Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 21, 135–146 (1972)

Die Randverteilungen der operator-stabilen Maße im 2-dimensionalen Raum

JOHANNES MICHALIČEK

Einleitung

X_n, $n=1,2,\dots$ sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Werten in R_k und der gemeinsamen Verteilung ν. Es sei weiter vorausgesetzt, daß lineare Operatoren A_n von R_k in sich und Vektoren $a_n \in R_k$ so gewählt werden können, daß die Verteilungen der Zufallsvariablen $S_n = A_n(X_1+\dots+X_n)+a_n$ gegen eine Verteilung $\mu \in P(R_k)$ konvergiert. (Unter $P(R_k)$ sei die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße bezeichnet und $\delta(b)$ sei das Einheitsmaß im Punkte $b\in R_k$.) Sharpe [6] hat in seiner Arbeit folgende Aussagen über die möglichen Grenzwerte μ, die er operator-stabile Maße nennt, erhalten:

Satz 1. *Wenn μ ein nicht-degeneriertes operator-stabiles Maß auf R_k ist, so gibt es einen linearen Operator B von R_k in sich, so daß*

$$\mu^{r*} = \{e^{\{\log r\} B} \mu\} * \delta(b(r)) \tag{0.1}$$

für $r>0$ und ein $b(r)\in R_k$ gilt. Dabei ist ein nicht-degeneriertes Maß, ein Maß dessen Träger nicht in einer Hyperebene des R_k liegt.

Da jedes stabile Maß unendlich-teilbar ist, ist die Bezeichnung μ^{r*} für $r>0$ sinnvoll.

Satz 2. *Jedes nicht-degenerierte operator-stabile Maß μ auf R_k kann in ein Produkt $\mu = \lambda_1 * \lambda_2$ von Maßen λ_i, die auf den Unterräumen R_l und R_m mit $R_l \oplus R_m = R_k$ konzentriert sind, zerlegt werden. Dabei ist λ_1 eine Normalverteilung auf R_l und λ_2 ein operator-stabiles Maß auf R_m, das keine normale Randverteilung besitzt.*

In dieser Arbeit soll die analytische Struktur der operator-stabilen Maße im 2-dimensionalen näher untersucht werden. Nach Satz 2 ist dies aber nur interessant, wenn keine Randverteilung eine Normalverteilung ist. Es scheint zweckmäßig, je nach den Spektraleigenschaften des Operators B zu unterscheiden. Im R_2 ergibt dies 4 Möglichkeiten.

Fall 1. B ist ein Vielfaches der Einheit.

Dieser Fall wurde bereits von Lèvy [4] und Rvačeva [5] behandelt und soll hier nicht zur Sprache kommen.

Fall 2. B hat zwei verschiedene reelle Eigenwerte q_1 und q_2.

Aus den Ergebnissen von Sharpe ist leicht zu sehen, daß dann $1/2 \leq q_1 < q_2 < \infty$ gelten muß.

Fall 3. B hat einen reellen Eigenwert q und auch nur einen 1-dimensionalen Eigenraum.

Auch hier gilt: $1/2 \leqq q < \infty$.

Fall 4. B hat zwei konjugiert komplexe Eigenwerte.

Es sollen nun einige Eigenschaften der 1-dimensionalen unendlich-teilbaren Verteilungen zitiert, oder wenn diese nicht bekannt sind, hergeleitet werden.

Einige Eigenschaften von 1-dimensionalen unendlich-teilbaren Verteilungen

Am Beginn dieses Kapitels seien einige bekannte Resultate angeführt; dann werden Definitionen gegeben und im dritten Abschnitt einige spezielle unendlich-teilbare Verteilungen charakterisiert.

a) Bekannte Resultate

Satz 1.1. *Die charakteristische Funktion φ einer unendlich-teilbaren Verteilung Φ hat die Form:*

$$\begin{aligned}\log\varphi(t) = -i\gamma t - \sigma^2 t^2/2 + \int_{-\infty}^{0}\left\{e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2}\right\} dM(u)\\ + \int_{0}^{\infty}\left\{e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2}\right\} dN(u),\end{aligned} \tag{1.1}$$

dabei sind die Funktionen M: $(-\infty, 0) \to R$ und N: $(0, \infty) \to R$ nicht abnehmend und haben die Eigenschaften:

a) $M(-\infty) = N(\infty) = 0$,

b) $\int_{-\varepsilon}^{0} u^2\, dM(u) + \int_{0}^{\varepsilon} u^2\, dN(u) < \infty$.

Außerdem ist $-\infty < \gamma < \infty$ und $\sigma \geqq 0$.

Satz 1.2. *Für die schwache Konvergenz unendlich teilbarer Verteilungsfunktionen F_n gegen eine Grenzverteilung F ist notwendig und hinreichend, daß für $n \to \infty$*

a) *in den Stetigkeitspunkten der Funktionen M und N $M_n(u) \to M(u)$ und $N_n(u) \to N(u)$,*

b) $\gamma_n \to \gamma$,

c) $$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim}\left\{\int_{-\varepsilon}^{0} u^2\, dM_n(u) + \sigma_n^2 + \int_{0}^{\varepsilon} u^2\, dN_n(u)\right\} =\\ &\lim_{\varepsilon\to 0}\underline{\lim}\left\{\int_{-\varepsilon}^{0} u^2\, dM_n(u) + \sigma_n^2 + \int_{0}^{\varepsilon} u^2\, dN_n(u)\right\} = \sigma^2,\end{aligned} \tag{1.2}$$

wobei M_n, N_n, M, N und die Konstanten σ_n, σ, γ_n, γ durch die Formeln für die charakteristischen Funktionen der Verteilungen F_n und F gegeben sind (s. (1.1)).

