Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
36, 295–316 (1976)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete
© by Springer-Verlag 1976

La variation d'ordre p des semi-martingales

D. Lepingle
Département de Mathématiques, Université d'Orléans, F-45045 Orléans Cedex, France

Soient X une semi-martingale, p un nombre réel positif, $S=(t_i)$ une subdivision de l'intervalle $[0,t]$, $\sum|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p$ la somme variationnelle correspondante. Le but de ce travail est double: étudier la finitude de la borne supérieure de ces sommes variationnelles lorsque S varie dans l'ensemble des subdivisions de $[0,t]$; en tirer des conséquences quant à la convergence en probabilité, en moyenne et presque sûre de ces sommes lorsque le pas des subdivisions S tend vers zéro, sans qu'elles soient nécessairement emboîtées. Les méthodes font appel aux inégalités de Burkholder à la place des techniques de fonctions caractéristiques employées jusqu'à présent pour traiter ces problèmes lorsque X est un processus à accroissements indépendants stationnaires.

1. Introduction

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé complet et t un réel strictement positif. Les processus réels que nous rencontrerons seront définis sur $[0, \infty[$, à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche. Si X est un tel processus et si $p>0$, nous notons

$$\Delta X_s = X_s - X_{s-} \quad \text{pour } s>0,$$
$$S_p(X,t)=\sum_{0<s\leqq t}|\Delta X_s|^p.$$

Si maintenant $S=(0=t_0, \ldots, t_m=t)$ est une subdivision de $[0,t]$ dont le pas $\pi(S)=\sup|t_{i+1}-t_i|$ est destiné à tendre vers zéro, nous notons

$$V_p(X,S)=\sum_i |X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p,$$

et la borne supérieure des sommes $V_p(X,S)$ pour toutes les subdivisions S de $[0,t]$ sera appelée *variation forte d'ordre* p et notée $W_p(X,t)$.

Lorsque X est un processus à accroissements indépendants (P.A.I) et stationnaires, la finitude de $W_p(X,t)$ et la convergence des sommes variationnelles $V_p(X,S)$ lorsque $\pi(S)$ tend vers zéro ont fait l'objet de nombreuses études il y a quelques années. Bretagnolle [3] et Monroe [18] ont indépendamment l'un de l'autre généralisé d'anciens résultats de Blumenthal et Getoor ([1] et [2]). La méthode de Monroe est plus simple, mais le résultat de Bretagnolle un peu plus fort: si X est un P.A.I. stationnaire de mesure de Lévy L, dépourvu de partie brownienne, la condition nécessaire et suffisante pour que $W_p(X, t)$ soit fini p.s., lorsque $1 \leqq p < 2$, est

$$\int_{|x| \leqq 1} |x|^p L(dx) < \infty;$$

sinon, $W_p(X, t)$ est infini p.s. Sous la même condition (y compris cette fois pour $p=2$), Millar ([16] et [17]) montre que $V_p(X, S)$ converge en probabilité vers $S_p(X, t)$ lorsque $\pi(S)$ tend vers zéro. Il démontre également la convergence p.s. pour toute suite (S_n) de partitions emboîtées de $[0, t]$, lorsque X est symétrique, et Kallenberg [11] a prouvé un peu plus tard qu'on peut se passer de l'hypothèse de symétrie, comme Cogburn et Tucker [7] l'avaient fait pour $p=2$.

Nous savons depuis Lévy que pour un mouvement brownien Z, $W_2(Z, t)$ est infini p.s. C. Doléans a cependant montré [9] que pour toute martingale M, $V_2(M, S)$ converge en probabilité, tandis que Monroe [20] a récemment construit une martingale M de carré intégrable et une suite (S_n) de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ telles que la limite supérieure de $V_2(M, S_n)$ soit p.s. infinie.

L'objet de ce travail est d'étudier pour toutes les valeurs de $p>0$ la finitude de $W_p(X, t)$ et les diverses convergences de $V_p(X, S)$ lorsque X est une semi-martingale. Le cadre des semi-martingales a été choisi parce qu'il est assez large pour contenir les martingales, les P.A.I. stationnaires, et les processus qui sont obtenus à partir des précédents par des transformations simples. Nous allons voir que presque tout ce qui a été montré antérieurement pour les P.A.I. reste vrai pour les semi-martingales. Pas tout, car le contre-exemple de Monroe n'est pas à accroissements indépendants, et ne pourrait pas l'être; de même, il est très incertain que le résultat de Bretagnolle ait son pendant exact pour les semi-martingales.

Alors que les démonstrations précédentes pour les P.A.I. stationnaires reposaient sur l'étude du comportement de $t^{-1}|X_t|^p$ lorsque t tend vers zéro en liaison avec la fonction caractéristique du processus, les nôtres ont comme outil principal les inégalités de Burkholder, avec de plus le théorème de plongement des martingales dans le mouvement brownien.

Après avoir défini dans le paragraphe 2 la notion de semi-martingale et rappelé le lien entre martingale et mouvement brownien, nous dressons dans le paragraphe 3 und liste d'inégalités qui nous serviront continuellement, et nous en profitons pour régler tout de suite le problème de la convergence des sommes variationnelles pour $0<p \leqq 1$. Le paragraphe 4 est consacré à l'étude de la variation forte; nous montrons qu'elle est finie pour $p>2$ et donnons des conditions suffisantes pour qu'ellele soit pour $0<p \leqq 2$. Dans le paragraphe 5, nous étudions comme en [13] des inégalités de martingales vectorielles qui seront utiles dans le cas $1<p \leqq 2$. Les paragraphes 6, 7 et 8 étudient respectivement les convergences en probabilité, en moyenne et presque sûre de $V_p(X, S)$ lorsque $\pi(S)$ tend vers zéro; pour cette dernière convergence, nous améliorons pour $1<p<2$ les résultats antérieurs sur les P.A.I., qui supposaient toujours l'emboîtement des subdivisions S, et pour $p>2$ nous donnons une réponse positive pour toutes les semi-martingales. Enfin le paragraphe 9 s'intéresse à la variation conditionnelle d'ordre $p>1$, comme C. Doléans l'a fait pour $p=2$ [8].

Ce travail développe la note [12], qui se restreignait au cas $p>2$ et aux martingales locales. Il a grandement bénéficié durant toute sa préparation des nombreuses conversations de son auteur avec A. Bonami.

2. Rappels sur les semi-martingales

(a) Nous rappelons tout d'abord un certain nombre de définitions et de résultats qui figurent dans [10] et [15].

Donnons-nous une suite croissante $(\mathscr{F}_t,\ 0 \leqq t < \infty)$ de sous-tribus complètes de $\mathscr{F}$, continue à droite et telle que $\mathscr{F}_0$ contienne tous les ensembles négligeables de $\mathscr{F}$. Une semi-martingale X est la somme d'une martingale locale M par rapport à $(\mathscr{F}_t)$ et d'un processus A adapté à $(\mathscr{F}_t)$ dont les trajectoires sont p.s. des fonctions à variation finie sur tout intervalle $[0, t]$: $W_1(A, t) < \infty$ p.s. On peut évidemment choisir M et A tels que $M_0 = 0$; nous le ferons systématiquement, et sauf indication contraire, toutes les martingales locales que nous rencontrerons seront nulles en zéro.

Dans ce cas, si M est une martingale locale, il existe une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt tendant vers l'infini tels que pour tout n,

$$M^{T_n} = U^n + V^n,$$

où U^n est une martingale de carré intégrable, et V^n une martingale à variation intégrable. C'est la décomposition de Gundy des martingales, adaptée au cas continu ([10], p. 94). Si maintenant M est une martingale de carré intégrable et si (S_m) représente une suite de temps d'arrêt >0 épuisant les sauts de M, il existe une martingale continue de carré intégrable notée M^c et appelée *partie continue* de M telle que

$$M = M^c + \sum_m M^{(m)},$$

où $M^{(m)}$ est la martingale compensée du processus $\Delta M_{S_m} 1_{\{t \geqq S_m\}}$ (elle a un seul saut d'amplitude ΔM_{S_m} pour $t = S_m$), et où la somme est prise dans l'espace des martingales de carré intégrable muni de la norme $(E[(M_\infty)^2])^{1/2}$. Posons alors

$$[M, M]_t = \langle M^c, M^c \rangle_t + S_2(M, t);$$

par réduction et recollement, nous pouvons encore définir pour toute semi-martingale les processus X^c et $[X, X]$, qui vérifient également

$$[X, X]_t = \langle X^c, X^c \rangle_t + S_2(X, t).$$

Nous poserons pour simplifier

$$\langle X^c \rangle = \langle X^c, X^c \rangle,$$
$$[X] = [X, X].$$

Remarquons que pour toute semi-martingale X, $[X]_t$ et $S_2(X, t)$ sont p.s. finis.

