

# Stetigkeitseigenschaften stochastischer Prozesse mit Parameter aus einem pseudometrischen Raum

Georg Neuhaus

## 1. Zusammenfassung und Einführung

In dieser Arbeit leiten wir hinreichende Bedingungen dafür her, daß fast alle Pfade eines nicht notwendig Gaußschen Prozesses mit „Zeit“-Parameter aus einem totalbeschränkten pseudometrischen Raum stetige Funktionen sind bzw. eine Lipschitzbedingung erfüllen.

Stetigkeitskriterien ähnlicher Art für Prozesse mit Parameter aus dem Einheitsquadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$  wurden schon von Delporte [6] und Berman [1] angegeben. Beide Autoren verwendeten bei der Herleitung ihrer Theoreme die Entwicklung von stetigen Funktionen über  $[0, 1] \times [0, 1]$  nach einer Schauderbasis.

Zum Beweis unserer Stetigkeitsbedingungen benutzen wir im wesentlichen zwei verschiedene Methoden. Einmal machen wir Gebrauch von einem Beweisverfahren, das von Dudley [7] (vgl. auch Strassen und Dudley [12]) zum Nachweis der Stetigkeit von Gaußschen Prozessen mit Parametern in Hilbertschen Räumen verwendet wurde. Zum anderen ziehen wir Sätze aus der Theorie der schwachen Konvergenz von Maßen auf metrischen Räumen heran, wie dies im 1-dimensionalen Fall etwa von Billingsley [3] bei der Konstruktion eines Maßes auf dem Raum der stetigen Funktionen über  $[0, 1]$  getan wurde. Mit Hilfe der erstgenannten Methode leiten wir ein Stetigkeitskriterium her, welches einen wohlbekannten Satz für Prozesse mit reellem Parameter, s. Cramér und Leadbetter [5], 4.2, in mehrfacher Hinsicht verallgemeinert. Als Korollare ergeben sich Verallgemeinerungen einiger Sätze von Delporte [6], Fernique [8] und Billingsley [3]. Unter Verwendung der zweiten Methode erhalten wir ein Resultat, welches das Kriterium von Berman [1], Theorem 5.1, impliziert und nicht aus dem Hauptsatz von Delporte [6], Théorème 2.2.1A, hergeleitet werden kann. Im Anschluß an jedes Stetigkeitskriterium geben wir jeweils ein Kriterium dafür an, daß Lipschitzbedingungen für fast alle Pfade erfüllt sind.

## 2. Äquivalente Formulierungen zur Stetigkeit fast aller Pfade eines stochastischen Prozesses

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\xi = (\xi(t), t \in T)$  ein (reellwertiger) stochastischer Prozeß mit Parametermenge  $T$ , die als ein totalbeschränkter pseudometrischer Raum mit Pseudometrik  $d$  vorausgesetzt sei. Nach einem Satz von Borges [4] gibt es dann zu  $\xi$  einen stochastischen Prozeß  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}(t), t \in T)$  auf  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  der numerisch ist, d.h. Werte in  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  annimmt,

der äquivalent zu  $\xi$  ist, das bedeutet  $P(\xi(t) = \bar{\xi}(t)) = 1 \forall t \in T$ , und der separabel ist bezüglich der abgeschlossenen Mengen aus  $\bar{\mathbb{R}}$ , s. Borges [4].

Bevor wir das Hauptresultat dieses Paragraphen formulieren, führen wir noch einige Bezeichnungen ein: Für  $A \subset T$  sei  $\mathbb{R}^A(\bar{\mathbb{R}}^A)$  der Raum der reellwertigen (numerischen) Funktionen auf  $A$  und  $\mathfrak{B}^A(\bar{\mathfrak{B}}^A)$  der zugehörige Produkt- $\sigma$ -Körper. Die (bezüglich der durch  $d$  auf  $A$  erzeugten Topologie) stetigen Funktionen auf  $A$  seien mit  $C(A, d)$ , die gleichmäßig stetigen mit  $C_u(A, d)$  bezeichnet. Das von  $\xi$  auf  $(\mathbb{R}^T, \mathfrak{B}^T)$  erzeugte Wahrscheinlichkeitsmaß sei  $P^\xi$ , entsprechend  $P^\xi$  auf  $(\bar{\mathbb{R}}^T, \bar{\mathfrak{B}}^T)$ . Weiter sei  $\xi_A := (\xi(t), t \in A)$  die Einschränkung von  $\xi$  auf  $A$ .

**Satz 2.1.** Sei  $(T, d)$  ein totalbeschränkter pseudometrischer Raum. Für einen stochastischen Prozeß  $\xi = (\xi(t), t \in T)$  sind dann die folgenden Aussagen äquivalent:

$$(2.1) \quad (P^\xi)^*(C_u(T, d)) = 1 \quad (\text{äußeres Maß von } C_u(T, d)).$$

$$(2.2) \quad \text{Für jede abzählbare, dichte Teilmenge } T_0 \text{ von } T \text{ gilt } P^{\xi_{T_0}}(C_u(T_0, d)) = 1.$$

$$(2.3) \quad \text{Ist } \bar{\xi} \text{ ein zu } \xi \text{ äquivalenter, separabler Prozeß, so liegen fast alle Pfade von } \bar{\xi} \text{ in } C_u(T, d).$$

*Bemerkung 1.* Ist  $T$  kompakt und metrisch, so ist bekanntlich der Borelsche  $\sigma$ -Körper  $\mathfrak{B}_{\|\cdot\|}$  über  $C(T, d)$  bezüglich der Supremumsnorm  $\|f\| := \sup\{|f(t)| : t \in T\}$  gleich der Einschränkung von  $\mathfrak{B}^T$  auf  $C(T, d)$ , also

$$\mathfrak{B}_{\|\cdot\|} = \{B \cap C(T, d) : B \in \mathfrak{B}^T\}.$$

Dann besagt aber die Bedingung (2.1) dasselbe wie

$$(2.4) \quad \text{Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß } P_0 \text{ auf } (C(T, d), \mathfrak{B}_{\|\cdot\|}) \text{ mit denselben endlichdimensionalen Randverteilungen wie } \xi.$$

In diesem Falle ist also die Konstruktion eines Maßes auf  $(C(T, d), \mathfrak{B}_{\|\cdot\|})$  mit vorgegebenen endlichdimensionalen Randverteilungen gleichbedeutend mit dem Nachweis der Stetigkeit fast aller Pfade eines separablen stochastischen Prozesses, der diese Randverteilungen besitzt. Die Implikation (2.4)  $\Rightarrow$  (2.3) wurde im Fall  $T = [0, 1]$  von Billingsley [3], Theorem 9.2, bewiesen. Der hier gegebene Beweis (2.2)  $\Rightarrow$  (2.3) ist teilweise eine Verallgemeinerung des Verfahrens von Billingsley.

*Bemerkung 2.* Auch in Untersuchungen über die fast sichere Konvergenz von Summen stochastisch unabhängiger  $C(T, d)$ -wertiger Zufallsvariabler erweist sich Satz 2.1 als nützlich. So läßt sich z. B. ein Resultat von Jain und Kallianpur [9], Theorem 2, mit Hilfe der Implikation (2.1)  $\Rightarrow$  (2.3) auf nicht notwendig vollständige Wahrscheinlichkeitsräume und beliebige kompakte, metrische Parametermengen  $T$ , anstelle von  $T = [0, 1]$ , verallgemeinern.