Da die stabilen Maße im 1-dimensionalen auch unendlich-teilbar sind, so lassen sie sich in Form (1.1) darstellen. Dazu gehören folgende Bestimmungsstücke:

α	$M(u)$	$N(u)$	σ
$0<\alpha<2$	$c_1/\lvert u\rvert^\alpha$	$-c_2/\lvert u\rvert^\alpha$	0
$\alpha=2$	0	0	>0

$c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$, $c_1 + c_2 > 0$.

Durch Errechnung der Integrale erhält man dann folgende Darstellung der stabilen Maße im 1-dimensionalen.

Für $\alpha \neq 1$ und $\alpha \neq 2$

$$\log \varphi(t) = -i\gamma' t + c|t|^\alpha \left\{1 - i\beta \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \pi\alpha/2\right\}, \tag{1.3}$$

wobei für $0<\alpha<1$

$$\beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \quad \text{und} \quad c = (c_1 + c_2) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \int_0^\infty (\{e^{-y} - 1\}/y^{1+\alpha})\, dy$$

und für $1<\alpha<2$

$$\beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \quad \text{und} \quad c = (c_1 + c_2) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \int_0^\infty (\{e^{-y} - 1 + y\}/y^{1+\alpha})\, dy.$$

Für $\alpha = 1$

$$\log \varphi(t) = -i\gamma' t - c|t| \left\{1 - i\beta \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \log|t|\right\}$$

mit $c = (c_1 + c_2)\pi/2$ und $\beta = (c_2 - c_1)/(c_1 + c_2)$.

Für $\alpha = 2$

$$\log \varphi(t) = -i\gamma' t - \sigma^2 t^2/2.$$

Ab nun sollen α der Exponent und c_1, c_2 die Koeffizienten einer stabilen Verteilung genannt werden. Ein stabiles Maß ϕ heißt zentriert, falls es zu jedem n ein A_n gibt, so daß $\phi^{n*}(x) = \phi(x \cdot A_n)$.

Satz 1.3. *Jede stabile Verteilung mit Exponent $\alpha \neq 1$ kann so verschoben werden, daß sie zentriert ist. Ist $\alpha = 1$, so ist für $c_1 = c_2$ jede Verteilung zentriert und für $c_1 \neq c_2$ keine Verteilung zentriert.*

Bemerkung. Ist $\alpha > 1$ $(\alpha < 1)$, so muß für eine zentrierte stabile Verteilung $d \log \varphi(t)/dt|_0 = 0$ $(d \log \varphi(t)/dt|_\infty = 0)$ gelten.

b) Einige Definitionen

In der Literatur wird der Anziehungsbereich für stabile Verteilungen wie folgt definiert:

Eine Verteilung F liegt im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung ϕ, falls es Zahlen A_n und a_n gibt, so daß

$$\lim_{n\to\infty} F^{n*}(x \cdot A_n + \tilde{a}_n) = \phi(x). \tag{1.4}$$

(Es soll ab nun immer $\tilde{a}_n$ für $a_n A_n$ gesetzt werden.)

Ähnlich wird der normale Anziehungsbereich definiert:

Eine Verteilung F liegt im normalen Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung ϕ, falls in (1.4) $A_n = n^{1/\alpha}$ gewählt werden kann und $\tilde{a}_n$ die Gleichung $\phi^{n*}(x n^{1/\alpha} + \tilde{a}_n) = \phi(x)$ erfüllt.

In ähnlicher Weise können nun zusätzlich folgende Definitionen gegeben werden:

Definition 1. Eine Verteilung F liegt im logarithmischen Anziehungsbereich, falls in (1.4) $A_n = n^{1/\alpha} \log n^{1/\alpha}$ gewählt werden kann und $\tilde{a}_n$ die Gleichung $\phi^{n*}(x n^{1/\alpha} + \tilde{a}_n) = \phi(x)$ erfüllt.

Für die weiteren Überlegungen in dieser Arbeit ist es wichtig zu wissen, ob es unendlich-teilbare Verteilungen F gibt, so daß der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} F^{1/n*}(x \cdot A'_n + \tilde{a}'_n) = \phi(x)$ für irgend eine Wahl von A'_n und a'_n existiert und nicht trivial ist. Man zeigt ähnlich, wie für Potenzen der Verteilung F, daß ϕ nur eine stabile Verteilung sein kann. Der Beweis sei dem Leser überlassen. Es erscheint nun sinnvoll, folgende weitere Definitionen zu geben.

Definition 2. Eine unendlich-teilbare Verteilung F liegt im negativen Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung ϕ, falls es Zahlen A'_n und $\tilde{a}'_n$ gibt, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} F^{1/n*}(x \cdot A'_n + \tilde{a}'_n) = \phi(x)$.

