Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
35, 45–55 (1976)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Subordination von Gauß- und Poissonmaßen*

W. Hazod

Mathematisches Institut der Universität, Auf der Morgenstelle 10,
D-7400 Tübingen, Bundesrepublik Deutschland

Let (μ_t) be a continuous convolution semigroup of probability measures on a locally compact group. Through randomization of the time parameter t, new semigroups (λ_s) are generated which are called subordinate to (μ_t) via a subordination semigroup (F_s) on R_+. By extending the results of S. Bochner [1] and H. Carnal [2] it can be shown that Gaußian and elementary Poisson semigroups are not subordinate to other semigroups (except in a trivial way) and that a subordinate semigroup (λ_s) is Poisson iff (μ_t) or (F_s) is Poisson.

Sei $(\mu_t, t \geqq 0, \mu_0 = \delta_e)$ eine stetige Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einer lokalkompakten Gruppe $\mathscr{G}$, weiter sei $(F_s, s \geqq 0, F_0 = \delta_0)$ eine Subordinationshalbgruppe, i.e. eine stetige Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf dem R_1, so daß jedes Maß F_s auf $[0, \infty)$ konzentriert ist. (μ_t) resp. (F_s) sind durch ihre erzeugenden Distributionen A resp. B eindeutig bestimmt, B hat dabei folgende Gestalt: Es gibt ein nicht negatives Radonmaß N auf $R^+ = (0, \infty)$ und eine Konstante $c \geqq 0$, so daß für alle stetig differenzierbaren $f \in C^1(R^+)$ gilt: $B(f) = c f'(0) + \int_{0+}^{\infty} (f(x) - f(0))\, dN(x)$. Dabei ist $\int_{0+}^{\infty} t/(1+t)\, dN(t) < \infty$. Die Zuordnung $B \leftrightarrow (c, N)$ ist eindeutig. B, resp. (c, N) wird Subordinator genannt. Nun definiert man eine neue stetige Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathscr{G}$, nämlich $\left(\lambda_s = \int_{0+}^{\infty} \mu_t\, dF_s(t)\right)$, die durch Randomisierung des „Zeitparameters“ t entsteht. Die erzeugende Distribution C von (λ_s) hat die Gestalt $C = cA + \int_{0+}^{\infty} (\mu_t - \delta_e)\, dN(t)$. (λ_s) heißt die untergeordnete Halbgruppe.

In [1] Theorem 4.3.2, 4.3.4 bzw. [2] § 4.5 wurde eine interessante Eigenschaft der Gaußverteilungen auf lokalkompakten Abelschen bzw. auf kompakten Gruppen bewiesen: Wenn eine untergeordnete Halbgruppe (λ_s) Gaußhalbgruppe ist, dann ist das Maß N im Subordinator trivial, i.e. $\lambda_s = \mu_{cs}$.

* Diese Arbeit entstand im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanzierten Forschungsprogrammes

Dieselbe Eigenschaft besitzen Gaußhalbgruppen auf einer beliebigen lokalkompakten Gruppe und auch die elementaren Poissonhalbgruppen. Zum Beweis müssen dagegen gänzlich andere Hilfsmittel wie im Falle Abelscher oder kompakter Gruppen herangezogen werden, da ja im allgemeinen Fall nicht auf Methoden der Darstellungstheorie zurückgegriffen werden kann: Es zeigt sich, daß die oben genannte Eigenschaft der Gauß- resp. der elementaren Poissonhalbgruppen eine Eigenschaft der erzeugenden Distributionen ist. Eine genaue Bestimmung des primitiven, Gaußschen symmetrischen Anteils bzw. des Lévy-Maßes der Distributionen A resp. C liefert die Behauptung.

Zunächst werden in der Einleitung die wichtigsten Eigenschaften der erzeugenden Distributionen auf lokalkompakten Gruppen als Hilfssätze zusammengestellt. Dann wird in I. der Begriff der Subordination eingeführt und es wird die genaue Gestalt der erzeugenden Distributionen von untergeordneten Halbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen angegeben (Korollar 1.3). In II. wird die angekündigte Eigenschaft der Gauß- und Poissonmaße bewiesen, schließlich wird in III. die Subordination von Poissonmaßen betrachtet: Eine untergeordnete Halbgruppe ist genau dann Poissonsch, wenn die Ausgangshalbgruppe oder die Subordinationshalbgruppe Poissonsch ist.

0. Einleitung

Die im folgenden zusammengefaßten Eigenschaften erzeugender Distributionen sind zum größten Teil bekannt. Es werden die Bezeichnungen von Siebert [12] verwendet. Begriffe, die hier nicht näher erklärt werden, z.B. „Lévy-Abbildung", findet der Leser in [12] oder [4].