*Beweis des Satzes.* Offenbar gilt (2.1)  $\Rightarrow$  (2.2). Aus (2.3) folgt zunächst  $(P^\xi)^*(C_u(T, d)) = 1$  und hieraus (2.1) wegen  $C_u(T, d) \subset \mathbb{R}^T$  und  $P^\xi|_{\mathbb{R}^T} = P^\xi$ . Nun zum Beweis von (2.2)  $\Rightarrow$  (2.3):

Wir betten  $T$  in seine vollständige Hülle  $X$  ein (s. Kelley [10], S. 196).  $X$  ist dann ein kompakter pseudometrischer Raum, dessen Pseudometrik diejenige von  $T$  fortsetzt, und die wir deshalb ebenfalls  $d$  nennen. Wir wollen zuerst für Teilmengen  $A \subset X$  gewisse Darstellungen von  $C_u(A, d)$  angeben:

Sei dazu  $R$  eine abzählbare, dichte Teilmenge von  $A$ . Wir definieren dann Systeme  $V$  der folgenden Art:

$$(2.5) \quad V = (k; r_1, \dots, r_k; \alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta)$$

mit  $k \in \mathbb{N}$  (natürliche Zahlen),  $r_v \in R$ ,  $\alpha_v \in \mathbb{IP}$  für  $v = 1, \dots, k$  ( $\mathbb{IP}_{(+)}$  = (positive) rationale Zahlen),  $\beta \in \mathbb{IP}_+$ , und der Eigenschaft  $\bigcup_{v=1}^k S_d(r_v, \beta) \supset \bar{A}$ ; dabei sei

$$S_d(t, \varepsilon) = \{t' \in X : d(t', t) < \varepsilon\}$$

die  $d$ -Kugel vom Radius  $\varepsilon$  um  $t$  und  $\bar{A}$  die abgeschlossene Hülle von  $A$  in  $(X, d)$ . Es gibt höchstens abzählbar viele Systeme dieser Art. Es gilt dann

$$(2.6) \quad C_u(A, d) = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{IP}_+} \bigcup_V H(A, R; V, \varepsilon)$$

mit

$$H(A, R; V, \varepsilon) = \bigcap_{v=1}^k \{x \in \bar{\mathbb{R}}^A : \alpha_v \leq x(t) \leq \alpha_v + \varepsilon, \forall t \in S_d(r_v, \beta) \cap A\}.$$

Die Vereinigungsbildung erstreckt sich in (2.6) über alle in (2.5) definierten  $V$ .

Zum Beweis von (2.6) sei  $x$  ein Element der rechten Seite von (2.6), d.h. zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{IP}_+$  gibt es ein  $V$  mit  $x \in H(A, R; V, \varepsilon)$ . Ist dann  $\lambda > 0$  eine Lebesguesche Zahl der offenen Überdeckung  $S_d(r_v, \beta)$ ,  $v = 1, \dots, k$ , von  $\bar{A}$  ([10], S. 154), so liegen zwei Punkte  $t_1, t_2 \in A$  mit  $d(t_1, t_2) < \lambda$  gleichzeitig in einer der Mengen  $S(r_v, \beta) \cap A$ , und folglich gilt  $|x(t_1) - x(t_2)| \leq \varepsilon$ , d.h. aber  $x \in C_u(A, d)$ . Umgekehrt sei  $x \in C_u(A, d)$ . Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{IP}_+$  gibt es dann ein  $\beta \in \mathbb{IP}_+$  derart, daß für  $t_0 \in A$  gilt: Aus  $t \in S_d(t_0, \beta) \cap A$  folgt  $|x(t) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$ . Die Familie  $\{S_d(r, \beta) : r \in R\}$  ist eine offene Überdeckung

von  $\bar{A}$ , enthält also eine endliche Teilüberdeckung mit  $r_1, \dots, r_k \in R$ . Man definiert nun  $V$  wie in (2.5), wobei die  $\alpha_v$  rationale Zahlen seien, die weniger als  $\varepsilon/4$  kleiner sind als jeweils  $\inf\{x(t) : t \in S(r_v, \beta) \cap A\}$ . Nach Konstruktion liegt dann  $x$  in  $H(A, R; V, \varepsilon)$ , womit (2.6) bewiesen ist.

Der eigentliche Beweis von (2.2)  $\Rightarrow$  (2.3) ist nun sehr einfach. Sei  $S$  ein abzählbarer, dichter Separator von  $\bar{\xi}$ . Aus (2.6) und der Separabilität von  $\bar{\xi}$  folgt dann sofort mit  $A = T$ ,  $R = S$  bzw.  $A = R = S : \bar{\xi}^{-1}(C_u(T, d)) = \bar{\xi}_S^{-1}(C_u(S, d))$  ( $\in \mathfrak{A}$ !). Dann gilt aber

$$P\{\omega : \bar{\xi}(\omega) \in C_u(T, d)\} = P^{\bar{\xi}_S}(C_u(S, d)) = P^{\xi_S}(C_u(S, d)) = 1. \quad \square$$

*Bemerkung 3.* Setzt man in Satz 2.1  $T$  als einen pseudometrischen Raum voraus, der die Vereinigung von abzählbar vielen offenen, totalbeschränkten Mengen aus  $T$  ist, und fordert man die Voraussetzung (2.2) für alle abzählbaren, totalbeschränkten Teilmengen  $T_0$  von  $T$ , so gilt (2.2)  $\Rightarrow$  (2.3)  $\Rightarrow$  (2.1), falls nur in (2.1) und (2.3)  $C_u(T, d)$  durch  $C(T, d)$  ersetzt wird.

Nur der Beweis von (2.2)  $\Rightarrow$  (2.3) ist nicht trivial: Man stelle  $T$  dar als  $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$  mit  $T_i$  offen und totalbeschränkt. Sei  $S$  ein abzählbarer Separator von  $\bar{\xi}$ , für den  $S_i = T_i \cap S$  dicht in  $T_i$  liegt. Wegen der Offenheit von  $T_i$  ist  $\bar{\xi}_{T_i}$  ein separabler Prozeß mit Separator  $S_i$ . Wie vorher beweist man dann  $P\{\omega : \bar{\xi}_{T_i}(\omega) \in C_u(T_i, d)\} = 1$ . Da alle  $T_i$  offen sind und  $T$  überdecken, folgt  $P\{\omega : \bar{\xi}(\omega) \in C(T, d)\} = 1$ .  $\square$

### 3. Die Stetigkeitskriterien

Wiederum sei  $(T, d)$  ein totalbeschränkter pseudometrischer Raum. Um später keine Fallunterscheidungen machen zu müssen, nehmen wir o.B.d.A. an, daß es in  $T$  mindestens zwei Punkte gibt, die einen positiven Abstand voneinander haben. Für jedes positive  $\varepsilon$  sei  $B(\varepsilon)$  ein fest gewähltes  $\varepsilon$ -Netz in  $(T, d)$  mit einer Minimalzahl  $N_d(\varepsilon)$  von Punkten. Ausgehend von der Folge  $\{B(2^{-n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ , lassen sich Folgen  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von Teilmengen des Raumes  $T$  konstruieren mit den Eigenschaften:

(3.1) Für alle genügend großen  $n \in \mathbb{N}$  gilt

- a)  $A_n \subset A_{n+1}$ ,
- b)  $\bigcup_{t \in A_n} S_d(t, 2^{-n}) = T$  ( $S_d(t, \varepsilon)$  ist hier die  $d$ -Kugel um  $t \in T$  mit Radius  $\varepsilon$  in  $T$ ),
- c)  $|A_n| \leq N_d(2^{-n-1})$  ( $|B|$  bezeichnet die Anzahl der Elemente einer Menge  $B$ ),
- d)  $d(t_1, t_2) \geq 2^{-n-1} \quad \forall t_1, t_2 \in A_n, t_1 \neq t_2$ .

Der Beweis für die Existenz der Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist elementar: Es sei  $A_1 = A_2 = \dots = A_{n_0} = \emptyset$  für eine beliebige natürliche Zahl  $n_0$ . Für  $n \geq n_0$  werde  $A_{n+1}$  induktiv definiert. Bei gegebenem  $A_n$  sei  $A_{n+1} := A_n \cup C_n$ , wobei  $C_n$  eine Teilmenge von  $D_n := B(2^{-n-2}) \cap (T - \bigcup_{t \in A_n} S_d(t, 2^{-n-2}))$  ist, deren Punkte einen paarweisen Abstand nicht kleiner als  $2^{-n-2}$  haben und die ein  $2^{-n-1}$ -Netz in  $\bigcup_{t \in D_n} S_d(t, 2^{-n-2})$  bildet. Es ist dann klar, daß (3.1) für alle  $n > n_0$  richtig ist.  $\square$

Für die später in den Stetigkeitskriterien auftretenden Mengen

$$(3.2) \quad U_n := \{(t_1, t_2) \in A_{n+2} \times A_{n+2} : d(t_1, t_2) < 2^{-n}, t_1 \neq t_2\}$$

gilt offensichtlich die Ungleichung  $|U_n| \leq N_d^2(2^{-n-3})$ . Wie wir noch sehen werden, läßt sich diese grobe Abschätzung häufig verschärfen.