(b) Soit X un P.A.I. nul en zéro qui soit en même temps une semi-martingale par rapport à sa famille de tribus naturelles dûment complétées (par définition, tous les P.A.I. que nous rencontrerons seront de ce type). Nous avons alors la décomposition suivante

$$X = a + X^1 + X^2 + X^3 + X^4,$$

où

a est une fonction non aléatoire, à variation localement finie afin que X soit bien une semi-martingale;

X^1 est un P.A.I. gaussian centré à trajectoires continues (en fait $X^1 = X^c$);

X^2 est un P.A.I. continu en probabilité et en même temps une martingale localement de carré intégrable sans partie continue, s'écrivant

$$X_t^2 = \int_{|x| \leqq 1} x[N_t(dx) - L_t(dx)],$$

où $N_t(B)$, si B est un borélien de $[-1, +1]$ vérifiant $0 \notin \bar{B}$, est un processus de Poisson qui représente le nombre de sauts de X^2 intervenant avant l'instant t et dont l'amplitude est située dans B, et où $L_t(B) = E[N_t(B)]$ avec pour tous $t, \varepsilon > 0$,

$$L_t(\varepsilon < |x| \leqq 1) < \infty \quad \text{et} \quad \int_{|x| \leqq 1} x^2 L_t(dx) < \infty;$$

X^3 est un P.A.I. à discontinuités fixes s'écrivant

$$X_t^3 = \sum_{t_k \leqq t} D_k,$$

où (t_k) est une suite de réels > 0 et (D_k) une suite de variables aléatoires indépendantes centrées bornées par 1;

X^4 est la somme des sauts de X d'amplitude strictement supérieure à 1 en valeur absolue.

(c) Terminons ce paragraphe par un résultat très utile pour le comportement des trajectoires des semi-martingales; si M est une martingale, des travaux antérieurs de Skorokhod et Dubins ont conduit Monroe [19] à construire un mouvement brownien Z et une famille croissante de temps d'arrêt finis $(T_t, t \geqq 0)$ tels que le processus $(Z_{T_t}, t \geqq 0)$ ait les mêmes répartitions finies que M; si M est continue, le processus $(T_t, t \geqq 0)$ peut être choisi continu.

3. Les inégalités de base

(a) Rappelons les inégalités ordinaires

$$\begin{aligned}
&|a+b|^p \leqq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p) && \text{si } p \geqq 1,\\
&|a|^p - |b|^p \leqq p|a|^{p-1}\,||a| - |b|| && \text{si } p \geqq 1,\\
&|a+b|^p \leqq |a|^p + |b|^p && \text{si } 0 < p \leqq 1,\\
&\left(\sum |a_i|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum |a_i|^q\right)^{1/q} && \text{si } 0 < q \leqq p < \infty.
\end{aligned}$$

Nous déduisons de la dernière inégalité que

$$(V_p(X,S))^{1/p} \leqq (V_q(X,S))^{1/q},$$
$$(W_p(X,t))^{1/p} \leqq (W_q(X,t))^{1/q},$$
$$(S_p(X,t))^{1/p} \leqq (S_q(X,t))^{1/q}.$$

(b) Posons, lorsque X est une semi-martingale et t un réel >0

$$\underline{\lim}\, V_p(X,S) = \lim_{\delta \to 0} \inf \{V_p(X,S);\ S \in \Sigma_\delta\},$$

où Σ_δ est l'ensemble des subdivisions de $[0,t]$ de pas inférieur à δ, et de même

$$\overline{\lim}\, V_p(X,S) = \lim_{\delta \to 0} \sup \{V_p(X,S);\ S \in \Sigma_\delta\}.$$

La continuité à droite et l'existence de limites à gauche pour X montrent que

$$S_p(X,t) \leqq \underline{\lim}\, V_p(X,S) \qquad \text{pour tout } p>0.$$

Nous montrerons plus loin que pour $p>1$, $\underline{\lim}\, V_p(X,S)$ est fini si et seulement si $S_p(X,t)$ l'est.

Si S est une subdivision quelconque de $[0,t]$, il n'existe qu'au plus $t\,\delta^{-1}$ intervalles $[t_{i-1}, t_i]$ de longueur plus grande que δ; nous en déduisons, en posant

$$X_t^* = \sup \{|X_s|;\ s \leqq t\},$$

que pour tout $\delta>0$,

$$W_p(X,t) \leqq \sup \{V_p(X,S);\ S \in \Sigma_\delta\} + 2^p\, t\, \delta^{-1} |X_t^*|^p.$$

Comme $M_t^* < \infty$ p.s. pour toute martingale locale et de même

$$A_t^* \leqq |A_0| + W_1(A,t) < \infty$$

p.s., nous en déduisons que $X_t^* < \infty$ p.s., ce qui entraîne que $W_p(X,t)$ est fini p.s. dès que $\overline{\lim}\, V_p(X,S)$ l'est.

(c) Voici maintenant les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (B.D.G.) qui nous seront d'une aide précieuse. Appelons *fonction à croissance modérée* sur $\mathbb{R}_+$ toute fonction Φ convexe positive, nulle en zéro, vérifiant pour une constante c dépendant de Φ l'inégalité $\Phi(2\lambda) \leqq c\,\Phi(\lambda)$ pour tout $\lambda>0$. Il existe alors deux constantes c_1 et c_2 ne dépendant que de c telles que pour toute martingale locale M,

$$c_1\, E[\Phi \circ M^*] \leqq E[\Phi \circ ([M]_\infty)^{1/2}] \leqq c_2\, E[\Phi \circ M^*],$$

où $M^* = \sup \{|M_t|;\ t \geqq 0\}$. Lorsque $1 \leqq p \leqq 2$ et $M^c = 0$, l'inégalité

$$([M]_t)^{p/2} = (S_2(M,t))^{p/2} \leqq S_p(M,t)$$

nous permet d'obtenir, en prenant $\Phi(x) = |x|^p$,

$$E[|M_t|^p] \leqq E[(M_t^*)^p] \leqq c\, E[S_p(M,t)],$$

(toutes les constantes s'appelent désormais c). Si nous appliquons cette dernière inégalité aux martingales

$$M_s^i = E[M_{t_i} - M_{t_{i-1}} \,|\, \mathscr{F}_s] \qquad i = 1, \ldots, m,$$

où $S=(t_i)$ est une subdivision de $[0, t]$ et M une martingale sans partie continue, nous en déduisons, pour une constante c ne dépendant que de p,

$$E[V_p(M, S)] \leqq c\, E[S_p(M, t)].$$

(d) Il est clair, par continuité à droite de X, que toute somme $V_p(X, S)$ est approchable arbitrairement près par une somme $V_p(X, S')$, où les termes de S' sont du type $k 2^{-n} t (n \geqq 0, k \leqq 2^n)$. Soit $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des subdivisions de cette forme, où n est fixé, et $\mathscr{D} = \bigcup_{n \geqq 0} \mathscr{D}_n$. Si

$$W_p^n(X, t) = \sup \{V_p(X, S);\ S \in \mathscr{D}_n\};$$

alors

$$W_p(X, t) = \sup \{V_p(X, S);\ S \in \mathscr{D}\} = \lim_{n \to \infty} W_p^n(X, t).$$

Lorsque $0 < p \leqq 1$, l'inégalité vue en (a) permet d'obtenir

$$W_p^n(X, t) = \sum_{k=1}^{2^n} |X_{k 2^{-n} t} - X_{(k-1) 2^{-n} t}|^p.$$

Nous pouvons dès maintenant conclure sur les problèmes de convergence dans ce cas.

