Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
69, 47-64 (1985)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Superposition de déformations cylindriques d'axes poissonniens dans le plan

A. Fellous[1] et J. Granara[2]

[1] Université René Descartes, U.E.R. de M.L.F.I. 12 Rue Cujas, F-75005 - Paris, France
[2] Université Paris-Nord, I.U.T. de Saint-Denis Dept. de Maintenance Industrielle, Place du 8 Mai 1945, F-93206 - Saint-Denis Cedex01, France

Summary. In view of approximating the fractional Brownian process in the plane B. Mandelbrot examined the superimposition of rectilinear faults, centered on the axis of a Poisson process with arbitrary large rate, the profiles of which being of the type $Q \cdot \operatorname{sgn}(x)|x|^{\alpha}$, $|\alpha|<1/2$ and Q a real valued random variable. In the following, we derive from general hypotheses a formula which caracterises any random profile leading to a Gaussian process of given type and thus providing explicit examples of profiles, thinkably less contrived than the former; some results on the quality of convergence are given.

I. Introduction

Soit D_0 une demi-droite orientée fixe d'origine O du plan $\mathscr{P}$, δ un axe variable. Notons τ le *vecteur* unitaire tel que l'angle orienté (τ, δ) soit egal à $\pi/2$, et p le produit scalaire du vecteur **OM** avec τ, $p=\mathbf{OM}\cdot\tau$, M étant un point quelconque de δ; soit enfin f une fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Réalisons alors la déformation suivante du plan orienté: tout point A de $\mathscr{P}$ subit un déplacement vertical d'amplitude algébrique:

$$h_{\delta,f}(A)=D_{\delta,f}(A)-D_{\delta,f}(O)$$

où

$$D_{\delta,f}(A)=f(\mathbf{OA}\cdot\tau-p). \tag{1}$$

Observons qu'il s'agit d'une déformation cylindrique, d'axe δ et centrée en δ, de profil f, mais réajustée de sorte que $h_{\delta,f}(O)=0$.

Soit à présent $(\delta_n)_{n\geq 1}$, la suite des axes, ordonnés par distance croissante à O, d'un processus de Poisson $\mathscr{X}$ d'axes sur $\mathscr{P}$, stationnaire et isotrope, de taux $\mu>0$ et $(F_n)_{n\geq 1}$, un échantillon infini, indépendant de $\mathscr{X}$, d'un processus réel mesurable F.

Posant $h_n(A) = h_{\delta_n, F_n}(A)$, considérons «l'altitude finale» du point A, résultant de la superposition de toutes les déformations cylindriques (δ_n, F_n): sous réserve de convergence de la série, on pose:

$$H_\mu(A) = \sum_{n \geq 1} h_n(A).$$

L'idée de considérer le processus réduit $\mu^{-1/2} \cdot H_\mu$ revient à B. Mandelbrot [4, 5], qui le propose comme approximation, lorsque μ tend vers l'infini, d'un Brownien fractionnaire H sur $\mathscr{P}$ [3], avec $F(x) = Q \cdot \operatorname{sgn}(x)|x|^\alpha$, $|\alpha| < 1/2$, $\operatorname{sgn}(x)$ = signe de x, et Q variable aléatoire réelle$\in L^2$. Pour $A, B \in \mathscr{P}$,

$$\operatorname{Var}(H_\mu(A) - H_\mu(B)) \propto AB^{2\alpha+1}$$

et donc, le Brownien H est de dimension fractale (Hausdorff-Besicovitch) $5/2 - \alpha$ [1].

Cette construction fournit donc un moyen, parmi d'autres, de simuler un Brownien fractionnaire de dimension donnée.

A l'opposé, on peut y voir un processus physiquement interprétable, par exemple en géologie, dont le Brownien fractionnaire est une approximation commode, justifiant ainsi de son adéquation à modéliser certaines surfaces naturellement observables; malheureusement cette approche se heurte au caractère «peu naturel» («contrived») du profil (sauf peut-être pour $\alpha = 0$, où le profil est une faille abrupte; mais par example pour $\alpha < 0$, F n'est pas borné au voisinage de 0); aussi, conclut Mandelbrot [6, 7], doit-on y renoncer.

En fait, l'exploration systématique de la classe des profils possibles nous semble remettre en question cette dernière assertion.

Plus précisément, dans ce qui suit, nous établissons les résultats suivants:

au § II, nous donnons explicitement les hypothèses sur lesquelles est bâtie la construction.

au § III, nous établissons l'existence p.s.p.p. de H_μ et mieux la sommabilité de $(h_n)_{n \geq 1}$, ce qui renforce la validité de la construction.

au § IV, nous établissons une formule caractéristique pour la classe des profils F pour lesquels H est un processus Gaussien centré, isotrope et à accroissements stationnaires, caractérisé par la variance de son accroissement $\operatorname{Var}(H(A) - H(B)) = \eta^2(AB)$, η fixé.

Notons que la seule hypothèse sur η est que la classe de profils correspondants soit non vide. Une question ultérieure, sur laquelle nous nous proposons de travailler, est donc de caractériser η.

au § V, pour le cas $\eta^2 \propto |\cdot|^{2\alpha+1}$, nous déduisons de la formule caractéristique précédente deux classes d'exemples de profils, la première généralisant ceux de B. Mandelbrot, la seconde construite sur l'idée de «naturalité» du profil. Pour ces deux classes, avec des hypothèses supplémentaires, nous montrons de plus la convergence compacte p.s. de la série $\sum h_n$.

II. Hypotheses generales. Notations

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est l'espace de probabilité de base.

(H_0) *$\mathscr{X}$ est un processus de Poisson d'axes, stationnaire et isotrope, de taux* $\mu > 0$.

$(\delta_n)_{n \geqq 1}$ est la suite des axes de $\mathscr{X}$, ordonnée par distance croissante à O; δ_n est paramétré par τ_n et p_n, comme définis au §I, mais on utilisera aussi l'angle orienté $\theta_n = (D_0, \tau_n)$ et $\varepsilon_n = \operatorname{sgn}(p_n)$; la droite d_n, support de δ_n, est paramétrée par $(|p_n|, \theta_n^*)$ avec

$$\theta_n^* = \begin{cases} \theta_n, & \text{si } \varepsilon_n = +1 \\ \theta_n + \pi \ [2\pi], & \text{si } \varepsilon_n = -1 \end{cases};$$

Rappelons alors le

Lemme 1. *$(\varepsilon_n)_{n \geqq 1}$ est un échantillon de la loi uniforme sur $\{-1, +1\}$; $(\theta_n)_{n \geqq 1}$ (resp. $(\theta_n^*)_{n \geqq 1}$) est un echantillon de la loi uniforme sur $[0, 2\pi[$; $(|p_1|, |p_2| - |p_1|, \ldots, |p_{n+1}| - |p_n|, \ldots)$ est un échantillon de la loi exponentielle de parametre $4\pi\mu$. De plus, ces trois échantillons sont indépendants.*

Démonstration. Cf. [2].

Notons enfin $\mathscr{X}_0$ le processus de droites sous-jacent à $\mathscr{X}$.

(H_1) *F est une fonction aléatoire réelle mesurable telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}(F(x) + F(-x)) = 0.$$

Posons pour f quelconque $\tilde{f}(x) = -f(-x)$; l'hypothèse (H_1) est donc vérifiée dès que la loi de F est invariante par la transformation $f \mapsto \tilde{f}$, condition en général non restrictive sur la *forme* du profil F, mais qui admet comme cas particulier celui où p.s. les réalisations de F sont impaires.