$\mathscr{G}$ bezeichnet stets eine lokalkompakte Gruppe,

$\mathfrak{D}(\mathscr{G})=\mathfrak{D}$ bezeichnet den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger im Sinne von Bruhat (s. [4, 12]). Zu jeder stetigen Halbgruppe $(\mu_t, t\geqq 0, \mu_0=\delta_e)$ gibt es genau eine Distribution $A\in\mathfrak{D}'$, so daß $A(f)=\frac{d^+}{dt}\,\mu_t(f)\Big|_{t=0}$. Umgekehrt wird die Maßhalbgruppe (μ_t) durch A eindeutig bestimmt (s. [4, 12]). Mit $\mathfrak{W}(\mathscr{G})$ soll der konvexe positive Kegel der erzeugenden Distributionen bezeichnet werden. Siebert gab eine einfache Beschreibung der Elemente von $\mathfrak{W}(\mathscr{G})$: Die Elemente $A\in\mathfrak{W}(\mathscr{G})$ sind genau die (reellen) linearen Funktionale auf $\mathfrak{D}$, die fast positiv (i.e. aus $f\in\mathfrak{D}^+, f(e)=0$, folgt $A(f)\geqq 0$) und normiert sind (i.e. für jede Umgebung U von e und jedes $u\in\mathfrak{D}^+, 0\leqq u\leqq 1, u\equiv 1$ in U, gilt $\sup\{A(f): f\in\mathfrak{D}, 0\leqq u\leqq f\leqq 1\}=0$). Innerhalb des Kegels $\mathfrak{W}(\mathscr{G})$ sind die symmetrischen Gaußschen Distributionen sowie die primitiven Distributionen ausgezeichnet, $\mathbb{G}$ sei der Kegel der symmetrischen Gaußschen Distributionen $\mathbb{P}$ der Kegel der primitiven Distributionen und $\mathbb{L}$ sei (bei fester Lévy-Abbildung Γ) der Kegel der erzeugenden Distributionen ohne Gaußschen und primitiven Anteil: Jede Distribution $A\in\mathfrak{W}(\mathscr{G})$ läßt sich (bei festem Γ) eindeutig in der Form $A(f)=P(f)+G(f)+\int_{\mathscr{G}\setminus\{e\}}(f(x)-f(e)-\Gamma f(x))\,d\eta(x)$ mit $P\in\mathbb{P}$, $G\in\mathbb{G}$ darstellen, dann ist der dritte Term in $\mathbb{L}$. η heißt das Lévy-Maß von A. A ist (bei festem Γ) durch die Angabe von (P, G, η) eindeutig bestimmt.

Umgekehrt erhält man die drei Bestimmungsstücke (P, G, η) auf folgende Weise aus A:

Sei $D_0 = \{f \in \mathfrak{D}, f \equiv 0$ in einer Umgebung von $e\}$, $D^1 = \{f \in \mathfrak{D}^+, 0 \leqq f \leqq 1, f \equiv 1$ in einer Umgebung von $e\}$. D^1 ist in natürlicher Weise absteigend filtrierend geordnet.

Hilfssatz 0.1. a) *Es ist* $A(f) = \int_{\mathcal{G} \setminus \{e\}} f(x)\, d\eta(x)$ *für alle* $f \in D_0$. *Umgekehrt ist* η *durch die Einschränkung auf* D_0 *bereits eindeutig bestimmt.*

b) *Für jedes* $f \in \mathfrak{D}^+$ *mit* $f(e) = 0$ *ist* $P(f) = 0$, $\Gamma f(.) = 0$ *und*

$$G(f) = \lim_{\varphi} \{A(f\varphi) \colon \varphi \in D^1 \searrow \mathbb{1}_{\{e\}}\}.$$

a) folgt aus der Definition des Lévy-Maßes (s. [4, 12]). Sei $f \in \mathfrak{D}^+$, $f(e) = 0$, dann ist, wie aus der Definition primitiver Distributionen, bzw. aus ihrer Darstellung als Ableitung erster Ordnung längs einer einparametrigen Untergruppe, folgt: $P(f) = P(f\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in D^1$. Da für jedes $x \in \mathcal{G}$ die Abbildung $g \to \Gamma g(x) = T_x(g)$ eine primitive Distribution ist, folgt auch $\Gamma f(x) = 0 = \Gamma(f\varphi)(x)$. Daher ist $A(f\varphi) = G(f\varphi) + \int_{\mathcal{G} \setminus \{e\}} f(x)\, \varphi(x)\, d\eta(x) = G(f) + \int_{\mathcal{G} \setminus \{e\}} f(x)\, \varphi(x)\, d\eta(x)$, da G eine Distribution von lokalem Charakter ist (s. [4]). η ist ein nicht negatives Radonmaß, der Integrand strebt mit $\varphi \in D^1 \searrow \mathbb{1}_{\{e\}}$ monoton fallend gegen 0, daraus folgt, daß $A(f\varphi) \to G(f)$.

Hilfssatz 0.2. *Eine Gaußsche Distribution* $G \in \mathfrak{G}$ *ist durch die Einschränkung auf* $D^0 = \{f \in \mathfrak{D}^+, f(e) = 0\}$ *eindeutig bestimmt.*

Da die erzeugte Halbgruppe in der Zusammenhangskomponente der Einheit konzentriert ist, darf man annehmen, daß $\mathcal{G}$ zusammenhängend und somit insbesondere Lie-projektiv ist. Da G durch die Projektionen auf Lie-Gruppen eindeutig bestimmt ist, genügt es, die Aussage für den Fall einer Lie-Gruppe $\mathcal{G}$ zu beweisen.

Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Basis der Lie-Algebra von $\mathcal{G}$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte positiv semidefinite Matrix $(a_{i,j})$, so daß $G(f) = \sum a_{i,j} X_i X_j(f)$ (wobei die Elemente der Lie-Algebra als Ableitungen erster Ordnung längs der Kurven $t \to \exp(tX)$ aufgefaßt werden). Offensichtlich ist G bereits durch die Einschränkung auf D^0 eindeutig bestimmt, daraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 0.3. *Sei nun* $f \in \mathfrak{D}$ *und sei das Lévy-Maß* η *so beschaffen, daß* $\int_{\mathcal{G} \setminus \{e\}} \Gamma g(x)\, d\eta(x)$ *für alle* $g \in \mathfrak{D}$ *existiert. Dann existiert auch der Grenzwert*

$$\lim \{A(f\varphi) \colon \varphi \in D^1, \varphi \searrow \mathbb{1}_{\{e\}}\} = P(f) + G(f) + \int_{\mathcal{G} \setminus \{e\}} \Gamma f(x)\, d\eta(x).$$

Die erzeugende Distribution A hat dann die Gestalt

$$A = P_1 + G + L, \quad \textit{mit} \quad P_1(f) = P(f) + \int_{\mathcal{G} \setminus \{e\}} \Gamma f(x)\, d\eta(x), \qquad P_1 \in \mathbb{P},$$

$$L(f) = \int_{\mathcal{G} \setminus \{e\}} (f(x) - f(e))\, d\eta(x).$$

Der *Beweis* wird wie der Beweis des Hilfssatzes 0.2 geführt.

