Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 21, 96–108 (1972)

Die asymptotische Verteilung von mehrfachen Koinzidenzen

R. Hafner

Zusammenfassung

Ist U eine symmetrische Menge des R_m (i.e. $-U=U\subset R_m$), so heißen zwei Punkte $x_1, x_2 \in R_m$ U-koinzident falls $x_1-x_2\in U$ gilt. Dieser Koinzidenzbegriff wurde in [1] eingeführt. In dieser Arbeit wurde folgendes allgemeine Resultat bewiesen:

Sind $x_1, \dots, x_n \in R_m$ gegebene Punkte, ist $A\subset R_m$ beliebig und $U=-U\subset R_m$, so bezeichne $K(x_1, \dots, x_n; U, A)$ die Anzahl der U-koinzidenten Paare unter denjenigen der Punkte $x_1, \dots, x_n$, die in A fallen. Ist $(x_n\colon n\in\mathbb{N})$ eine Folge von unabhängigen, m-dimensionalen Zufallsvariablen, mit der allen gemeinsamen, quadratisch integrierbaren Dichte f, so ordne man jeder Folge $(U_n\colon n\in\mathbb{N})$ von symmetrischen Borelmengen des R_m die Folge der stochastischen Prozesse $\big(K(x_1, \dots, x_n; U_n, A)\colon A\in\mathfrak{B}_m\big)$ zu. Weiters bezeichne $\big(K(A)\colon A\in\mathfrak{B}_m\big)$ den durch das Maß $\xi(A) := \xi \int_A f^2 / \int_{R_m} f^2$ induzierten Poissonprozeß.

Dann wurde in [1] gezeigt, daß unter geeigneten Voraussetzungen über die Folge $(U_n\colon n\in\mathbb{N})$ und für beliebige $A_1, \dots, A_r\in\mathfrak{B}_m$ die Folge der gemeinsamen Verteilungen von $\big(K(x_1, \dots, x_n; U_n, A_j)\colon j=1(1)\,r\big)$ gegen die gemeinsame Verteilung von $\big(K(A_j)\colon j=1(1)\,r\big)$ strebt.

In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff der k-fachen U-Koinzidenz eingeführt und ein analoges Resultat für die asymptotische Verteilung der Anzahlen von k-fachen Koinzidenzen hergeleitet.

Vorbereitungen

Definition 1. Ist $-U=U\subset R_m$ eine symmetrische Menge, so liegen die Punkte $x_1, \dots, x_{k+1}\in R_m$ in „k-facher U-Koinzidenz" oder, wie man auch sagen kann, sie bilden eine „k-fache U-Koinzidenz", wenn es einen zusammenhängenden Graphen G mit den Knoten $1, 2, \dots, k+1$ gibt, so daß für jeden Zweig (i, j) des Graphen gilt: $x_i-x_j\in U$.

Es ist klar, daß man sich in Definition 1 auf sog. „Bäume" beschränken kann. Äquivalent zur Definition 1 ist also die folgende Definition:

„Die Punkte $x_1, \dots, x_{k+1}\in R_m$ bilden eine k-fache U-Koinzidenz, wenn es einen Baum B, mit den Knoten $1, 2, \dots, k+1$ gibt, so daß für jeden Zweig (i, j) des Baumes gilt: $x_i-x_j\in U$." (Bezüglich der hier verwendeten graphentheoretischen Begriffe s. [4] oder [5].)

Lemma 1. *Die Punkte $x_1, \dots, x_{k+1}\in R_m$ bilden genau dann eine k-fache U-Koinzidenz, wenn der Vektor der Differenzen*

$$(y_1, y_2, \dots, y_k) := (x_1-x_2, x_2-x_3, \dots, x_k-x_{k+1})$$

in einer durch U eindeutig bestimmten, zum Ursprung symmetrischen Menge $\overset{k}{U} \subset R_m \times \cdots \times R_m = R_m^k$ *liegt. Ist U: λ_m-meßbar, so ist $\overset{k}{U}$: λ_{mk}-meßbar.*

Beweis. Nach der obigen Bemerkung liegen die Punkte $x_1, \ldots, x_{k+1}$ dann und nur dann in k-facher U-Koinzidenz, wenn es einen Baum B mit der oben bezeichneten Eigenschaft gibt. Sei $\mathscr{B}_k$ die Menge aller möglichen Bäume mit $k+1$ numerierten Knoten. Die Anzahl der Elemente von $\mathscr{B}_k$ sei mit $b(k)$ bezeichnet.

Sei $B \in \mathscr{B}_k$ ein solcher Baum und seien $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$ seine Zweige – ein Baum mit $k+1$ Knoten besitzt genau k Kanten –, wobei stets $i_l < j_l$ $(l = 1(1)\,k)$ gelten soll. Dann ist offenbar die Bedingung $x_{i_l} - x_{j_l} \in U$ $(l = 1(1)\,k)$ äquivalent zu der Bedingung:

$$y_{i_l} + y_{i_l+1} + \cdots + y_{j_l-1} \in U \qquad (l = 1(1)\,k).$$

Die Menge aller $(y_1, \ldots, y_k) \in R_m^k$, die diese letztere Bedingung erfüllen, sei mit U_B bezeichnet. Es besteht also die Äquivalenz:

$$x_{i_l} - x_{j_l} \in U\ (l = 1(1)\,k) \Leftrightarrow y_{i_l} + y_{i_l+1} + \cdots + y_{j_l-1} \in U (l = 1(1)\,k) \Leftrightarrow (y_1, \ldots, y_k) \in U_B.$$

Daraus, und aus der Symmetrie von U, folgt aber sofort die Äquivalenz:

$$(y_1, \ldots, y_k) \in U_B \Leftrightarrow (-y_1, \ldots, -y_k) \in U_B,$$

so daß $U_B\ \forall\ B \in \mathscr{B}_k$ in R_m^k symmetrisch ist.

Da nun, nach Definition, die Punkte $x_1, \ldots, x_{k+1}$ genau dann in k-facher U-Koinzidenz liegen, wenn $(y_1, \ldots, y_k) \in \overset{k}{U} := \bigcup_{B \in \mathscr{B}_k} U_B$ gilt, und $\overset{k}{U}$ als Vereinigung symmetrischer Mengen symmetrisch ist, ist der erste Teil des Lemmas bewiesen.