Soit $(F_n)_{n \geqq 1}$ un échantillon infini de F, indépendant de $\mathscr{X}$; $\forall n \geqq 1$, on note h_n la fonction aléatoire, definie sur $\mathscr{P}$,

$$A \mapsto h_n(A) = F_n(\mathbf{OA} \cdot \tau_n - p_n) - F_n(-p_n) \tag{2}$$

(H_2) *$\forall A, B \in \mathscr{P}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}((h_n(A) - h_n(B))^2)$ converge et sa somme ne dépend que de AB: on la note $\eta^2(AB)$, $\eta \geqq 0$.*

Dans l'hypothèse (H_2), la fonction η n'est a priori définie que sur $\mathbb{R}_+$: nous la supposerons prolongée par parité sur $\mathbb{R}$. Remarquons alors que, par inégalité triangulaire, $\forall A, B, C \in \mathscr{P}$, $\eta(AC) \leqq \eta(AB) + \eta(BC)$. Quels que soient les réels positifs a, b, c tels que $|a - c| \leqq b \leqq a + c$, il existe un triangle ABC tel que $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$, et donc

$$|\eta(a) - \eta(c)| \leqq \eta(b) \leqq \eta(a) + \eta(c).$$

En particulier,

$$0 \leqq b \leqq 2a \Rightarrow \eta(b) \leqq 2\eta(a). \tag{3}$$

Il en résulte que, si η n'est pas identiquement nulle,

$$\forall x \neq 0,\ \eta(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geqq \varepsilon,\ \eta(x) \geqq A;$$

en particulier, si d est une distance, $\eta \circ d$ aussi et il résulte de la continuité de η [cf. infra], que $\eta \circ d$ et d sont équivalentes.

III. L'Existence de H_μ

Soit $R>0$, $\mathscr{D}$ le disque de centre O et de rayon R, $\mathbb{M}$ la probabilité uniforme sur $\mathscr{D}$.

Théorème 1. *Soit σ une permutation aléatoire de $\mathbb{N}^*$, telle que $(\mathscr{Z}_0, \sigma)$ soit indépendant de $((\varepsilon_n)_{n\geqq 1}, (F_n)_{n\geqq 1})$. Alors, $\sum_{n\geqq 1} h_{\sigma(n)}$ existe et est finie, et ne dépend pas de σ au sens presque sûrement presque partout dans $\mathscr{D}$ et au sens $L^2(\mathbb{P}\otimes\mathbb{M})$.*

Démonstration. Pour toute «bonne» réalisation Z_0 de $\mathscr{Z}_0$ et tout A dans $\mathscr{P}$ posons:

$$h(n, A, Z_0) = F_n(\mathbf{OA}\cdot\varepsilon_n u_n - \varepsilon_n t_n) - F_n(-\varepsilon_n t_n), \qquad (u_n)_{n\geqq 1} \quad \text{et} \quad (t_n)_{n\geqq 1}$$

définissant les paramètres des droites de Z_0. Il est alors clair, grâce au lemme 1, que la loi de $h(n, ., Z_0)$ est une version naturelle de la loi de h_n conditionnellement à $(\mathscr{Z}_0, \sigma)$ (sur l'espace produit $\Omega\times\mathscr{D}$); de plus, (H_1) implique que $\mathbb{E}\,(h(n, ., Z_0))=0$. Enfin, $\forall A\in\mathscr{P}$, la suite $(h(n, A, Z_0))_{n\geqq 1}$ est une suite de variables indépendantes. Supposons Z_0 telle que

$$\sum_{n\geqq 1} \int \mathbb{E}(h(n, A, Z_0)^2)\,\mathbb{M}(dA) < \infty. \tag{4}$$

Alors, $\forall n\geqq 1$, $h(n, ., Z_0)$ est $L^2(\mathbb{P}\otimes\mathbb{M})$ et donc $L^1(\mathbb{P}\otimes\mathbb{M})$.

Notons $\forall n\geqq 1$, $\mathscr{B}_n$ la tribu engendrée (sur $\Omega\times\mathscr{D}$) par $(F_k, \varepsilon_k)_{k\leqq n}$; si $E\in\mathscr{B}_{n-1}$, on a $\forall A\in\mathscr{P}$, $\mathbb{E}(1_E(., A)\,h(n, A, Z_0))=0$.

Comme $h(n, ., Z_0)\in L^1(\mathbb{P}\otimes\mathbb{M})$, on en déduit $\mathbb{E}(1_E h(n, ., Z_0))=0$ et donc $\mathbb{E}(h(n, ., Z_0)|\mathscr{B}_{n-1})=0$, ces deux denières espérances étant prises au sens de la probabilité $\mathbb{P}\otimes\mathbb{M}$.

Ainsi, la suite $(h(n, ., Z_0))_{n\geqq 1}$ est une suite centrée, c'est-à-dire que $(\sum_{k\leqq n} h(k, ., Z_0))_{n\geqq 1}$ est une martingale. Par conséquent, vu (H_2) $\sum_{n\geqq 1} h(n, ., Z_0)$ existe et est finie $\mathbb{P}\otimes\mathbb{M}$ presque sûrement et $L^2(\mathbb{P}\otimes\mathbb{M})$ [8]. Mieux, la suite $(h(n, ., Z_0))_{n\geqq 1}$ est sommable au sens de $L^2(\mathbb{P}\otimes\mathbb{M})$; en effet
$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall I\subset\mathbb{N}^*$, $\operatorname{card} I<\infty$ et $\min I>N$,

$$\sum_{n\in I} \mathbb{E}(h(n, ., Z_0)^2) \leqq \varepsilon^2. \tag{5}$$

Comme la suite $(h(n, ., Z_0))_{n\geqq 1}$ est centrée, elle est orthogonale et (5) s'écrit $\mathbb{E}(\sum_{n\in I} h(n, ., Z_0)^2)\leqq\varepsilon^2$, soit $\|\sum_{n\in I} h(n, ., Z_0)\|\leqq\varepsilon^2$ où $\|\cdot\|$ est la norme de $L^2(\mathbb{P}\otimes\mathbb{M})$.

Donc, quel que soit s, permutation de $\mathbb{N}^*$

$$\sum_{n\geqq 1} h(s(n), ., Z_0) = \sum_{n\geqq 1} h(n, ., Z_0) \quad \text{p.s.}$$

Il ne reste qu'à vérifier que $\mathbb{P}$ps on a (4): or $\mathbb{E}(\sum_{n\geqq 1} \int \mathbb{E}(h_n(A)^2|\mathscr{Z}_0)\mathbb{M}(dA)) = \int \eta^2(OA)\mathbb{M}(dA)\leqq 4\eta^2(R/2)$ d'après (3).

Remarques. 1) Le théorème 1 implique que p.s. en tout $A \in \mathscr{P}$, la suite $h_n(A)$ est sommable. Ainsi, dans un modèle *temporel*, où les déformations successives apparaitraient naturellement dans un ordre différent de celui donné par distance croissante des axes à O, le processus somme serait le même (sous réserve de validité de l'hypothèse sur σ).