Proposition 1. *Si $0 < p \leqq 1$, les sommes $V_p(X, S)$ convergent p.s. vers $W_p(X, t)$. La convergence a lieu dans tout espace L^r $(0 < r < \infty)$ tel que $W_p(X, t)$ y appartienne.*

Nous verrons dans le paragraphe suivant des conditions suffisantes pour que $W_p(X, t)$ soit fini.

4. La variation forte

Rappelons que si Z est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+$, son module de continuité est $\left(2h \operatorname{Log} \frac{1}{h}\right)^{1/2}$. Cela entraîne que pour tout temps aléatoire fini T et tout $\lambda < \frac{1}{2}$, il existe p.s. δ et K (dépendant de ω dans Ω) tels que $|Z_{t_2} - Z_{t_1}| \leqq K |t_2 - t_1|^\lambda$ dès que $0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq T$, $|t_2 - t_1| \leqq \delta$. Nous allons en tirer quelques conséquences pour la variation forte des semi-martingales.

Théorème 1. *Soit X une semi-martingale. Sa variation forte $W_p(X, t)$ est finie* p.s.

(a) *pour $p > 2$: sur tout Ω*
(b) *pour $1 < p \leqq 2$: sur l'ensemble $\left(\bigcup_{q < p} \{S_q(X, t) < \infty\}\right) \cap \{\langle X^c \rangle_t = 0\}$*
(c) *pour $p = 1$: sur l'ensemble $\{S_1(X, t) < \infty\} \cap \{\langle X^c \rangle_t = 0\}$*
(d) *pour $0 < p < 1$: sur l'ensemble $\{S_p(X, t) < \infty\} \cap \{\langle X^c \rangle_t = 0\}$ si X est une martingale locale à temps de sauts prévisibles.*

Si X est un P.A.I. sans partie continue, on peut remplacer

(b) et (d) *par*
(b') *pour $1 < p < 2$: sur tout Ω si $S_p(X, t) < \infty$ p.s.*
(d') *pour $0 < p < 1$: sur tout Ω si $S_p(X, t) < \infty$ p.s., X^2 est symétrique et a à p-variation finie sur $[0, t]$.*

Preuve. (a) Soient $p>2$ et $\lambda<\frac{1}{2}$ tels que $\lambda p>1$. D'après le rappel que nous venons de faire, pour tout temps T fini, pour un certain δ et un certain K,

$$\sup\{V_p(Z,S);\ S\in\Sigma_\delta\}\leqq K^p\,\delta^{\lambda p-1}\,T,$$

où Σ_δ est encore l'ensemble des subdivisions de $[0,T]$ de pas inférieur à δ. Il en résulte que $W_p(Z,T)<\infty$ p.s. D'après le résultat rappelé en 2(c), si M est une martingale,

$$P(W_p(M,t)>\lambda)=\lim_{n\to\infty}P(W_p^n(M,t)>\lambda)\leqq P(W_p(Z,T_t)>\lambda)$$

pour tout $\lambda>0$, et cette expression tend vers zéro quand λ tend vers l'infini. Si M est une martingale locale, on utilise une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt réduisant M telle que $P(T_n<t)$ tende vers zéro quand n tend vers l'infini. De

$$P(W_p(M,t)\neq W_p(M,t\wedge T_n))\leqq P(T_n<t),$$

il résulte que $W_p(M,t)$ est encore fini p.s. Enfin, si X est une semi-martingale avec $X=M+A$,

$$W_p(X,t)\leqq 2^{p-1}(W_p(M,t)+W_p(A,t))<\infty\quad\text{p.s.}$$

(b) Soient $1<q<p\leqq 2$. Posons

$$T=\inf\{s:\ \langle X^c\rangle_s>0\}$$

et soit (T_n) une suite de temps d'arrêt croissant vers l'infini tels que (voir 2(a))

$$X^{T\wedge T_n}=U^n+A^n,$$

où U^n est une martingale de carré intégrable sans partie continue et A^n un processus adapté à variation finie p.s. sur $[0,t]$, ce qui entraîne $W_p(A^n,t)<\infty$ p.s. Posons encore, pour tout $m\geqq 0$,

$$S_{n,m}=\inf\{s:\ S_q(U^n,s)>m\}.$$

De

$$S_q(U^n,t\wedge S_{n,m})\leqq m+|\Delta U^n_{t\wedge S_{n,m}}|^q,$$

nous déduisons, sachant que U^n est de carré intégrable, que

$$E[S_q(U^n,t\wedge S_{n,m})]<\infty.$$

Posons, pour alléger l'écriture, $N=(U^n)^{S_{n,m}}$ et étudions $W_p(N,t)$. Si cette fois $(Z_{T_s},s\geqq 0)$ a mêmes répartitions finies que N, nous vérifions aisément en posant $\lambda=\dfrac{q}{2p}$ que $W_p(N,t)$ est fini p.s. si $W_{\lambda p}(T,t)$ est fini p.s. Comme $\lambda p<1$.

$$W_{\lambda p}^n(T,t)=\sum_{k=1}^{2^n}(T_{k2^{-n}t}-T_{(k-1)2^{-n}t})^{\lambda p}.$$

Nous savons que pour le mouvement brownien Z, $[Z]_t=t$. Appliquant alors l'inégalité B.D.G. avec $\Phi(x)=|x|^q$ et l'inégalité de Doob, nous obtenons pour $0\leqq u<v\leqq t$

$$\begin{aligned}E[(T_v-T_u)^{\lambda p}]&\leqq c\,E[|Z_{T_v}-Z_{T_u}|^q]\\&=c\,E[|N_v-N_u|^q].\end{aligned}$$

Appliquant maintenant à N l'autre côté de l'inégalité B.D.G., nous aboutissons à

$$E[W_{\lambda p}(T,t)] = \lim_{n\to\infty} E[W^n_{\lambda p}(T,t)] \leqq c\, E[S_q(N,t)] < \infty.$$

Il reste à localiser le résultat.

$$\bigcup_m \{S_{n,m} > t\} = \{S_q(U^n, t) < \infty\} = \{S_q(X, t\wedge T\wedge T_n) < \infty\}$$

$$\{S_q(X,t)<\infty\} \cap \{\langle X^c\rangle_t = 0\} \subset \bigcup_n (\{T_n > t\} \cap \{S_q(X, t\wedge T\wedge T_n) < \infty\}).$$

En tout point de l'ensemble du premier membre (p.s.), on peut trouver n et m tels que $T\wedge T_n \wedge S_{n,m} \geqq t$, et par conséquent $W_p(X,t) < \infty$.

(c) Soit $p=1$. Posons encore

$$T = \inf\{s: \langle X^c\rangle_s > 0\}$$

et soit (T_n) une suite de temps d'arrêt croissant vers l'infini réduisant la martingale locale M^T, si $X = M + A$. Introduisons encore

$$S_{n,m} = \inf\{s: S_1(M^{T_n}, s) > m\},$$

ce qui nous donne

$$E[S_1(M, T\wedge T_n \wedge S_{n,m} \wedge t)] < \infty.$$

Nous disposons cette fois de l'inégalité ([15], p. 13)

$$E[W_1(N,t)] \leqq 2E[S_1(N,t)]$$

pour toute martingale N sans partie continue. Le résultat en découle comme en (b), si l'on remarque en outre que

$$\{W_1(X,t)<\infty\} = \{W_1(M,t)<\infty\} \quad \text{p.s.},$$
$$\{S_1(X,t)<\infty\} = \{S_1(M,t)<\infty\} \quad \text{p.s.}$$