Ist U: λ_m-meßbar, so ist offenbar $U_B\ \forall\ B \in \mathscr{B}_k$ und damit $\overset{k}{U}$: λ_{mk}-meßbar. q.e.d.

Lemma 2. *Ist $A_k = (a_{ij})$ $(i, j = 1(1)\,k+1)$ eine reelle $(k+1, k+1)$-Matrix, mit folgender Bauart*

$$a_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \textit{für } i+1 = j \\ -1 & \textit{für genau ein } j \leqq i \\ 0 & \textit{sonst} \end{array}\right\} \qquad i = 1(1)\,k,$$

$$a_{k+1,j} = \begin{cases} 1 & \textit{für genau ein } j\text{: } 1 \leqq j \leqq k+1, \\ 0 & \textit{sonst}, \end{cases}$$

so gilt: $\operatorname{Det} A_k = (-1)^k$.

Beweis. Für $k = 1$ hat A_k entweder die Gestalt $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ oder die Gestalt $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so daß die Behauptung gilt.

Sei also $k \geqq 2$. Addiert man in A_k die erste Spalte zur zweiten, und bezeichnet man die entstehende Matrix mit $B_k = (b_{ij})$ $(i, j = 1(1)\,k+1)$, so verschwinden alle Glieder der ersten Zeile mit Ausnahme von $b_{11} = -1$, und die zu b_{11} komplementäre Matrix hat, wie man sich sofort überzeugt, die Bauart von A_{k-1}. Entwickeln nach der ersten Zeile liefert die Behauptung. q.e.d.

Lemma 3. *Ist U: λ_m-meßbar, mit $\lambda_m(U)<\infty$, so gilt:*

$$(\lambda_m(U))^k \leqq \lambda_{mk}(\overset{k}{U}) \leqq b(k)(\lambda_m(U))^k.$$

Beweis. Es werden die im Beweis von Lemma 1 eingeführten Bezeichnungen beibehalten. Wegen $\overset{k}{U}=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_k} U_B$, und da $\mathscr{B}_k$ genau $b(k)$ Elemente enthält, genügt es zu zeigen, daß $\lambda_{mk}(U_B)=(\lambda_m(U))^k$. $\forall\, B\in\mathscr{B}_k$ gilt.

Hat der Baum B die Zweige (i_l, j_l) $(l=1(1)\,k)$, mit $i_l<j_l$, so führe man Hilfsvariable $z_1,\ldots,z_k$ gemäß folgender Transformation ein:

$$z_l = y_{i_l} + y_{i_l+1} + \cdots + y_{j_l-1} \qquad (l=1(1)\,k).$$

Die Matrix dieser Transformation sei A.

Wegen $(y_1,\ldots,y_k)\in U_B \Leftrightarrow (z_1,\ldots,z_k)\in U\times\cdots\times U=U^k$, ist die Behauptung gezeigt, sobald $|\mathrm{Det}\,A|=1$ erwiesen ist.

Um das zu erkennen, führe man zwei weitere Hilfsvariable y_{k+1} und z_{k+1}, nämlich $y_{k+1}=x_1$ und $z_{k+1}=y_{k+1}$ ein.

Dann gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_{k+1}, & z_1 &= x_{i_1}-x_{j_1},\\ x_2 &= y_{k+1}-y_1, & &\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots & z_k &= x_{i_k}-x_{j_k},\\ x_{k+1} &= y_{k+1}-y_1-y_2-\cdots-y_k, & z_{k+1} &= x_1. \end{aligned}$$

Die Matrizen dieser Transformationen seien C und D, so daß gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_{k+1}\end{pmatrix} = C\cdot\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_{k+1}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_{k+1}\end{pmatrix} = D\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_{k+1}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_{k+1}\end{pmatrix} = DC\cdot\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_{k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_{k+1}\end{pmatrix}.$$

$|\mathrm{Det}\,C|=1$ ist unmittelbar klar. Bleibt $|\mathrm{Det}\,D|=1$ zu zeigen. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Kanten (i_l, j_l) $(l=1(1)\,k)$ von B so fortlaufend nummeriert sind, daß mit jeder neuen Kante genau ein neuer Knoten hinzutritt, d.h., daß die durch $((i_l, j_l)$: $l=1(1)\,p)$ induzierten Teilgraphen von B, für $p=1(1)\,k$ selbst Bäume sind. Das bedeutet aber, daß in der Zeile l $(l=1(1)\,k)$ der Matrix D, wo die Spalte i_l mit $+1$ und die Spalte j_l mit -1 besetzt wird, genau eine dieser beiden Spalten in den Zeilen $1(1)\,l-1$ nur Nullen enthält, während die andere Spalte in diesen Zeilen bereits einfach oder mehrfach mit ± 1 besetzt ist. Multipliziert man die l-te Zeile mit $+1$ bzw. -1, je nachdem die neu besetzte Spalte -1 bzw. $+1$ enthält, und numeriert man die Spalten so um, daß jeweils die in Zeile l neu besetzte Spalte die Nummer $l+1$ trägt, so gewinnt man durch diesen Prozeß der Spaltenvertauschung eine Matrix der Bauart A_k wie sie in Lemma 2 behandelt wurde. Es gilt also $|\mathrm{Det}\,D|=|\mathrm{Det}\,A_k|=1$. q.e.d.

Bezeichnung. Für $0<\lambda_m(U)<\infty$ sei die Bezeichnung $C(k, U) := \dfrac{\lambda_{mk}(\overset{k}{U})}{(\lambda_m(U))^k}$ eingeführt. Es gilt $1\leqq C(k, U)\leqq b(k)$. Wie man sich jedoch an Beispielen klar machen kann, hängt $C(k, U)$ nicht nur von der Koinzidenzzahl k, und damit von der

Anzahl $b(k)$ der möglichen Bäume mit $k+1$ numerierten Knoten, sondern auch von der konkreten Gestalt von U ab. $C(k, U)$ ändert sich jedoch nicht, falls U ähnlich verzerrt wird, da dann alle Mengen U_B die gleiche Verzerrung erfahren.