2) Une autre conséquence est le:

Corollaire 1. *Le processus* $H_\mu = \sum_{n \geqq 1} h_n$ *est isotrope et à accroissements stationnaires.*

Démonstration. L'isotropie résulte directement de celle de $\mathscr{X}$ et du mode de construction de H_μ. Par ailleurs, soit $O' \in \mathscr{P}$, $O' \neq O$; alors le processus des accroissements de H_μ autour de O' a même loi que H_μ (rappelons que $[H_\mu(O) = 0]$ est certain); en effet, soit σ la permutation de $\mathbb{N}^*$ telle que $(\delta_{\sigma(n)})_{n \geqq 1}$ soit la suite des axes de $\mathscr{X}$ ordonnée par distance croissante à O': $\delta_{\sigma(n)}$ a pour paramètres $\tau_{\sigma(n)}$ et $q_n = p_{\sigma(n)} - \mathbf{OO'} \cdot \tau_{\sigma(n)}$. Alors, p.s. p.p. on a $H_\mu - H_\mu(O') = \sum_{n \geqq 1} (h_n - h_n(O')) = \sum_{n \geqq 1} (h_{\sigma(n)} - h_{\sigma(n)}(O'))$ d'aprés le théorème 1. Or, pour $A \in \mathscr{P}$,

$$\begin{aligned} h_{\sigma(n)}(A) &= F_{\sigma(n)}(\mathbf{OA} \cdot \tau_{\sigma(n)} - p_{\sigma(n)}) - F_{\sigma(n)}(-p_{\sigma(n)}) \\ &= F_{\sigma(n)}(\mathbf{O'A} \cdot \tau_{\sigma(n)} - q_n) - F_{\sigma(n)}(-p_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

et donc

$$h_{\sigma(n)}(A) - h_{\sigma(n)}(O') = F_{\sigma(n)}(\mathbf{O'A} \cdot \tau_{\sigma(n)} - q_n) - F_{\sigma(n)}(-q_n).$$

On en déduit le corollaire, puisque $(\tau_{\sigma(n)}, F_{\sigma(n)})_{n \geqq 1}$ a même loi que $(\tau_n, F_n)_{n \geqq 1}$.

3) Considérons enfin une suite de réels positifs $(\beta_i)_{i \geqq 1}$ telle que

$$S_n = \sum_{i \leqq n} \beta_i \to +\infty$$

quand $n \to +\infty$; on se donne alors, pour chaque i, les éléments aléatoires nécessaires à la construction de H_{μ_i} où $\mu_i = \mu \beta_i$: $(F_{n,i})_{n,i \geqq 1}$ échantillon de F $(\mathscr{X}_{\mu_i})_{i \geqq 1}$ suite de processus de Poisson indépendants de taux respectifs μ_i. De la sorte, les H_{μ_i} sont indépendants, et $\sum_{i \leqq n} H_{\mu_i}$ a même loi que $H_{\mu S_n}$; le théorème central limite généralisé indique alors que $S_n^{-1/2} \times \sum_{i \leqq n} H_{\mu_i}$ tend en loi vers un processus gaussien centré H tel que

$$\operatorname{Var}(H(A) - H(B)) = \eta^2(AB)$$

IV. Une formule caractéristique

Soient $A, B \in \mathscr{P}$; notons provisoirement (a, ϕ) et (b, ψ) leurs coordonnées polaires respectives. On a alors

$$\mathbb{E}((h_n(A) - h_n(B))^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(4\pi\mu)^n}{2(n-1)!} p^{n-1} e^{-4\pi\mu} \right.$$
$$\left. \cdot (F_n(a\cos(\theta - \phi) - p) - F_n(b\cos(\theta - \psi) - p))^2 \, dp\right)$$

et donc, par sommation et changements de variables

(6) $$\eta^2(AB)=\mu\,\mathbb{E}\left(\int_0^{2\pi} du \int_{\mathbb{R}} \left(F\left(\frac{AB}{2}\cos u - t\right) - F\left(\frac{-AB}{2}\cos u - t\right)\right)^2 dt\right).$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Delta_x = \varepsilon_x - \varepsilon_0$, où ε_x désigne la mesure de Dirac en x et

(7) $$\xi^2(x) = \int_{\mathbb{R}} (\Delta_x * F)^2(t)\,dt, \qquad \text{où par définition } \xi \geqq 0, \text{ et}$$

(8) $$G = \mathbb{E}(\xi^2)^{1/2}.$$

(6) s'écrit à présent: $\forall a \in \mathbb{R}$,

(9) $$\eta^2(a) = \mu\,\mathbb{E}\left(\int_0^{2\pi} \xi^2(a\cos u)\,du\right) = \mu \int_0^{2\pi} G^2(a\cos u)\,du$$

Remarques. 1) dans les formules (7) et (9), on retrouve les quantités notées resp. K^* et V dans [4], pour le cas F certain.
2) si $F \in L^2(\lambda_{\mathbb{R}})$, $\xi^2 = 2(F*\tilde{F} - F*\tilde{F}(0))$.

Proposition 1. *ξ et G sont des demi-valeurs absolues sur* $(\mathbb{R}, +)$, *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$; *G et p.s. ξ sont localement bornées et donc des $O(x)$ au voisinage de $x = +\infty$.*

Démonstration. Il est clair que $\xi(0)=0$; la parité de ξ s'obtient par simple changement de variable; enfin, l'inégalité triangulaire pour ξ s'obtient en remarquant que $\Delta_{x+y} = \Delta_x * \varepsilon_y + \Delta_y$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La démonstration pour G est analogue. Par changement de variable, (9) s'écrit encore

$$\eta^2(a) = 4\mu\,\mathbb{E}\left(\int_0^a \xi^2(w)(a^2-w^2)^{-1/2}\,dw\right) = 4\mu \int_0^a G^2(w)(a^2-w^2)^{-1/2}\,dw.$$

On en déduit que G est mesurable sur $\mathbb{R}$ et presque partout finie, que p.s. ξ est mesurable et presque partout finie: soit, pour la suite k une telle réalisation de ξ.

Montrons que k est localement bornée: supposons vrai le contraire; il existe alors une suite $(a_n)_{n \geqq 1}$ bornée et telle que $k(a_n)$ tend vers l'infini avec n; soit $(b_p)_{p \geqq 1}$ une sous-suite convergente de $(a_n)_{n \geqq 1}$; comme k est une demi-valeur absolue, on peut supposer qu'il existe des constantes m et M telles que, $\forall p$, $0 < m \leqq b_p \leqq M < +\infty$. Comme k est p.p. finie et mesurable, il existe une suite croissante $(c_n)_{n \geqq 1}$ telle que $\lambda_{\mathbb{R}}\{x \in [O, M] \mid k(x) \geqq c_n\} \leqq n^{-2}$ et donc

$$\lambda_{\mathbb{R}}\{y \in [0,1] \mid k(b_n y) \geqq c_n\} \leqq (b_n \cdot n^2)^{-1};$$

le lemme de Borel-Cantelli donne alors $\lambda_{\mathbb{R}}\{x \in [0,1] \mid k(b_n x) = O(c_n)\} = 1$. Soit $\mathscr{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid k(b_n x) = O(c_n)\}$. Par sous-additivé de k, $\mathscr{R}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, dont le complémentaire dans $[0,1]$ est de mesure nulle: on en déduit que $\mathscr{R} = \mathbb{R}$ et donc $(x=1)$ $k(b_n) = O(c_n)$; or les choix de $(b_n)_{n \geqq 1}$ et de $(c_n)_{n \geqq 1}$ ont été faits indépendamment: absurdité. On a évidemment le même résultat pour G, la démonstration n'utilisant que des propriétés communes à ξ et G.

Pour toute la suite, on note $\mathscr{F}[\phi]$ la transformée de Fourier de ϕ définie par $\mathscr{F}[\phi](u)=\int_{\mathbb{R}} e^{iux}\phi(x)\,dx$ et $\mathscr{F}^{-1}[\phi]$ la transformée de Fourier réciproque.

Il résulte de la proposition 1 que p.s. ξ est finie p.p. et donc que p.s. $\forall x$, $\Delta_x * F \in L^2(\lambda_{\mathbb{R}})$; soit f une telle réalisation de F et $k^2(x)=\int_{\mathbb{R}}(\Delta_x * f)^2(t)\,dt$.