Im folgenden werden wir Funktionen mit einer gewissen Monotonieeigenschaft zu betrachten haben:

(3.3) Es sei  $f$  eine reellwertige, nichtnegative Funktion auf  $[0, \infty)$  mit  $f(0) = 0$ , für die eine Konstante  $C_f$  mit  $1 \leq C_f < \infty$  existiert derart, daß für alle genügend großen  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$f(t) \leq C_f f(2^{-n}) \quad \forall t \in [2^{-n-1}, 2^{-n}].$$

Jede monoton nichtfallende, nichtnegative Funktion  $f$  auf  $[0, \infty)$  mit  $f(0) = 0$  erfüllt natürlich die Bedingung (3.3).

Nach diesen Vorbemerkungen können wir unsere Stetigkeitskriterien formulieren.

**Satz 3.1.** Sei  $(T, d)$  ein totalbeschränkter pseudometrischer Raum und  $\xi = (\xi(t), t \in T)$  ein stochastischer Prozeß, der für alle  $t_1, t_2 \in T$ , für die  $d(t_1, t_2)$  genügend klein ist, die Ungleichung

$$(3.4) \quad P(|\xi(t_1) - \xi(t_2)| > g(d(t_1, t_2))) \leq q(d(t_1, t_2))$$

erfüllt. Dabei sind  $g$  und  $q$  Funktionen, die beide die Monotonieeigenschaft (3.3) besitzen, und für die außerdem gilt:

$$(3.5) \quad \sum_n g(2^{-n}) < \infty$$

und

$$(3.6) \quad \sum_n |U_n| q(2^{-n}) < \infty,$$

wobei  $U_n$  wie in (3.2) zu einer speziellen Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit (3.1) gehöre. Dann gilt  $(P^\xi)^*(C_u(T, d)) = 1$  oder eine der äquivalenten Aussagen (2.2) und (2.3).

**Satz 3.2.** Sei  $(T, d)$  ein totalbeschränkter pseudometrischer Raum und  $\xi = (\xi(t), t \in T)$  ein separabler stochastischer Prozeß, der die Voraussetzungen (3.4) bis (3.6) erfüllt. Die in (3.4) auftretende Funktion  $g$  sei monoton nichtfallend, und es gebe eine positive Konstante  $a$  mit

$$(3.7) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} g(2^{-n-\nu}) \leq a \cdot g(2^{-n}) \quad \text{für alle genügend großen } n \in \mathbb{N}$$

Dann gibt es eine Zufallsgröße  $\delta$ , die fast sicher positiv ist, und Konstanten  $b \geq 0$  und  $c \geq 0$ , so daß gilt:

$$(3.8) \quad |\xi(t_1) - \xi(t_2)| \leq b \cdot g(c \cdot d(t_1, t_2)) \quad \forall t_1, t_2 \in T \quad \text{mit } d(t_1, t_2) \leq \delta.$$

Bevor wir die beiden Sätze beweisen, wollen wir schon einige Folgerungen aus ihnen ziehen.

**Korollar 3.3.** Sei  $(T, d)$  ein pseudometrischer Raum, der zu einer beschränkten Teilmenge  $B$  des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}_k$  – versehen mit der Maximumsnorm – isometrisch ist, d.h. für den es eine surjektive Abbildung  $F: T \rightarrow B$  gibt mit  $d(t_1, t_2) = |F(t_1) - F(t_2)| \quad \forall t_1, t_2 \in T$ .

a) Wenn für einen stochastischen Prozeß  $\xi = (\xi(t), t \in T)$  die Bedingungen (3.4) und (3.5) gelten, sowie anstelle von (3.6):

$$(3.9) \quad \sum_n 2^{k \cdot n} q(2^{-n}) < \infty,$$

so folgt  $(P^\xi)^*(C_u(T, d)) = 1$ .

b) Ist  $\xi = (\xi(t), t \in T)$  separabel und gilt neben den Voraussetzungen in a) noch, daß  $g$  auf  $[0, \infty)$  monoton nichtfallend ist und (3.7) erfüllt, so folgt auch die Aussage (3.8) von Satz 3.2.

*Beweis von Korollar 3.3.* Wir benötigen offensichtlich einzig eine Abschätzung der Zahlen  $|U_n|$  für beliebige Folgen  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $T$ , für die (3.1) gilt. Wegen der Isometrie von  $T$  zu  $B$  können wir dabei o.B.d.A. annehmen, daß  $T$  gleich  $B$  und  $F$  die identische Abbildung auf  $T$  ist. Wegen der Beschränktheit von  $B$  gibt es eine Konstante  $C_0$  derart, daß sich  $B$  mit höchstens  $C_0 \cdot 2^{k \cdot n}$  Würfeln der Seitenlänge  $2^{-n}$  überdecken läßt, also  $N_d(2^{-n}) \leq C_0 \cdot 2^{k \cdot n}$ . Weiter folgt aus (3.1.d), daß in einem Würfel der Seitenlänge  $2^{-n-2}$  höchstens ein Punkt aus  $A_n$  liegen kann. Es gibt deshalb zu jedem  $m \in \mathbb{N}$  eine Konstante  $C_1(m)$ , so daß für jeden Punkt  $t_1 \in A_n$  die Ungleichung  $|\{t_2 \in A_n: d(t_1, t_2) \leq m 2^{-n}\}| \leq C_1(m)$  für alle genügend großen  $n \in \mathbb{N}$

gilt. Aus (3.1.c) und (3.1.d) folgt nun  $|U_n| \leq C_2 \cdot 2^{k \cdot n}$  für eine geeignete Konstante  $C_2$  und alle genügend großen  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

*Bemerkung 1.* Aus der Bemerkung 3 des Paragraphen 2 folgt unmittelbar, daß in Korollar 3.3.a die Menge  $B$  sogar eine beliebige Teilmenge von  $\mathbb{R}_k$  sein darf. Es gelten dann die Aussagen (2.3) und (2.1) von Satz 2.1 mit  $C(T, d)$  statt  $C_u(T, d)$ . Entsprechendes gilt auch in Korollar 3.5 (unten).

*Beispiel 3.4.* Für  $(T, d)$  mögen dieselben Voraussetzungen wie in Korollar 3.3 gelten. Mit  $F$  sei auch hier die Isometrie von  $T$  auf  $B$  bezeichnet. Wenn dann für einen stochastischen Prozeß  $\xi = (\xi(t), t \in T)$  Zahlen  $\gamma \geq 0$  und  $\varepsilon > 0$  existieren mit

$$(3.10) \quad P(|\xi(t_1) - \xi(t_2)| \geq \lambda) \leq \lambda^{-\gamma} |F(t_1) - F(t_2)|^{k+\varepsilon} \quad \forall \lambda > 0, \forall t_1, t_2 \in T,$$

so gilt  $(P^\xi)^*(C_u(T, d)) = 1$ .