Definition 3. Eine Verteilung F liegt im normalen negativen Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung ϕ, falls $\lim\limits_{n\to\infty} F^{1/n*}(x n^{-1/\alpha} + \tilde{a}'_n) = \phi(x)$ und $\tilde{a}'_n$ der Gleichung $\phi^{1/n*}(x n^{-1/\alpha} + \tilde{a}'_n) = \phi(x)$ genügt.

Definition 4. Eine unendlich-teilbare Verteilung F liegt im logarithmischen negativen Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung ϕ, falls

$$\lim_{n\to\infty} F_-^{1/n}(x n^{-1/\alpha} \log n^{1/\alpha} + \tilde{a}'_n) = \phi(x)$$

und $\tilde{a}'_n$ der Gleichung $\phi^{1/n*}(x n^{-1/\alpha} + \tilde{a}'_n) = \phi(x)$ genügt.

Definition 5. Eine unendlich-teilbare Verteilung ϕ ist q-stabil, falls es zu einer Zahl $q > 1$ Zahlen $A_q > 0$ und $\tilde{a}_q$ gibt, so daß

$$\phi^{q*}(A_q x + \tilde{a}_q) = \phi_-\ (x)$$

(F_- bezeichne die um den Nullpunkt gespiegelte Verteilung F).

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels sollen alle jene unendlich-teilbare Verteilungen, die in diesen Anziehungsbereichen liegen oder q-stabil sind, charakterisiert werden.

c) Die normalen und logarithmischen Anziehungsbereiche und die q-stabilen Verteilungen

Satz 1.4. *Eine unendlich-teilbare Verteilung F liegt genau dann im normalen Anziehungsbereich einer zentrierten stabilen Verteilung mit Exponent $\alpha_1 \neq 1$ und Koeffizienten c_1 und c_2 und im negativen normalen Anziehungsbereich einer zentrierten stabilen Verteilung mit Exponent $\alpha_2 \neq 1$ mit $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2$ und Koeffizienten $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$, falls in der Darstellung* (1.1) *der unendlich-teilbaren Verteilungen*

a) $M(u) = L(u)\{c_1/|u|^{\alpha_1} + \bar{c}_1/|u|^{\alpha_2}\}$ $u < 0$,

$N(u) = -L(u)\{c_2/|u|^{\alpha_1} + \bar{c}_2/|u|^{\alpha_2}\}$ $u > 0$

mit $\lim\limits_{|u|\to 0} L(u) = 1$ *und* $\lim\limits_{|u|\to\infty} L(u) = 1$.

b) $\sigma = 0$.

c) *Ist* $\alpha_1 > 1$, *dann ist*

$$\gamma = \int_{-\infty}^{0} \left\{u - \frac{u}{1+u^2}\right\} dM(u) + \int_{0}^{\infty} \left\{u - \frac{u}{1+u^2}\right\} dN(u),$$

ist $\alpha_2 < 1$, *dann ist*

$$\gamma = \int_{-\infty}^{0} \frac{u}{1+u^2}\, dM(u) + \int_{0}^{\infty} \frac{u}{1+u^2}\, dN(u),$$

in allen anderen Fällen ist γ *beliebig.*

Bemerkung. Natürlich müssen die Funktionen M und N monoton sein.

Satz 1.4a. *Ist* $\alpha_1 = 1$ $(\alpha_2 = 1)$, *so muß zusätzlich*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\varepsilon} \{(L(u) - L(-u))/u\}\, du = k_1, \qquad \left(\lim_{\kappa \to \infty} \int_{\kappa}^{\infty} \{(L(u) - L(-u))/u\}\, du = k_2\right)$$

vorausgesetzt werden $(|k_i| < \infty)$.

Man beachte, daß dann $c_1 = c_2$ bzw. $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$ gelten muß.

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, daß jede Verteilung F, die die Bedingungen des Satzes erfüllt, in den entsprechenden Anziehungsbereichen liegt. Da die charakteristische Funktion der Verteilung $F^{n*}(x A_n + \tilde{a}_n)$ $f^n(t A_n^{-1})\, e^{-it a_n}$ ist, muß gezeigt werden, daß

$$\lim_{n \to \infty} f^n(t A_n^{-1})\, e^{-it a_n} = \varphi_1(t) \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} f^{1/n}(t A_n'^{-1})\, e^{-it a_n} = \varphi_2(t)$$

ist, wobei φ_i die charakteristischen Funktionen der entsprechenden stabilen Verteilungen sind. Man erhält durch Substitutionen $u = n^{1/\alpha_1} z$ mit $A_n = n^{1/\alpha_1}$ aus (1.1)

$$\begin{aligned}
\log f^n(t A_n^{-1})\, e^{-it a_n} = {} & i\, n^{1-1/\alpha_1} \gamma\, t - i\, a_n t + n \int_{-\infty}^{0} \{e^{itz} - 1 - it\, z/(1+z^2)\}\, dM(z\, n^{1/\alpha_1}) \\
& + n \int_0^{\infty} \{e^{itz} - 1 + it\, z/(1+z^2)\}\, dN(z\, n^{1/\alpha_1}) \\
& - n^{1-1/\alpha_1} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{itu}{1+u^2 n^{-2/\alpha_1}} - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(u) \right. \\
& \left. + \int_0^{\infty} \left(\frac{itu}{1+u^2 n^{-2/\alpha_1}} - \frac{itu}{1+u^2} \right) dN(u) \right\}.
\end{aligned}$$

