Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 21, 147 – 153 (1972)


# Isomorphismes et arithmétique des semi-groupes de lois de probabilité

Roger Cuppens

## 1. Introduction

Soit $f$ la fonction caractéristique des $n$ variables $t=(t_1, \ldots, t_n)$ définie par

$$\log f(t) = \int (e^{i(t,x)} - 1)\, \mu(dx),$$

$\mu$ étant une mesure positive ou nulle et bornée.

Dans le cas $n=1$, Raikov [12] a montré que si $\mu$ est concentrée[1] dans un ensemble de nombres positifs et rationnellement indépendants[2], alors $f$ n'a pas de facteur indécomposable. Lévy [8] a étendu un peu ce résultat en montrant qu'il en est de même si $\mu$ est concentrée dans un ensemble fini et rationnellement indépendant. Ces résultats ont été étendus dans diverses directions par Ostrovskiy [9 à 11] et l'auteur [1, 2, 4 à 6], mais la plupart des théorèmes obtenus semblaient manquer d'unité et dans l'énoncé et dans les méthodes de démonstration.

Généralisant une méthode utilisée dans [5], nous démontrons ici quelques théorèmes qui contiennent tous les résultats précédemment obtenus dans ce domaine. Le premier de ces théorèmes a été annoncé dans [7].

## 2. Principe de la méthode

Soient $A$ un sous-ensemble de $R^n$ et $M$ l'un des ensembles $N$, $Z$, $Q^+$, $Q$. Nous notons $(M)A$ l'ensemble des nombres de la forme $\sum_{j=1}^{\infty} h_j a_j$ où $a_j \in A$ et $h_j \in M$, tous les $h_j$ étant nuls sauf un nombre fini, et $\mathfrak{P}_{(M)A}$ l'ensemble des probabilités concentrées sur $(M)A$. On sait que si $p \in \mathfrak{P}_{(M)A}$ et si $q$ et $r$ sont des probabilités vérifiant

$$q * r = p,$$

il existe des probabilités $q' \in \mathfrak{P}_{(M)A}$ et $r' \in \mathfrak{P}_{(M)A}$ équivalentes respectivement à $q$ et $r$ et telles que

$$q' * r' = p.$$

---

[1] Une mesure $\mu$ est concentrée dans $A \subset R^n$ si $\mu(A \cap B) = \mu(B)$ pour tout sous-ensemble borélien $B$ de $R^n$.

[2] Un sous-ensemble borélien $A$ de $R^n$ est rationnellement indépendant si

$$\sum_{j=1}^{\infty} h_j a_j = 0, \quad a_j \in A, \ h_j \in Q,$$

tous les $h_j$ étant nuls sauf un nombre fini, entraîne $h_j = 0$.

L'étude de l'ensemble des décompositions possibles de $p$ se ramène donc à l'étude des décompositions dans $\mathfrak{P}_{(M)A}$, autrement dit $\mathfrak{P}_{(M)A}$ est fermé pour les décompositions en facteurs.

Soient maintenant $A \subset R^n$ et $A' \subset R^{n'}$ deux ensembles rationnellement indépendants ayant même cardinal et $\varphi$ une application bijective de $A$ sur $A'$. On peut étendre $\varphi$ à une application bijective (que nous noterons encore $\varphi$) de $(M)A$ sur $(M)A'$ par la formule

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{\infty} h_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \varphi(a_j),$$

où $a_j \in A$, $h_j \in M$, tous les $h_j$ étant nuls sauf un nombre fini. Si $p \in \mathfrak{P}_{(M)A}$, l'application $\Phi$ définie par

$$\Phi(p)(B') = p(\varphi^{-1}(B'))$$

pour tout sous-ensemble borélien $B'$ de $(M)A'$, est un isomorphisme du semi-groupe $\mathfrak{P}_{(M)A}$ sur le semi-groupe $\mathfrak{P}_{(M)A'}$. En particulier, si la fonction caractéristique $f'$ de $p' = \Phi(p)$ n'a pas de facteur indécomposable, il en est de même de la fonction caractéristique $f$ de $p$ et réciproquement. De plus, si la fonction caractéristique $f$ d'une probabilité $p$ admet la représentation

$$\log f(t) = \int (e^{i(t,x)} - 1)\, \mu(dx),$$

$\mu$ étant une mesure à variation bornée concentrée dans $(M)A$, alors la fonction caractéristique $f'$ de $\Phi(p)$ admet la représentation

$$\log f'(u) = \int (e^{i(u,y)} - 1)\, \Phi(\mu)(dy)$$

où

$$\Phi(\mu)(B') = \mu(\varphi^{-1}(B'))$$

pour tout sous-ensemble borélien $B'$ de $(M)A'$.