Observons d'abord que, $\forall x$ et $\forall y$,

$$\mathscr{F}[\Delta_{x+y}*f]=\mathscr{F}[\varepsilon_x*\Delta_y*f]+\mathscr{F}[\Delta_x*f], \quad \text{p.p.}$$

et donc, pour presque tout u

$$\mathscr{F}[\Delta_{x+y}*f](u)=e^{iux}\mathscr{F}[\Delta_y*f](u)+\mathscr{F}[\Delta_x*f](u).$$

Echangeons les rôles de x et y; on obtient:

$$\mathscr{F}[\Delta_{x+y}*f](u)=e^{iuy}\mathscr{F}[\Delta_x*f](u)+\mathscr{F}[\Delta_y*f](u), \quad \text{u}-\text{p.p.}$$

D'où, quelques soient x et y, pour presque tout u,

$$\mathscr{F}[\Delta_x*f](u)=\frac{\mathscr{F}[\Delta_y*f](u)}{e^{iuy}-1}\cdot(e^{iux}-1);$$

ceci définit donc p.p. sur $\mathbb{R}$, une fonction b telle que, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\mathscr{F}[\Delta_x*f](u)=b(u)(e^{iux}-1). \tag{10}$$

Remarque. Comme $\mathscr{F}[\Delta_x](u)=e^{iux}-1$, la formule (10) nous incite à penser que $\mathscr{F}[f](u)=b(u)$; or rien ne prouve *a priori* que $\mathscr{F}[f]$ ait un sens, même en tant que distribution et quand bien même celà serait, au mieux pourrait-on déterminer $\mathscr{F}[f]|_{\mathbb{R}*}$, restriction de $\mathscr{F}[f]$ à $\mathbb{R}^*$, car f n'intervient que par ses accroissements.

A présent, on se donne un processus B tel que:

$$\text{p.s.}, \forall x\in\mathbb{R}, \mathscr{F}[\Delta_x*F](u)=B(u)(e^{iux}-1), \quad \text{u}-\text{p.p.}$$

Par la formule de Plancherel, on a pour tout x,

$$\xi^2(x)=\int_{\mathbb{R}}(\Delta_x*F)^2(t)\,dt=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}|\mathscr{F}[\Delta_x*F]|^2(u)\,du \tag{11}$$

soit par changement de variable,

$$\pi\xi^2(x)=\int_{\mathbb{R}}(1-\cos xu)|B(u)|^2\,du \quad \text{p.s.} \tag{12}$$

Lemme 2. *p.s.* $u\mapsto u^2(1+u^2)^{-1}|B(u)|^2\in L^1(\lambda_{\mathbb{R}})$.

Démonstration. Écrivons (12) pour une bonne réalisation du processus:

$$\pi k^2(x)=\int_{\mathbb{R}}(1-\cos xu)|b(u)|^2\,du.$$

Comme au voisinage de $x=+\infty$ k^2 est localement bornée et un $O(x^2)$, $x\mapsto k^2(x)\,e^{-|x|}$ est $L^1(\lambda_{\mathbb{R}})$ et

$$\pi\int_{\mathbb{R}} k^2(x)\,e^{-|x|}\,dx=\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(1-\cos xu)\,e^{-|x|}|b(u)|^2\,du\,dx$$
$$=2\int_{\mathbb{R}} u^2(1-u^2)^{-1}|b(u)|^2\,du<+\infty.$$

Lemme 3. *P.s. ξ est continue sur $\mathbb{R}$; G est continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit M une constante et $(x_n)_{n\geqq 1}$ une suite bornée par M et convergeant vers x: avec les mêmes notations que précédemment, on a

$$\pi k^2(x_n)=\int_{\mathbb{R}}(1-\cos x_n u)|b(u)|^2\,du.$$

Or, $1-\cos x_n u\leqq 2,\ M^2u^2/2$. Il existe donc une constante M' telle que $1-\cos x_n u\leqq M'u^2/(1+u^2)$. On obtient alors la continuité en 0 de k, compte tenu du lemme 2, par application du théorème de Lebesgue Le même résultat pour G s'obtient en remplaçant à partir du lemme 2, k par G et $|b(u)|^2$ par $\mathbb{E}(|B(u)|^2)$.

Théorème 2. *P.s. F est localement L^2 et tempérée comme distribution; p.s. la distribution $\mathscr{F}[F]|_{\mathbb{R}^*}$ est une fonction localement L^1, dont une version est B.*

Démonstration. Avec les mêmes notations que précédemment, la fonction $l(u)=-(iub(u))/(1-iu)$ appartient à $L^2(\lambda_{\mathbb{R}})$; donc, $\mathscr{F}^{-1}[l]$ appartient à $L^2(\lambda_{\mathbb{R}})$ et est donc tempérée et localement L^1; les primitives de $\mathscr{F}^{-1}[l]$ sont donc continues et tempérées. Posons

$$f_1(x)=\mathscr{F}^{-1}[l](x)+\int_0^x\mathscr{F}^{-1}[l](t)\,dt.$$

Alors f_1 est tempérée et localement L^2. Au sens des distributions on a

$$f_1'=(\mathscr{F}^{-1}[l])'+\mathscr{F}^{-1}[l],$$

soit

$$\mathscr{F}[f_1']=l(u)(1-iu)=-iu\,b(u)\quad \text{u-p.p.}.$$

Ainsi, $\mathscr{F}[f_1]|_{\mathbb{R}^*}$ est une fonction localement L^1, et dont une version est b. Avec les mêmes notations que précédemment, on a donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda_{\mathbb{R}}\{u\in\mathbb{R}\,|\,\Delta_x*f(u)\neq\Delta_x*f_1(u)\}=0$$

soit en posant $f_0=f-f_1$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda_{\mathbb{R}}\{u\in\mathbb{R}\,|\,f_0(u-x)\neq f_0(u)\}=0.$$

Comme f_0 est mesurable, il existe, pour n fixé, un fermé D tel que $\lambda_{\mathbb{R}}(D^c)<1/n$ et f_0 continue sur D. Posons de plus

$$D^*=\{x\in D\,|\,\forall\varepsilon>0,\ \lambda_{\mathbb{R}}(D\cap[x-\varepsilon,x+\varepsilon])>0\}.$$

Observons que $\lambda_{\mathbb{R}}(D \setminus D^*)=0$ et donc $\lambda_{\mathbb{R}}(D^*)<1/n$. Montrons que f_0 est constante sur D^*: supposons qu'il existe a, $b \in D^*$ tels que $f_0(a)<f_0(b)$; soient alors A et B des constantes telles que $f_0(a)<A<B<f_0(b)$; comme f_0 est continue sur D^*, il existe un $\varepsilon>0$ tel que $\forall x \in (D^* \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon])=K_a$, $f_0(x) \leqq A$ et $\forall x \in (D^* \cap [b-\varepsilon, b+\varepsilon])=K_b$, $f_0(x) \geqq B$. Pour y quelconque,

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbb{R}}((y+K_a) \cap K_b) &= \int_{\mathbb{R}} 1_{y+K_a}(u)\, 1_{K_b(u)}\, du \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_{K_a}(y-u)\, 1_{K_b}(u)\, du = 1_{K_a} * 1_{K_b}(y)\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda_{\mathbb{R}}((y+K_a) \cap K_b)\, dy = \lambda_{\mathbb{R}}(K_a)\, \lambda_{\mathbb{R}}(K_b)>0$$

il existe donc un y_0 tel que $\lambda_{\mathbb{R}}((y_0+K_a) \cap K_b)>0$ et pour tout u dans $(y_0+K_a) \cap K_b$, $f_0(u-y_0) \neq f_0(u)$: contradiction.

Nous pouvons à présent énoncer le

Théorème. *Sous* (H_0), (H_1) *et* (H_2), *on a nécessairement*

(13) $$\text{p.s. } \mathscr{F}[(\xi^2)'']=2|\mathscr{F}[F']|^2 \quad \text{p.p. } \textit{ou de façon équivalente}$$

(14) $$\mathscr{F}[(G^2)'']=2\mathbb{E}(|\mathscr{F}[F']|^2) \quad \text{p.p.}$$

Démonstration. Soient encore k, b, f definis comme précédemment.

Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. Soit $\phi \in \mathscr{S}$, positive et paire. Alors

$$\begin{aligned}\pi\langle k^2, \phi\rangle &= \pi \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, k^2(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}} (1-\cos xu)|b(u)|^2\, du \\ &= \int_{\mathbb{R}} |b(u)|^2 (\mathscr{F}[\phi](0)-\mathscr{F}[\phi](u))\, du\end{aligned}$$

ceci est encore vrai pour $\phi \in \mathscr{S}$, supposée seulement paire, en écrivant ϕ comme différence de deux fonctions positives de $\mathscr{S}$. On en déduit donc, quelque soit ϕ paire de $\mathscr{S}$, la formule

$$\pi\langle (k^2)'', \phi\rangle = \pi\langle k^2, \phi''\rangle = \int_{\mathbb{R}} |b(u)|^2 (\mathscr{F}[\phi''](0)-\mathscr{F}[\phi''](u))\, du$$

or $\mathscr{F}[\phi''](0)=0$ et $\mathscr{F}[\phi''](u)=-u^2\, \mathscr{F}[\phi](u)$ et donc

$$\pi\langle (k^2)'', \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}[\phi](u)|iub(u)|^2\, du = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}[\phi](u)|\mathscr{F}[f']|^2(u)\, du.$$

Comme ϕ est paire $2\pi\, \mathscr{F}^{-1}[\phi]=\mathscr{F}[\phi]$ et donc

(15) $$\langle \mathscr{F}[(k^2)''], \phi\rangle = 2\int_{\mathbb{R}} \phi(u)|\mathscr{F}[f']|^2(u)\, du.$$

Comme $u \mapsto |\mathscr{F}[f']|^2(u)$ est paire, localement L^1 et tempérée, (15) a un sens pour tout ϕ dans $\mathscr{S}$ et vaut 0 dès que ϕ est impaire; (15) est donc vraie

$\forall \phi \in \mathscr{S}$, ce qui établit (13). Enfin, l'équivalence de (13) et (14) résulte de ce que $-u^2 \mathscr{F}[\mathbb{E}(\xi^2)](u) = -u^2 \mathbb{E}(\mathscr{F}[\xi^2])(u)$, par application du théorème de Fubini pour un intégrand positif sur la formule (11).

Proposition 2. *η détermine G.*

Démonstration. Dans la formule (9), on peut supposer $a > 0$ puisque η est paire; par changement de variable, (9) s'écrit encore:

$$\eta^2(e^x) = 4\mu \int_0^\infty G^2(e^{x-t})(1-e^{-2t})^{-1/2} e^{-t}\, dt,$$

soit en posant $\phi(t) = G^2(e^t)$ et $\psi(t) = \eta^2(e^t)$

$$\psi = 4\mu\phi * \rho_1 \quad \text{où} \quad \rho_k(t) = e^{-kt}(1-e^{-2t})^{-1/2}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Observons que $\rho_0 * \rho_1 = \pi/2.\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$, d'où

$$\rho_1 * (\Delta_x * \rho_0) = \pi/2 \cdot \Delta_x * \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}.$$

Il en résulte que $\psi * (\Delta_x * \rho_0) = 2\pi\mu\phi * (\Delta_x * \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*})$, car $\rho_1, \rho_2 \geqq 0$ et on peut montrer que $|\Delta_x * \rho_0| * \rho_1 * \phi$ est finie. La proposition en résulte puisque ϕ est continue et

$$\phi = \lim_{x \to 0+} x^{-1}(\Delta_x * \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}) * \phi,$$

cette dernière quantité étant le lissage de ϕ par $\mathbb{1}_{[0,x]}$.

Avant d'énoncer le théorème suivant, qui justifie le terme de *caractéristique* pour la formule (14), il convient de donner une formulation préçise du problème.

Soit H un processus Gaussien centré isotrope et à accroissements stationnaires défini par la variance de son accroissement

$$v^2(AB) = \operatorname{Var}(H(A) - H(B)), \qquad v \text{ fixée} \geqq 0.$$

Se posent alors les deux questions suivantes:

1) existe-*t*-il un profil F qui vérifie (H_1), (H_2) avec $\eta^2 = v^2$? on dira: existe-*t*-il une solution du problème $\eta = v$?

2) s'il existe une solution, quelles sont toutes les solutions?

Commençons par la question 2), à laquelle le théorème suivant donne une réponse complète.

Théorème 4. *Soit F_0 une solution de $\eta = v$, G_0 définie à partir de F_0 par les formules* (7) *et* (8); *alors, l'ensemble des solutions du problème $\eta = v$ est l'ensemble des F telles que (H_1) et $2\mathbb{E}(|\mathscr{F}[F']|^2) = \mathscr{F}[(G_0^2)'']$.*

Démonstration. Soit un tel F; G définie à partir de F par les formules (7) et (8); on a donc $G = G_0$, d'où $\mu \int_0^{2\pi} G^2\ (a \cos u)\, du = v^2(a)$ et le fait que cette intégrale converge quel que soit a assure la convergence de $\sum_{n \geqq 1} \mathbb{E}((h_n(A) - h_n(B))^2)$, où h_n

est définie à partir de F: en effet, la formule établie au début de ce §: $\sum_{n\geqq 1}\mathbb{E}((h_n(A)-h_n(B))^2)=\mu\int_0^{2\pi}G^2(AB\cos u)\,du$ s'obtient par un changement de l'ordre des sommations, dont la validité est assurée puisque là-encore l'intégrand est positif.

Pour finir, il nous reste à montrer que cette classe de solutions ne dépend pas de la solution particulière F_0 choisie, mais ceci est clair vu la proposition 2.

Reste la question 1); nous pouvons énoncer la

Proposition 3. *S'il existe une solution du problème $\eta=v$, alors v est sur $\mathbb{R}^*$ au moins localement lipschitzienne d'ordre* 1/2; *de plus v est continue en* 0, *donc continue sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 2; observons que ϕ est bornée au voisinage de $-\infty$ et continue partout; ρ_1 est intégrable, portée par $\mathbb{R}_+$, analytique sur $\mathbb{R}_+^*$ et c'est un $O(u^{-1/2})$ au voisinage de $u=0$; donc $v^2\circ\exp$ est localement lipschitzienne d'ordre 1/2 et ne s'annule pas, d'où le résultat pour v.

Enfin, G étant continue en 0, $\forall\varepsilon>O$, $\exists r$, $\forall t\in[0,r]$, $G(t)<\varepsilon$. Pour $x\in[0,r]$,

$$\begin{aligned} v^2(x)&=4\mu\int_0^x G^2(t)(x^2-t^2)^{-1/2}\,dt\\ &\leqq 4\mu\varepsilon^2\int_0^x (x^2-t^2)^{-1/2}\,dt\leqq 2\mu\varepsilon^2\pi. \end{aligned}$$

V. Exemples

A présent, pour toute la suite nous supposons $\eta^2=\mu|\cdot|^\gamma$. Notons que, par sous-additivité et continuité de η, nécessairement $0<\gamma\leqq 2$. De plus, il n'y a pas de solution au problème $\eta^2=\mu|\cdot|^2$: en effet, dans ce cas $\mathscr{F}[(G^2)'']\propto\varepsilon_0$ qui n'est pas une fonction, ce qui est absurde d'après le § IV. Donc, $0<\gamma<2$.

On posera $\alpha=(\gamma-1)/2$ afin de simplifier certaines formules; de la sorte $|\alpha|<1/2$.

(16) On vérifie alors que $G^2(x)=C_\gamma|x|^\gamma$, où la constante C_γ est définie par $1=C_\gamma\cdot 4^{\alpha+1}\,\mathrm{B}(\alpha+1,\alpha+1)$, B désignant la fonction bêta usuelle: $\mathrm{B}(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $\mathbb{R}e(x)$ et $\mathbb{R}e(y)>0$.