Falls  $\xi$  darüberhinaus noch separabel ist, so gibt es eine fast sicher positive Zufallsgröße  $\delta$  und Konstanten  $K \geq 0, \eta > 0$  derart, daß für Punkte  $t_1, t_2 \in T$  mit  $|F(t_1) - F(t_2)| \leq \delta$  gilt:

$$(3.11) \quad |\xi(t_1) - \xi(t_2)| \leq K \cdot |F(t_1) - F(t_2)|^\eta.$$

Die Aussagen in Beispiel 3.4 folgen direkt aus Korollar 3.3, wenn man definiert:  $g(h) := h^\eta, q(h) := h^{k+\varepsilon-2\gamma} \forall h \geq 0$ , wobei  $\eta > 0$  so gewählt ist, daß  $\varepsilon - 2\gamma$  positiv ist.  $\square$

Für den Spezialfall, daß  $T = [0, 1], k = 1$  und  $F$  eine stetige Verteilungsfunktion auf  $[0, 1]$  ist, wurde die erste Aussage des obigen Beispiels von Billingsley [3], Theorem 12.4, bewiesen. Gemäß Beispiel 3.4 kann man auf die Monotonie von  $F$  verzichten und erhält darüber hinaus nicht nur die Stetigkeit der Pfade bezüglich der Pseudometrik  $d(t_1, t_2) = |F(t_1) - F(t_2)|$ , die – falls  $F$  stetig ist – schwächer ist als die gewöhnliche Metrik auf  $\mathbb{R}$ , sondern sogar die „Lipschitzbedingung“ (3.11).

Als eine weitere Folgerung aus Satz 3.1 können wir noch in verallgemeinerter Form ein Resultat von Delporte [6] beweisen, in welchem die schwächste uns bekannte hinreichende Bedingung für die Stetigkeit der Pfade eines Gaußschen stochastischen Prozesses angegeben wird. Zuvor jedoch noch die

*Bemerkung 2.* Bei der Konstruktion der Folge  $\{A_n\}$  in (3.1), sowie in dem Beweis von Satz 3.1 (unten) wird die Dreiecksungleichung für die Pseudometrik  $d$  nur in der folgenden abgeschwächten Form benötigt:

Für alle genügend großen  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $t_1, t_2, t_3 \in T$  gilt

$$,,d(t_1, t_2) < 2^{-n}, d(t_2, t_3) < 2^{-n} \Rightarrow d(t_1, t_3) < 2^{-n+1}.$$

Eine Funktion  $d$  auf  $T \times T$ , die alle Eigenschaften einer Pseudometrik besitzt bis auf die Dreiecksungleichung, welche aber noch in der obigen abgeschwächten Form gelte, wollen wir eine „Submetrik“ nennen. Das System der Mengen

$$S_{d,n} = \{(t_1, t_2) \in T \times T: d(t_1, t_2) < 2^{-n}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

bildet dann eine (abzählbare) Basis für eine uniforme Struktur  $\mathcal{U}_d$  auf  $T$  (vgl. [10], S. 174 ff.).  $(T, \mathcal{U}_d)$  – oder einfacher  $(T, d)$  – ist pseudometrisierbar mit einer Pseudometrik  $\bar{d}$ . Die Menge  $C_u(T, d)$  der gleichmäßig stetigen Funktionen auf  $T$  bezüglich

$\mathcal{U}_d$  ist dann natürlich gleich  $C_u(T, \bar{d})$ . Ebenso ist der Begriff „totalbeschränkt“ nur abhängig von  $\mathcal{U}_d$ . Damit gelten also die Sätze 2.1, 3.1 auch für Submetriken. Der Beweis von Satz 3.2 und Bemerkung 3 (unten) bleibt für Submetriken  $d$  nur dann richtig, wenn man die Stetigkeit der Funktionen  $f_{t_0} := d(t_0, \cdot)$  zeigen kann.

**Korollar 3.5.** Für  $(T, d)$  mögen dieselben Voraussetzungen gelten wie in Korollar 3.4, und  $F$  bezeichne die Isometrie von  $T$  auf  $B$ . Für einen Gaußschen stochastischen Prozeß  $\xi = (\xi(t), t \in T)$  mit Mittelwert 0 gebe es eine nichtnegative reellwertige Funktion  $\varphi$ , die auf einem Intervall  $[0, d)$ ,  $d > 0$ , monoton nichtfallend ist, in Null verschwindet und außerdem die folgenden Eigenschaften hat:

$$(3.12) \quad E(\xi(t_1) - \xi(t_2))^2 \leq \varphi^2(|F(t_1) - F(t_2)|) \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

und

$$(3.13) \quad \sum_n 2^{\frac{n}{2}} \varphi(2^{-2^n}) < \infty.$$

Dann gilt  $(P^\xi)^*(C_u(T, d)) = 1$ .

*Beweis.* Wir führen auf  $T$  eine Submetrik  $d_1$  ein, indem wir definieren:

$$d_1(t_1, t_2) := |\log_2 |F(t_1) - F(t_2)||^{-1} \quad \forall t_1, t_2 \in T,$$

wobei „ $\log_2$ “ den Logarithmus zur Basis 2 bezeichnet und  $|\log_2 0|^{-1}$  gleich 0 gesetzt wird. Man rechnet leicht nach, daß  $d_1$  eine Submetrik ist, falls nur die Ungleichung  $2 \cdot \sup \{|F(t_1) - F(t_2)| : t_1, t_2 \in T\} < 1$  richtig ist, was man o.B.d.A. annehmen kann. Wir werden den Satz 3.1 mit  $(T, d_1)$  anwenden und definieren dazu:

$$g(h) := \sqrt{2} \cdot \alpha \cdot h^{-\frac{1}{2}} \varphi(2^{-\frac{1}{h}}) \quad \text{und} \quad q(h) := e^{-\frac{\alpha^2}{h}} \quad \forall h > 0,$$

wobei  $\alpha$  eine positive Konstante ist mit  $\alpha > 4 \cdot \sqrt{k}$ . Setzt man noch  $g(0) = q(0) = 0$ , so erfüllt die Funktion  $f = g$ , bzw.  $f = q$ , die Monotonieeigenschaft (3.3), und aus der elementaren Ungleichung

$$\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq a^{-1} e^{-\frac{a^2}{2}} \quad \forall a > 0$$

folgt (3.4) (mit  $d_1$  statt  $d$ ) für alle  $t_1, t_2 \in T$  mit  $d_1(t_1, t_2) < 1$ . Die Voraussetzung (3.5) ist wegen (3.13) trivialerweise erfüllt. Um (3.6) für  $q$  nachzuweisen, verwenden wir für  $|U_n|$  die grobe Abschätzung  $|U_n| \leq N_{d_1}^2(2^{-n-3})$ . Nun gilt aber gemäß der Definition von  $d_1$  für  $t_1, t_2 \in T$  und  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(3.14) \quad d_1(t_1, t_2) < 2^n \Leftrightarrow d(t_1, t_2) < 2^{-2^n}.$$

Daraus folgt, daß  $(T, d_1)$  totalbeschränkt ist und genauer, daß die Ungleichung  $N_{d_1}(2^{-n}) \leq N_d(2^{-2^n})$  gilt. In Korollar 3.3 haben wir schon die Abschätzung  $N_d(2^{-n}) \leq C_0 2^{k \cdot n}$  bewiesen, so daß insgesamt gilt:  $|U_n| \leq C_0^2 2^{k \cdot 2^{n+4}}$ . Daraus folgt aber sofort (3.6). Schließlich sei noch bemerkt, daß wegen (3.14)  $C_u(T, d)$  und  $C_u(T, d_1)$  einander gleich sind.  $\square$

Es ist bekannt und elementar zu beweisen, daß die Bedingung (3.13) äquivalent ist zu der Aussage: Für eine Konstante  $M > 0$  gilt

$$(3.15) \quad \int_M^\infty \varphi(e^{-x^2}) < \infty.$$

Ersetzt man in Korollar (3.5) die Bedingung (3.13) durch (3.15) so erhält man (in verallgemeinerter Form) einen Satz von Fernique [8], s. auch Dudley [7], Theorem 7.1, bei denen  $T = [0, 1]$  bzw.  $T$  eine beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}_k$  und  $F$  die identische Abbildung auf  $T$  ist.