## 3. Quelques théorèmes de décomposition

**Théorème 1.** *Si $\mu$ est une mesure positive ou nulle, bornée et concentrée dans un ensemble $A \subset R^n$ rationnellement indépendant, alors la fonction caractéristique $f$ définie par*

$$\log f(t) = \int (e^{i(t,x)} - 1)\, \mu(dx)$$

*n'a pas de facteur indécomposable.*

*Démonstration.* Soit $A'$ un ensemble de nombres réels, rationnellement indépendant et ayant même cardinal que $A$. On peut choisir $A'$ de manière que $A' \subset [1, 2[$. Alors la fonction caractéristique $f'$ de la probabilité $p'$ associée à la probabilité $p$ de $f$ a la forme

$$\log f'(u) = \int_1^2 (e^{iuy} - 1)\, \mu'(dy).$$

On déduit alors d'un théorème d'Ostrovskiy [9] (cf. aussi, [1], théorème 8.2) que $f'$ n'a pas de facteur indécomposable, ce qui, d'après le paragraphe précédent, démontre le théorème.

**Théorème 2.** *Soit $f$ une fonction caractéristique des $n$ variables $t=(t_1,\dots,t_n)$ admettant la représentation*

$$\log f(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{\varepsilon}\lambda_{m,\varepsilon}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j a_{m,j}(\sigma_j,t)\right)-1\right],$$

*où*

a) *$\varepsilon_j=0$ ou 1 et $\sum_{\varepsilon}$ indique la sommation sur les suites $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots)$, tous les $\varepsilon_j$ étant nuls sauf un nombre fini;*

b) *$A=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots\}$ est un ensemble rationnellement indépendant;*

c) *les $a_{m,j}$ sont des rationnels tels que $a_{m+1,j}a_{m,j}^{-1}$ est un entier plus grand que un;*

d) *les $\lambda_{m,\varepsilon}$ sont des constantes positives ou nulles vérifiant les deux conditions suivantes:*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{\varepsilon}\lambda_{m,\varepsilon}<+\infty,$$

*et il existe une constante positive $K$ telle que*

$$\lambda_{m,\varepsilon}=O\left[\exp\left(-K\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j a_{m,j}^2\right)\right]\qquad(m\to+\infty).$$

*Alors $f$ n'a pas de facteur indécomposable.*

*Démonstration.* Le cas où $\{\sigma_j\}$ est un ensemble de $n$ éléments formant une base de $R^n$ est un cas particulier du théorème 2 de [3]. Le théorème est donc vrai par isomorphisme pour tout ensemble fini $\{\sigma_j\}$ de nombres réels.

Considérons maintenant un ensemble $\{\sigma_j\}$ de nombres réels positifs, rationnellement indépendant et dénombrable. Nous supposons de plus que

$$\mu(R)<\log 2. \tag{1}$$

$\mu$ désignant la mesure purement atomique ayant les masses $\lambda_{m,\varepsilon}$ aux points $\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j a_{m,j}\sigma_j$. Des hypothèses du théorème, il est évident que la probabilité $p$ de $f$ appartient à $\mathfrak{P}_{(Q^+)A}$. Si $q$ est une probabilité de $\mathfrak{P}_{(Q^+)A}$ divisant $p$, on déduit du théorème 1 de [6] que la fonction caractéristique $g$ de $q$ admet la représentation

$$\log g(t)=\int(e^{itx}-1)\,\nu(dx),$$

$\nu$ étant une mesure à variation bornée et concentrée dans $(N)\,(Q^+)A=(Q^+)A$.