Da die stabile Verteilung zentriert sein soll, muß für $\alpha \neq 1$ $a_n = 0$ gewählt werden können. Es folgt:

$$\lim_{n \to \infty} n\, M(z\, n^{1/\alpha_1}) = \lim_{n \to \infty} n\, L(z\, n^{1/\alpha_1}) \left\{ \frac{c_1}{|z|^{\alpha_1} n} + \frac{\bar{c}_1}{|z|^{\alpha_2} n^{\alpha_2/\alpha_1}} \right\} = \frac{c_1}{|z|^{\alpha_1}}$$

$$\lim_{n \to \infty} n\, N(z\, n^{1/\alpha_1}) = -\lim_{n \to \infty} n\, L(z\, n^{1/\alpha_1}) \left\{ \frac{c_2}{|z|^{\alpha_1} n} + \frac{\bar{c}_2}{|z|^{\alpha_2} n^{\alpha_2/\alpha_1}} \right\} = -\frac{c_2}{|z|^{\alpha_1}}.$$

Außerdem gilt, wenn für $\alpha_1 > 1$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{0} \{u - u/(1+u^2)\}\, dM(u) + \int_0^{\infty} \{u - u/(1+u^2)\}\, dN(u)$$

gewählt wird:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1-1/\alpha_1}\left\{\gamma - \int_{-\infty}^{0}\left\{\frac{u}{1+u^2 n^{-2/\alpha_1}} - \frac{u}{1+u^2}\right\} dM(u) - \int_{0}^{\infty}\left\{\frac{u}{1+u^2 n^{-2/\alpha_1}} - \frac{u}{1+u^2}\right\} dN(u) = \gamma\right\}.$$

Für $\alpha_1 < 1$ kann γ beliebig gewählt werden.

Dies sind die Voraussetzungen des Satzes 1.2 w.z.z.w. Ebenso zeigt man die Aussage über den negativen Anziehungsbereich.

Ist nun $\alpha_1 = 1$, so ist a_n bis auf eine Konstante b gegeben durch:

$$a_n = -\int_{-\infty}^{0}\left\{\frac{u}{1+u^2 n^{-2}} - \frac{u}{1+u^2}\right\} dM(u) - \int_{0}^{\infty}\left\{\frac{u}{1+u^2 n^{-2}} - \frac{u}{1+u^2}\right\} dN(u) + b$$

mit $|b| < \infty$. Andererseits muß a_n wegen der Zentriertheit von φ_1 gegen eine Konstante konvergieren. Dies gewährleistet aber Bedingung (1.6). Ähnlich schließt man für $\alpha_2 = 1$.

Umkehrung: Da $c_1/|u|^{\alpha_1} + \bar{c}_1/|u|^{\alpha_2} \neq 0$ ist, läßt sich jede unendlich-teilbare Verteilung in der Form (1.5) schreiben und es müssen nur die Bedingungen für die Funktion L bzw. für γ nachgeprüft werden. Es sei nun angenommen, daß es eine Folge $\{u_i\}$ gäbe, mit $u_i \to \infty$ und $L(u_i) \to l \neq 1$. Dann gibt es eine ganzzahlige Folge $\{n_i\}$, so daß $s_i = u_i/n_i^{1/\alpha_1} \to 1$ und daher gilt: $L(s_i n_i^{1/\alpha_1}) \to l$ und $n_i N(s_i n_i^{1/\alpha_1}) \to l c_2$. Da aber die Grenzfunktion $c_2/|u|^{\alpha_1}$ stetig und monoton ist, ist die Konvergenz gleichmäßig im Punkt 1. Dies ist aber ein Widerspruch, da einerseits $n_i N(n_i^{1/\alpha_1}) \to c_2$ und andererseits $n_i N(s_i n_i^{1/\alpha_1}) \to l c_2$ mit $\lim s_i = 1$ und $l \neq 1$ gilt. Die Zusatzbehauptung im Falle $\alpha_1 = 1$ oder $\alpha_2 = 1$ ergibt sich direkt aus Bedingung b) des Satzes 1.2.

Satz 1.5. *Eine unendlich-teilbare Verteilung F liegt genau dann im logarithmischen und im negativ-logarithmischen Anziehungsbereich einer zentrierten stabilen Verteilung ϕ mit Exponent $\alpha \neq 1$ $\alpha < 2$ und Koeffizienten c_1 und c_2, falls in der Darstellung für die charakteristischen Funktionen der unendlich-teilbaren Verteilungen*

a) $$M(u) = \frac{c_1}{|u|^{\alpha}} L(u) |\log|u||^{\alpha}$$

$$N(u) = -\frac{c_2}{|u|^{\alpha}} L(u) |\log|u||^{\alpha}$$

mit $\lim\limits_{|u|\to\infty} L(u) = 1$ *und* $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} L(u) = c_2/c_1$ *und* $\lim\limits_{\substack{n\to 0\\ u<0}} L(u) = c_1/c_2$.