*Beweis von Satz 3.1.* Wir wollen die Bedingung (2.2) des Satzes 2.1 nachweisen. Sei also dazu  $T_0$  eine abzählbare, dichte Teilmenge von  $(T, d)$  und  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Teilmengen aus  $T$ , die die Eigenschaften (3.1.a – d) besitzt und für die (3.6) gilt. Wir definieren

$$G_n := \{ \xi(t_1) - \xi(t_2) : (t_1, t_2) \in U_n \}.$$

Nach Definition von  $|U_n|$  gilt dann  $|G_n| \leq |U_n|$  und damit wegen (3.4) und der Monotonieeigenschaft (3.3), sowie (3.1.d):

$$(3.16) \quad P(\max \{ |Z| : Z \in G_n \} > C_g^3 \cdot g(2^{-n}) \leq C_g^3 q(2^{-n}) \cdot |U_n|.$$

Wegen (3.6) existiert nun nach dem Lemma von Borel-Cantelli eine fast sicher endliche Zufallsgröße  $\rho$  mit

$$(3.17) \quad |Z| \leq C_g^3 g(2^{-n}) \quad \forall Z \in G_n \quad \text{falls } n \geq \rho.$$

Für Punkte  $t \in T_0$  sei  $B_n(t)$  ein Punkt aus  $A_{n+2}$  mit  $d(t, B_n(t)) < 2^{-n-2}$ . Für  $t_1, t_2 \in T_0$  mit  $d(t_1, t_2) < 2^{-n-2}$  ist dann  $d(B_n(t_1), B_n(t_2)) < 2^{-n}$ , so daß entweder  $B_n(t_1) = B_n(t_2)$  gilt oder  $(\xi(B_n(t_1)) - \xi(B_n(t_2))) \in G_n$ . Entsprechend gilt für  $t \in T_0$  entweder  $B_{n+1}(t) = B_n(t)$  oder  $(\xi(B_n(t)) - \xi(B_{n+1}(t))) \in G_{n+1}$ .

Für  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $p > q \geq \rho$  gilt dann wegen (3.17)

$$|\xi(B_p(t)) - \xi(B_q(t))| \leq \sum_{\mu=q}^{p-1} |\xi(B_{\mu+1}(t)) - \xi(B_\mu(t))| \leq C_g^3 \sum_{\mu=q+1}^p g(2^{-\mu}).$$

Da  $\rho$  f.s. (fast sicher) endlich ist, konvergiert für alle  $t \in T_0$  die Folge  $\{ \xi(B_n(t)) \}_{n \in \mathbb{N}}$  f.s. Wegen  $d(B_n(t), t) \rightarrow 0$  und (3.4) – (3.6) gilt  $\xi(B_n(t)) \xrightarrow{P} \xi(t)$ , woraus folgt: Es gibt eine Nullmenge  $N \subset \Omega$  (o.B.d.A.  $\{ \rho = \infty \} \subset N$ ), so daß für  $\omega \in N^c$  gilt

$$(3.18) \quad \xi(B_n(t))(\omega) \rightarrow \xi(t)(\omega) \quad \forall t \in T_0.$$

Für  $\omega \in N^c$  wählen wir nun  $n_0 \in \mathbb{N}$  größer als  $\rho(\omega)$  und stellen für  $t \in T_0$   $\xi(t)(\omega)$  als unendliche Reihe dar (wobei wir das Argument  $\omega$  fortlassen):

$$\xi(t) = \xi(B_{n_0}(t)) + \sum_{v=n_0}^{\infty} (\xi(B_{v+1}(t)) - \xi(B_v(t))).$$

Für  $t_1, t_2 \in T_0$  mit  $d(t_1, t_2) \leq 2^{-n_0-2}$  folgt dann

$$(3.19) \quad \begin{aligned} |\xi(t_1) - \xi(t_2)| &\leq |\xi(B_{n_0}(t_1)) - \xi(B_{n_0}(t_2))| + 2 \cdot \sum_{i=1}^2 \sum_{v=n_0}^{\infty} |\xi(B_{v+1}(t_i)) - \xi(B_v(t_i))| \\ &\leq C_g^3 [g(2^{-n_0}) + 2 \cdot \sum_{v>n_0} g(2^{-n_0-v})] \\ &\leq 2 \cdot C_g^3 \sum_{v=n_0}^{\infty} g(2^{-n_0-v}). \end{aligned}$$



Da die rechte Seite von (3.19) mit  $n_0 \rightarrow \infty$  verschwindet, folgt die gleichmäßige Stetigkeit von  $\xi(\cdot)(\omega)$  auf  $T_0$ .  $\square$

*Bemerkung 3* (vgl. Strassen und Dudley [12], Lemma 2). Sei  $\xi_i, i \in I$ , mit einer Indexmenge  $I$ , eine Familie von stochastischen Prozessen, die die Bedingungen (3.4)–(3.6) mit demselben  $g$  und  $q$  erfüllen, und deren Pfade fast alle stetig sind. Der Parameterraum  $(T, d)$  sei kompakt. Dann gilt:

(3.20) Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta = \delta(\varepsilon, g, q)$  mit

$$P(\sup \{|\xi_i(t_1) - \xi_i(t_2)| : d(t_1, t_2) \leq \delta\} > \varepsilon) \leq \varepsilon \quad \forall i \in I.$$

*Beweis.* Bei gegebenem  $\varepsilon > 0$  sei  $\delta = 2^{-n_0-2}$ , wobei  $n_0$  so groß ist, daß die Ungleichungen  $C_g^3 \sum_{n \geq n_0} g(2^{-n}) < \varepsilon/2$  und  $C_q^3 \sum_{n \geq n_0} |U_n| q(2^{-n}) < \varepsilon$  erfüllt sind. Ist nun

$$G'_n := \bigcup_{m \geq n} \{ \max \{|\xi_i(t_1) - \xi_i(t_2)| : (t_1, t_2) \in U_m\} > C_g^3 g(2^{-m}) \},$$

so gilt  $P(G'_n) \leq C_q^3 \sum_{m \geq n_0} |U_m| q(2^{-m}) < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$  (vgl. (3.16)).

Auf  $\Omega - G'_{n_0}$  gilt nun f.s. wegen der Stetigkeit der Pfade von  $\xi_i$  und (3.19):  $|\xi_i(t_1) - \xi_i(t_2)| \leq \varepsilon$  für  $d(t_1, t_2) \leq \delta$  mit  $t_1, t_2 \in T$ . Es folgt

$$P(\sup \{|\xi_i(t_1) - \xi_i(t_2)| : d(t_1, t_2) \leq \delta\} > \varepsilon) \leq P(G'_{n_0}) < \varepsilon. \quad \square$$

Bekanntlich impliziert (3.17) zusammen mit einer weiteren Bedingung, die die gleichmäßige Beschränktheit der Prozesse  $\xi_i$  charakterisiert, die gleichmäßige Straffheit der Familie  $\xi_i, i \in I$ , vgl. Billingsley [3], Theorem 8.2.

*Beweis von Satz 3.2.* Wie im Beweis von Satz 3.1, (3.17), gibt es eine f.s. endliche Zufallsgröße  $\rho$  mit

$$(3.21) \quad \max \{|\xi(t_1) - \xi(t_2)| : (t_1, t_2) \in U_n\} \leq g(2^{-n}) \quad \forall n \geq \rho.$$

Seien  $t_1 \in A_{n+2}, t_2 \in A_r$  gegeben mit  $r > n + 2$  und  $d(t_1, t_2) < 2^{-n-2}$ . Zu  $t_2 = t_r$  suche man einen Punkt  $t_{r-1} \in A_{r-1}$  mit  $d(t_r, t_{r-1}) < 2^{-r+1}$ , sodann zu  $t_{r-1}$  einen Punkt  $t_{r-2} \in A_{r-2}$  mit  $d(t_{r-1}, t_{r-2}) < 2^{-r+2}$  usw., bis man zu einem Punkt  $t_{n+2} \in A_{n+2}$  gelangt. Dann gilt  $d(t_1, t_{n+2}) < 2^{-n}$  und

$$\begin{aligned} |\xi(t_2) - \xi(t_1)| &\leq \sum_{\mu=n+3}^r |\xi(t_\mu) - \xi(t_{\mu-1})| + |\xi(t_{n+2}) - \xi(t_1)| \\ &\leq \left( \sum_{\mu=n+1}^{r-2} g(2^{-\mu}) + g(2^{-n}) \right) \\ &\leq a \cdot g(2^{-n}). \end{aligned}$$

Da  $\bigcup_{\mu > n+2} A_\mu$  dicht in  $T$  liegt, folgt aus der Stetigkeit fast aller Pfade von  $\xi$ , daß für  $n$  mit  $n \geq \rho$  und alle  $t \in A_{n+2}$  gilt

$$(3.22) \quad |\xi(t) - \xi(t')| \leq a \cdot g(2^{-n}) \quad \forall t' \in T \text{ mit } d(t, t') < 2^{-n-2}.$$

Für Punkte  $t_1, t_2 \in T$  mit  $d(t_1, t_2) > 0$  sei  $n \in \mathbb{N}$  so gewählt, daß  $2^{-n-2} \leq d(t_1, t_2) < 2^{-n-1}$ . Seien dann  $t'_1, t'_2$  Punkte aus  $A_{n+2}$  mit  $d(t_1, t'_1) < 2^{-n-2}, d(t_2, t'_2) < 2^{-n-2}$ .