Soient $C$ un sous-ensemble fini de $A$ et $\mu_C$ et $\nu_C$ les restrictions de $\mu$ et $\nu$ à $(Q^+)C$. Posons

$$\log f_C(t)=\int(e^{itx}-1)\,\mu_C(dx),$$

$$\log g_C(t)=\int(e^{itx}-1)\,\nu_C(dx).$$

De l'indépendance rationnelle de $A$, on déduit que pour tout ensemble borélien $B$

$$\exp(\mu_C)\,(B\cap(Q^+)C)=\exp(\mu)\,(B\cap(Q^+)C)^3,$$

$$\exp(\nu_C)\,(B\cap(Q^+)C)=\exp(\nu)\,(B\cap(Q^+)C).$$

[3] Si $m$ est une mesure à variation bornée,

$$\exp(m)=\sum_{j=0}^{\infty}m^{*j}(j!)^{-1}\quad\text{où}\quad m^{*0}=\varepsilon,\quad m^{*1}=m,\quad m^{*j}=m^{*(j-1)}*m.$$

Puisqu'il existe des constantes positives $k=\exp(\mu(R))$ et $l=\exp(\nu(R))$ telles que

$$\exp(\mu)=kp; \quad \exp(\nu)=lq,$$

ceci entraîne que $g_C$ est une fonction caractéristique divisant la fonction caractéristique $f_C$. D'après ce qui précède, $g_C$ est indéfiniment divisible et $\nu_C$ est donc une mesure positive ou nulle. Puisque $C$ est arbitraire, ceci démontre le théorème dans ce cas particulier.

L'hypothèse (1) n'est pas essentielle. En effet, puisque $\mu$ est concentrée dans $(Q^+)A\subset[0,\infty[$, on a

$$\lim_{r\to+\infty}\int e^{-rx}\mu(dx)=0.$$

On peut donc choisir $r_0$ de manière que la fonction caractéristique $\psi$ définie par $\psi(t)=f(t+ir_0)\,f(ir_0)^{-1}$ soit une fonction caractéristique vérifiant les conditions précédentes. La fonction $\theta$ définie par $\theta(t)=g(t+ir_0)\,g(ir_0)^{-1}$ est donc une fonction caractéristique indéfiniment divisible, ce qui entraîne que $g$ est indéfiniment divisible. Le cas général se démontre en utilisant l'isomorphisme entre $\mathfrak{P}_{(Q^+)A}$ et $\mathfrak{P}_{(Q^+)A'}$, $A'$ étant un sous-ensemble de nombres positifs et rationnellement indépendant.

En utilisant la même méthode et le théorème 7.3 de [1], on obtient le

**Théorème 3.** *Soit $f$ une fonction caractéristique des $n$ variables $t=(t_1,\ldots,t_n)$ admettant la représentation*

$$\log f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\varepsilon}\lambda_{m,\varepsilon}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j a_{m,j}(\sigma_j,t)\right)-1\right].$$

*Si, outre les conditions a, b et c du théorème précédent est vérifiée la condition suivante:*

d') *les $\lambda_{m,\varepsilon}$ sont des constantes positives ou nulles vérifiant*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\varepsilon}\lambda_{m,\varepsilon}<+\infty,$$

$$\lambda_{m,\varepsilon}=o\left[\exp\left(-2\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j|a_{m,j}|\log(|a_{m,j}|)\right)\right] \qquad (m\to+\infty),$$

*alors $f$ n'a pas de facteur indécomposable.*

Dans le cas où $A=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_p\}$ est un ensemble fini, on peut dans le théorème 3 remplacer l'hypothèse c) par c'): les $a_{m,j}$ sont des entiers tels que $a_{m',j}a_{m,j}^{-1}$ est soit négatif, soit un entier plus grand que un ($m'>m$) (cf., [5], théorème 4.1).

## 4. Décompositions-$\alpha$

On dit qu'une fonction caractéristique $g$ est un facteur-$\alpha$ d'une fonction caractéristique $f$ s'il existe des fonctions caractéristiques $h_1,\ldots,h_m$ et des constantes positives $\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m$ telles que

$$f=g^{\alpha}h_1^{\beta_1}\ldots h_m^{\beta_m}. \tag{2}$$

(2) est alors une décomposition-$\alpha$ de $f$ (nous dirons aussi, par abus de langage, que (2) est une décomposition-$\alpha$ de la probabilité $p$ de $f$).