Wie im Falle einfacher Koinzidenzen (s. [1]) ist es auch hier nützlich, die Funktion:

$$\overset{k}{U}(x_1, \dots, x_{k+1}) := \begin{cases} 1 \dots (x_1 - x_2, \dots, x_k - x_{k+1}) \in \overset{k}{U} \\ 0 \dots \text{sonst} \end{cases}$$

einzuführen. $\overset{k}{U}(x_1, \dots, x_{k+1})$ soll hier „Koindikatrix k-ter Ordnung" heißen.

Lemma 4. *Für $f \in L_p(R_m, \mathfrak{L}_m, \lambda_m)$ und $g_j \in L_{q_j}(R_m, \mathfrak{L}_m, \lambda_m)$ $(j = 1(1)\,k)$, mit:*

$$1/p + \sum_{j=1}^{k} 1/q_j = 1,$$

ist:

$$\Phi(z_1, \dots, z_k) := \int_{R_m} f(x) \prod_{j=1}^{k} g_j(x + z_j)\, dx$$

beschränkt und gleichmäßig stetig $\forall\, (z_1, \dots, z_k) \in R_m^k$.

Beweis. Existenz und Beschränktheit von $\Phi(z_1, \dots, z_k)$ folgen unmittelbar aus der Hölderschen Ungleichung:

$$|\Phi(z_1, \dots, z_k)| \leqq \left\| f(x) \prod_{j=1}^{k} g_j(x + z_j) \right\|_1 \leqq \|f\|_p \prod_{j=1}^{k} \|g_j\|_{q_j}.$$

Die gleichmäßige Stetigkeit ergibt sich folgendermaßen

$$\begin{aligned} |\Phi(z_1', \dots, z_k') - \Phi(z_1'', \dots, z_k'')| &\leqq \left\| f(x) \left(\prod_{j=1}^{k} g_j(x + z_j') - \prod_{j=1}^{k} g_j(x + z_j'') \right) \right\|_1 \\ &= \Bigg\| f(x) \sum_{j=1}^{k} g_1(x + z_1') \dots g_{j-1}(x + z_{j-1}') \big(g_j(x + z_j') - g_j(x + z_j'') \big) \\ &\quad \cdot g_{j+1}(x + z_{j+1}'') \dots g_k(x + z_k'') \Bigg\|_1 \\ &\leqq \|f\|_p \sum_{j=1}^{k} \|g_1\|_{q_1} \cdots \|g_{j-1}\|_{q_{j-1}} \|g_j(x) - g_j(x + z_j'' - z_j')\|_{q_j} \|g_{j+1}\|_{q_{j+1}} \cdots \|g_k\|_{q_k}. \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\|g_j\|_{q_j} > 0$ angenommen werden, da sonst $\Phi \equiv 0$ gilt. Damit kann man schreiben:

$$|\Phi(z_1', \dots, z_k') - \Phi(z_1'', \dots, z_k'')| \leqq \|f\|_p \prod_{j=1}^{k} \|g_j\|_{q_j} \cdot \sum_{l=1}^{k} \|g_l(x) - g_l(x + z_l'' - z_l')\|_{q_l} / \|g_l\|_{q_l} \leqq \varepsilon$$
$$\forall\, z_l', z_l'' : |z_l' - z_l''| < \delta(\varepsilon) \qquad (l = 1(1)\,k)$$

wegen der Stetigkeit von $\gamma_j(z) := \|g_j(x) - g_j\ (x + z)\|_{q_j}$ (s. [2]). q.e.d.

Lemma 5. *Sind die m-dimensionalen Zufallsvariablen* $x_1, \ldots, x_{k+1}$ *unabhängig verteilt mit der gemeinsamen Dichte* $f \in L_{k+1}(R_m, \mathfrak{L}_m, \lambda_m)$, *und ist* $(U_n\colon n \in N)$ *eine Folge symmetrischer,* λ_m*-meßbarer Mengen mit:*

1) $\lambda_m(U_n) > 0$,

2) $U_n \subset K(0, \rho_n)$ *mit* $\rho_n \to 0$ *für* $n \to \infty$,

so gilt:

$$\frac{1}{\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)} E(\overset{k}{U}_n(x_1, \ldots, x_{k+1})) \to \int_{R_m} f^{k+1}(x)\, dx \qquad (n \to \infty).$$

Beweis. Sei mit $|x|_m$ die euklidische Norm in R_m bezeichnet. Bilden die Punkte $x_1, \ldots, x_{k+1}$ eine k-fache U-Koinzidenz, so gibt es einen Baum $B \in \mathscr{B}_k$, der den Bedingungen von Definition 1 genügt. Sind daher u, v zwei beliebige Indizes zwischen 1 und $k+1$, so gibt es einen Weg über den Baum B, der von x_u nach x_v führt. Gilt daher $U \subset K(0, \rho)$, so folgt aus der Dreiecksungleichung: $|x_u - x_v|_m < k\rho$. Insbesondere gilt daher $|y_j|_m = |x_j - x_{j+1}|_m < k\rho$ und mithin $\overset{k}{U} \subset K(0, k\rho) \times \cdots \times K(0, k\rho) = (K(0, k\rho))^k$.

Genügt also die Folge $(U_n\colon n \in \mathbb{N})$ den Voraussetzungen des Lemmas, gilt also insbesondere:

$$U_n \subset K(0, \rho_n) \qquad \text{mit} \qquad \rho_n \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

so folgt:

$$\overset{k}{U}_n \subset (K(0, k\rho_n))^k \quad \text{mit} \quad k\rho_n \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Nun gilt:

$$\frac{1}{\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)} E(\overset{k}{U}_n(x_1, \ldots, x_{k+1})) = \frac{1}{\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)} \int_{V_n} \prod_{j=1}^{k+1} f(x_j)\, dx_1 \ldots dx_{k+1} \tag{1}$$

mit:

$$V_n := \{(x_1, \ldots, x_{k+1})\colon\ x_1 \in R_m,\ (x_1 - x_2, \ldots, x_k - x_{k+1}) \in \overset{k}{U}_n\}.$$