b) $\sigma = 0$.

c) *Ist* $\alpha > 1$, *dann ist*

$$\gamma = \int_{-\infty}^{0}\left\{u - \frac{u}{1+u^2}\right\} dM(u) + \int_{0}^{\infty}\left\{u - \frac{u}{1+u^2}\right\} dN(u),$$

ist $\alpha<1$, dann ist

$$\gamma=\int_{-\infty}^{0}\frac{u}{1+u^2}\,dM(u)+\int_{0}^{\infty}\frac{u}{1+u^2}\,dN(u).$$

Ist $\alpha=1$, so muß zusätzlich

$$\lim_{\kappa\to\infty}\int_{\kappa}^{\infty}\{L(u)-L(-u)\}\frac{|\log|u||}{|u|}\,du=k_1 \qquad \textit{mit } |k_1|<\infty$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\varepsilon}\{L(u)-L(-u)\}\frac{|\log|u||}{|u|}\,du=k_2 \qquad \textit{mit } |k_2|<\infty$$

vorausgesetzt werden ($c_1=c_2$).

Der *Beweis* dieses Satzes kann direkt vom Beweis des vorhergehenden Satzes übernommen werden, so daß er hier unterbleibt.

Satz 1.6. *Eine unendlich-teilbare Verteilung F ist genau dann q-stabil, falls:*

$$\text{a)}\quad M(u)=L(\log|u| \bmod \log r^2)\, q^{-2\left[\frac{\log|u|}{\log r^2}\right]} \qquad u<0$$
$$N(u)=-q\,M(-u/r) \qquad u>0,$$

wobei $r>\sqrt{q}$ und L eine monotone Funktion auf dem Intervall $(0,r^2)$ ist und $q^2L(0)\geqq L(r^2)$ gilt. In den Punkten $\log|u|\equiv 0 \bmod \log r^2$ sei die Funktion M bzw. N rechtsseitig stetig gemacht. Hierbei bedeutet $\left[\frac{\log|u|}{\log r^2}\right]$ die nächst kleinere ganze Zahl an $\frac{\log|u|}{\log r^2}$.

b) $\sigma=0$,

c) γ *beliebig*

oder

a) $M(u)=0$ *und* $N(u)=0$,

b) $\sigma>0$,

c) γ *beliebig.*

Beweis. Nach der Definition ist die Verteilung genau dann q-stabil, wenn es Zahlen $r>0$ und $a>0$ gibt, so daß $f^q(-tr)\,e^{-ita}=f(t)$ gilt, d.h.

$$\begin{aligned}
-q\,i\gamma\,t\,r-q\,\sigma^2t^2r^2/2-\int_{-\infty}^{0}&\left\{e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right\}q\,d(-N(-u/r))\\
&+\int_{0}^{\infty}\left\{e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right\}q\,d(-M(-u/r))\\
+i\gamma\,q\,t-i\,a\,t=i\gamma\,t+\int_{-\infty}^{0}&\left\{e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right\}dM(u)\\
&+\int_{0}^{\infty}\left\{e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right\}dN(u).
\end{aligned}$$

Daraus folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung (1.1), wenn $\sigma=0$ ist,

$$N(u)=-q\,M(-u/r).$$

Es gilt aber auch $f^{2q}(t\,r^2)\,e^{it\tilde{a}}=f(t)$, woraus folgt, daß N die Funktionalgleichung

$$q^2\,N(u/r^2)=N(u) \qquad \text{für } u>0$$

erfüllt. Durch die Transformation $N(u)=\tilde{N}(\log u)$ verändert sich die Funktionalgleichung in

$$q^2\,\tilde{N}(\log u-\log r^2)=\tilde{N}(\log u),$$

deren Lösung sich mit $L(\log u \bmod r^2)\,q^{-2\left[\frac{\log u}{\log r^2}\right]}$ angeben läßt. Dabei ist L auf dem Intervall $(\log r^2, 1)$ monoton und $q^2\,L(1)<L(\log r^2)$. Aus Bedingung c) des Satzes 1.2 ergibt sich, daß $r>\sqrt{q}$ sein muß. Die anderen Aussagen des Satzes sind trivial.

Definition. Unter $\alpha=\dfrac{\log q}{\log r}$ versteht man den Exponenten der q-stabilen Verteilung.

Satz 1.7. *Jede q-stabile Verteilung kann, wenn $\alpha\neq 1$ ist, zentriert werden, d.h. in der Definition kann $a_q=0$ gesetzt werden.*

Beweis. Man setze:

$$\gamma=\int_{-\infty}^{0}\left\{u-\frac{u}{1+u^2}\right\}dM(u)+\int_{0}^{\infty}\left\{u-\frac{u}{1+u^2}\right\}dN(u) \qquad \text{für } \alpha>1$$

$$\gamma=\int_{-\infty}^{0}\frac{u}{1+u^2}\,dM(u)+\int_{0}^{\infty}\frac{u}{1+u^2}\,dN(u) \qquad \text{für } \alpha<1.$$

Die Gestalt der operator-stabilen Verteilungen im R_2

Wie am Anfang erwähnt, scheint es zweckmäßig, in 4 Fälle zu unterscheiden, wobei der erste Fall, da er die gewöhnlichen stabilen Verteilungen beschreibt, für diese Arbeit uninteressant ist (s. [4], [5]).