Soient $A$ un ensemble dénombrable de nombres réels et $p$ une probabilité appartenant à $\mathfrak{P}_{(M)A}$, $M$ étant un des ensembles $Z$ ou $Q$. Si la fonction caractéristique $f$ de $p$ est analytique et sans zéros dans une bande $\{|\mathrm{Im}\, t|<\rho\}$ et si (2) est une décomposition-$\alpha$ de $f$, d'après un résultat d'Ostrovskiy ([11], Lemme 1), il existe des constantes réelles $c$ et $d_j$ telles que les probabilités $q$ et $r_j$ de $g$ et $h_j$ sont concentrées dans $(M)A+c$ et $(M)A+d_j$ respectivement. On en déduit l'existence de probabilités $q'$ et $r'_j$ appartenant à $\mathfrak{P}_{(M)A}$ et telles que leurs fonctions caractéristiques $g'$ et $h'_j$ vérifient la relation

$$f=(g')^{\alpha}(h'_1)^{\beta_1}\dots(h'_m)^{\beta_m}k, \tag{3}$$

où

$$k(t)=\exp\left(i\left(\alpha c+\sum_{j=1}^{m}\beta_j d_j\right)t\right).$$

Puisque $k$ peut toujours être considérée comme une puissance positive d'une fonction caractéristique correspondant à une probabilité dégénérée concentrée en un point de $(M)A$, on en déduit que (3) est une décomposition-$\alpha$ de $f$ en facteurs correspondants à des probabilités appartenant à $\mathfrak{P}_{(M)A}$ ($\mathfrak{P}_{(M)A}$ est fermé pour les décompositions-$\alpha$).

Soient maintenant $A$ et $A'$ deux ensembles dénombrables et rationnellement indépendants de nombres réels et $\varphi$ une bijection de $A$ sur $A'$. $\varphi$ induit un isomorphisme $\Phi$ de $\mathfrak{P}_{(M)A}$ sur $\mathfrak{P}_{(M)A'}$. Notons $\mathfrak{A}_{(M)A}$ l'ensemble des probabilités $p$ de $\mathfrak{P}_{(M)A}$ telles que les fonctions caractéristiques de $p$ et $\Phi(p)$ soient analytiques et sans zéros dans des bandes $\{|\mathrm{Im}\, t|<\rho\}$ et $\{|\mathrm{Im}\, t|<\rho'\}$ respectivement. Puisque $\Phi$ est continu pour la convergence faible dans $\mathfrak{P}_{(M)A}$ et $\mathfrak{P}_{(M)A'}$, on en déduit facilement que $\Phi$ conserve sur $\mathfrak{A}_{(M)A}$ les décompositions-$\alpha$. En particulier, si la fonction caractéristique $f$ d'une probabilité $p$ appartenant à $\mathfrak{A}_{(M)A}$ n'a pas de facteur-$\alpha$ indécomposable, il en est de même de la fonction caractéristique de $\Phi(p)$ et réciproquement.

Nous montrons maintenant le

**Théorème 4.** *Soit $f$ une fonction caractéristique admettant la représentation*

$$\log f(t)=\int(e^{itx}-1)\,\mu(dx),$$

*$\mu$ étant une mesure positive ou nulle, bornée et concentrée dans un ensemble $A$ dénombrable et rationnellement indépendant de nombres réels. Si $f$ est analytique et sans zéros dans une bande $\{|\mathrm{Im}\, t|<\rho\}$ $(\rho>0)$, alors $f$ n'a pas de facteur-$\alpha$ indécomposable.*

*Démonstration.* Lorsque $A$ est un ensemble borné de nombres réels, ce théorème est un cas particulier d'un résultat d'Ostrovskiy ([11], théorème 1). Compte-tenu de ce qui précède, le cas général se déduit de ce cas particulier en utilisant l'isomorphisme entre $\mathfrak{P}_{(M)A}$ et $\mathfrak{P}_{(M)A'}$, $A'$ étant un ensemble rationnellement indépendant, dénombrable et borné de nombres réels.

## 5. Remarques

1. Dans le cas où $A$ n'est pas borné, les théorèmes 1 à 3 sont particulièrement intéressants car ils fournissent des exemples de fonctions caractéristiques sans facteurs indécomposables et qui ne sont ni analytiques, ni valeurs au bord de fonctions analytiques.