(d) Soit $0<p<1$. Si M est une martingale locale dont les sauts sont épuisés par une suite de temps d'arrêt prévisibles, et si

$$T = \inf\{s: \langle M^c\rangle_s > 0\},$$

alors M^T est exactement la somme de ses sauts, et dans ces conditions

$$W_p(M, t\wedge T) = S_p(M, t\wedge T).$$

(b′) Soit $1<p<2$. Si X est un P.A.I. tel que

$$X = a + X^2 + X^3 + X^4,$$

nous avons supposé que $W_1(a,t) < \infty$, donc

$$S_p(a,t) \leqq W_p(a,t) < \infty,$$

et de même $W_p(X^4, t) < \infty$ p.s., car il n'y a dans l'intervalle $[0,t]$ qu'un nombre fini de sauts d'amplitude supérieure à 1. La nature de la décomposition de X montre aussi que

$$S_p(X^2+X^3+X^4, t) = S_p(X^2,t) + S_p(X^3,t) + S_p(X^4,t).$$

L'hypothèse $S_p(X,t)<\infty$ p.s. entraîne donc

$$S_p(X^2,t)<\infty \quad \text{p.s.},$$
$$S_p(X^3,t)<\infty \quad \text{p.s.}$$

Dans chacun de ces deux cas, l'utilisation de la transformation de Laplace (voir [16] p. 61 pour X^2) montre qu'en fait

$$E[S_p(X^2,t)]<\infty,$$
$$E[S_p(X^3,t)]<\infty.$$

Mais le théorème II de [3], p. 64, permet d'obtenir, pour $Y=X^2+X^3$,

$$E[W_p^n(Y,t)] \leqq c \sum_{k=1}^{2^n} E[|Y_{k2^{-n}t}-Y_{(k-1)2^{-n}t}|^p]$$
$$\leqq c\, E[S_p(Y,t)]$$

en appliquant en dernier lieu l'inégalité B.D.G. D'où la conclusion, puisque $W_p(X^2+X^3,t)$ est intégrable, $W_p(a,t)$ et $W_p(X^4,t)$ finis p.s.

(d') Soit $0<p<1$. Par hypothèse,

$$X^1=0$$
$$W_p(a,t)<\infty$$
$$X_t^2=\int_{|x|\leqq 1} x\, N_t(dx).$$

Le processus X est alors la somme de ses sauts, et

$$W_p(X,t)=S_p(X,t).$$

Lorsque X est une martingale, la finitude de sa variation forte nous conduit à une inégalité faible. Posons

$$W_p(X)=\lim_{t\to\infty} W_p(X,t),$$
$$S_p(X)=\lim_{t\to\infty} S_p(X,t).$$

Lemme 1. (a) *Si $p>2$, il existe une constante A telle que pour toute martingale M,*

$$P(W_p(M)>\lambda^p) \leqq A\,\lambda^{-2}\, E[(M_\infty)^2] \quad \textit{pour tout } \lambda>0.$$

(b) *Si $1<q<p\leqq 2$, il existe une constante A telle que pour toute martingale M sans partie continue,*

$$P(W_p(M)>\lambda^p) \leqq A\,\lambda^{-q}\, E[S_q(M)] \quad \textit{pour tout } \lambda>0.$$

Preuve. (a) On peut montrer ce résultat à l'aide du théorème 1(a) et de la méthode indiquée en [16], p. 72, ce qui permet d'obtenir la condition de finitude C_2 du théorème 2 de [4]. Nous allons suivre une démonstration voisine.

Si l'énoncé de (a) était faux, il existerait une suite de martingales (Ω^k, $(\mathscr{F}_t^k)$, P^k, M^k) telle que

$$\sum_k P^k(W_p(M^k)>1)=\infty,$$
$$\sum_k E^k[(M_\infty^k)^2]<\infty.$$

Sur l'espace $\Omega'=\prod_k \Omega^k$, muni de la probabilité $P'=\bigotimes_k P^k$, considérons pour tout $\omega'=(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ et tout $t>0$

$$M_t'(\omega')=\sum_{i=1}^{k-1} M_\infty^i(\omega_i)+M_{g(k-t)}^k(\omega_k) \qquad \text{lorsque } k-1\leqq t<k,$$

où $g(u)=\frac{1}{u}$ pour $0<u\leqq 1$. Définissons de même la famille de tribus $(\mathscr{F}_t')$ sur Ω' par

$$\mathscr{F}_t'=\left(\bigotimes_{i=1}^{k-1} \mathscr{F}_\infty^i\right)\otimes \mathscr{F}_{g(k-t)}^k \otimes \left(\bigotimes_{j=k+1}^{\infty} \mathscr{F}_0^j\right) \qquad \text{lorsque } k-1\leqq t<k.$$

La condition $\sum_k E^k[(M_\infty^k)^2]<\infty$ assure que M' est une martingale de carré P'-intégrable adaptée à $(\mathscr{F}_t')$. Posons

$$A_k=\{\sup\{V_p(M', S);\ S\in\mathscr{S}_k\}>1\},$$

où $\mathscr{S}_k$ est l'ensemble des subdivisions finies de $[k-1, k]$. Les événements A_k sont indépendants et

$$\sum_k P'(A_k)=\sum_k P^k(W_p(M^k)>1)=\infty;$$

le lemme de Borel-Cantelli permet d'affirmer que pour presque tout $\omega'\in\Omega'$, pour tout réel $K>0$, il existe une subdivision finie S de $[0, \infty[$ pour laquelle $V_p(M', S)(\omega')$ soit plus grand que K. Cela entraîne $W_p(M')=\infty$. En posant $M_t=M'_{f(t)}$, où

$$f(t)=\frac{t}{1-t} \quad \text{si} \quad 0\leqq t<1$$
$$\quad =\infty \quad \text{si} \quad t\geqq 1,$$

nous obtenons une martingale M telle que $W_p(M, 1)=\infty$, ce qui est contraire au résultat du théorème précédent.

(b) La démonstration est analogue pour $1<q<p\leqq 2$. Nous imposons cette fois aux martingales M^k de vérifier

$$(M^k)^c=0 \qquad \text{pour tout } k,$$
$$\sum_k E[S_q(M^k)]<\infty.$$

Ces deux conditions assurent que la martingale M' construite est bornée dans L^q (inégalité B.D.G.), donc uniformément intégrable.

Comme il arrive fréquemment, de cette inégalité faible on peut déduire une inégalité intégrale pour les fonctions à croissance modérée.

Proposition 2. *Soit Φ une fonction à croissance modérée.*

(a) *Si $p>2$, il existe une constante c telle que*

$$E[\Phi \circ (W_p(M))^{1/p}] \leqq c\, E[\Phi \circ M^*]$$

pour toute martingale M.

(b) *Si $1<q<p\leqq 2$, ou si $1=q=p$, il existe une constante c telle que*

$$E[\Phi \circ (W_p(M))^{1/p}] \leqq c\, E[\Phi \circ (S_q(M))^{1/q}]$$

pour toute martingale M sans partie continue.

Preuve. (a) Selon une méthode maintenant classique en théorie des martingales, la démonstration se décompose en deux: recherche d'une inégalité de distribution pour des martingales à sauts «prévisiblement bornés», puis décomposition de Davis de la martingale M.

Soit donc L une martingale uniformément intégrable pour laquelle existe un processus croissant adapté D vérifiant

$$|\Delta L_t| \leqq D_{t-} \qquad \text{pour tout } t>0.$$

Si $\delta>0$, $\beta>1+\delta$, $\lambda>0$, posons

$$\begin{aligned} T&=\inf\{t\colon W_p(L,t)>\beta^p \lambda^p\},\\ S&=\inf\{t\colon W_p(L,t)>\lambda^p\},\\ R&=\inf\{t\colon D_t \vee L^*_t>\delta \lambda\},\\ N_t&=L_{(t+S)\wedge R}-L_{S\wedge R}. \end{aligned}$$

Le processus N est une martingale uniformément intégrable adaptée à $(\mathscr{G}_t)=(\mathscr{F}_{t+S})$. Il en résulte

$$\begin{aligned} (W_p(L,R))^{1/p} &\leqq (W_p(L, R\wedge S))^{1/p}+(W_p(N))^{1/p},\\ P(T<\infty, R=\infty) &\leqq P(W_p(N)>(\beta-\delta-1)^p \lambda^p)\\ &\leqq \frac{A}{(\beta-\delta-1)^2 \lambda^2}\, E[(N_\infty)^2]. \end{aligned}$$

Sur $\{S=\infty\}$, $N_\infty=0$, et sur $\{S<\infty\}$, $N_\infty^2 \leqq 9\,\delta^2 \lambda^2$. Par conséquent,

$$P(T<\infty, R=\infty) \leqq \frac{9\,\delta^2}{(\beta-\delta-1)^2}\, A\, P(S<\infty).$$