A.1) L'exemple de B. Mandelbrot

C'est la classe de profils $F(t)=Q\cdot\operatorname{sgn}(t)|t|^\alpha$ où Q est une variable aléatoire réelle de $L^2(\mathbb{P})$. Notons que la condition de normalisation du profil F pour que $\eta^2(t)=\mu|t|^\alpha$ porte sur $\mathbb{E}(Q^2)$: par transformation de Fourier, on trouve

$$\xi^2(x) = 2Q^2|x|^\gamma \mathrm{B}(\alpha+1, \alpha+1)(1+(\cos\pi\alpha)^{-1}),$$

d'où G^2 et par intégration et identification

$$[\mathbb{E}(Q^2)]^{-1} = 2^{2\alpha+3}\mathrm{B}(\alpha+1, \alpha+1)^2(1+(\cos\pi\alpha)^{-1}).$$

Remarque. Quand $\gamma \nearrow 2$, $\alpha \nearrow 1/2$ et $\mathbb{E}(Q^2) \sim \pi^{-1}(2-4\alpha)$, qui tend vers zéro; de même, lorsque $\gamma \searrow 0$, $\alpha \searrow -1/2$, $\mathbb{E}(Q^2) \sim (8\pi)^{-1}(1+2\alpha)$: là encore, $\mathbb{E}(Q^2) \to 0$; on retrouve donc asymptotiquement les impossibilités $\gamma = 0$ et $\gamma = 2$.

2) Une généralisation

Faisons les hypothèses suivantes:

(i) *F est impaire,*

(ii) $\mathbb{E}((F(x)-F(y))^2)$ *est homogéne de degré 2α en (x, y).*

On vérifie alors aisément que l'ensemble des F tels que (i) et (ii) est une classe de solutions du problème $\eta^2 \propto |\cdot|^\gamma$ qui contient évidemment la précédente: en effet, on a $G^2(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}((F(t-x)-F(t))^2)\,dt$ et posant $t = u|x|$, $G^2(x) = |x|^{2\alpha+1} G^2(1) = |x|^\gamma G^2(1)$; par normalisation de F, on peut obtenir $G^2(1) = C_\gamma$, et donc une classe de solutions de $\eta^2 = \mu|\cdot|^\gamma$.

Remarquons alors qu'on peut écrire:

$$\mathbb{E}((F(x)-F(y))^2) \propto (|x|^{2\alpha} + |y|^{2\alpha} - 2|xy|^\alpha K(x, y))$$

où K est symétrique en (x, y) et homogène de degré 0, i.e. si $x \neq 0$, $K(x, y) = K\left(1, \frac{y}{x}\right)$ qu'on notera $K_0\left(\frac{y}{x}\right)$. D'autre part, à partir de tout profil F vérifiant (i) et (ii), on peut construire un profil F_0 solution du problème $\eta^2 \propto |\cdot|$ en posant $F_0(x) = F(x) \cdot x^{-\alpha}$.

Considérons alors le processus $t \to W(t) = F(e^t)e^{-\alpha t}$; alors $(x, y) \to \mathbb{E}(W \otimes W)(x, y) \propto K_0(e^{y-x})$, est stationnaire, donc W est le transformé de Fourier d'un processus ζ tel que $\mathbb{E}(\zeta \otimes \bar{\zeta})$ est diagonal: i.e. il existe une mesure v positive paire sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}, \ \mathbb{E}((\int_{\mathbb{R}} \varphi\, d\zeta)(\int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}\, d\zeta)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \bar{\psi}\, dv.$$

On peut alors écrire

$$F(t) = \operatorname{sgn}(t)|t|^\alpha \int_{\mathbb{R}} |t|^{i\beta} \zeta(d\beta). \tag{17}$$

Notons que, pour assurer la réalité de F, nécessairement $\tilde{\zeta} = -\bar{\zeta}$.

A titre d'exemple, considérons Q une variable complexe telle que $\mathbb{E}(Q^2) = 0$ et β un nombre réel certain; posons $2\zeta = Q\varepsilon_\beta + \bar{Q}\varepsilon_{-\beta}$. Dans ce cas, (17) s'écrit $F(t) = \operatorname{sgn}(t)|t|^\alpha \mathbb{R}e(Q|t|^{i\beta})$. De là, on déduit la condition de normalisation sur F pour que $\eta^2 = \mu|\cdot|^\gamma$:

$$(\mathbb{E}(|Q|^2))^{-1} = 2^{2\alpha+2}\mathrm{B}(\alpha+1, \alpha+1)\,\mathrm{B}(\alpha+1+i\beta, \alpha+1-i\beta)\left(1+\frac{\operatorname{ch}\pi\beta}{\cos\pi\alpha}\right).$$

3) Convergence compacte

Plaçons-nous sous les hypothèses (i) et (ii) de A 2), avec les mêmes notations.

Proposition 4. *Moyennant l'hypothèse supplémentaire* (iii): ζ *est une mesure aléatoire et* $\int_{\mathbb{R}}(1+\beta^4)\,\nu(d\beta)<\infty$, *p.s.* $\sum_{n\geq 1} h_n$ *converge uniformément sur tout compact, et si* $\alpha<0$, *converge normalement sur tout compact.*

Démonstration. Soit $R>0$ et $A=(x,y)\in[-R,+R]^2$. Observons d'abord que, puisque p.s. $|p_n|\to+\infty$ quand $n\to+\infty$, l'événement $[|p_n|\leqq R]$ est de probabilité arbitrairement petite pour n suffisamment grand: la singularité éventuelle des profils en 0 n'intervient donc pas.

Dérivons *formellement* deux fois F dans (17). Pour $t\neq 0$, on obtient

$$F''(t)=\int_{\mathbb{R}}(\alpha+i\beta)(\alpha-1+i\beta)\,\mathrm{sgn}(t)|t|^{\alpha-2+i\beta}\zeta(d\beta); \tag{18}$$

or $|\alpha|<1/2\Rightarrow|(\alpha+i\beta)(\alpha-1+i\beta)|<5/4+\beta^2$ et un calcul élémentaire montre que (iii) implique $\mathbb{E}(\int_{\mathbb{R}}(5/4+\beta^2)|\zeta(d\beta)|)<+\infty$ soit encore p.s. $S=\int_{\mathbb{R}}(5/4+\beta^2)|\zeta(d\beta)|<+\infty$, ce qui, par le théorème de Lebesgue, justifie (18). Par conséquent,

$$\text{p.s. } |F''(t)|\leqq|t|^{\alpha-2}\cdot S. \tag{19}$$

Soit alors $(a,b)\in[-R,+R]^2$; comme $h_n(0,0)=0$, on a, dès que $|p_n|>R$:

$$\begin{aligned}&h_n(a,b)-a\frac{\partial h_n}{\partial x}(0,0)-b\frac{\partial h_n}{\partial y}(0,0)\\&=\int_0^a(a-x)\frac{\partial^2 h_n}{\partial x^2}(x,0)\,dx+\int_0^b(b-y)\frac{\partial^2 h_n}{\partial y^2}(0,y)\,dy+\int_0^a\int_0^b\frac{\partial^2 h_n}{\partial x\partial y}(x,y)\,dx\,dy\\&=u_n(a)+v_n(b)+w_n(a,b).\end{aligned}$$

Montrons, par exemple, que la série w_n converge uniformément sur $[-R,+R]^2$: (19) implique

$$\mathbb{E}(|F_n''(t)|)=\mathbb{E}(|F_n''(t)|\,|\,p_n)\leqq|t|^{\alpha-2}\,\mathbb{E}(S);$$

or comme $\alpha-2<0$, $|\mathbf{OA}\cdot\tau_n-p_n|^{\alpha-2}\leqq||p_n|-R|^{\alpha-2}$ et donc