Wir definieren nun eine Zufallsgröße  $\delta$  durch  $\delta = 2^{-\rho-2}$ . Aus  $0 < d(t_1, t_2) \leq \delta$  folgt dann  $n \geq \rho$  und schließlich wegen (3.22):

$$\begin{aligned} |\xi(t_1) - \xi(t_2)| &\leq |\xi(t_1) - \xi(t'_1)| + |\xi(t'_1) - \xi(t'_2)| + |\xi(t'_2) - \xi(t_2)| \\ &\leq (2a + 1) \cdot g(2^{-n}) \leq (2a + 1) \cdot g(4d(t_1, t_2)). \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist natürlich auch für  $d(t_1, t_2) = 0$  richtig.  $\square$

Die beiden folgenden Sätze formulieren wir nur für  $T = E_k = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ . Zuvor benötigen wir jedoch noch eine Reihe von *Bezeichnungen*:  $t = (t_1, \dots, t_k)$ ,  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_k)$ ,  $h = (h_1, \dots, h_k)$  usw. seien Vektoren in  $\mathbb{R}_k$ ;  $|t| := \max\{|t_1|, \dots, |t_k|\}$  sei die Maximumsnorm auf  $\mathbb{R}_k$ ;

$$\begin{aligned} I_p := \{i: i = (i_1, \dots, i_p), i_\mu \in \mathbb{N} \forall \mu, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq k\}, \quad I := \bigcup_{p=1}^k I_p; \\ |i| := p \quad \text{und} \quad \{i\} := \{i_1, \dots, i_p\} \quad \text{für } i \in I_p. \end{aligned}$$

Für  $t \in \mathbb{R}_k$  und  $i \in I_p$  sei  $[t]_i := (t_{i_1}, \dots, t_{i_p})$ .

Für eine Funktion  $f: E_k \rightarrow \mathbb{R}$  und  $i \in I_p$  sei  $f^i: E_p \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f^i(u_1, \dots, u_p) := f(t),$$

wobei  $t = (t_1, \dots, t_k)$  bestimmt ist durch  $t_\nu = 0$  für  $\nu \notin \{i\}$  und  $t_{i_\mu} = u_\mu$  für  $\mu = 1, \dots, p$ .

$$\begin{aligned} L_n^p := \{(j_1 2^{-n}, \dots, j_p 2^{-n}): 0 \leq j_\mu \leq 2^{-n}, \mu = 1, \dots, p\}; \\ L_\infty^p := \bigcup_{n \geq 1} L_n^p, \quad L_n := L_n^k, \quad L_\infty := L_\infty^k; \end{aligned}$$

$e_\nu = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  sei der  $\nu$ -te Einheitsvektor in  $\mathbb{R}_k$ ,

$$e = (1, 1, \dots, 1), \quad 0 = (0, \dots, 0).$$

Für eine Funktion  $f: E_p \rightarrow \mathbb{R}$  und  $t, t' \in E_p$  ist der Differenzoperator  $\Delta$  definiert durch

$$\Delta_t' f := \sum_{(\delta_1, \dots, \delta_p)} (-1)^{\sum \delta_\mu} f(\delta_1 t_1 + (1 - \delta_1) t'_1, \dots, \delta_p t_p + (1 - \delta_p) t'_p),$$

wobei sich die Summation über alle  $(\delta_1, \dots, \delta_p)$  mit  $\delta_\mu \in \{0, 1\}$ ,  $\mu = 1, \dots, p$ , erstreckt.

Zu einer Funktion  $f: E_k \rightarrow \mathbb{R}$  ist die „bezüglich  $L_n$  linearisierte Funktion“  $f_n: E_k \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt definiert: Für  $t \in E_k$  mit  $j \leq t \leq (2^{-n} e + j)$  (komponentenweise) und  $j, j + 2^{-n} e \in L_n$  sei:

$$f_n(t) := f(j) + \sum_{p=1}^k \sum_{i \in I_p} (\Delta_{[0]_i}^{[2^{-n} e]_i} f_j^i) \prod_{\mu=1}^p (t_{i_\mu} - j_{i_\mu}) \cdot 2^{-pn}$$

mit  $f_j(t) := f(j + t)$ .

Die linearisierten Funktionen  $f_n$  sind stetig auf  $E_k$ . Für jedes  $\mu = 1, \dots, k$  ist  $f_n(t)$  in Abhängigkeit von der  $\mu$ -ten Komponente linear in jedem Intervall

$$[\tau \cdot 2^{-n}, (\tau + 1) 2^{-n}], \quad \tau = 0, \dots, 2^{-n} - 1.$$

Wir können nun die restlichen Resultate formulieren.

**Satz 3.6.** Sei  $\xi = (\xi(t), t \in E_k)$  ein stochastischer Prozeß. Für Konstanten  $\gamma \geq 0$ ,  $\alpha > 1$ ,  $K \geq 0$  und stetige Verteilungsfunktionen  $F_i, i \in I$ , endlicher Maße auf  $E_{|i|}$  gelte:

$$(3.23) \quad P(|\Delta_{[t_i]_i}^{[t+h]_i} \xi^i| \geq \lambda) \leq \lambda^{-\gamma} \cdot K \cdot (\Delta_{[t_i]_i}^{[t+h]_i} F_i)^\alpha \quad \forall \lambda > 0, \forall t, h, t+h \in E_k, \forall i \in I.$$

Dann gilt  $(P^\xi)^*(C(E_k)) = 1; C(E_k) := C(E_k, |\cdot|)$ .

**Satz 3.7.** Sei  $\xi = (\xi(t), t \in E_k)$  ein stochastischer Prozeß, der (3.23) erfüllt mit  $F_i(t) = t_1 \dots t_{|i|}, t \in E_{|i|}$ , und dessen Pfade fast alle in  $C(E_k)$  liegen. Dann gibt es Konstanten  $b \geq 0, c > 0$  und eine f.s. positive Zufallsgröße  $\delta$  mit

$$(3.24) \quad |\xi(t_1) - \xi(t_2)| \leq b |t_1 - t_2|^c \quad \forall t_1, t_2 \in E_k \text{ mit } |t_1 - t_2| \leq \delta.$$

Eine 1-dimensionale Version des Satzes 3.6 wurde von Billingsley [3], Theorem 12.4, bewiesen. Dabei verwendete er einen Satz über Fluktuationen von Partialsummen (Theorem 12.2). Eine Verallgemeinerung von Theorem 12.2 auf Zufallsgrößen mit vektorwertigen Indices stammt von Bickel [2]. Wir benötigen eine direkte Folgerung aus Corollar 2.1 von Bickel [2], die wir folgendermaßen formulieren wollen.