Führt man in (1) neue Integrationsvariable ein, gemäß der Transformation:

$$\left.\begin{aligned} &x = x_1, \\ &y_j = x_j - x_{j+1} \quad (j = 1(1)\, k), \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &x_1 = x, \\ &x_j = x - y_1 - \cdots - y_{j-1} \quad (j = 2(1)\, k+1), \end{aligned}\right.$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)} E(\overset{k}{U}_n(x_1, \ldots, x_{k+1})) \\ &\quad = \frac{1}{\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)} \int_{x \in R_m} \int_{(y_1, \ldots, y_k) \in \overset{k}{U}_n} f(x) f(x - y_1) \ldots f(x - y_1 - \cdots - y_k)\, dx \cdot dy_1 \ldots dy_k \\ &\quad = \frac{1}{\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)} \int_{\overset{k}{U}_n} \Big(\int_{R_m} f(x) f(x - y_1) \ldots f(x - y_1 - \cdots - y_k)\, dx \Big)\, dy_1 \ldots dy_k \\ &\quad \to \int_{R_m} f^{k+1}(x)\, dx \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Denn nach Lemma 4 ist die Funktion:

$$\Phi(y_1, \dots, y_k) := \int_{R_m} f(x) f(x-y_1) \dots f(x-y_1-\dots-y_k)\, dx$$

beschränkt und gleichmäßig stetig $\forall (y_1, \dots, y_k) \in R_m^k$ und außerdem gilt nach dem Obigen: $\overset{k}{U}_n \subset (K(0, k\rho_n))^k$ mit $k\rho_n \to 0$ für $n \to \infty$. q.e.d.

Lemma 6. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 5 gilt:*

$$E(\overset{k}{U}_n(x_1, \dots, x_{k+1}) \mid x_1, \dots, x_r) \leqq (\lambda_m(K(0, k\rho_n)))^{\frac{k}{k+1}\cdot(k+1-r)} \cdot o(n^0) \qquad (n \to \infty)$$

gleichmäßig $\forall (x_1, \dots, x_r) \in R_m^r$.

Beweis. Wegen der Unabhängigkeit der Variablen $x_1, \dots, x_{k+1}$ und wegen $|x_i - x_j|_m < k\rho_n$ für $\overset{k}{U}_n(x_1, \dots, x_{k+1}) = 1$ (s. Beweis von Lemma 5) gilt:

$$E(\overset{k}{U}_n(x_1, \dots, x_{k+1}) \mid x_1, \dots, x_r) \leqq \Big(\int_{x_1 + K(0, k\rho_n)} f(x)\, dx \Big)^{k+1-r}. \tag{2}$$

Mit der abkürzenden Bezeichnung $K_n = K(0, k\rho_n)$ folgt mittels der Hölderschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\int_{x_1+K_n} f(x)\, dx &= \int_{R_m} f(x)\, I_{x_1+K_n}(x)\, dx \\
&\leqq \Big(\int_{R_m} (I_{x_1+K_n}(x))^{\frac{k+1}{k}}\, dx \Big)^{\frac{k}{k+1}} \cdot \Big(\int_{R_m} (f(x)\, I_{x_1+K_n}(x))^{k+1}\, dx \Big)^{\frac{1}{k+1}} \\
&= (\lambda_m(K_n))^{\frac{k}{k+1}} \Big(\int_{x_1+K_n} f^{k+1}(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{k+1}} = (\lambda_m(K_n))^{\frac{k}{k+1}}\, o(n^0) \qquad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

wegen $\lambda_m(K_n) \to 0$ und $f \in L_{k+1}(R_m, \mathfrak{B}_m, \lambda_m)$.

Schließlich folgt wegen (2) die Behauptung. q.e.d.

Zur einfacheren und kürzeren Sprechweise sei folgende Definition eingeführt:

Definition 2. Eine Folge $(U_n : n \in \mathbb{N})$ λ_m-meßbarer Teilmengen des R_m heiße eine „Normalfolge", wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

1) $U_n = -U_n$.

Es gibt eine Zahlenfolge $(\rho_n : n \in \mathbb{N})$ mit $0 < \rho_n \to 0$ $(n \to \infty)$, so daß

2) $U_n \subset K(0, \rho_n)$

3) $\lambda_m(K(0, \rho_n)) \leqq C \cdot \lambda_m(U_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$.

Ist $(U_n : n \in N)$ eine Normalfolge, so gilt für die zugehörige Folge $(\overset{k}{U}_n : n \in N)$:

1) $\overset{k}{U}_n = -\overset{k}{U}_n$

2) $\overset{k}{U}_n \subset (K(0, k\rho_n))^k$

3) $(\lambda_m(K(0, k\rho_n)))^k = (k^m \lambda_m(K(0, \rho_n)))^k$

$$\leqq (k^m \cdot C \cdot \lambda_m(U_n))^k = (k^m \cdot C)^k \cdot \frac{\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)}{C(k, U_n)} \leqq C' \cdot \lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

und ein $C'>0$, wobei wegen $C(k, U_n)\geqq 1$ die Konstante C' unabhängig von der Gestalt von U_n gewählt werden kann.

Ist also $(U_n\colon n\in\mathbb{N})$ eine Normalfolge, so gilt unter den Voraussetzungen von Lemma 5, wegen Lemma 6, die Abschätzung:

$$E(\overset{k}{U}_n(x_1,\dots,x_{k+1})|x_1,\dots,x_r)\leqq(\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n))^{\frac{k+1-r}{k+1}}\cdot o(n^0)\qquad(n\to\infty).$$

In dieser Form wird das Ergebnis von Lemma 6 im weiteren verwendet. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird in der Folge statt etwa $\overset{k}{U}(x_{i_1},\dots,x_{i_{k+1}})$ nur mehr $\overset{k}{U}(i_1,\dots,i_{k+1})$ geschrieben. Aus der Definition von $\overset{k}{U}(1,\dots,k+1)$ ist klar, daß diese Funktion vollsymmetrisch ist. Sind daher die Punkte $x_1,\dots,x_n\in R_m$ $(n\geqq k+1)$ gegeben, so bezeichnet:

$$\overset{k}{K}_n(x_1,\dots,x_n;\,U):=\sum_{1\leqq i_1<\dots<i_{k+1}\leqq n}\overset{k}{U}(i_1,\dots,i_{k+1}),$$

die Anzahl der k-fachen U-Koinzidenzen unter den Punkten $x_1,\dots,x_n$.