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{\partial^2 h_n}{\partial x\partial y}(A)\right|\,\Big|\,p_n\right)\leqq||p_n|-R|^{\alpha-2}\,\mathbb{E}(S),$$

d'où

$$\iint_{[-R,+R]^2}\mathbb{E}\left(\left|\frac{\partial^2 h_n}{\partial x\partial y}(x,y)\right|\,\Big|\,p_n\right)dx\,dy\leqq 4R^2||p_n|-R|^{\alpha-2}\,\mathbb{E}(S).$$

Ainsi donc, puisque $\alpha-2<-3/2$, p.s. pour la loi conditionnelle à la suite $(p_n)_{n\geq 1}$, la série

$$\sum_{\{n\geqq 1 \mid |p_n|>R\}} \iint_{[-R,+R]^2} \left|\frac{\partial^2 h_n}{\partial x\,\partial y}(x,y)\right| dx\,dy$$

converge. Or

$$|w_n(a,b)| \leqq \iint_{[-R,+R]^2} \left|\frac{\partial^2 h_n}{\partial x\,\partial y}(x,y)\right| dx\,dy.$$

La convergence uniforme pour les séries u_n et v_n s'obtient de manière analogue, en remarquant, par exemple pour u_n, que

$$|u_n(a)| \leqq R \int_{-R}^{R} \left|\frac{\partial^2 h_n}{\partial x^2}(x,0)\right| dx.$$

Ainsi, p.s. la série de fonctions $(a,b)\to h_n(a,b) - a\dfrac{\partial h_n}{\partial x}(0,0) - b\dfrac{\partial h_n}{\partial y}(0,0)$ converge uniformément sur $[-R,R]^2$: il en est donc de même de la série $(a,b)\to h_n(a,b)$, puisque d'après le théorème 1,

$$\text{p.s.} \sum_{n\geqq 1} h_n\left(0,\frac{R}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqq 1} h_n\left(\frac{R}{2},0\right)$$

convergent. Enfin, pour $\alpha<0$, il y a convergence normale sur $[-R,+R]^2$: en effet, il est clair que dans ce cas,

$$\text{p.s.} \sum_{n\geqq 1} \frac{\partial h_n}{\partial x}(0,0) \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqq 1} \frac{\partial h_n}{\partial y}(0,0)$$

sont absolument convergentes: en procédant de manière analogue à ce qui précède, on obtient la majoration p.s.

$$\left|\frac{\partial h_n}{\partial x}(0,0)\right| \leqq \big||p_n| - R\big|^{\alpha-1} \times \text{constante},$$

avec $\alpha - 1 < -1$.

B. Une classe de profils "naturels"

1) On peut désirer que F' soit une fonction évanescente assez rapidement à l'infini et assez régulière à distance finie: voici une classe de profils assez vaste pour espérer y trouver des profils convenables.

On se donne deux variables aléatoires réelles Q et X, X positive et une fonction aléatoire W sur $\mathbb{R}$: on pose alors

(20) $$F = QW\left(\frac{\cdot}{X}\right).$$

Afin d'assurer (H_1) on supposera, si $\mathbb{E}(W-\tilde{W})\neq 0$, que $\mathbb{E}(Q)=0$. On notera $\|\cdot\|_2$ la norme de $L^2(\mathbb{P})$, $f=\|W'\|_2$ et $\varphi^2(X)$ une version de $\mathbb{E}(Q^2|X)$.

Nous faisons de plus les hypothèses suivantes, où $a, b > 1$:

(i) (X, Q) *et* W *indépendants,*

(ii) $X^a \in L^1(\mathbb{P})$,

(iii) $W' \in L^2(\mathbb{P} \otimes \lambda_{\mathbb{R}})$, *i.e.* $f \in L^2(\lambda_{\mathbb{R}})$,

(iv) $\mathscr{I} = \int_{\mathbb{R}} f(t) |t|^b \, dt < \infty$,

(v) $ab > b + 3a/2 + \alpha$.

Si $\alpha \leqq 0$, nous supposons de plus:

(vi) $\int_{\mathbb{R}} W'(t) \, dt = 0$.

Enfin,

(vii) $\varphi^2(x) \, \mathbb{P}_X(dx) = \mathbb{1}_{x>0} \cdot C \cdot x^{2\alpha-1} dx$ *avec*

$$\int_0^\infty \|\mathscr{F}[W']\|_2^2(x) \cdot C \cdot x^{2\alpha-1} dx = \frac{\Gamma(\gamma+1)^2 \cos \pi\alpha}{2^{\gamma+1} \Gamma(\alpha+1)^2}$$

Remarque. 1) (iii) et (iv) impliquent $W' \in L^1(\mathbb{P} \otimes \lambda_{\mathbb{R}})$ ce qui donne un sens à (vi), laquelle s'écrit également

$$\text{p.s. } \mathscr{F}[W'](0) = 0.$$

2) (vii) n'a de solution en C que si l'intégrale où C figure converge; il en est bien ainsi car:

Proposition 5. *Sous les hypothèses* (iii), (iv), (v), *et* (vi) *si* $\alpha \leqq 0$,

$$\int_0^\infty \mathbb{E}(|\mathscr{F}[W']|^2(x)) \, x^{2\alpha-1} dx < \infty.$$

Démonstration. D'abord, l'intégrale sur $(1, +\infty)$ converge, puisque $2\alpha - 1 < 0$. Etudions à présent l'intégrale sur $(0, 1)$.

Posons $\mathscr{J} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, dt$; W' étant p.s. dans $L^1(\lambda_{\mathbb{R}})$, on a

$$\text{p.s. } \forall u, v, \; \mathscr{F}[W'](u) - \mathscr{F}[W'](v) = \int_{\mathbb{R}} (e^{iut} - e^{ivt}) \, W'(t) \, dt.$$

Pour $T > 0$ quelconque, on a donc $\forall u, v$

$$\begin{aligned} \|\mathscr{F}[W'](u) - \mathscr{F}[W'](v)\|_2 &\leqq 2 \int_{\mathbb{R}} |\sin((u-v)\,t/2)| \, f(t) \, dt \\ &\leqq |u-v| \, T \int_{|t| \leqq T} f(t) \, dt + 2 \int_{|t|>T} f(t) \, dt, \end{aligned}$$

or

$$\int_{|t|>T} f(t) \, dt = T^{-b} \int_{|t|>T} T^b f(t) \, dt \leqq T^{-b} \int_{|t|>T} |t|^b f(t) \, dt;$$

d'où

$$\int_{|t|>T} f(t) \, dt \leqq T^{-b} \mathscr{I}. \tag{21}$$

$$\|\mathscr{F}[W'](u) - \mathscr{F}[W'](v)\|_2 \leqq |u-v| \, T \cdot \mathscr{J} + T^{-b} \mathscr{I}, \; \forall T > 0.$$

En particulier pour T défini par

$$|u-v|\mathscr{I}=bT^{-(b+1)}\mathscr{J},$$

on trouve

$$\|\mathscr{F}[W'](u)-\mathscr{F}[W'](v)\|_2 \leqq K\cdot|u-v|^{b/(b+1)}, \qquad K>0. \tag{22}$$

Alors, par sous-additivité de la norme, on en déduit que $\|\mathscr{F}[W']\|_2$ est au moins lipschitzienne d'ordre $b/(b+1)$ $(>\frac{1}{2})$, en particulier continue: donc

– Si $\alpha>0$, $2\alpha-1>-1$ et donc $x\mapsto x^{2\alpha-1}$ est intégrable sur $[0,1]$ d'où la proposition dans ce cas.

– Si $\alpha\leqq 0$, comme d'après (vi) on a $\|\mathscr{F}[W'](0)\|_2=0$, en écrivant (22) avec $v=0$. on obtient

$$\forall u,\ \|\mathscr{F}[W'](u)\|_2\leqq K\cdot|u|^{b/(b+1)}$$

et donc

$$\|\mathscr{F}[W'](u)\|_2^2\, u^{2\alpha-1}\leqq K^2 u^{2\alpha-1+2b/(b+1)},$$

or

$$[b/(b+1)>\tfrac{1}{2}]\Rightarrow[(2\alpha-1+2b/(b+1))>2\alpha>-1],$$

d'où la proposition.