Definition 0.4. Sei $A \in \mathfrak{W}(\mathscr{G})$, dann definiert man den Träger von A als $\mathrm{Tr}(A) = \mathscr{G} \setminus \{x$: Es gibt eine Umgebung U_x, so daß $A(f)=0$ für alle f mit $\mathrm{Tr}(f) \subseteq U_x\}$.

Offensichtlich gilt: Sei $A \neq 0$, dann ist $\mathrm{Tr}(A) = \{e\} \cup \mathrm{Tr}(\eta)$, wobei η das Lévy-Maß von A bezeichnet.

Hilfssatz 0.5. *Seien* A, $B \in \mathfrak{W}(\mathscr{G})$, $A+B \neq 0$, *dann ist* $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$. *Sei* $c>0$, *dann ist* $\mathrm{Tr}(cA) = \mathrm{Tr}(A)$.

Die im Ursprung konzentrierten Distributionen (s. [4, 12]), *i.e. die Distributionen aus* $\mathbb{P} + \mathbb{G}$ *sind genau die Distributionen in* $\mathfrak{W}(\mathscr{G})$ *mit* $\mathrm{Tr}(A) = \{e\}$.

Der *Beweis* ist offensichtlich, bzw. folgt aus [4, 12].

Definition 0.6. Neben den schon eingeführten Teilkegeln $\mathbb{P}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{P}+\mathbb{G}$ werden folgende Teilmengen von $\mathfrak{W}(\mathscr{G})$ betrachtet: $\mathbb{PO}$ bezeichnet den Kegel der Poissongeneratoren, i.e. $\mathbb{PO} = \{a(\mu - \delta_e), a \geqq 0, \mu \in M^1(\mathscr{G})\}$, $\mathbb{EP}$ die Teilmenge der elementaren Poissongeneratoren, $\mathbb{EP} = \{a(\delta_x - \delta_e), a \geqq 0\}$. Schließlich sei $\mathbb{L}_0$ die Menge aller erzeugenden Distributionen der Gestalt $f \to \int\limits_{\mathscr{G} \setminus \{e\}} (f(x) - f(e))\, d\eta(x)$, wobei das Lévy-Maß η so beschaffen ist, daß für jede Lévy-Abbildung Γ und für jedes $f \in \mathfrak{D}$ das Integral $\int \Gamma f(x)\, d\eta(x)$ existiert.

$\mathbb{L}_0$ ist wieder ein konvexer Kegel und es gilt die folgende Inklusion: $\mathbb{EP} \subseteq \mathbb{PO} \subseteq \mathbb{L}_0$ sowie $(\mathbb{G} + \mathbb{P}) \cap \mathbb{L}_0 = \{0\}$.

Zu jeder Menge $A \subset \mathfrak{W}(\mathscr{G})$ werde mit A^0 die Menge $\{A + \mathbb{P}\}$ bezeichnet.

Eine Teilmenge $K \subseteq \mathfrak{W}(\mathscr{G})$ besitzt die Eigenschaft

(Z) wenn aus F_1, $F_2 \in \mathfrak{W}(\mathscr{G})$ und $F_1 + F_2 \in K$ folgt, daß F_1, $F_2 \in K^0$.

K besitzt die Eigenschaft

(Z_1) wenn folgt, daß F_1 und F_2 darstellbar sind als $F_1 = F_1' + T$, $F_2 = F_2' - T$, $T \in \mathbb{P}$ und $F_1' = t_1(F_1 + F_2)$, $F_2' = t_2(F_1 + F_2)$, $t_i \geqq 0$.

Offensichtlich folgt (Z) aus (Z_1), wenn $tK \subseteq K$ für alle $t > 0$.

Hilfssatz 0.7. *Die Mengen* $\mathbb{G}$, $\mathbb{P}+\mathbb{G}$, $\mathbb{PO}$, $\mathbb{L}_0$ *besitzten* (Z), $\mathbb{EP}$ (*und trivialerweise* $\mathbb{P}$) *besitzten* (Z_1).

Man wendet die Trägerrelation (Hilfssatz 0.5) an: Seien F_1, $F_2 \in \mathbb{G}$, dann ist $\mathrm{Tr}(F_i) \subseteq \mathrm{Tr}(F_1 + F_2) = \{e\}$, also sind auch die F_i in e konzentriert, somit $F_i \in \mathbb{G} + \mathbb{P}$.

Ganz analog wird der Fall $\mathbb{G} + \mathbb{P}$ behandelt.

Nun sei $F_1 + F_2 \in \mathbb{L}_0$. Seien η_1, η_2, η_3 die Lévy-Maße von F_1, F_2 und $F_1 + F_2$. Es ist 1) der Gaußsche Anteil von $F_1 + F_2$ trivial, daher muß auch der Gaußsche Anteil von F_1 und F_2 verschwinden (dies folgt unmittelbar aus Hilfssatz 0.1 und 0.2). 2) Da $F_1 + F_2 \in \mathbb{L}_0$, muß für jede Lévy-Abbildung Γ und jedes $f \in \mathfrak{D}(\mathscr{G})$ das Integral $\int\limits_{\mathscr{G} \setminus \{e\}} \Gamma f(x)\, d\eta_3(x)$ existieren. Nun ist aber, wie Hilfssatz 0.1 a) zeigt, $\eta_3 = \eta_1 + \eta_2$, daraus folgt, daß auch die Integrale $\int \Gamma f\, d\eta_i$, $i = 1, 2$, existieren, also $F_i \in \mathbb{L}_0 + \mathbb{P}$.