De cette inégalité de distribution découle l'inégalité intégrale ([5], p. 26)

$$E[\Phi \circ (W_p(L))^{1/p}] \leqq c\, E[\Phi \circ D_\infty]+c\, E[\Phi \circ L^*]$$

pour toute fonction Φ à croissance modérée. Il reste à effectuer la décomposition de Davis ([5] p. 33 ou [14] p. 145) pour toute martingale M uniformément intégrable. Introduisons

$$\begin{aligned} S_t&=\sup\{|\Delta M_s|;\ s\leqq t\},\\ K^1_t&=\sum_{s\leqq t} \Delta M_s\, 1_{\{|\Delta M_s|\geqq 2 S_{s-}\}}, \end{aligned}$$

K^2 projection duale prévisible de K^1,

$$K = K^1 - K^2,$$
$$L = M - K.$$

Nous vérifions que $|\Delta L_t| \leqq 4\, S_{t-}$ identiquement, donc

$$E[\Phi \circ (W_p(L))^{1/p}] \leqq c\, E[\Phi \circ M^*] + c\, E[\Phi \circ L^*].$$

En ce qui concerne K,

$$K^* \leqq (W_p(K))^{1/p} \leqq W_1(K) \leqq W_1(K^1) + W_1(K^2),$$
$$W_1(K^1) \leqq 4\, M^*,$$
$$E[\Phi \circ W_1(K^2)] \leqq c\, E[\Phi \circ W_1(K^1)].$$

Pour avoir cette dernière inégalité, on remarque que si $\tilde{A}$ est la projection duale prévisible du processus à variation intégrable A, alors le processus $W_1(\tilde{A}, t)$ est majoré par la projection duale prévisible $\tilde{W}_1(A, t)$ du processus $W_1(A, t)$. Du résultat de Neveu-Garsia ([21] p. 204), on sait déduire que $E[\Phi \circ \tilde{W}_1(A, t)| \leqq c\, E[\Phi \circ W_1(A, t)]$ (voir [15] p. 102), d'où $E[\Phi \circ W_1(\tilde{A})] \leqq c\, E[\Phi \circ W_1(A)]$. La conclusion générale provient du regroupement des diverses inégalités ci-dessus.

(b) Si $1 < q < p \leqq 2$, la démonstration est tout à fait semblable à la précédente, en remplaçant L^* par $(S_q(L))^{1/q}$. On obtient alors

$$P(T < \infty, R = \infty) \leqq \frac{2\,\delta^q}{(\beta - \delta - 1)^q}\, A\, P(S < \infty)$$

et les autres modifications sont évidentes. Même démonstration pour $p = q = 1$, l'inégalité

$$E(W_1(M)] \leqq 2\, E[S_1(M)]$$

nous fournissant l'inégalité faible dont nous avons besoin ($A = 2$).

Voici maintenant quelques résultats négatifs sur la variation forte, qui expliquent certaines des restrictions envisagées ci-dessus.

Proposition 3. (a) *Soit $p = 2$. Il existe un P.A.I. centré X, sans partie continue, de carré intégrable et à discontinuités fixes tel que $W_2(X, t) = \infty$ p.s.*

(b) *Si $0 < p < 2$, pour toute semi-martingale X, $W_p(X, t) = \infty$ p.s. sur*

$$\{\langle X^c \rangle_t > 0\} \cup \{S_p(X, t) = \infty\}.$$

(c) *Soit $0 < p < 1$. Il existe une martingale M telle que $M^c = 0$*

$$E[S_p(M, t)] < \infty \quad \textit{et} \quad W_p(M, t) = \infty \quad \textit{p.s.}$$

Preuve. (a) Si pour tout P.A.I. centré sans partie continue, de carré intégrable, à discontinuités fixes, nous avions $W_2(X, t) < \infty$ sur un ensemble de probabilité strictement positive, la démonstration du lemme 1 (a) montrerait l'existence d'une constante A telle que

$$P(W_2(X, t) > \lambda^2) \leqq A\, \lambda^{-2}\, E[(X_t)^2].$$

Mais nous savons depuis P. Lévy que pour un mouvement brownien Z,

$$W_2(Z,t)=\infty \quad \text{p.s.}$$

donc $W_2^n(Z,t)$ tend vers l'infini p.s. lorsque n tend vers l'infini. Si nous considérons

$$X_s^n = Z_{(k-1)2^{-n}t} \qquad \text{pour } (k-1)2^{-n}t \leqq s < k2^{-n}t,$$
$$X_t^n = Z_t,$$

nous avons

$$W_2^n(Z,t)=W_2(X^n,t)$$

et l'inégalité faible ci-dessus n'est pas vérifiée par tous les X^n.

(b) Soit $0<p<2$. Il est clair que $W_p(X,t)=\infty$ sur $\{S_p(X,t)=\infty\}$. Montrons donc que $W_p(X,t)=\infty$ p.s. sur $\{\langle X^c\rangle_t>0\}\cap\{S_p(X,t)<\infty\}$. En ce qui concerne X^c, quitte à plonger l'espace Ω de départ dans un espace produit, on sait qu'il existe un movement brownien Z tel que pour tout $s\geqq 0$,

$$X_s^c = Z_{\langle X^c\rangle_s}.$$

Nous en déduisons que $W_2(X^c,t)=\infty$ p.s. sur $\{\langle X^c\rangle_t>0\}$. Mais, sur

$$\{S_p(X,t)=S_p(X-X^c,t)<\infty\},$$

d'après le théorème 1(b), $W_2(X-X^c,t)<\infty$ p.s., et par conséquent

$$W_p(X,t)\geqq W_2(X,t)=\infty \ \text{ p.s.} \quad \text{sur} \quad \{\langle X^c\rangle_t>0\}\cap\{S_p(X,t)<\infty\}.$$

(c) Soit $M_t=N_t-t$ un processus de Poisson centré, et soit $0<p<1$. Il est clair que $W_p(N,t)$ est fini p.s., mais à cause du terme de centrage $W_p(M,t)=\infty$ p.s.

5. Inégalités de martingales vectorielles

Si M est une martingale sans partie continue et si $1<p\leqq 2$, à défaut d'inégalités intégrales entre $W_p(M)$ et $S_p(M)$, nous allons en obtenir, pour chaque subdivision S, entre $V_p(M,S)$ et $S_p(M,t)$. Pour cela, nous allons utiliser des martingales à valeurs dans l^p, comme dans le paragraphe 5 de [13].

Considérons une suite $(M^i, i\geqq 1)$ de martingales adaptées à $(\mathscr{F}_t)$ uniformément intégrables, et supposons que pour tout $i\geqq 1$, la partie continue de M^i soit nulle. Définissons alors pour $1\leqq p\leqq 2$ les opérateurs

$$M^{**}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}[(M^i)^*]^p\right)^{1/p} \qquad M_t^{**}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}[(M^i)_t^*]^p\right)^{1/p},$$

$$S(M)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{0<s}|\Delta M_s^i|^p\right)^{1/p} \qquad S(M,t)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{0<s\leqq t}|\Delta M_s^i|^p\right)^{1/p}.$$

Proposition 4. *Pour toute fonction Φ à croissance modérée, il existe une constante c telle que*

$$E[\Phi\circ M^{**}]\leqq c\,E[\Phi\circ S(M)].$$

Preuve. Le fil de la démonstration est analogue à celui du théorème 4 de [13]. Comme pour la proposition 2(a) ci-dessus, on commence par considérer une suite (L^i) de martingales sans partie continue telle qu'il existe un processus croissant adapté D vérifiant

$$(\sum_i |\Delta L_t^i|^p)^{1/p} \leqq D_{t-} \qquad \text{pour tout } t>0.$$

Nous introduisons encore

$$\begin{aligned} T &= \inf\{t\colon L_t^{**} > \beta\lambda\}, \\ S &= \inf\{t\colon L_t^{**} > \lambda\}, \\ R &= \inf\{t\colon D_t \vee S(L,t) > \delta\lambda\}, \\ N_t^i &= L_{(t+S)\wedge R}^i - L_{S\wedge R}^i. \end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite l'inégalité B.D.G.

$$E[((N^i)^*)^p] \leqq c\, E[S_p(N^i)],$$

d'où l'inégalité de distribution

$$P(L^{**} > \beta\lambda, D_\infty \vee S(L) \leqq \delta\lambda) \leqq \frac{2\delta^p}{(\beta-\delta-1)^p}\, c\, P(L^{**} > \lambda).$$

Nous décomposons ensuite la martingale vectorielle (M^i) en une martingale (L^i) du type précédent et une martingale (K^i) selon la méthode de Davis déjà indiquée.