Théorème 5. *Si F est définie par* (20), *sous les hypothèses* (iii), (iv) (v) *et, si* $\alpha\leqq 0$ (vi), *enfin* (vii), *F est une solution du problème* $\eta^2=\mu|\cdot|^\gamma$.

Démonstration. On a $F'=Q\dfrac{1}{X}W'\left(\dfrac{\cdot}{X}\right)$ et donc

$$\mathscr{F}[F'](\cdot)=Q\cdot\mathscr{F}[W'](\cdot X),$$

d'où

$$|\mathscr{F}[F'](\cdot)|^2=|Q|^2|\mathscr{F}[W'](\cdot X)|^2$$

et enfin

$$\mathbb{E}(|\mathscr{F}[F']|^2(u))=\int_{\mathbb{R}}\varphi^2(x)\,\|\mathscr{F}[W'](ux)\|_2^2\,\mathbb{P}_X(dx),$$

soit, grâce à (vii)

$$\mathbb{E}(|\mathscr{F}[F']|^2(u))=\int_0^\infty\|\mathscr{F}[W'](ux)\|_2^2\,Cx^{2\alpha-1}\,dx,$$

soit encore par le changement de variable $y=ux$, et par identification de C

$$\mathbb{E}(|\mathscr{F}[F']|^2(u))=|u|^{-2\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\gamma+1)^2\cos\pi\alpha}{2^{\gamma+1}\Gamma(\alpha+1)^2}$$

et l'on montre aisément à partir de (16) que ceci est exactement $1/2\cdot\mathscr{F}[(G^2)''](u)$, ce qui établit le théorème, grâce au théorème 4 du § précédent.

2) Convergence compacte

Théorème 6 *avec les hypothèses* (i) *à* (v) *et* (vii) *p.s.* $\sum_{n \geqq 1} h_n$ *converge normalement sur tout compact.*

Démonstration. Par substitution de (20) dans (2), on a

$$h_n(A) = Q_n \int_0^{\mathbf{OA}\cdot\tau_n/X_n} W_n'(u - p_n/X_n)\, du,$$

d'où $|h_n(A)| \leqq |Q_n| \int_{b_n}^{b_n'} |W_n'(u)|\, du = M_n$, avec $b_n = -(R+p_n)/X_n$ et $b_n' = (R-p_n)/X_n$. Pour montrer que p.s. $\sum_{n \geqq 1} M_n$ converge, prouvons la convergence de $\sum_{n \geqq 1} \mathbb{E}(M_n | X_n, Q_n, p_n)$; on a

$$\mathbb{E}(M_n | X_n, Q_n, p_n) \leqq |Q_n| \int_{b_n}^{b_n'} f(u)\, du; \tag{23}$$

or,

$$\text{p.s. } |p_n| \underset{\infty}{\sim} n/4\pi\mu$$

donc p.s. pour n assez grand $|p_n| - R > 0$. Ainsi dans l'intégrale (23), on peut considérer que $|u| > (|p_n| - R)/X_n$, et on peut alors remplacer T dans (21) par $(|p_n| - R)/X_n$, ce qui donne $\mathbb{E}(M_n | X_n, Q_n, p_n) \leqq |Q_n| (|p_n| - R)^{-b} X_n^b \mathscr{I}$.

Le théorème résulte donc de la convergence de $\sum_{n \geqq 1} (n^{-b} |Q_n| X_n^b)$, qu'on démontre à présent; observons d'abord que, d'aprés (v),

$$]1/2 + (\alpha + b)/a,\, b - 1[\, \neq \emptyset;$$

d'autre part, $\forall \beta > 1/2 + (\alpha + b)/a$, $|Q_n| X_n^b = o(n^\beta)$; en effet, d'aprés (ii) p.s. $X_n = o(n^{1/a})$, donc, si pour $m \in \mathbb{N}^*$ on appelle $\mathscr{E}_m$ l'événement $[\forall p, X_p \leqq m p^{1/a}]$, alors $\mathbb{P}(\mathscr{E}_m) \nearrow 1$, quand $m \to \infty$.

$$\mathbb{E}(Q_n^2 X_n^{2b} \mathbb{1}_{\mathscr{E}_m}) = \int_0^{m n^{1/a}} \phi^2(x)\, x^{2b}\, \mathbb{P}_x(dx)$$
$$= C m^{2(\alpha+b)} n^{2(\alpha+b)/a}$$

d'aprés (vii), par intégration; donc $\mathbb{E}(Q_n^2 X_n^{2b} | \mathscr{E}_m) = K_m n^{2(\alpha+b)/a}$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff, on obtient alors

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}(|Q_n|\, X_n^b > \varepsilon n^\beta | \mathscr{E}_m) = O(n^{2(-\beta + (\alpha+b)/a)})$$

et l'on conclut enfin grâce au lemme de Borel-Cantelli.

Remarques 1) $\forall r \in \mathbb{R}$, $Q^2 X^r$ n'est pas $L^1(\mathbb{P})$: en effet

$$\mathbb{E}(Q^2 X^r) = \int_0^\infty \phi^2(x)\, x^r\, \mathbb{P}_X(dx) = C \int_0^\infty x^{r+2\alpha-1}\, dx,$$

d'où la nécessité d'avoir utilisé $\phi^2(x) = \mathbb{E}(Q^2 | X)$.

2) on peut renforcer (et simplifier) l'hypothèse (v) en la remplaçant par (vbis): $ab \geqq b + (3a+1)/2$. Alors, en fixant la loi de (X, W), en remplaçant Q par QX^r, pour un r convenable, (20) fournit (resp. sous (vi)) une solution pour

chaque problème $\eta^2 = \mu|\cdot|^{2\alpha+1}$ avec $1/2 < \alpha < 0$ (resp. avec $|\alpha| < 1/2$): α ne dépend que de la loi de (X, Q).

3) l'hypothèse (vi) implique

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{t \to -\infty} F(t) = F_\infty.$$

Sous cette hypothèse, ou peut construire le processus

$$\sum_{n \geq 1} (D_{\delta_n, F_n} - F_\infty) \quad \text{où} \quad D_{\delta, F} = F(\mathbf{OA} \cdot \tau - p), \qquad \text{cf. (1);}$$

en effet, de façon analogue à ce qui précède, on établit que p.s. cette série converge normalement sur tout compact. Ce processus est stationnaire, isotrope, et a H_μ pour accroissement autour de O; en conséquence, il n'est pas $L^2(\mathbb{P})$, puisque η n'est pas bornée.

Bibliographie

1. Adler, R.J.: The geometry of random fields New-York: Wiley 1981
2. Fellous, A., Granara, J.: Statistique des processus de Poisson de sous-variétés linéaires affines. Adv. Appl. Probability **13**, 84–92 (1981)
3. Mandelbrot, B.B., van Ness, J.W.: Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Review **10**, 422 (1968)
4. Mandelbrot, B.B.: Fonctions aléatoires pluri-temporelles: approximation poissonienne du cas brownien et généralisations. C.R. Acad. Sc. Paris A**280**, 1075–1078 (1975)
5. Mandelbrot, B.B.: On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surfaces of scalars. J. of Fluid Mechanics **72**, 401–406 (1975)
6. Mandelbrot, B.B.: Fractals: form, chance and dimension. San Francisco: W.H. Freeman & Co. 1977
7. Mandelbrot, B.B.: The fractal geometry of nature. San Francisco: W.H. Freeman & Co. 1982
8. Neveu, J.: Bases mathématiques du Calcul des Probabilités. Paris: Masson & Cie. 1964

Reçu le 20 juin 1983