Der Fall $F_1 + F_2 \in \mathbb{PO}$ wird wieder ganz analog bewiesen. Nun sei $F_1 + F_2 \in \mathbb{EP}$, dann gibt es wegen $\mathbb{EP} \subset \mathbb{PO}$ eine Darstellung $F_1 = F_1' + T$, $F_2 = F_2' - T$, wobei $T \in \mathbb{P}$ und $F_i' \in \mathbb{PO}$ sind. Die Trägerrelation liefert aber, da $F_1 + F_2$ von der Gestalt $a(\delta_x - \delta_e)$ ist, daß F_i' nur positive Vielfache von $F_1 + F_2$ sein können.

I. Subordination

Es sei (μ_t) eine stetige Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einer lokalkompakten Gruppe $\mathscr{G}$. Dieser Halbgruppe lassen sich neue Halbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen zuordnen, die in der konvexen abgeschlossenen Hülle der Familie $(\mu_t, t \geqq 0)$ liegen: Man betrachtet den „Zeitparameter" t als zufällig und nimmt an, daß er nach einer auf $[0, \infty)$ konzentrierten Verteilung F verteilt sei. Nun bildet man das Maß λ auf $\mathscr{G}$ gemäß $\lambda = \int_{[0,\infty)} \mu_t \, dF(t)$, zu verstehen als schwaches Integral. Wenn nun F seinerseits in eine stetige Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $[0, \infty)$, etwa $(F_s, s \geqq 0, F_0 = \delta_0)$, eingebettet werden kann, dann bilden die Maße $\left(\lambda_s = \int_{[0,\infty)} \mu_t \, dF_s(t), s \geqq 0\right)$ eine stetige Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathscr{G}$. (λ_s) heißt die untergeordnete Halbgruppe, (F_s) die Subordinationshalbgruppe und die erzeugende Distribution von (F_s) heißt Subordinator.

(Zum Begriff Subordination s. Feller [3], Hille, Phillips [8], 23.15; insbesondere Phillips [9]; zur Subordination von Halbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Gruppen s. Bochner [1], Carnal [2]: Dort wird der Begriff der Subordination allerdings mit Hilfe von Darstellungen eingeführt.)

Nun werden einige bekannte Resultate über Subordination von Operatorhalbgruppen als Hilfssätze zusammengefaßt:

Hilfssatz 1.1. *Zu jeder stetigen Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf* $[0, \infty)$ *gibt es eine Konstante* $c \geqq 0$ *und ein nicht negatives Radonmaß* N *auf* $(0, \infty)$, *so daß*

$$\int_{(0,\infty)} t/(1+t) \, dN(t) < \infty \tag{1.1}$$

ist und so daß für jede Funktion f, *die auf* $[0, \infty)$ *von rechts stetig differenzierbar ist, gilt:*

$$\lim_{t \searrow 0} (1/t)(F_t(f) - f(0)) = c f'(0) + \int_{(0,\infty)} (f(x) - f(0)) \, dN(x). \tag{1.2}$$

Durch (1.2) *ist also die erzeugende Distribution von* (F_s) *gegeben, daher ist* (F_s) *durch* (c, N) *eindeutig bestimmt.*

Mit anderen Bezeichnungen findet man den *Beweis* in [8] Theorem 23.15.2.

Hilfssatz 1.2. *Seien* (F_s) *und* (c, N) *wie in Hilfssatz* 1.1 *gegeben. Weiter sei* $(T_t, t \geqq 0, T_0 = I)$ *eine stetige einparametrige Halbgruppe von Kontraktionsoperatoren auf einem Banachraum* $\mathbb{B}$, D *sei der Definitionsbereich des infinitesimalen Generators* A.

Nun definiere man eine Familie von Operatoren (S_s) *durch die schwachen Integrale* $S_s = \int_{[0,\infty)} T_t \, dF_s(t)$. *Dann gilt:*

a) $(S_s, s \geqq 0, S_0 = I)$ *bildet eine stetige Halbgruppe von Kontraktionen auf* $\mathbb{B}$. *Sei* D_1 *der Definitionsbereich des infinitesimalen Generators* A_1, *dann ist* $D \subseteq D_1$.

b) *Für alle $f \in D$ und alle $L \in \mathbb{B}^*$ ist*

$$\langle A_1 f, L\rangle = \lim_{s \searrow 0} (1/s) \int_{[0,\infty)} \langle T_t f - f, L\rangle \, dF_s(t)$$
$$= c\langle Af, L\rangle + \int_{(0,\infty)} \langle T_t f - f, L\rangle \, dN(t).$$

Die Funktion $t \to \langle T_f f, L\rangle$ erfüllt die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1.1, s. Hille, Phillips [8], 23.15, insbes. 23.15.13; Feller [3].

Nun sei $\mathscr{G}$ eine lokalkompakte Gruppe, $(\mu_t, t \geqq 0, \mu_0 = \delta_e)$ eine stetige Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dann bilden die auf dem Banachraum $C_0(\mathscr{G})$ definierten Faltungsoperatoren R_{μ_t}: $f \to \int_{\mathscr{G}} f(xy)\, d\mu_t(y)$ eine stetige Halbgruppen von Kontraktionen. Der Raum $\mathfrak{D}(\mathscr{G})$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen liegt im Definitionsbereich des infinitesimalen Generators von $(R\mu_t)$ (s. [4]). Sei A die erzeugende Distribution von (μ_t), dann ist der infinitesimale Generator für $f \in \mathfrak{D}(\mathscr{G})$ beschrieben durch $f \to A(\,.\,f)$, also die Faltung von A mit f (s. [4]). Es sei nun (F_s) eine Subordinationshalbgruppe und (c, N) der Subordinator, weiter sei $(\lambda_s = \int_{[0,\infty)} \mu_t \, dF_s(t))$ die untergeordnete Halbgruppe. Dann folgt aus Hilfssatz 2.1 das