Lemma 7. *Setzt man zur Abkürzung $\overset{k}{K}_n:=\overset{k}{K}_n(x_1,\dots,x_n;\,U)$, so gilt:*

$$\prod_{l=0}^{p-1}(\overset{k}{K}_n-l)=\sum_{S_p}\prod_{\lambda=1}^{p}\overset{k}{U}(i_{\lambda,1},\dots,i_{\lambda,k+1}).$$

Dabei bedeutet die Summationsvorschrift S_p, daß über alle Indexsysteme $(i_{\lambda,\mu})_{\lambda=1(1)p}^{\mu=1(1)k+1}$ zu summieren ist, die den folgenden Bedingungen genügen

1) $1\leqq i_{\lambda,1}<i_{\lambda,2}<\dots<i_{\lambda,k+1}\leqq n,\ (\lambda=1(1)\,p)$

2) $(i_{\lambda,1},\dots,i_{\lambda,k+1})\neq(i_{\nu,1},\dots,i_{\nu,k+1})$ *für* $\lambda\neq\nu$; $\lambda,\nu=1(1)\,p$ *(d.h.: für wenigstens ein* $\mu\in\{1,\dots,k+1\}$ *gilt* $i_{\lambda,\mu}\neq i_{\nu,\mu}$*).*

Der *Beweis* dieses elementaren Lemmas erfolgt mittels vollständiger Induktion und wird hier übergangen.

Die asymptotische Verteilung der Größen $\overset{k}{K}_n$

Mit diesen Vorbereitungen kann nun der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 1. *Die m-dimensionalen Zufallsvariablen $(x_n\colon n\in\mathbb{N})$ seien unabhängig verteilt mit der allen gemeinsamen Dichte $f\in L_{k+1}(R_m,\mathfrak{L}_m,\lambda_m)$. Ist $(U_n\colon n\in\mathbb{N})$ eine Normalfolge (s. Definition 2) mit:*

$$\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)\Big/\frac{\xi(k+1)!}{n^{k+1}\int_{R_m}f^{k+1}}\to 1\quad(n\to\infty),\qquad \textit{für ein } \xi>0,$$

so ist die Folge der Verteilungen von $\overset{k}{K}_n:=\overset{k}{K}_n(x_1,\dots,x_n;\,U_n)$ schwach konvergent gegen die Poissonverteilung P_ξ.

Beweis. Der Beweis beruht auf dem asymptotischen Verhalten der p-ten faktoriellen Momente von $\overset{k}{K}_n$. Gelingt es nämlich $E\left(\prod_{l=0}^{p-1}(\overset{k}{K}_n-l)\right)\to\xi^p\ (n\to\infty)$, zu zeigen, so folgt aus dem Satz von Fréchet-Shohat (s. [3]), daß die Folge der Verteilungen von $\overset{k}{K}_n$ schwach gegen die Poissonverteilung P_ξ konvergiert.

Es gilt:

$$\prod_{l=0}^{p-1} (\overset{k}{K}_n - l) = \sum_{S_p} \prod_{\lambda=1}^{p} \overset{k}{U}_n(i_{\lambda,1}, \ldots, i_{\lambda,k+1}) = \sum_{q=k+1}^{p(k+1)} T_q,$$

wobei in T_q alle jene Produkte $\prod_{\lambda=1}^{p} \overset{k}{U}_n(i_{\lambda,1}, \ldots, i_{\lambda,k+1})$ zusammengefaßt sind, wo unter den Indizes $(i_{\lambda,\mu})_{\lambda=1(1)p}^{\mu=1(1)k+1}$ genau q $(k+1 \leqq q \leqq p(k+1))$ verschiedene enthalten sind. Es ist leicht einzusehen, daß $T_{p(k+1)}$ genau

$$\binom{n}{k+1}\binom{n-(k+1)}{k+1}\cdots\binom{n-(p-1)(k+1)}{k+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p(k+1)+1)}{((k+1)!)^p}$$

Summanden enthält.

Wegen der Unabhängigkeit der $(x_n \colon n \in \mathbb{N})$, und da alle Indizes des allgemeinen Summanden von $T_{p(k+1)}$ verschieden sind, gilt wegen Lemma 5:

$$\begin{aligned}
E(T_{p(k+1)}) &= \frac{n(n-1)\ldots(n-p(k+1)+1)}{((k+1)!)^p} \left(E(\overset{k}{U}_n(1, \ldots, k+1))\right)^p \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-p(k+1)+1)}{((k+1)!)^p} \left(\frac{\xi(k+1)!}{n^{k+1} \int\limits_{R_m} f^{k+1}}\right)^p \left(\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n) \Big/ \frac{\xi(k+1)!}{n^{k+1} \int\limits_{R_m} f^{k+1}}\right)^p \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)} E(\overset{k}{U}_n(1, \ldots, k+1))\right)^p \to \xi^p \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Es genügt somit $E(T_q) \to 0$ $(n \to \infty)$ für $k+1 \leqq q < p(k+1)$ zu zeigen.

Zu diesem Zweck sei $q \colon k+1 \leqq q < p(k+1)$ fest gewählt und sei ein fester, jedoch beliebiger Summand von T_q herausgegriffen. Durch geeignete Vertauschung der Faktoren dieses Summanden kann man ihn in folgende Normalform überführen:

$$\begin{aligned}
\prod_{\lambda=1}^{p} \overset{k}{U}_n(i_{\lambda,1}, \ldots, i_{\lambda,k+1}) &= \prod_{\lambda=1}^{r_1} \overset{k}{U}_n(j_{\lambda,1}, \ldots, j_{\lambda,k+1}) \\
&\quad \cdot \left(\prod_{\lambda=r_1+1}^{r_1+r_2} \overset{k}{U}_n(j_{\lambda,1}, \ldots, j_{\lambda,k+1}) \cdots \prod_{\lambda=r_1+\cdots+r_{k+1}+1}^{r_1+\cdots+r_{k+2}=p} \overset{k}{U}_n(j_{\lambda,1}, \ldots, j_{\lambda,k+1})\right) \\
&= A_{k+1} A_k \ldots A_1 A_0.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$A_j = \prod_{\lambda=r_0+\cdots+r_{k+1-j}}^{r_1+\cdots+r_{k+2-j}} \overset{k}{U}_n(j_{\lambda,1}, \ldots, j_{\lambda,k+1}) \qquad (r_0 = 1),$$

so erklärt, daß mit jedem neu hinzutretenden Faktor $\overset{k}{U}_n(j_{\lambda,1}, \ldots, j_{\lambda,k+1})$ von A_j genau j neue Indizes zu sämtlichen in $A_{k+1}, \ldots, A_{j+1}$, und den vorangegangenen Faktoren von A_j aufgetretenen Indizes hinzukommen. Da A_j genau r_{k+2-j}