Fall 2. B hat 2 verschiedene reelle Eigenwerte. O.B.d.A. kann angenommen werden, daß die Eigenvektoren die Einheitsvektoren sind. Nach dem Ergebnis von Sharpe haben die operator-stabilen Verteilungen folgende Eigenschaft:

$$\phi^{r*}=e^{\{\log r B\}}\,\phi*\delta\big(b(r)\big),$$

wobei B im Fall 2 die Gestalt $\begin{pmatrix}-1/\alpha_1 & 0\\ 0 & -1/\alpha_2\end{pmatrix}$ hat und $\alpha_1<\alpha_2$ ist. Bei Übergang zu den charakteristischen Funktionen gilt:

$$\varphi^r(t_1,t_2)=\varphi_1(t_1\,r^{1/\alpha_1},\,t_2\,r^{1/\alpha_2})\,e^{-it_1b_1(r)-it_2b_2(r)}.$$

Daraus erkennt man, daß $\varphi(\cdot,0)$ und $\varphi(0,\cdot)$ die charakteristischen Funktionen der Randverteilungen, stabile Verteilungen ϕ_1, ϕ_2 mit den Exponenten α_1 bzw. α_2, sind. Es soll $0<\alpha_1<\alpha_2<2$ gesetzt werden, da Satz 2, der bereits von Sharpe bewiesen wurde, ähnliches für $\alpha_2=2$ aussagt.

Satz 2.1. *Die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung, die Fall 2 angehört, hat bis auf eine lineare Transformation und eine Multiplikation mit* $e^{it_1\gamma_1+it_2\gamma_2}$ *die folgende Gestalt:*

a) *Ist* $\alpha_i \neq 1$

$$\varphi(t_1,t_2)=\begin{cases}\exp\{\log(\psi_1(t_1/t_2)^{\alpha_2/(\alpha_1-\alpha_2)}t_1)(t_1/t_2)^{\alpha_1\alpha_2/(\alpha_2-\alpha_1)} & \textit{für } t_1/t_2>0\\ \exp\{\log(\psi_2(-t_1/t_2)^{\alpha_2/(\alpha_1-\alpha_2)}t_1)(-t_1/t_2)^{\alpha_1\alpha_2/(\alpha_2-\alpha_1)} & \textit{für } t_1/t_2<0\\ \exp\{-|t_1|^{\alpha_1}l_1\} & \textit{für } t_2=0\\ \exp\{-|t_2|^{\alpha_2}l_2\} & \textit{für } t_1=0,\end{cases}\tag{2.1}$$

für $\alpha_1=1$

$$\varphi(t_1,t_2)=\varphi^*(t_1,t_2)\exp\{-i\,t_1(c_1+c_2)\,2\log(|t_1|)/(c_1+c_2)\,\pi\}.$$

Dabei ist φ^* *die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung mit* $\varphi^*(t_1,0)=e^{-|t_1|(c_1+c_2)}$ *und hat die Bauart* (2.1) *für* $\alpha_1=1$. *Für* $\alpha_2=1$ *wird ähnlich vorgegangen. Die Funktionen* ψ_i *sind unendlich-teilbare Verteilungen, die im normalen Anziehungsbereich der zentrierten stabilen Verteilung* ϕ_1, *bzw. im negativen normalen Anziehungsbereich der zentrierten stabilen Verteilung* ϕ_2 *liegen. Dabei hat die Verteilung* $\phi_1(\phi_2)$ *die charakteristische Funktion* $\varphi(t_1,0)$ $(\varphi(0,t_2))$.

Beweis. Wenn $\alpha_i \neq 1$ ist, kann angenommen werden, daß die beiden stabilen Verteilungen ϕ_1 und ϕ_2 bereits zentriert sind. Es sei nun $t_1/t_2>0$ und $\psi_1(u):=\varphi(u,u)$. Dann folgt aus Gl. (0.1)

$$\psi_1^r(u)=\varphi^r(u,u)=\varphi(u\,r^{1/\alpha_1},u\,r^{1/\alpha_2}).$$

Bei Einsetzen für $u(t_1/t_2)^{\alpha_2/(\alpha_1-\alpha_2)}t_1$ und $r=(t_1/t_2)^{\alpha_1\alpha_2/(\alpha_2-\alpha_1)}$ erhält man das gewünschte Resultat. Ebenso geht man vor, wenn $t_1/t_2<0$ ist. Dann setzt man $\psi_2(u):=\varphi(u,-u)$. Es ist also noch nachzuprüfen, daß die Verteilungen ψ_i in den Anziehungsbereichen liegen. Dies folgt aus der Stetigkeit der charakteristischen Funktionen, denn

$$\lim_{r\to\infty}\psi_1^r(u\,r^{-1/\alpha_1})=\varphi(u,u\,r^{1/\alpha_2-1/\alpha_1})=\varphi(u,0),\qquad \text{da } \alpha_2>\alpha_1$$

und

$$\lim_{r\to 0}\psi_1^r(u\,r^{-1/\alpha_2})=\varphi(u\,r^{1/\alpha_1-1/\alpha_2},u)=\varphi(0,u).$$