Korollar 1.3. *Die erzeugende Distribution von (λ_s) hat die Gestalt*

$$B(f) = cA(f) + \int_{(0,\infty)} (\mu_t(f) - \delta_e(f))\, dN(t). \tag{1.3}$$

Die erzeugende Distribution der Halbgruppe (λ_s), die mit Hilfe des Subordinators (c, N) der Halbgruppe (μ_t) untergeordnet wird, ist somit

$$cA + \int_{(0,\infty)} (\mu_t - \delta_e)\, dN(t).$$

In den folgenden Abschnitten wird die Frage untersucht, welche erzeugenden Distributionen in dieser Form darstellbar sind. Vorerst erhält man mit den Bezeichnungen des Korollars 1.3 noch den

Hilfssatz 1.4. *Sei $c = 0$, dann gehört die Distribution B zu dem in der Einleitung definierten Kegel $\mathbb{L}_0$. Das Lévy-Maß von B ist durch $\eta(f) = \int_{(0,\infty)} \mu_t(f)\, dN(t)$ für $\{f \in \mathfrak{D}(\mathscr{G}), f \equiv 0$ in einer Umgebung von $e\}$, gegeben.*

Offensichtlich hat das Lévy-Maß die angegebene Gestalt. Es ist nur nachzuweisen, daß $B \in \mathbb{L}_0$.

Stellt man B in der kanonischen Zerlegung dar, so erhält man, wenn man eine feste Lévy-Abbildung Γ wählt, daß für alle $f \in \mathfrak{D}(\mathscr{G})$:

$$B(f) = P(f) + G(f) + \int_{\mathscr{G} \setminus \{e\}} (f(x) - f(e) - \Gamma f(x))\, d\eta(x).$$

Andererseits ist $B(f)$ durch (1.3) gegeben. Aus den Hilfssätzen 0.1 und 0.2 folgt leicht, daß der Gaußsche Anteil G verschwindet. Benützt man nun die oben angegebene Gestalt des Lévy-Maßes, so läßt sich (1.3) in der Form

$$B(f) = \int_{\mathscr{G} \setminus \{e\}} (f(x) - f(e))\, d\eta(x) \tag{1.3'}$$

schreiben. Daraus folgt, daß $\int\limits_{\mathscr{G}\setminus\{e\}} \Gamma f(x)\,d\eta(x)$ existieren und gleich $P(f)$ sein muß, dies bedeutet aber gerade, daß $B\in\mathbb{L}_0$.

Mit den Bezeichnungen des Korollars 1.3 gilt:

Hilfssatz 1.5. *Es sei* $C\in\mathfrak{W}(\mathscr{G})$ *definiert durch* $C(f)=\int\limits_{(0,\infty)}(\mu_t(f)-\delta_e(f))\,dN(t)$. *Dann ist*

$$\mathrm{Tr}(B)=\mathrm{Tr}(A)\cup\mathrm{Tr}(C)\quad \textit{wenn}\quad c>0, \tag{1.4}$$

weiter ist

$$\mathrm{Tr}(C)=\Big(\bigcup_{t\in\mathrm{Tr}(N)}\mathrm{Tr}(\mu_t)\Big)^{-}\cup\{e\},\quad \textit{oder}\quad C=0.$$

Die erste Aussage folgt aus Hilfssatz 0.5, die zweite beweist man auf folgende Weise: Sei $x\in\bigcup\limits_{t\in\mathrm{Tr}(N)}\mathrm{Tr}(\mu_t)$ und sei $f\in\mathfrak{D}(\mathscr{G})$, $0\leqq f\leqq 1$, $f(x)=1$, $f(e)=0$ (man darf $x\neq e$ voraussetzen). Es sei $t_0\in\mathrm{Tr}(N)$ so gewählt, daß $x\in\mathrm{Tr}(\mu_{t_0})$. Aus der Stetigkeit der Abbildung $t\to\mu_t(f)$ folgt, wegen $\mu_{t_0}(f)>0$, daß in einer Umgebung von t_0 noch $\mu_t(f)>0$ sein muß. Dann ist aber auch $\int\limits_{(0,\infty)}\mu_t(f)\,dN(t)=C(f)>0$. Da dies für jedes f mit den oben angegebenen Bedingungen gilt, folgt $x\in\mathrm{Tr}(C)$.

Nun sei $x\neq e$, $x\in\mathrm{Tr}(C)$. Dann gilt für jedes f mit den oben angegebenen Bedingungen, daß $C(f)>0$. Es muß dann zu jedem solchen f ein $t\in\mathrm{Tr}(N)$ geben, so daß $\mu_t(f)>0$, und zu jedem f und t gibt es ein $x_1\in\mathrm{Tr}(f)\cap\mathrm{Tr}(\mu_t)$. Läßt man nun f fallend gegen $\mathbb{1}_{\{x\}}$ konvergieren, so erhält man ein Netz von Punkten in $\bigcup\limits_{\mathrm{Tr}(N)}\mathrm{Tr}(\mu_t)$, das gegen x konvergiert.

$C=0$ gilt genau dann, wenn entweder $N=0$ ist, oder wenn $\mu_t=\delta_e$ für alle $t\in\mathrm{Tr}(N)$.

Folgerung 1.6. *Es sei U eine abgeschlossene Menge in $\mathscr{G}$. Wenn* $\mathrm{Tr}(B)\subseteq U$, *dann muß sowohl* $\mathrm{Tr}(cA)\subseteq U$ *(daher $c=0$ oder* $\mathrm{Tr}(A)\subseteq U$*) als auch* $\bigcup\limits_{t\in\mathrm{Tr}(N)}\mathrm{Tr}(\mu_t)\subseteq U$ *sein.*

Insbesondere: $B=0$ genau dann, wenn $cA=0$ – i.e. $c=0$ oder $A=0$ – und wenn $\mathrm{Tr}(N)\subseteq\{t:\mu_t=\delta_e\}$. Wenn $\mathrm{Tr}(N)\neq\emptyset$, dann folgt, daß μ_t eine Halbgruppe von Punktmaßen ist, $\mu_t=\delta_{x_t}$ und es ist $c=0$ (falls $x_t\neq e$ für mindestens ein t) und $\mathrm{Tr}(N)\subseteq\{t: x_t=e\}$.