Faktoren enthält, treten in A_j insgesamt $j \cdot r_{k+2-j}$ $(j=0(1)\,k+1)$ neue Indizes hinzu. Es gilt somit die Beziehung:

$$q=\sum_{j=0}^{k+1} j\, r_{k+2-j}.$$

Da die Normierung eines allgemeinen Summanden von T_q nicht eindeutig ist, kann man wie man leicht einsieht, stets erreichen, daß $\sum_{j=0}^{k} j\, r_{k+2-j}>0$ ausfällt. Darüber hinaus kann man, wegen der Symmetrie der Funktion $\overset{k}{U}_n(1,\ldots,k+1)$, stets annehmen, daß die in den Faktoren von A_j neu hinzutretenden Indizes die Indizes: $(j_{\lambda,k+2-j}, j_{\lambda,k+3-j}, \ldots, j_{\lambda,k+1})$ sind.

Freilich muß dabei die in der Summationsvorschrift S_p gemachte Vereinbarung $j_{\lambda,1}<j_{\lambda,2}<\cdots<j_{\lambda,k+1}$ fallen gelassen werden, doch ist das offenbar für die Berechnung von Erwartungen, wegen der Vollsymmetrie von $\overset{k}{U}_n(1,\ldots,k+1)$ bedeutungslos.

Bildet man nun die Erwartung des solcherart normierten, allgemeinen Summanden von T_q, so gilt:

$$E(A_{k+1}\,A_k\ldots A_1\,A_0)\leqq E(A_{k+1}\,A_k\ldots A_1).$$

Die letztere Erwartung kann man schrittweise mit Hilfe des in Lemma 6 bewiesenen Resultates abschätzen. Da $(U_n\colon n\in\mathbb{N})$ voraussetzungsgemäß eine Normalfolge bildet, gilt nach der im Anschluß an Definition 2 gemachten Bemerkung:

$$E\big(\overset{k}{U}_n(1,\ldots,k+1)|1,\ldots,r\big)\leqq\big(\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)\big)^{\frac{k+1-r}{k+1}}\cdot o(n^0)\qquad (n\to\infty).$$

Man hält nun im Produkt $A_{k+1}\,A_k\ldots A_1$ alle Variablen fest, bis auf die eine, die im letzten Faktor von A_1 neu hinzutritt (falls A_1 Faktoren enthält!) und schätzt die bedingte Erwartung von $A_{k+1}\,A_k\ldots A_1$ gemäß Lemma 6 ab. Anschließend verfährt man mit dem nächsten Faktor von A_1 ebenso usw. so lange, bis alle Faktoren von A_1 aufgebraucht sind. Man erhält schließlich, falls $r_{k+1}>0$ gilt:

$$E(A_{k+1}\,A_k\ldots A_1)\leqq E(A_{k+1}\,A_k\ldots A_2)\cdot\big(\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)\big)^{r_{k+1}/k+1}\cdot o(n^0)\qquad (n\to\infty).$$

Verfährt man analog mit $A_2,\ldots,A_k$, so erhält man schließlich, insbesondere wegen $\sum_{j=1}^{k} j\, r_{k+2-j}>0$:

$$E(A_{k+1}\,A_k\ldots A_1)\leqq E(A_{k+1})\cdot\big(\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)\big)^{\frac{1}{k+1}\cdot\sum_{j=1}^{k} j r_{k+2-j}}\cdot o(n^0)\qquad (n\to\infty).$$

Schließlich gilt auf Grund von Lemma 5:

$$E(A_{k+1})\leqq C\cdot\big(\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)\big)^{r_1},$$

so daß man insgesamt hat:

$$E(A_{k+1}\,A_k\ldots A_1\,A_0)\leqq\big(\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)\big)^{\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} j r_{k+2-j}}\cdot o(n^0)=\big(\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)\big)^{q/k+1}\,o(n^0)\qquad (n\to\infty).$$

Die Funktion $o(n^0)$ ist dabei universell für alle Summanden von T_q. Da T_q offenbar nicht mehr als $\binom{n}{q}(p(k+1))!$ Summanden enthält, hat man abschließend:

$$E(T_q) \leqq \binom{n}{q}(p(k+1))! \left(\frac{\xi(k+1)!}{n^{k+1}\int\limits_{R_m} f^{k+1}}\right)^{q/k+1} \cdot \left(\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)\bigg/\frac{\xi(k+1)!}{n^{k+1}\int\limits_{R_m} f^{k+1}}\right)^{q/k+1} \cdot o(n^0)$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-q+1)}{n^q} \cdot o(n^0) \to 0 \quad (n \to \infty). \quad \text{q.e.d.}$$

In den beiden folgenden Sätzen wird das lokale Verhalten der k-fachen Koinzidenzen untersucht.

Bezeichnung. Ist $V \subset R_m$ gegeben und

$$I_{V^{k+1}}(x_1, \dots, x_{k+1}) = \begin{cases} 1 \dots (x_1, \dots, x_{k+1}) \in V^{k+1}, \\ 0 \dots \text{sonst}, \end{cases}$$

so bezeichnet:

$$\overset{k}{K}_n(x_1, \dots, x_n;\ U, V) := \sum_{S_1} U(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k+1}})\, I_{V^{k+1}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k+1}})$$

die Anzahl der k-fachen U-Koinzidenzen derjenigen unter den Punkten $x_1, \dots, x_n$, die in V fallen. (Betreffend die Summationsvorschrift S_1 s. Lemma 7.) Der einfacheren Bezeichnungsweise halber wird im weiteren statt etwa $I_{V^{k+1}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k+1}})$ nur mehr $I_{V^{k+1}}(i_1, \dots, i_{k+1})$ geschrieben.