Revenons maintenant à la variation d'une martingale réelle M sur $[0,t]$, en supposant la subdivision S quelconque mais fixée.

Proposition 5. *Si M est une martingale sans partie continue et si Φ est à croissance modérée, alors, pour $1 \leqq p \leqq 2$,*

$$E[\Phi \circ (V_p(M,S))^{1/p}] \leqq c\, E[\Phi \circ (S_p(M,t))^{1/p}]$$

où la constante c ne dépend ni de M, ni de t, ni de S.

Preuve. Si $S=(0=t_0, \ldots, t_m=t)$, posons

$$\begin{aligned} M_s^i &= E(M_{t_i} - M_{t_{i-1}} | \mathscr{F}_s) && \text{pour } 1 \leqq i \leqq m, \\ M_s^i &= 0 && \text{pour } i>m; \end{aligned}$$

nous pouvons appliquer la proposition précédente aux martingales M^i, sans partie continue, qui ont pour sauts ceux de M aux instants compris entre t_{i-1} et t_i.

Remarque. Un résultat plus puissant a déjà été démontré (proposition 2) pour $p=1$. Pour $p=2$, un argument calqué sur les démonstrations précédentes montrerait que pour toute martingale M,

$$E[\Phi \circ (V_2(M,S))^{1/2}] \leqq c\, E[\Phi \circ ([M]_t)^{1/2}].$$

6. La convergence en probabilité

Nous pouvons maintenant commencer l'étude des diverses convergences pour $p>1$ lorsque $\pi(S)$ tend vers zéro. L'idée générale est d'approcher toute semimartingale, aprés arrêt en un temps convenable, par une semi-martingale à trajectoires assez régulières au moyen d'inégalités simples dans le cas de la convergence en probabilité, plus élaborées pour la convergence p.s.

Lemme 2. *Soit X une semi-martingale telle que*

si $p>2$, $S_1(X,t)<\infty$ p.s.
si $1<p\leqq 2$, $W_1(X,t)<\infty$ p.s.

Alors $V_p(X,S)$ converge p.s. vers $S_p(X,t)$.

Preuve. Il suffit de vérifier que

$$\overline{\lim}\, V_p(X,S)\leqq S_p(X,t) \quad \text{p.s.}$$

Posons pour tout $0\leqq s\leqq t$

$$Q_s=X_s-\sum_{u\leqq s}\Delta X_u.$$

La convergence p.s. vers zéro de $V_p(Q,S)$ est assurée par la continuité des trajectoires de Q et les inégalités

(i) $p>2$

$$(V_p(Q,S))^{1/q}\leqq \sup_i |Q_{t_{i+1}}-Q_{t_i}|^{(p-q)/q}\,[(W_q(X,t))^{1/q}+S_1(X,t)]$$

pour $2<q<p$;

(ii) $1<p\leqq 2$

$$V_p(Q,S)\leqq \sup_i |Q_{t_{i+1}}-Q_{t_i}|^{p-1}\,[W_1(X,t)+S_1(X,t)].$$

Pour tout $\varepsilon>0$, pour presque tout ω, il existe une suite $s_1,\ldots,s_n$ dans $[0,t]$ telle que

$$S_1(X,t)-\sum_{j=1}^{n}|\Delta X_{s_j}|<\varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon'>0$, toute subdivision S de pas assez petit sépare les (s_j) et vérifie

$$|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p-|\Delta X_{s_j}|^p<\varepsilon' \qquad \text{lorsque } t_i<s_j\leqq t_{i+1}.$$

Pour les autres intervalles de S,

$$|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p-|Q_{t_{i+1}}-Q_{t_i}|^p\leqq p\,|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^{p-1}\,(S_1(X,t_{i+1})-S_1(X,t_i))$$

d'où

$$V_p(X,S)-V_p(Q,S)-S_p(X,t)\leqq n\,\varepsilon'+\varepsilon\, p\, 2^{p-1}\,(X_t^*)^{p-1}$$

et par conséquent

$$\overline{\lim}\, V_p(X,S)\leqq S_p(X,t) \quad \text{p.s.}$$

Théorème 2. *Soit X une semi-martingale*

(a) *Pour $p>2$, $V_p(X,S)$ converge en probabilité vers $S_p(X,t)$.*
(b) *Pour $p=2$, $V_p(X,S)$ converge en probabilité vers $[X]_t$.*
(c) *Pour $1<p<2$, $V_p(X,S)$ converge en probabilité vers $S_p(X,t)$ sur l'ensemble $\{S_p(X,t)<\infty\}\cap\{\langle X^c\rangle_t=0\}$.*

Preuve. On trouve une démonstration complète du cas $p=2$ dans [15], p. 113. Restent à voir (a) et (c).

(a) D'après **2**(a), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T tel que $P(T < t) < \varepsilon$ et

$$X^T = U + V,$$

où U est une martingale de carré intégrable et V un processus à variation finie sur $[0, t]$. Par décomposition orthogonale,

$$U = U^c + \sum_m U^{(m)},$$
$$E[(U_t)^2] = E[(U_t^c)^2] + \sum_m E[(U_t^{(m)})^2].$$

Pour tout $\varepsilon' > 0$, on peut trouver m_0 tel que si

$$R = \sum_{m > m_0} U^{(m)},$$

alors $E[(R_t)^2] < \varepsilon'$ et $Y = X^T - R$ vérifie $S_1(Y, t) < \infty$ p.s. Dans ces conditions

$$|(V_p(X^T, S))^{1/p} - (V_p(Y, S))^{1/p}| \leqq (V_p(R, S))^{1/p} \leqq (V_2(R, S))^{1/2},$$
$$|(S_p(X^T, t))^{1/p} - (S_p(Y, t))^{1/p}| \leqq (S_p(R, t))^{1/p} \leqq (S_2(R, t))^{1/2},$$
$$\begin{aligned} P(|(V_p(X^T, S))^{1/p} - (S_p(X^T, t))^{1/p}| > \lambda) \leqq{} & P\left(V_2(R, S) > \left(\frac{\lambda}{3}\right)^2\right) \\ & + P\left(|(V_p(Y, S))^{1/p} - (S_p(Y, t))^{1/p}| > \frac{\lambda}{3}\right) \\ & + P\left(S_2(R, t) > \left(\frac{\lambda}{3}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Comme

$$E[V_2(R, S)] = E[S_2(R, t)] = E[(R_t)^2] < \varepsilon',$$

le premier et le troisième terme sont majorés par $9\varepsilon' \lambda^{-2}$, tandis que le lemme 2 appliqué à Y montre que le second terme tend vers zéro lorsque $\pi(S)$ tend vers zéro.

(b) Reprenons les notations de la démonstration du théorème 1(b), avec cette fois $p = q$. Si (S'_k) est une suite de temps d'arrêt épuisant les sauts de la martingale de carré intégrable N, pour tout $\varepsilon' > 0$, on peut trouver un entier k_0 tel que

$$E\Big[\sum_{k > k_0} |\Delta N_{S'_k}|^p\Big] < \varepsilon'$$

et on pose alors

$$R = \sum_{k > k_0} N^{(k)},$$
$$Y = X^{T \wedge T_n \wedge S_{n,m}} - R.$$

Il vient

$$\begin{aligned} & P(|(V_p(X, S))^{1/p} - (S_p(X, t))^{1/p}| > \lambda,\ T \wedge T_n \wedge S_{n,m} \geqq t) \\ & \quad \leqq P\left(V_p(R, S) > \left(\frac{\lambda}{3}\right)^p\right) + P\left(|(V_p(Y, S))^{1/p} - (S_p(Y, t))^{1/p}| > \frac{\lambda}{3}\right) \\ & \qquad + P\left(S_p(R, t) > \left(\frac{\lambda}{3}\right)^p\right). \end{aligned}$$

Le premier terme est majoré par

$$\left(\frac{3}{\lambda}\right)^p E[V_p(R,S)] \leqq \left(\frac{3}{\lambda}\right)^p c\,\varepsilon',$$

le second tend vers zéro car $W_1(Y,t)<\infty$ p.s. et nous pouvons appliquer le lemme 2, le troisième est majoré par $\left(\frac{3}{\lambda}\right)^p \varepsilon'$. Il suffit pour terminer de remarquer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe n et m tels que

$$P(\langle X^c\rangle_t=0, \quad S_p(X,t)<\infty, \quad T\wedge T_n\wedge S_{n,m}<t)<\varepsilon.$$

7. La convergence en moyenne

Le théorème précédent nous permet d'établir la convergence en moyenne dès que nous obtenons l'intégrabilité uniforme de la famille $\{V_p(X,S)\}$.