II. Gauß- und elementare Poissonmaße lassen sich nicht als Subordinationen darstellen

Es wird nun folgende Frage behandelt: Es sei wie in I. (μ_t) eine stetige Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathscr{G}$, (F_s) sei eine Subordinationshalbgruppe mit Subordinator (c,N), (λ_s) sei die untergeordnete Halbgruppe ($\lambda_s=\int\mu_t\,dF_s(t)$). A und B seien die erzeugenden Distributionen von (μ_t) und (λ_s), also $B=cA+\int(\mu_t-\delta_e)\,dN(t)$. Weiter sei stets $C=\int(\mu_t-\delta_e)\,dN(t)$. Wann kann man zu gegebenem B ein passendes A und (c,N) finden? In dieser Allgemeinheit kann keine Antwort gegeben werden, es wird jedoch gezeigt, daß sich Gaußsche und elementare Poissonsche Distributionen nur in trivialer Weise als Subordinationen darstellen lassen (trivial heißt eine Darstellung, wenn $N=0$).

Satz 2.1. *Es sei nun* $B = a(\delta_x - \delta_e)$, $a > 0$, *und es sei die Ordnung von* x $\mathrm{ord}(x) > 2$. *Dann ist* $N = 0$, *also* $B = cA$.

Beweis. Man darf annehmen, daß $\mathscr{G}$ mit der von $\bigcup \mathrm{Tr}(\mu_t)$ erzeugten Gruppe übereinstimmt, da diese Gruppe natürlich $\mathrm{Tr}(\lambda_s)$ für alle $s \geqq 0$ enthält. Wegen $\mathrm{ord}(x) > 2$ enthält $\mathscr{G}$ mindestens drei Elemente.

Nach Hilfssatz 1.5 ist $\{x, e\} = \mathrm{Tr}(cA) \cup \bigcup_{t \in \mathrm{Tr}(N)} \mathrm{Tr}(\mu_t)$. Daraus folgt, daß $\mathrm{Tr}(\mu_t) \subseteq \{e, x\}$ für alle $t \in \mathrm{Tr}(N)$ sowie $\mathrm{Tr}(cA) \subset \{e, x\}$. Also muß cA entweder $= 0$ oder $= b(\delta_x - \delta_e)$ sein. Nach Hilfssatz 0.7 besitzt $\mathbb{E}\,\mathbb{P}$ die Eigenschaft (Z_1), wendet man dies auf $B = cA + C$ an und berücksichtigt, daß $C \in \mathbb{L}_0$ (nach Hilfssatz 1.4), also, daß C keinen primitiven Anteil besitzt, so folgt, daß $cA = a_1(\delta_x - \delta_e)$ und $C = a_2(\delta_x - \delta_e)$ mit passenden $a_i \geqq 0$.

Daraus folgt, daß (μ_t) Poissonhalbgruppe ist und daß daher $\mathrm{Tr}(\mu_t) = \{e, x, x^2, \ldots\}$ für alle $t > 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $\mathrm{Tr}(\mu_t) \subset \{x, e\}$ für $t \in \mathrm{Tr}(N)$, wenn nicht $\mathrm{Tr}(N) = \emptyset$, also $N = 0$ ist.

Der Fall $\mathrm{ord}(x) = 2$ muß nicht gesondert betrachtet werden, da, wie man sofort sieht, eine Gruppe mit 2 Elementen dadurch ausgezeichnet ist, daß $\mathbb{E}\,\mathbb{P} = \mathfrak{W}(\mathscr{G})$.

Satz 2.2. *Sei* B *im Ursprung konzentriert, also Gaußsch oder primitiv, dann ist wieder* $C = 0$, *also auch* A *im Ursprung konzentriert und* $B = cA$, $\lambda_t = \mu_{ct}$ *für alle* $t \geqq 0$ *und es ist* $\mathrm{Tr}(N) \subset \{t \colon \mu_t = \delta_e\}$.

Beweis. Es sei wieder $B = cA + C$. Da $\mathbb{G} + \mathbb{P}$ die Eigenschaft (Z) besitzt (Hilfssatz 0.7), folgt $cA \in \mathbb{G} + \mathbb{P}$, $C \in \mathbb{G} + \mathbb{P}$. Da andererseits $C \in \mathbb{L}_0$ (nach Hilfssatz 1.4) und da $(\mathbb{G} + \mathbb{P}) \cap \mathbb{L}_0 = \{0\}$, folgt $C = 0$. Nach Folgerung 1.6 kann dies nur gelten, wenn $\mathrm{Tr}(N) \subset \{t \colon \mu_t = \delta_e\}$.

(Für den Fall Abelscher Gruppen s. Bochner [1], Theorem 4.3.2, 4.3.4, für kompakte Gruppen s. Carnal [2], § 4.5.)

Der Satz 2.2 ist ein Spezialfall des folgenden allgemeineren Satzes,

Satz 2.3. *Seien* A *und* B *in ihrer kanonischen Zerlegung dargestellt,*

$$A(f) = P(f) + G(f) + \int_{\mathscr{G} \setminus \{e\}} (f(x) - f(e) - \Gamma f(x))\, d\eta_A(x),$$

$$B(f) = P_1(f) + G_1(f) + \int_{\mathscr{G} \setminus \{e\}} (f(x) - f(e) - \Gamma f(x))\, d\eta_B(x).$$

Dann ist

(i) $\eta_B = c\eta_A + \int_{(0,\infty)} (\mu_t - \mu_t(\{e\})\delta_e)\, dN(t)$,

(ii) $G_1 = cG$,

(iii) $P_1(f) = cP(f) + \int_{(0,\infty)} \mu_t(\Gamma f)\, dN(t)$, $f \in \mathfrak{D}(\mathscr{G})$.