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 1 *sei $V \in R_m$ eine λ_m-meßbare Menge. Dann konvergiert die Folge der Verteilungen von $\overset{k}{K}_n(x_1, \dots, x_n;\ U_n, V)$ schwach gegen die Poissonverteilung $P_{\xi(V)}$ mit $\xi(V) = \xi \int\limits_V f^{k+1} / \int\limits_{R_m} f^{k+1}$.*

Beweis. Wir kürzen ab: $\overset{k}{K}_n(V) := \overset{k}{K}_n(x_1, \dots, x_n;\ U_n, V)$. Wegen $W(\overset{k}{K}_n(V) = 0) = 1$ für $\int\limits_V f = 0$, genügt es den Beweis für $\int\limits_V f > 0$ zu führen. Zunächst gilt:

$$\prod_{l=0}^{p-1} (\overset{k}{K}_n(V) - l) = \sum_{S_p} \prod_{\lambda=1}^{p} \overset{k}{U}_n(i_{\lambda,1}, \dots, i_{\lambda,k+1})\, I_{V^{k+1}}(i_{\lambda,1}, \dots, i_{\lambda,k+1}) = \sum_{q=k+1}^{p(k+1)} T_q,$$

wobei die Teilsummen T_q wie im Beweis von Satz 1 erklärt sind. Ist

$$\Phi = \prod_{l=1}^{p} \overset{k}{U}_n(\dots)\, I_{V^{k+1}}(\dots)$$

ein Summand von T_q, so gilt

$$E(\Phi) \leqq E\left(\prod_{l=1}^{p} \overset{k}{U}_n(\dots)\right).$$

Benützt man dabei die Abschätzungen vom Beweis von Satz 1, so folgt:

$$E\left(\sum_{q=k+1}^{p(k+1)-1} T_q\right) = o(1).$$

Bleibt $T_{p(k+1)}$ zu betrachten. Die Erwartung des allgemeinen Summanden von $T_{p(k+1)}$ ist:

$$\big(E(\overset{k}{U}_n(1,\ldots,k+1)\, I_{V^{k+1}}(1,\ldots,k+1))\big)^p.$$

Wie im Beweis von Lemma 5 zeigt man:

$$\frac{1}{\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)} E\big(\overset{k}{U}_n(1,\ldots,k+1)\, I_{V^{k+1}}(1,\ldots,k+1)\big) \to \int_V f^{k+1},$$

so daß gilt:

$$\begin{aligned} &E(T_{p(k+1)}) \\ &= (n^{k+1}/(k+1)!)^p \cdot \left(\frac{\xi(k+1)!}{n^{k+1}\int_{R_m} f^{k+1}} \int_V f^{k+1}\right)^p \cdot (1+o(1)) \to \Big(\xi \int_V f^{k+1} \Big/ \int_{R_m} f^{k+1}\Big)^p \\ &= \xi^p(V). \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 seien $V_1, \ldots, V_s$ paarweise disjunkte λ_m-meßbare Teilmengen des R_m.*

Bezeichnet $\overset{k}{K}_n(V_r) := \overset{k}{K}_n(x_1, \ldots, x_n;\, U_n, V_r)$ die Anzahl der k-fachen U_n-Koinzidenzen derjenigen unter den Punkten $x_1, \ldots, x_n$ die in V_r fallen, so ist die Folge der gemeinsamen Verteilungen von $(\overset{k}{K}_n(V_1), \ldots, \overset{k}{K}_n(V_s))$ schwach konvergent gegen das Produkt $\bigotimes_{r=1}^{s} P_\xi(V_r)$ der Poissonverteilungen $P_{\xi(V_r)}$ mit:

$$\xi(V_r) = \xi \int_{V_r} f^{k+1} \Big/ \int_{R_m} f^{k+1}.$$

Beweis. Bezeichnet man mit

$$\mu_n(p_1, \ldots, p_s) := E\left(\prod_{r=1}^{s} \prod_{l=0}^{p_r-1} (K_n(V_r) - l)\right)$$

das zu dem s-Tupel $(p_1, \ldots, p_s) \in \mathbb{N}^s$ gehörige, gemischte, faktorielle Moment von $(\overset{k}{K}_n(V_1), \ldots, \overset{k}{K}_n(V_s))$, so genügt es zu zeigen, daß gilt:

$$\mu_n(p_1, \ldots, p_s) \to \prod_{r=1}^{s} (\xi(V_r))^{p_r} \qquad (n \to \infty).$$

O.B.d.A. kann, wie im Beweis von Satz 2, $\int_V f > 0$ vorausgesetzt werden.

Es gilt:

$$\begin{aligned} &\prod_{r=1}^{s} \prod_{l=0}^{p_r-1} (\overset{k}{K}_n(V_r) - l) \\ &\quad = \prod_{r=1}^{s} \left(\sum_{S_{p_r}} \prod_{\lambda=1}^{p_r} U_n(i_{\lambda,1}^{(r)}, \ldots, i_{\lambda,k+1}^{(r)})\, I_{V_r^{k+1}}\, (i_{\lambda,1}^{(r)}, \ldots, i_{\lambda,k+1}^{(r)}) \right) \\ &\quad = \prod_{r=1}^{s} \left(\sum_{q=k+1}^{p_r(k+1)} T_q(r) \right) = \sum_{(q_1,\ldots,q_s) \in \prod_{r=1}^{s} \{k+1,\ldots,p_r(k+1)\}} \prod_{r=1}^{s} T_{q_r}(r) \\ &\quad = \sum_{(q_1,\ldots,q_s) \in \prod_{r=1}^{s} \{k+1,\ldots,p_r(k+1)\}} T_{q_1,\ldots,q_s}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $T_q(r)\,(q=k+1\,(1)\,p_r(k+1))$ die Summe jener Summanden, von $\prod_{l=0}^{p_r-1}(\overset{k}{K}_n(V_r)-l)$, die genau q verschiedene Indizes enthalten. Schließlich wurde noch die Abkürzung:

$$T_{q_1,\dots,q_s} := \prod_{r=1}^{s} T_{q_r}(r) \qquad \forall (q_1,\dots,q_s) \in \prod_{r=1}^{s} \{k+1,\dots,p_r(k+1)\},$$

eingeführt.