**Satz 3.8** (s. Bickel [2]). Für alle  $d \in \mathbb{N}^p := \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$  seien Zufallsgrößen  $\xi_d$  gegeben. Weiter seien  $U_d, d \in \mathbb{N}^p$ , nichtnegative Zahlen und  $\alpha > 1, \gamma \geq 0$  Konstanten derart, daß mit

$$S(a, b) := \sum_{a \leq d \leq b} \xi_d \quad \text{und} \quad U(a, b) := \sum_{a \leq d \leq b} U_d$$

für ein  $c \in \mathbb{N}^p$  gilt

$$(3.25) \quad P(|S(a, b)| \geq \lambda) \leq \lambda^{-\gamma} (U(a, b))^\alpha \quad \forall \lambda > 0, \forall a, b \in \mathbb{N}^p \text{ mit } e \leq a \leq b \leq c.$$

Dann gibt es eine Konstante  $C$ , die nur von  $(p, \gamma, \alpha)$  abhängt, so daß gilt:

$$(3.26) \quad P\left(\max_{e \leq b \leq c} |S(e, b)| \geq \lambda\right) \leq \lambda^{-\gamma} C \cdot (U(e, c))^\alpha \quad \forall \lambda > 0.$$

*Beweis von Satz 3.6.* Sei  $\xi_n = (\xi_n(t), t \in E_k)$  der bezüglich der Gitterpunkte  $L_n$  linearisierte Prozeß  $\xi$ ;  $\xi_n$  werde aufgefaßt als Zufallsvariable mit Werten in  $(C(E_k), \mathfrak{B}_{\|\cdot\|})$ . Wir wollen zeigen, daß die Folge  $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ , gleichmäßig straff ist. Wegen  $\xi_n(0) = \xi(0) \forall n \in \mathbb{N}$  ist dazu nur zu zeigen (vgl. Billingsley [3], Theorem 8.2):

$\forall \varepsilon, \eta \in \mathbb{R}_+$  existiert ein  $\delta, 0 < \delta < 1$ , und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$(3.27) \quad P[\sup\{|\xi_n(t) - \xi_n(t')| : t, t' \in E_k, |t - t'| \leq \delta\} \geq \varepsilon] \leq \eta \quad \text{für } n \geq n_0.$$

(3.27) ist richtig, wenn wir für  $p = 1, \dots, k$  zeigen:

$\forall \varepsilon, \eta \in \mathbb{R}_+$  existiert ein  $\delta, 0 < \delta < 1$ , und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$(3.28) \quad P[\sup\{|\xi_n(t + h e_p) - \xi_n(t)| : t \in E_k, 0 \leq h \leq \delta, t_p + h \leq 1\} \geq \varepsilon] \leq \eta \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Sei  $\delta \in \mathbb{R}_+$  mit  $\delta^{-1} \in \mathbb{N}$  und  $G_\delta := \{0 \cdot \delta, 1 \cdot \delta, \dots, 1 - \delta\}$ . Dann folgt wie bei Billingsley [3], S. 56, daß die linke Seite von (3.28) kleiner ist als

$$(3.29) \quad 3P\left[\sup_{t_p \in G_\delta} \sup\{|\xi_n(t + h e_p) - \xi_n(t)| : (t_1, \dots, t_{p-1}, t_{p+1}, \dots, t_k) \in E_{k-1}, 0 \leq h \leq \delta\} \geq \varepsilon/3\right].$$

Ist speziell  $\delta = 2^{-v}$ ,  $v \in \mathbb{N}$ , so betrachten wir (3.29) für  $n \geq v$ . Da die Punkte von  $G_\delta$  dann ganzzahlige Vielfache von  $2^{-n}$  sind, braucht man wegen der Linearität von  $\xi_n$  bei der Supremumbildung nur Punkte aus  $L_n$  zu betrachten. Es genügt dann offenbar zu zeigen (wobei o.B.d.A.  $p = 1$  sei):

$\forall \varepsilon, \eta \in \mathbb{R}_+$  gibt es ein  $v \in \mathbb{N}$  mit

$$(3.30) \quad \mathbb{P} \left[ \max_{\mu=0, \dots, 2^v-1} \max \{ |\zeta(\mu \cdot 2^{-v} + v 2^{-n}, t_2, \dots, t_k) - \xi(\mu \cdot 2^{-v}, t_2, \dots, t_k)| : v=1, \dots, 2^n-v, (t_2, \dots, t_k) \in L_n^{k-1} \} \geq \varepsilon \right] < \eta \quad \text{für } n \geq v.$$

Um die linke Seite von (3.30) weiter abzuschätzen, verwenden wir die folgende Gleichung, die sich leicht mit vollständiger Induktion beweisen läßt. Stimmen Punkte  $t, t' \in E_k$  in allen Komponenten, bis auf die  $\mu$ -te ( $\mu$  fest), überein, so gilt für eine Funktion  $f: E_k \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(3.31) \quad f(t) - f(t') = \sum_{i \in I, \mu \in \{i\}} \Delta_{[\mu e_{\mu,i}]}^{[i]} f^i.$$

Die linke Seite von (3.30) wird damit kleiner als

$$(3.32) \quad \sum_{\substack{i \in I \\ 1 \in \{i\}}} \sum_{\mu=0}^{2^v-1} \mathbb{P} \left[ \max \{ |\Delta_{[\mu 2^{-v}, 0, \dots, 0]}^{[i]}(\mu \cdot 2^{-v} + v 2^{-n}, t_2, \dots, t_k)| : \xi^i : v=1, \dots, 2^n-v, (t_2, \dots, t_k) \in L_n^{k-1} \} \geq \varepsilon/|I| \right].$$

Da  $|I|$  endlich ist, genügt es, jeden einzelnen  $i$ -ten Summanden,  $i \in I$ , durch Wahl von  $v$  klein zu machen. Sei dazu o.B.d.A.  $i = (1, \dots, p)$ . Um den Satz 3.8 anwenden zu können, definieren wir bei  $i = (1, \dots, p)$  und festem  $v \in \mathbb{N}$ ,  $\mu \in \{0, \dots, 2^v - 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , Zufallsgrößen

$$\xi_{(v_1, \dots, v_p)}^i := \Delta_{(\mu 2^{-v} + (v_1-1) 2^{-n}, (v_2-1) 2^{-n}, \dots, (v_p-1) 2^{-n})}^{(\mu 2^{-v} + v_1 2^{-n}, v_2 2^{-n}, \dots, v_p 2^{-n})} \xi^i$$

und nichtnegative Zahlen

$$U_{(v_1, \dots, v_p)} := K^{1/\alpha} \left( \Delta_{(\mu 2^{-v} + (v_1-1) 2^{-n}, (v_2-1) 2^{-n}, \dots, (v_p-1) 2^{-n})}^{(\mu 2^{-v} + v_1 2^{-n}, v_2 2^{-n}, \dots, v_p 2^{-n})} F_i \right)$$

mit  $1 \leq v_1 \leq 2^{n-v}$  und  $1 \leq v_r \leq 2^n$ ,  $r = 2, \dots, p$ .

Wegen

$$S(a, b) = \Delta_{(\mu 2^{-v} + (a_r-1) 2^{-n}, (b_2-1) 2^{-n}, \dots, (b_p-1) 2^{-n})}^{(\mu 2^{-v} + b_1 2^{-n}, b_2 2^{-n}, \dots, b_p 2^{-n})} \xi^i,$$

(entsprechend für  $U(a, b)$ ) und (3.23), ist die Bedingung (3.25) erfüllt, und es folgt aus Satz 3.8:

$$(3.33) \quad \begin{aligned} & \mathbb{P} \left[ \max \{ |\Delta_{[\mu 2^{-v}, 0, 0, \dots, 0]}^{[i]}(\mu \cdot 2^{-v} + v 2^{-n}, t_2, \dots, t_k)| : \xi^i : v=1, \dots, 2^n-v, (t_2, \dots, t_k) \in L_n^{k-1} \} \geq \lambda \right] \\ & \leq \lambda^{-\gamma} \cdot C \cdot K \cdot \left( \Delta_{[\mu 2^{-v}, 0, \dots, 0]}^{[(\mu+1) 2^{-v}, 1, \dots, 1]} F_i \right)^\alpha \\ & \leq \lambda^{-\gamma} \cdot C \cdot K \cdot \max_{\mu=0, \dots, 2^v-1} \left( \Delta_{[\mu 2^{-v}, 0, \dots, 0]}^{[(\mu+1) 2^{-v}, 1, \dots, 1]} F_i \right)^{\alpha-1} \Delta_{[\mu 2^{-v}, 0, \dots, 0]}^{[(\mu+1) 2^{-v}, 1, \dots, 1]} F_i. \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der  $F_i$  auf  $E_{|i|}$ , geht die rechte Seite von (3.33) (und damit (3.32)) mit  $v \rightarrow \infty$  gegen Null, so daß nun endgültig (3.30) bewiesen ist. Die Folge der Prozesse  $\xi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist also gleichmäßig straff und damit nach dem Satz von Prohorov relativ folgenkompakt. Es gibt also eine Zufallsvariable  $\tilde{\xi}$  mit Werten in  $(C(E_k), \mathfrak{B}_{\|\cdot\|})$ , gegen die eine Teilfolge von  $\xi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , schwach konvergiert.

