases et des p-bases orthogonales (rappelons que $p \geqq 2$) de manière très simple. Par exemple si $d' = p$-dim $\mathscr{H}$ il est facile de construire un processus matriciel $d' \times d$, soit $\underline{\underline{K}}$, appartenant à

$L^p_{loc}(\underline{X})$ (par exemple, borné) et tel que la matrice $\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}\,{}^t\underline{\underline{K}}$ soit de rang ζ: alors $\underline{X}'=\underline{\underline{K}}\circ\underline{X}$ est une p-base de $\mathscr{H}$; si de plus on choisit $\underline{\underline{K}}$ de sorte que $\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}\,{}^t\underline{\underline{K}}$ soit diagonale on obtient une p-base orthogonale; si enfin on choisit $\underline{\underline{K}}$ de sorte que les valeurs propres de la matrice diagonale $\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}\,{}^t\underline{\underline{K}}$ soient rangées par ordre décroissant, on retrouve les résultats de Davis et Varaiya [1].

Démonstration. On a $[\underline{X},{}^t\underline{X}]=\underline{\underline{N}}\circ\tilde{A}+(\underline{U}\,{}^t\underline{U})*\mu$, si bien que d'après (11),

$$\tilde{\underline{\underline{M}}}\circ\tilde{A}=\langle\underline{X},{}^t\underline{X}\rangle=\underline{\underline{N}}\circ\tilde{A}+(\underline{U}\,{}^t\underline{U})*\nu=[\underline{\underline{N}}+\int_{\mathbb{R}^d}F(d\underline{y})(\underline{y}\,{}^t\underline{y})]\circ\tilde{A}$$

et une version de $\tilde{\underline{\underline{M}}}$ est donnée par

$$\tilde{\underline{\underline{M}}}=\underline{\underline{N}}+\int_{\mathbb{R}^d}F(d\underline{y})({}^t\underline{x}\,\underline{y})^2.$$

Si $\underline{x}\in\mathbb{R}^d$ il vient alors

$${}^t\underline{x}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{x}={}^t\underline{x}\,\underline{\underline{N}}\,\underline{x}+\int_{\mathbb{R}^d}F(d\underline{y})({}^t\underline{x}\,\underline{y})^2$$

et les deux termes du second membre sont positifs. Par suite ${}^t\underline{x}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{x}=0$ si et seulement si ${}^t\underline{x}\,\underline{\underline{N}}\,\underline{x}=0$ (donc $\underline{x}$ orthogonal à L_c) et ${}^t\underline{x}\,\underline{y}=0$ $F(d\underline{y})$-p.s. (donc $\underline{x}$ orthogonal à L_d). Par suite ${}^t\underline{x}\,\tilde{\underline{\underline{M}}}\,\underline{x}=0$ si et seulement si $\underline{x}$ est orthogonal à L, ce qui montre que le rang de $\tilde{\underline{\underline{M}}}$ est ζ. ∎

Revenons au cas général $p\in[1,\infty[$. On pourrait se demander si on a un résultat analogue avec la matrice optionnelle $\underline{\underline{M}}$ définie en (5). Ce n'est pas vrai en général: soit par exemple Y un mouvement brownien et Z un processus de Poisson compensé indépendant de Y; on peut prendre $A_t=t+\sum_{s\leq t}\Delta Z_s$, donc $\tilde{A}_t=2t$; on a alors $\zeta=2$, tandis qu'une version de $\underline{\underline{M}}$ est donnée par

$$\underline{\underline{M}}(\omega,t)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}1_{\{\Delta Z_t(\omega)=0\}}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}1_{\{\Delta Z_t(\omega)=1\}}$$

qui est identiquement de rang 1. Cependant, on a:

(4.5) **Théorème.** *Le rang de la matrice symétrique $\underline{\underline{M}}$ est M_A-p.s. inférieur ou égal à la p-dimension de $\mathscr{H}$.*

Démonstration. Soit $\underline{X}'=(X'^i)_{i\leq d'}$ une p-base de $\mathscr{H}$ (donc $d'\leq d$). Si $\underline{\underline{M}}'$ est associée à $\underline{X}'$ par $[\underline{X}',{}^t\underline{X}']=\underline{\underline{M}}'\circ A$, et comme d'après (2.3) on a $\underline{X}=\underline{\underline{K}}\circ\underline{X}'$ où $\underline{\underline{K}}$ est un processus matriciel $d\times d'$, on a $[\underline{X},{}^t\underline{X}]=(\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}'\,{}^t\underline{\underline{K}})\circ A$ d'après (6), donc on peut prendre $\underline{\underline{M}}=\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}'\,{}^t\underline{\underline{K}}$. Comme $\underline{\underline{M}}'$ est une matrice $d'\times d'$, le rang de $\underline{\underline{M}}$ ne saurait excéder d'. ∎

References

1. Davis, M.H.A., Varaiya, P.: The multiplicity of an increasing family of σ-fields. Ann. Probability **2**, 958–963 (1974)
2. Galtchouk, L.: The structure of a class of martingales. Proc. School-Seminar on random processes. Drusnininkai, Acad. Sci. Lit. SSR, **I**, 7–32 (1975)

3. Kunita, H., Watanabe, S.: On square-integrable martingales. Nagoya Math. J., **30**, 209–245 (1967)
4. Jacod, J.: Un théorème de représentation pour les martingales discontinues. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete **34**, 225–244 (1976)
5. Jacod, J., Yor, M.: Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete **38**, 83–125 (1977)
6. Meyer, P.A.: Intégrales stochastiques. Sém. Probababilités Strasbourg I. Lect. Notes Math. **39**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
7. Meyer, P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Probabilités Strasbourg X. Lect. Notes Math. **511**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
8. Meyer, P.A.: Intégrales hilbertiennes. Sém. Probabilités Strasbourg XI. Lect. Notes Math. **581**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
9. Métivier, M., Pistone, G.: Une formule d'isométrie pour l'intégrale stochastique hilbertienne et équations d'évolution linéaires stochastiques. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete **33**, 1–18 (1975)

Reçu le 11 Octobre 1977