Beweis. Es ist ja $B = cA + C$. Das Lévy-Maß von B ist die Summe der Lévy-Maße von cA und C. Das Lévy-Maß von cA ist $c\eta_A$, das Lévy-Maß von C hat die Gestalt, die in Hilfssatz 1.4 angegeben wurde, daraus folgt (i). (ii) folgt aus der Tatsache daß $C \in \mathbb{L}_0$ (nach Hilfssatz 1.4) und daher nach Definition von $\mathbb{L}_0$ keinen Gaußschen Anteil besitzen kann. (iii) folgt aus Hilfssatz 0.3, da das Lévy-Maß von C die in Hilfssatz 1.4 angegebene Gestalt hat.

Damit ist auch im Falle Abelscher oder kompakter Gruppen eine Verbesserung der Sätze von Bochner und Carnal gegeben.

III. Subordination von Poissonmaßen

Nun werden Subordinationen spezieller Halbgruppen untersucht, nämlich von Poissonhalbgruppen. Es seien (μ_t), (λ_s), (F_s), A, B, C, (c, N) wie in II. gegeben.

Satz 3.1. a) *Wenn (μ_t) Poissonhalbgruppe ist, also $A = a(v-\delta_e)$ ein Poissongenerator ist, dann ist (λ_s) Poissonsch,*

$$\begin{aligned} B &= c\,a(v-\delta_e) + \int_{(0,\infty)} (\mu_t - \delta_e)\, dN(t) \\ &= \Big(c\,a\,v + \int_{(0,\infty)} (\mu_t - \mu_t(\{e\})\,\delta_e)\, dN(t)\Big) - \Big(c\,a + \int_{(0,\infty)} (1-\mu_t(\{e\}))\, dN(t)\Big)\,\delta_e. \end{aligned}$$

b) *Wenn (F_s) Poissonsch ist, i.e. $c=0$ und N beschränkt, dann ist auch (λ_s) Poissonsch mit dem Generator*

$$\begin{aligned} B &= \int_{(0,\infty)} (\mu_t - \delta_e)\, dN(t) \\ &= \int_{(0,\infty)} (\mu_t - \mu_t(\{e\})\,\delta_e)\, dN(t) - \Big(\int_{(0,\infty)} (1-\mu_t(\{e\}))\, dN(t)\Big)\,\delta_e. \end{aligned}$$

Beweis. Der Definitionsbereich des Generators der Operatorhalbgruppe (R_{μ_t}) stimmt im Fall a) mit $C_0(\mathscr{G})$ überein, nach Hilfssatz 1.2 gilt dies auch für den Generator der Halbgruppe (R_{λ_s}), daraus folgt, daß (R_{λ_s}) und damit auch (λ_s) gleichmäßig stetig sind. Dies bedeutet, daß (λ_s) Poissonsch ist. Die genaue Gestalt von B erhält man, indem man bedenkt, daß die Funktion $t \to 1-\mu_t(\{e\})$ N-integrierbar ist, da $1-\mu_t(\{e\}) \leqq 1-e^{-at}$ und somit nach (1.1) integrierbar ist. b) wird analog bewiesen: Wenn (F_s) Poissonsch ist, also N ein beschränktes Maß ist, dann existieren die Integrale

$$\int_{(0,\infty)} (1-\mu_t(\{e\}))\, dN(t) \quad \text{und} \quad \int_{(0,\infty)} (\mu_t(f) - \mu_t(\{e\}) \cdot f(e))\, dN(t)$$

für alle $f \in C_0(\mathscr{G})$. Daher ist B, dessen Gestalt nach Korollar 1.3 bekannt ist, ein beschränktes Maß, daher Poissongenerator.

Es gilt aber auch die Umkehrung:

Satz 3.2. *Wenn (λ_s) Poissonsch ist, dann ist entweder (μ_t) oder (F_s) Poissonsch.*

Beweis. Seien A nicht Poissonsch und N nicht beschränkt, aber B Poissongenerator, dann muß zunächst $c=0$ sein. Es gäbe nämlich eine Folge $f_n \in \mathfrak{D}^+(\mathscr{G})$, $0 \leqq f_n \leqq 1$, $f_n(e)=0$, so daß $A(f_n) \nearrow \infty$. Daher ist

$$B(f_n) = c\,A(f_n) + \int (\mu_t(f_n) - f_n(e))\, dN(t) = c\,A(f_n) + \int_{(0,\infty)} \mu_t(f_n)\, dN(t) \nearrow \infty,$$

wenn $c > 0$ ist.

Es ist also $c=0$ und $B=C$.

Hilfsüberlegung. Wenn $\int_{(0,\infty)} (1-\mu_t(\{e\}))\, dN(t) < \infty$, dann ist C Poissongenerator. (Dies wurde bereits im Beweis des Satzes 3.1 a) verwendet.)

Es ist also zu zeigen, daß diese Bedingung verletzt ist, wenn (μ_t) und (F_s) nicht Poissonsch sind.

Sei $u(\mu_t) = \max\limits_x \mu_t(\{x\}) = u_t$ und sei x_t so gewählt, daß $\mu_t(\{x_t\}) = u_t$. Dann ist leicht zu sehen, daß $u_{t+s} \geqq u_t u_s$ und $u_{t+s} \leqq u_t$ für $s, t > 0$. Weiter ist x_t eindeutig bestimmt, wenn $u_t > 1/2$ (s. z.B. [5]).