Für Punkte  $t_1, \dots, t_r \in L_\infty$  haben offensichtlich

$$(\xi(t_1), \dots, \xi(t_r)) \quad \text{und} \quad (\hat{\xi}(t_1), \dots, \hat{\xi}(t_r))$$

dieselbe Verteilung. Dies ist auch für beliebige Punkte aus  $E_k$  richtig, wie man analog dem 1-dimensionalen Fall zeigt, vgl. Billingsley [3], S. 97, unter Ausnützen der Tatsache, daß  $\xi(t)$  für  $t \rightarrow t'$  nach Wahrscheinlichkeit gegen  $\xi(t')$  strebt. Dies erhält man aber leicht aus (3.31), (3.23) und der Stetigkeit der  $F_i, i \in I$ . Damit haben  $\xi$  und  $\hat{\xi}$  dieselben endlichdimensionalen Randverteilungen. Die Zufallsvariable  $\hat{\xi}$  induziert auf  $(C(E_k), \mathfrak{B}_{\|\cdot\|})$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit den durch  $\xi$  vorgegebenen endlichdimensionalen Randverteilungen. Aus der Äquivalenz von (2.1) und (2.4) folgt nun die Behauptung.  $\square$

Der Beweis von Satz 3.7 stützt sich auf die folgende Ungleichung, s. Neuhaus [11], Lemma 5.1: Für  $j \in L_n$  und  $t \in L_{n+r}$  mit  $|j-t| \leq 2^{-n}$  und eine Funktion  $f: E_k \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$(3.34) \quad |f(j) - f(t)| \leq 4 \cdot k \sum_{v=0}^r \sum_{\tau=1}^k \max \{ |f(t + 2^{-(n+v)} e_\tau) - f(t)| : t \in L_{n+v}, t_\tau < 1 \}.$$

*Beweis von Satz 3.7.* Für  $(\xi(t), t \in E_k)$  folgt aus (3.34) und (3.31)

$$(3.35) \quad |\xi(j) - \xi(t)| \leq 4 \cdot k \sum_{v=0}^r \sum_{\tau=1}^k \sum_{\substack{i \in I \\ \tau \in \{i\}}} \max \{ |A_{[t_\tau e_{\tau i}] i}^{[t + 2^{-(n+v)} e_{\tau i}] i} \xi^i| : t \in L_{n+v}, t_\tau < 1 \}.$$

Genau wie bei (3.33) zeigt man unter Berücksichtigung der speziellen Gestalt von  $F_i$ , daß für  $\tau \in \{1, \dots, k\}$  und  $i \in I$  gilt:

$$(3.36) \quad \begin{aligned} P(\max \{ |A_{[t_\tau e_{\tau i}] i}^{[t + 2^{-n} e_{\tau i}] i} \xi^i| : t \in L_n, t_\tau < 1 \} \geq \lambda) \\ \leq 2^n \cdot C \cdot K \cdot \lambda^{-\gamma} 2^{-n\alpha} = C \cdot K \cdot \lambda^{-\gamma} 2^{-n(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

Sei sodann  $\lambda_n := 2^{-nc}$ , wobei  $c > 0$  bestimmt ist durch  $\alpha - 1 - \gamma c > 0$ . Wegen

$$\sum_{n \geq 1} b_n < \infty \quad \text{mit} \quad b_n := C \cdot K \cdot \lambda_n^{-\gamma} 2^{-n(\alpha-1)},$$

gibt es eine f.s. endliche Zufallsgröße  $\rho$  mit

$$(3.37) \quad \max \{ |A_{[t_\tau e_{\tau i}] i}^{[t + 2^{-n} e_{\tau i}] i} \xi^i| : t \in L_n, t_\tau < 1 \} < 2^{-nc} \quad \forall n \geq \rho, \forall \tau \in \{1, \dots, k\}, \forall i \in I.$$

Wegen (3.37) und (3.35) gilt dann für  $n \geq \rho$

$$(3.38) \quad |\xi(j) - \xi(t)| \leq 4 \cdot k \cdot |I| \sum_{v=0}^r 2^{-(n+v)c} < b_0 \cdot 2^{-nc}, \quad \forall j \in L_n, \forall t \in L_\infty$$

mit  $|j-t| \leq 2^{-n}$ , wobei  $b_0 := 4 \cdot k \cdot |I| \sum_{v=0}^\infty 2^{-vc}$  ist.

Wegen der Stetigkeit von  $\xi$  folgt dann (3.38) für alle  $t \in E_k$ . Zu  $t_1, t_2 \in E_k$  sei  $n \in \mathbb{N}$  so bestimmt, daß  $2^{-n} \leq |t_1 - t_2| < 2 \cdot 2^{-n}$  gilt. Man kann dann Punkte  $j_1, j_2 \in L_n$  finden mit

$$(3.39) \quad |t_1 - j_1| \leq 2^{-n}, \quad |j_1 - j_2| \leq 2^{-n}, \quad |j_2 - t_2| \leq 2^{-n}.$$

Mit  $\delta := 2^{-\rho}$  folgt aus  $|t_1 - t_2| \leq \delta$ , daß  $n \geq \rho$  gilt. Also ist

$$|\xi(t_1) - \xi(t_2)| \leq 3 b_0 2^{-nc} \leq 3 b_0 |t_1 - t_2|^c \quad \text{für} \quad |t_1 - t_2| \leq \delta. \quad \square$$

**Literatur**

1. Berman, S. M.: Gaussian processes with stationary increments: local times and sample function properties. *Ann. math. Statistics* **41**, 1260–1272 (1970).
2. Bickel, P. J.: Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications. Unveröffentlichtes Manuskript, University of California, Berkeley 1969.
3. Billingsley, P.: *Convergence of Probability Measures*. New York: Wiley 1968.
4. Borges, R.: Zur Existenz von separablen stochastischen Prozessen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **6**, 125–128 (1966).
5. Cramér, H., Leadbetter, M. R.: *Stationary and Related Stochastic Processes*. New York: Wiley 1967.
6. Delporte, J.: Fonctions aléatoires de deux variables presque sûrement à échantillons continus sur un domaine rectangulaire borné. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **6**, 181–205 (1966).
7. Dudley, R. M.: The Sizes of Compact Subsets of Hilbert Space and Continuity of Gaussian Processes. *Journal functional Analysis* **I**, 290–330 (1967).
8. Fernique, X.: Continuité des processus Gaussiens. *C. R. Acad. Sci., Paris* **258**, 6058–6060 (1964).
9. Jain, N. C., Kallianpur, G.: A note on uniform convergence of stochastic processes. *Ann. math. Statistics* **41**, 1360–1362 (1970).
10. Kelley, J. L.: *General Topology*. New York: Van Nostrand 1961.
11. Neuhaus, G.: On weak convergence of stochastic processes with multidimensional time parameter. *Ann. math. Statistics* **42**, No. 4 (1971).
12. Strassen, V., Dudley, R. M.: The Central Limit Theorem and  $\varepsilon$ -Entropy, p. 224–231. *Lecture Notes in Mathematics* **89**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.

Georg Neuhaus  
Institut für Mathematische Statistik  
D-4400 Münster, Roxeler Straße 64  
Deutschland

*(Eingegangen am 29. Oktober 1971)*