2. Un autre intérêt des théorèmes 2 et 3 est leur caractère intrinsèque dans $R^n$, caractère que n'avaient pas les théorèmes 5.3, 6.3 et 7.3 de [1] et le théorème 2 de [3]. On peut maintenant donner des versions intrinsèques de ces théorèmes analogues à celles présentées ici:

**Théorème 5** (Théorème 6.3 de [1]). *Soit $f$ une fonction caractéristique des $n$ variables $t=(t_1, \ldots, t_n)$ admettant la représentation*

$$\log f(t) = -Q(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\varepsilon} \lambda_{m,\varepsilon} \left[\exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{m,j} (\sigma_j, t)\right) - 1\right],$$

*où*

a) *$Q$ est une forme quadratique positive ou nulle pour $t \in R^n$;*

b) *$\varepsilon_j = 0$ ou 1 et $\sum_{\varepsilon}$ indique la sommation sur les $2^n - 1$ valeurs non nulles de $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$;*

c) *$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ est une base de $R^n$;*

d) *les $a_{m,j}$ sont des réels tels que $a_{m',j} a_{m,j}^{-1}$ est soit négatif, soit un entier plus grand que un $(m' > m)$;*

e) *les $\lambda_{m,\varepsilon}$ sont des constantes positives ou nulles telles que*

$$\lambda_{m,\varepsilon} = O\left[\exp\left(-K \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{m,j}^2\right)\right] \qquad (m \to +\infty)$$

*pour une constante positive $K$. Alors $f$ n'a pas de facteur indécomposable.*

**Théorème 6** (Théorème 2 de [3]). *Soit $f$ une fonction caractéristique des $n$ variables $t=(t_1, \ldots, t_n)$ admettant la représentation*

$$\log f(t) = -Q(t) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\varepsilon} \lambda_{m,\varepsilon} \left[\exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{m,j} (\sigma_j, t)\right) - 1 - i \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{m,j} (\sigma_j, t)\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{m,j}^2\right)^{-1}\right],$$

*où, outre les conditions* a), b), c) *et* e) *du théorème précédent sont vérifiées les deux conditions suivantes:*

d′) *les $a_{m,j}$ sont des rationnels tels que $a_{m+1,j} a_{m,j}^{-1}$ est un entier plus grand que un;*

e′) $$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\varepsilon} \lambda_{m,\varepsilon} a_{m,j}^2 (1 + a_{m,j}^2)^{-1} < +\infty.$$

*Alors $f$ n'a pas de facteur indécomposable.*

3. Si on considère des probabilités définies sur un espace de Banach, les trois premiers théorèmes ont (par isomorphisme) des analogues dans ce contexte. Ces théorèmes sont les premiers résultats obtenus dans ce domaine (à part le résultat trivial sur la décomposition des lois normales).

## Références


1. Cuppens, R.: Décomposition des fonctions caractéristiques des vecteurs aléatoires. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **16**, 63–153 (1967).
2. – Sur un théorème de Paul Lévy. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **17**, 1–6 (1968).
3. – On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions of several variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **12**, 59–72 (1969).
4. – On the decomposition of infinitely divisible probability laws without normal factor. Pacific J. Math. **28**, 61–76 (1969).
5. – Application de la théorie des fonctions caractéristiques de plusieurs variables à l'étude de certains problèmes de décomposition des fonctions caractéristiques d'une variable. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **15**, 144–156 (1970).
6. – Quelques nouveaux résultats en arithmétique des lois de probabilité. Colloque de Clermont-Ferrand, 97–112 (1969). Paris: Editions du C.N.R.S. 1970.
7. – Ensembles indépendants et décomposition des fonctions caractéristiques. C. r. Acad. Sci., Paris Sér. A **272**, 1464–1466 (1971).
8. Lévy, P.: L'arithmétique des lois de probabilité et les produits finis de lois de Poisson. Actualités Scientifiques et Industrielles n° 736 (Colloque de Genève III) pp. 25–59. Paris: Hermann 1938.
9. Ostrovskiy, I.V.: Sur la décomposition des lois indéfiniment divisibles sans composante gaussienne [en russe]. Doklady Akad. Nauk SSSR **161**, 48–51 (1965).
10. – Sur la décomposition des lois indéfiniment divisibles de plusieurs variables sans composante gaussienne [en russe]. Zap. Meh.-Mat. Fak. Charkov. Mat. Obšč. **32**, 51–72 (1966).
11. – Sur quelques classes de lois indéfiniment divisibles [en russe]. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **34**, 923–944 (1970).
12. Raikov, D.A.: Sur la décomposition des lois de Gauss et de Poisson [en russe]. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **2**, 91–124 (1938).


Roger Cuppens
U.E.R. de Mathématiques
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
F-31 Toulouse
France

*(Reçu le 7 janvier 1971)*