Der Fall $\alpha_1=1$ oder $\alpha_2=1$ hat die Schwierigkeit, daß die stabilen Verteilungen nicht zentriert werden können. Dies wird dadurch gelöst, daß die 2-dimensionale charakteristische Funktion φ mit dem Faktor

$$m(t_1):=\exp\{i\,t_1(c_1+c_2)\,2\log(|t_1|)/(c_1+c_2)\,\pi\}$$

multipliziert wird. Dadurch ändert sich an der Stabilität nichts, jedoch ist dann $\varphi(0,t_1)\,m(t_1)$ eine zentrierte stabile charakteristische Funktion. Ebenso wird bei $\alpha_2=1$ vorgegangen.

Fall 3. Durch den Satz von Jordan ist es möglich, jede Matrix in eine Dreiecksmatrix überzuführen. O.B.d.A. kann also für

$$B=\begin{pmatrix}-1/\alpha & 0\\ -c_1\,1/\alpha & -1/\alpha\end{pmatrix}$$

gesetzt werden, d.h. die Matrizen $e^{\{\log r\}B}$ haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix} r^{-1/\alpha} & , \quad 0 \\ r^{-1/\alpha} c_1^* \log r^{-1/\alpha}, & r^{-1/\alpha} \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet für die charakteristischen Funktionen:

$$\varphi^r(t_1, t_2) = \varphi(t_1 r^{1/\alpha}, c_1^* t_1 r^{1/\alpha} \log r^{1/\alpha} + t_2 r^{1/\alpha}).$$

Wenn $t_1 = 0$, so gilt:

$$\varphi^r(0, t_2) = \varphi(0, t_2 r^{1/\alpha}).$$

Also ist in diesem Fall ϕ_1 stabil. Man kann nun $c_1^* = 1$ wählen, da durch die Transformation

$$A \to T^{-1} A T \quad \text{mit } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1^* \end{pmatrix}$$

c_1^* wegfällt.

Satz 2.2. *Die charakteristische Funktion einer operator-stabilen Verteilung, die Fall 3 angehört, hat bis auf eine lineare Transformation und einer Multiplikation mit $e^{it_1\gamma_1 + it_2\gamma_2}$ die folgende Gestalt:*

a) *Ist $\alpha \neq 1$:*

$$\varphi(t_1, t_2) = \begin{cases} \exp\{(\log(\psi(t_1 \exp(-t_2/t_1)))) \exp(\alpha t_2/t_1)\} & \textit{für } t_1 \neq 0 \\ \exp\{-|t_2|^\alpha l_2\} & \textit{für } t_1 = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

b) *Ist $\alpha = 1$, so hat φ die Gestalt:*

$$\varphi(t_1, t_2) = \varphi^*(t_1, t_2) \exp\{i t_2 (c_1 + c_2) 2 \log(|t_2|)/(c_1 + c_2) \pi\}.$$

Dabei ist die Funktion ψ eine unendlich teilbare charakteristische Funktion, die im logarithmischen und im negativ-logarithmischen Anziehungsbereich der zentrierten stabilen Verteilung ϕ_1 liegt. (φ^* hat dieselbe Bauart für $\alpha = 1$ wie (2.2).)

Beweis. Wenn $\alpha \neq 1$ ist, so kann o.B.d.A. angenommen werden, daß ϕ_1 zentriert ist. Es sei nun wieder $\psi(u) := \varphi(u, 0)$ gesetzt; dann folgt aus Gl. (0.1)

$$\psi^r(u) = \varphi^r(u, 0) = \varphi(u r^{1/\alpha}, u r^{1/\alpha} \log r^{1/\alpha})$$

durch Einsetzen für $u = t_1 \exp(t_2/t_1)$ und $r = \exp(-\alpha t_2/t_1)$ das gewünschte Resultat. Aus der Stetigkeit der charakteristischen Funktion φ ergibt sich

$$\lim_{r \to \infty} \psi^r(u r^{1/\alpha}/\log r^{1/\alpha}) = \varphi(u/\log r^{1/\alpha}, u) = \varphi(0, u)$$

$$\lim_{r \to 0} \psi^r(u r^{-1/\alpha}/-\log r^{1/\alpha}) = \varphi(u/-\log r^{1/\alpha}, -u) = \varphi(0, -u),$$

woraus man sieht, daß ψ in den gewünschten Anziehungsbereichen liegt. Im Fall $\alpha = 1$ ist wie im vorhergehenden Fall noch ein Faktor $e^{i\gamma_r t}$ zu multiplizieren.

Fall 4. Es sei $s = (s_1, s_2)$ ein Eigenvektor der Länge 1 von B. Dann hat die Matrix

$$B^* = T B T^{-1} \quad \text{mit } T = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} s_1, & \operatorname{Re} s_2 \\ \operatorname{Im} s_1, & \operatorname{Im} s_2 \end{pmatrix}$$

die Vektoren $(1, i)$ bzw. $(1, -i)$ als Eigenvektoren. Durch diese lineare Transformation wird B^* das Vielfache einer Drehungsmatrix. Dadurch scheint es zweckmäßig, folgende Substitution durchzuführen: $t_1 = l\cos\rho$, $t_2 = l\sin\rho$.