Angenommen es wäre N unbeschränkt und $\int\limits_{(0,\infty)} (1-\mu_t(\{e\}))\,dN(t)<\infty$, dann müßte es eine Folge $t_n \searrow 0$ geben, so daß $\mu_{t_n}(\{e\}) \nearrow 1$. Daher wäre für genügend große n: $x_{t_n}=e$. Wählt man nun ein $t_0>0$, so daß $u_{t_n}=\mu_{t_n}(\{e\})>1/\sqrt{2}$ für $0<t_n<t_0$. Dann ist, da $t\searrow u_t$ monoton fallend ist, $u_t>1/\sqrt{2}$ für $0<t<t_0$. x_t ist daher eindeutig bestimmt für $t<t_0$ und wegen $\mu_{t+s}(\{x_{t+s}\}) \geqq \mu_t(\{x_t\}) \cdot \mu_s(\{x_s\})>1/2$ ist $x_{t+s}=x_t x_s$ für $t+s<t_0$. Da $\mu_t \to \delta_e$ schwach konvergiert und da $\|\mu_t-\delta_{x_t}\| \leqq 2(1-u_t)\to 0$ mit $t\searrow 0$ folgt, daß man $\{x_t; 0<t<t_0\}$ zu einer stetigen Halbgruppe fortsetzen kann. Wegen $x_{t_n}=e$ für $t_n<t_0$ und wegen $t_n \searrow 0$ folgt $x_t=e$ für alle t.

Das bedeutet aber gerade, daß $\|\mu_t-\delta_e\|<2(1-u_t)\to 0$, also daß (μ_t) Poissonsch ist.

IV. Bemerkungen

4.1. Der Begriff der Subordination von Halbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen läßt sich natürlich viel allgemeiner einführen: Man kann Halbgruppen $(\mu_t, t \geqq 0)$ auf einer halbtopologischen Halbgruppe $\mathscr{G}$ betrachten, so daß $\mu_0=\mathfrak{I}$ ein idempotentes Wahrscheinlichkeitsmaß ist (s. z.B. [6]). Insbesondere läßt sich der Satz 3.1 und, geeignet modifiziert, der Satz 2.1 auch in diesem allgemeineren Fall beweisen. Da Lévy-Hinčin-Formeln auf Halbgruppen $\mathscr{G}$ bisher nicht bekannt sind, lassen sich jedoch die übrigen Sätze kaum übertragen.

4.2. Anfangs wurde die Frage gestellt, wie die stetigen Halbgruppen resp. ihre erzeugenden Distributionen beschaffen sind, die einer anderen Halbgruppe untergeordnet sind, wobei das Lévy-Maß N des Subordinators (c, N) als nicht trivial vorausgesetzt wird. Im Prinzip wurde diese Frage in Korollar 1.3 beantwortet, man möchte allerdings ein Kriterium, das es gestattet, aus der Gestalt der erzeugenden Distribution unmittelbar abzulesen, ob die zugehörige Faltungshalbgruppe als Subordination darstellbar ist oder nicht.

In III. wurde gezeigt, daß Gauß- und elementare Poissonmaße nur in trivialer Weise als Subordinationen darstellbar sind. Dies ist jedoch keineswegs charakteristisch für diese Klasse von Maßen: Aus Korollar 1.3 folgt, daß das Lévy-Maß einer nicht trivialen Subordination einen Träger besitzt, der $\bigcup\{\mathrm{Tr}(\mu_t): t\in \mathrm{Tr}(N)\}$ enthält. Im Falle $\mathscr{G}=R_1$ folgt daraus, daß der Träger des Lévy-Maßes einer nicht trivialen Subordination nicht beschränkt ist. Also sind alle Faltungshalbgruppen, deren Lévy-Maß einen beschränkten Träger besitzt nur in trivialer Weise als untergeordnete Halbgruppen darstellbar.

Offen, auch für $\mathscr{G}=R_1$, bleibt somit das folgende

Problem. Welche Bedingungen sind notwendig und hinreichend dafür, daß eine stetige Halbgruppe resp. ihre erzeugende Distribution als (nicht triviale) Subordination darstellbar ist?

4.3. Der Satz 2.3, also die kanonische Zerlegung der erzeugenden Distribution einer untergeordneten Halbgruppe steht im engen Zusammenhang mit ähnlichen Zerlegungssätzen, die für Mischungen von erzeugenden Distributionen abgeleitet wurden, s. [7].

Literatur

1. Bochner, S.: Harmonic analysis and the theory of probability. Berkeley: University of California Press 1955
2. Carnal, H.: Unendlich oft teilbare Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf kompakten Gruppen. Math. Ann. **153**, 351 – 383 (1964)
3. Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications. vol. II, 2nd ed. New York: Wiley 1959
4. Hazod, W.: Über die Lévy-Hinčin-Formel auf lokalkompakten Gruppen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **25**, 301 – 322 (1973)
5. Hazod, W.: Über Wurzeln und Logarithmen beschränkter Maße. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **20**, 259 – 271 (1971)
6. Hazod, W.: Poissonmaße auf lokalkompakten Halbgruppen. Monatsh. Math. **78**, 25 – 41 (1974)
7. Hazod, W.: Stetige Halbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen und erzeugende Distributionen. Manuskript (1974)
8. Hille, E., Phillips, R. S.: Functional analysis and semigroups. 2nd ed. Coll. Publ. Amer. Math. Soc. (1957)
9. Phillips, R.S.: On the generation of semigroups of linear operators. Pacific J. Math. **2**, 343 – 369 (1952)
10. Schmetterer, L.: Sur les lois de Poisson. Colloque international: Les probabilités sur les structures algébriques. Université de Clermont-Ferrand (1969)
11. Siebert, E.: Stetige Halbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf lokalkompakten maximal fastperiodischen Gruppen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **25**, 269 – 300 (1973)
12. Siebert, E.: Über die Erzeugung von Faltungshalbgruppen auf beliebigen lokalkompakten Gruppen. Math. Z. **131**, 313 – 333 (1973)

Eingegangen am 20. Juni 1974, in revidierter Form am 10. November 1975