Théorème 3. *Soit $X=M+A$ une semi-martingale et soit $r\geqq 1$.*

(a) *Pour $p>2$, si M_t^* et $W_1(A,t)$ sont dans L^r, alors $(V_p(X,S))^{r/p}$ converge dans L^1 vers $(S_p(X,t))^{r/p}$.*

(b) *Pour $p=2$, si M_t^* et $W_1(A,t)$ sont dans L^r, alors $(V_2(X,S))^{r/2}$ converge dans L^1 vers $([X]_t)^{r/2}$.*

(c) *Pour $1<p<2$, si $X^c=0$ et si $(S_p(M))^{1/p}$ et $W_1(A,t)$ sont dans L^r, alors $(V_p(X,S))^{r/p}$ converge dans L^1 vers $(S_p(X,t))^{r/p}$.*

Preuve. (a) Les inégalités

$$E[(W_p(M,t))^{r/p}] \leqq c\,E[(M_t^*)^r] \qquad \text{(proposition 2)},$$
$$(W_p(A,t))^{1/p} \leqq W_1(A,t),$$
$$(W_p(X,t))^{r/p} \leqq 2^{r-1}[(W_p(M,t))^{r/p}+(W_p(A,t))^{r/p}]$$

montrent que

$$E[(W_p(X,t))^{r/p}]<\infty$$

et par conséquent $\{(V_p(X,S))^{r/p}\}$ est uniformément intégrable.

(b) Si $p=2$, l'inégalité B.D.G.appliquée à la martingale discrète $(M_{t_i}, 0\leqq i\leqq m)$ montre que

$$E[\Phi\circ(V_2(M,S))^{1/2}] \leqq c\,E[\Phi\circ M_t^*],$$

où c ne dépend pas de S. L'hypothèse faite sur M_t et le lemme 5.1 de [6] montrent l'existence d'une fonction ψ à croissance modérée vérifiant

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\psi(\lambda)}{\lambda}=\infty,$$
$$E[\psi\circ(M_t^*)^r]<\infty.$$

Nous en déduisons, en posant $\Phi(x)=\psi(x^r)$, que $\{(V_2(M,S))^{r/2}\}$ est uniformément intégrable, et de

$$(V_2(X,S))^{r/2} \leqq 2^{r-1}\,[(V_2(M,S))^{r/2}+(W_1(A,t))^r]$$

nous tirons que $\{(V_2(X,S))^{r/2}\}$ l'est aussi.

(c) Si $1<p<2$, la proposition 5 montre que $\{(V_p(M,S))^{r/p}\}$ est uniformément intégrable si $(S_p(M,t))^{r/p}$ est dans L^1 et $M^c=0$, d'où une conclusion identique pour $\{(V_p(X,S))^{r/p}\}$.

8. La convergence presque sûre

Les inégalités faibles portant sur un opérateur maximal jouent souvent un rôle central dans la démonstration de la convergence p.s. des suites d'opérateurs. On comprend dans ces conditions l'intérêt des inégalités du lemme 1.

Théorème 4. *Les sommes $V_p(X,S)$ convergent p.s. vers $S_p(X,t)$*

(a) *pour $p>2$, sur tout Ω;*

(b) *pour $1<p\leqq 2$, sur $\left(\bigcup_{q<p}\{S_q(X,t)<\infty\}\right)\cap\{\langle X^c\rangle_t=0\}$;*

(b′) *pour $1<p<2$, sur tout Ω si X est un P.A.I. sans partie continue tel que $S_p(X,t)<\infty$ p.s.*

Preuve. (a) Comme pour le théorème 2(a), on peut supposer qu'avant l'instant T, X est la somme d'une semi-martingale Y vérifiant $S_1(Y,t)<\infty$ p.s. et d'une martingale R vérifiant $E[(R_t)^2]<\varepsilon'$. Posons

$$L=\overline{\lim}\,(V_p(X^T,S))^{1/p}-\underline{\lim}\,(V_p(X^T,S))^{1/p}.$$

En appliquant à nouveau le lemme 2 à Y,

$$\begin{aligned} L &\leqq \overline{\lim}\,|(V_p(Y,S))^{1/p}+(V_p(R,S))^{1/p}|-\underline{\lim}\,|(V_p(Y,S))^{1/p}-(V_p(R,S))^{1/p}| \\ &\leqq 2\,\overline{\lim}\,(V_p(R,S))^{1/p} \\ &\leqq 2(W_p(R,t))^{1/p}. \end{aligned}$$

Mais d'après le lemme 1,

$$P(L>2\lambda)\leqq P(W_p(R,t)>\lambda^p)<A\,\lambda^{-2}\,\varepsilon' \qquad \text{pour tout } \lambda>0.$$

Il en résulte, comme ε' est arbitraire, que $L=0$ p.s., et par conséquent $V_p(X^T,S)$ converge vers une limite qui d'après le théorème 2 ne peut être que $S_p(X^T,t)$. Puisque $P(T<t)<\varepsilon$, la convergence de $V_p(X,S)$ est établie sur tout Ω p.s.

(b) Si $1<q<p\leqq 2$, on utilise à nouveau les temps d'arrêt $T, T_n, S_{n,m}$ de la démonstration du théorème 1(b). Pour tout $\varepsilon'>0$, on décompose ensuite la martingale N en une martingale R vérifiant

$$E[S_q(R,t)]<\varepsilon'$$

et une martingale $N-R$, somme compensée d'un nombre fini de sauts, donc à variation finie sur $[0,t]$. Si l'on pose encore

$$Y=X^{T\wedge T_n\wedge S_{n,m}}-R,$$

les lemmes 1 et 2 utilisés comme en (a) montrent que $V_p(X, S)$ converge p.s. vers $S_p(X, t)$ sur $\{T \wedge T_n \wedge S_{n,m} \geqq t\}$.

(b′) Soit X un P.A.I. sans partie continue vérifiant $S_p(X, t) < \infty$ p.s. Comme pour le théorème 1(b′), nous en tirons

$$W_1(X^4, t) < \infty \quad \text{p.s.},$$
$$E[S_p(X^2, t)] < \infty,$$
$$E[S_p(X^3, t)] < \infty.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous choisissons η et k_0 tels que

$$\int_{|x|<\eta} |x|^p L_t(dx) < \varepsilon,$$
$$E\Big[\sum_{\substack{k>k_0\\ t_k \leqq t}} |D_k|^p\Big] < \varepsilon.$$

Posant alors pour tout $s \geqq 0$

$$R_s = \int_{|x|<\eta} x[N_s(dx) - L_s(dx)] + \sum_{\substack{k>k_0\\ t_k \leqq s}} D_k,$$

nous obtenons

$$E[S_p(R, t)] < 2\varepsilon,$$
$$W_1(X - R, t) < \infty \quad \text{p.s.}$$

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué dans la démonstration du théorème 1(b′),

$$E[W_p(R, t)] \leqq c\, E[S_p(R, t)] \leqq 2c\,\varepsilon,$$

et nous pouvons alors terminer comme en (a) et (b).

Il est possible de préciser un peu plus le comportement des sommes $V_p(X, S)$ pour $1 < p \leqq 2$.

Proposition 6. *Si $1 < p \leqq 2$, pour toute semi-martingale X,*

$$\{\underline{\lim}\, V_p(X, S) < \infty\} = \{S_p(X, t) < \infty\} \quad \textit{p.s.}$$

Preuve. L'inégalité

$$S_p(X, t) \leqq \underline{\lim}\, V_p(X, S) \quad \text{p.s.}$$

permet de conclure dans un sens.