Satz 2.3. *Die charakteristische Funktion einer Verteilung, die Fall 4 angehört, hat bis auf eine lineare Transformation und einer Multiplikation mit* $e^{it_1\gamma_1 + it_2\gamma_2}$ *die Gestalt:*

$$\varphi(t_1, t_2) = \begin{cases} \exp\{\log(\psi({}_{+}\sqrt{t_1^2+t_2^2}\exp\{-\operatorname{arctg}(t_2/t_1)\}))\exp\{\operatorname{arctg}(t_2/t_1)\}\} \\ \qquad \text{für } t_2 > 0 \\ \exp\{\log(\psi({}_{-}\sqrt{t_1^2+t_2^2}\exp\{-\operatorname{arctg}(t_2/t_1)\}))\exp\{\operatorname{arctg}(t_2/t_1)\}\} \\ \qquad \text{für } t_2 < 0 \\ \psi(t_1) \quad \text{für } t_2 = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Dabei ist ψ eine charakteristische Funktion einer q-stabilen Verteilung und α deren Exponent.

Beweis. Durch die Substitution $t_1 = l\cos\rho$, $t_2 = l\sin\rho$ und bei Übergang zu den charakteristischen Funktionen wird der lineare Operator $e^{\{\log r\}B}$ übergeführt in T_r

$$T_r = \begin{cases} l \to l\, r^{1/\alpha} \\ \rho \to \rho + c\log r^{1/\alpha}. \end{cases}$$

O.B.d.A. kann angenommen werden, daß $c=1$ ist. Aus Gl. (0.1) und durch Einsetzen von $\varphi'(l,\rho) := \varphi(t_1, t_2)$ und $\bar\psi(u) := \varphi'(u, 0)$ erhält man

$$\bar\psi^r(u) = \varphi'^r(u, 0) = \varphi'(u\, r^{1/\alpha}, \log r^{1/\alpha}).$$

Setzt man $r = e^{\alpha\rho}$ und $u = l\, e^{-\rho}$, so ergibt sich

$$\varphi'(l, \rho) = \bar\psi\, e^{\alpha\rho}(l\, e^{-\rho}) \qquad \text{für } l \geqq 0 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \rho \leqq 2\pi.$$

Ist

$$\psi(u) = \begin{cases} \bar\psi(u) & u \geqq 0 \\ \varphi(-u, \pi) & u < 0, \end{cases}$$

so erhält man aus der Eigenschaft $\varphi(u, 0) = \varphi(u, 2\pi)$ für ψ

$$\psi^{r_0}(u\, e^{-r_0/\alpha}) = \psi(-u)$$

$$\psi^{2r_0}(u\, e^{-2r_0/\alpha}) = \psi(u),$$

wobei $e^{\pi\alpha} = r_0$ ist. O.B.d.A. soll ψ zentriert angenommen werden. Geht man nun auf die Koordinaten t_1 bzw. t_2 zurück, ergibt sich das gewünschte Resultat.

Bemerkung: Man sieht leicht, daß für $\alpha = 1$ diesmal keine Multiplikation mit einer Funktion $e^{i\gamma_r(t)}$, wie in den vorhergehenden Fällen, nötig ist.

Satz 2.3 charakterisiert die stabilen Verteilungen im Komplexen, wenn man in der Definition für A_n und a_n komplexe Zahlen nimmt.

Abschließende Bemerkungen

Die Bedingungen über die Randverteilungen sind natürlich nur notwendig, aber bei weitem nicht hinreichend. Es ist anzunehmen, daß bezüglich der Randverteilungen noch zusätzliche Bedingungen gelten müssen. Diese können implizit aus der Darstellung der unendlich-teilbaren Verteilungen im 2-dimensionalen Raum entnommen werden.

Der Satz von Sharpe kann natürlich auf n-Dimensionen verallgemeinert werden. Auch die Unterteilung der einzelnen Fälle nach Spektraleigenschaften kann leicht durchgeführt werden. Jedoch wird es wegen der Vielzahl der Möglichkeiten nicht zweckmäßig sein, diese Methode für alle Fälle durchzuführen.

Literatur

1. Billingsley, P.: Convergence of types in k-space. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **5**, 175–179 (1966).
2. Gnedenko, B.W., Komogorow, A.N.: Limit distributions for sums of independent random variables. Cambridge: Addison Wesley.
3. Karamata, J.: Sur un mode de croissance reguliere des fonctions. Mathematica **4**, 38–53 (1930).
4. Levy, P.: Theorie de l'addition des variables aleatoires. Paris: Gauthier-Villars 1937.
5. Rvačeva, E.L.: On domains of attraction of multidimensional distributions. Select. Trans. math. Statist. Probab. **2**, 183–205 (1962).
6. Sharpe, M.: Operator-stable probability distributions on vector spaces. Trans. Amer. math. Soc. **136**, 51–65 (1969).

Dr. Johannes Michaliček
Institut für Mathematische Stochastik
der Universität
D-2000 Hamburg 13
Rothenbaumchaussee 45
Deutschland

(Eingegangen am 6. Februar 1969/4. Dezember 1970)