Si X a ses trajectoires continues, on peut choisir pour tout $m \geqq 1$ des instants (t_i) tels que

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \frac{1}{m}(X_t - X_0),$$

et par conséquent

$$\inf\{V_p(X, S)\} = 0,$$

ce qui entraîne $\underline{\lim}\, V_p(X, S) = 0$.

Si maintenant, pour X quelconque, nous reprenons les temps d'arrêt T, T_n, $S_{n,m}$ (avec $p = q$) et la martingale N, l'inégalité

$$E[\underline{\lim}\, V_p(N, S)] \leqq c\, E[S_p(N, t)],$$

qui est une conséquence directe de l'inégalité B.D.G., montre que

$$\underline{\lim}\, V_p(X,S)<\infty \text{ p.s. sur } \{T\wedge T_n\wedge S_{n,m}\geqq t\},$$

d'ou

$$\underline{\lim}\, V_p(X-X^c,S)<\infty \text{ p.s. sur } \{S_p(X,t)<\infty\},$$

et comme X^c a ses trajectoires continues,

$$\underline{\lim}\, V_p(X,S)<\infty \text{ p.s. sur } \{S_p(X,t)<\infty\}.$$

En comparant ce résultat à celui de la proposition 3(b), nous voyons que pour tout $1<p\leqq 2$, le comportement des sommes $V_p(X,S)$ est très irrégulier sur $\{\langle X^c\rangle_t>0\}$.

9. La variation conditionnelle

Si $S_p(X,t)$ est intégrable, on peut définir pour $0\leqq s\leqq t$ sa projection duale prévisible $C_p(X,s)$.

Proposition 7. *Si $X=M+A$ est une semi-martingale, les sommes*

$$\sum_i E[|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p\,|\mathscr{F}_{t_i}]$$

convergent dans $\sigma(L^1,L^\infty)$ vers $C_p(X,t)$

(a) *pour $p>2$, si M_t* et *$W_1(A,t)$ sont dans L^p*

(b) *pour $1<p\leqq 2$, si $X^c=0$, $S_p(M,t)$ est dans L^1 et $W_1(A,t)$ est dans L^p.*

Preuve. La démonstration reprend celle de C. Doléans [8] pour $p=2$. Soit Y une variable aléatoire positive bornée. Considerons la martingale non nulle en zéro

$$Y_s=E[Y|\mathscr{F}_s], \quad s\geqq 0.$$

Pour tout $i=0,\dots,m-1$,

$$E[Y\,E[|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p\,|\mathscr{F}_{t_i}]]=E[Y_{t_i}|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p],$$
$$E[Y_{t_i}(S_p(X,t_{i+1})-S_p(X,t_i)]=E[Y_{t_i}(C_p(X,t_{i+1})-C_p(X,t_i)].$$

Mais lorsque $\pi(S)$ tend vers zéro, $E[\sum_i Y_{t_i}(C_p(X,t_{i+1})-C_p(X,t_i))]$ tend vers

$$E\left[\int_0^t Y_{s-}\,C_p(X,ds)\right]=E\left[\int_0^t Y_s\,C_p(X,ds)\right]=E[Y\,C_p(X,t)],$$

la première de ces égalités étant due à la prévisibilité de $C_p(X,t)$. Il reste à montrer que

$$E[\sum_i Y_{t_i}(|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p-(S_p(X,t_{i+1})-S_p(X,t_i)))]$$

tend vers zéro. Chacune de ces sommes est majorée par $\|Y\|_\infty V_p(X,S)$ et minorée par $-\|Y\|_\infty S_p(X,t)$, elles sont donc uniformément intégrables d'après la démonstration du théorème 3 et les hypothèses d'intégrabilité que nous avons faites. En reprenant ensuite les démonstrations du paragraphe 6, on montre qu'elles convergent en probabilité vers zéro, d'où le résultat.

Notons enfin que si X est une martingale, les processus $S_p(X,t)$ et $C_p(X,t)$ vérifient des inégalités intégrales.

Proposition 8. *Soit M une martingale telle que $E[S_p(M,t)]<\infty$. Pour toute fonction Φ à croissance modérée, il existe des constantes c telles que*

(1) $E[\Phi\circ C_p(M,t)]\leqq c\,E[\Phi\circ S_p(M,t)]$,

(2) $E[\Phi\circ S_p(M,t)]\leqq c\,E[\Phi\circ (M_t^*)^p]$ *pour* $p>2$,

(3) $E[\Phi\circ C_p(M,t)]\leqq c\,E[\Phi\circ |M_t|^p]$ *pour* $p>2$,

(4) $E[\Phi\circ (M_t^*)^p]\leqq c\,E[\Phi\circ S_p(M,t)]$ *pour* $1<p\leqq 2$ *si* $M^c=0$.

Pour toute fonction Φ nulle en zéro, croissante et concave, il existe des constantes c telles que

(5) $E[\Phi\circ S_p(M,t)]\leqq c\,E[\Phi\circ C_p(M,t)]$,

(6) $E[\Phi\circ (M_t^*)^p]\leqq c\,E[\Phi\circ c_p(M,t)]$ *pour* $1<p\leqq 2$ *si* $M^c=0$.

Preuve. Les inégalités (1) et (5) sont habituelles entre un processus croissant adapté et sa projection duale prévisible. Les inégalités (2) et (4) sont tirées des inégalités B.D.G., et pour obtenir les inégalités (3) et (6), il suffit de reprendre en temps continu les démonstrations des propositions 3 et 4 de [13].

Références

1. Blumenthal, R. M., Getoor, R. K.: Some theorems on stable processes. Trans. Amer. Math. Soc. **95**, 263–273 (1960)
2. Blumenthal, R, M., Getoor, R. K.: Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments. J. Math. Mech. **10**, 493–516 (1961)
3. Bretagnolle, J.: P-variation de fonctions aléatoires. Sém. Proba. VI, Lecture Notes in Math. **258**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
4. Burkholder, D. L.: Maximal inequalities as necessary conditions for almost everywhere convergence. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **3**, 75–88 (1964)
5. Burkholder, D. L.: Distribution function inequalities for martingales. Ann. Probability **1**, 19–42 (1973)
6. Burkholder, D. L., Davis, B. J., Gundy, R. F.: Integral inequalities for convex functions of operators on martingales. Proc. 6th Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab. **2**, 223–240 (1972)
7. Cogburn, R., Tucker, H.: A limit theorem for a function of the increments of a decomposable process. Trans. Amer. Math. Soc. **99**, 278–284 (1961)
8. Doléans, C.: Construction du processus croissant naturel associé à un potentiel de la classe (D). C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **264**, 600–602 (1967)
9. Doléans, C.: Variation quadratique des martingales continues à droite. Ann. Math. Statist. **40**, 284–289 (1969)
10. Doléans, C., Meyer, P. A.: Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Sém. Proba. IV, Lecture Notes in Math. **124**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
11. Kallenberg, O.: Path properties of processes with independent and interchangeable increments. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **28**, 257–271 (1974)
12. Lepingle, D.: Sur la variation d'ordre p des martingales locales. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **281**, 917–919 (1975)

13. Lepingle, D.: Quelques inégalités concernant les martingales. Studia Math. **59**, 63–83 (1976)
14. Meyer, P. A.: Le dual de H^1 est BMO (cas continu). Sém. Proba. VII, Lecture Notes in Math. **321**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
15. Meyer, P. A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Strasbourg (1975)
16. Millar, P. W.: Path behavior of processes with stationary independent increments. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **17**, 53–73 (1971)
17. Millar, P. W.: Stochastic integrals and processes with stationary independent increments. Proc. 6th Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab. **3**, 307–331 (1972)
18. Monroe, I.: On the γ-variation of processes with stationary independent increments. Ann. Math. Statist. **43**, 1213–1220 (1972)
19. Monroe, I.: On embedding right continuous martingales in Brownian motion. Ann. Math. Statist. **43**, 1293–1311 (1972)
20. Monroe, I.: Almost sure convergence of the quadratic variation of martingales: a counter example. Ann. Probability **4**, 133–138 (1976)
21. Neveu, J.: Martingales à temps discret. Paris: Masson 1972

Reçu le 20 février 1976