Jeder der Ausdrücke $T_{q_1,\dots,q_s}$ ist eine Summe von Produkten der Gestalt:

$$\prod_{r=1}^{s} \prod_{\lambda=1}^{p_r} \overset{k}{U}_n(i_{\lambda,1}^{(r)},\dots,i_{\lambda,k+1}^{(r)})\, I_{V_r^{k+1}}(i_{\lambda,1}^{(r)},\dots,i_{\lambda,k+1}^{(r)}), \tag{7}$$

wobei das Indexsystem $J_r := (i_{\lambda,\mu}^{(r)})_{\lambda=1(1)p_r}^{\mu=1(1)k+1}$ genau q_r verschiedene Indizes enthält. Enthalten nun zwei solche Indexsysteme, etwa J_α und J_β, einen gemeinsamen Index, etwa u, so verschwindet der Ausdruck (7), da er dann $I_{V_\alpha}(x_u)\cdot I_{V_\beta}(x_u)$ als Faktor enthält, der wegen $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ verschwindet.

Man braucht somit in $T_{q_1,\dots,q_s}$ nur jene Summanden (7) zu berücksichtigen, deren Indexsysteme $J_1,\dots,J_s$ paarweise fremd sind. Diese Summanden (7) zerfallen dann in ein Produkt der unabhängigen Faktoren:

$$\prod_{\lambda=1}^{p_r} \overset{k}{U}_n(i_{\lambda,1}^{(r)},\dots,i_{\lambda,k+1}^{(r)})\, I_{V_r^{k+1}}(i_{\lambda,1}^{(r)},\dots,i_{\lambda,k+1}^{(r)}) \qquad (r=1\,(1)\,s),$$

die jetzt wie in den Beweisen der Sätze 1 und 2 behandelt werden können.

$T_{p_1(k+1),\dots,p_s(k+1)}$: Setzt man $p=\sum_{r=1}^{s} p_r$, so enthält diese Summe offenbar

$$\binom{n}{k+1}\cdots\binom{n-(p-1)(k+1)}{k+1} = (n^{k+1}/(k+1)!)^p(1+o(1))$$

Summanden. Die Erwartung des allgemeinen Summanden ist

$$\prod_{r=1}^{s} (\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)\int_{V_r} f^{k+1})^{p_r}(1+o(1)) = \prod_{r=1}^{s}\left(\frac{\xi(k+1)!}{n^{k+1}\int_{R_m} f^{k+1}}\int_{V_r} f^{k+1}\right)^{p_r}(1+o(1)).$$

Somit folgt:

$$E(T_{p_1(k+1),\dots,p_s(k+1)}) \to \prod_{r=1}^{s}(\xi \int_{V_r} f^{k+1}/\int_{R_m} f^{k+1})^{p_r} = \prod_{r=1}^{s}(\xi(V_r))^{p_r}.$$

$T_{q_1,\dots,q_s}$: mit $\sum_{r=1}^{s} q_r p$. Für diese Summen zeigt man wie im Beweis von Satz 2: $E(T_{q_1,\dots,q_s})=o(1)$. q.e.d.

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich ebenso wie in [1] zusammenfassen. Dazu betrachte man die Folge von stochastischen Prozessen

$$(\overset{k}{K}_n(V) := \overset{k}{K}_n(x_1,\dots,x_n;\, U_n, V):\ V \in \mathfrak{B}_m)$$

und den Punktprozeß

$$(\overset{k}{K}(V)\colon V\in\mathfrak{B}_m)$$

der folgendermaßen definiert ist:

a) $\overset{k}{K}(V)$ ist Poisson-verteilt mit dem Mittel $\xi(V) := \xi \int\limits_V f^{k+1} / \int\limits_{R_m} f^{k+1}$ $V\in\mathfrak{B}_m$,

b) $\overset{k}{K}(V_1),\ldots,\overset{k}{K}(V_s)$ sind unabhängig für disjunkte $V_1,\ldots,V_s\in\mathfrak{B}_m$. $(\overset{k}{K}(V)\colon V\in\mathfrak{B}_m)$ ist somit eine additive stochastische Mengenfunktion und wird in der Literatur häufig als Poisson-Prozeß bezeichnet (s. etwa [6]).

Aus dem bisher Bewiesenen folgt dann wie in [1] das abschließende

Theorem. Sind die Variablen $(x_n\colon n\in\mathbb{N})$ unabhängig verteilt mit der gemeinsamen Dichte $f\in L_{k+1}(R_m,\mathfrak{L}_m,\lambda_m)$ und ist $(U_n\colon n\in\mathbb{N})$ eine Normalfolge mit:

$$\lambda_{mk}(\overset{k}{U}_n)\Big/\frac{\xi(k+1)!}{n^{k+1}\int\limits_{R_m} f^{k+1}}\to 1 \qquad (n\to\infty),$$

so strebt die Folge der endlichdimensionalen Verteilungen von $(\overset{k}{K}_n(V)\colon V\in\mathfrak{B}_m)$ schwach gegen die entsprechenden endlichdimensionalen Verteilungen von $(\overset{k}{K}(V)\colon V\in\mathfrak{B}_m)$.

Literatur

1. Eberl, W., Hafner, R.: Die asymptotische Verteilung von Koinzidenzen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **18**, 322–332 (1971).
2. Bochner, S.: Harmonic analysis and the theory of probability. Berkeley and Los Angeles: University of California Press 1955.
3. Loève, M.: Probability theory. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand 1963.
4. Flachsmeyer, J.: Kombinatorik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1969.
5. Berge, C.: The theory of graphs and its applications. New York: John Wiley & Sons Inc. 1962.
6. Rényi, A.: Remarks on the Poisson process. Sympos. Prob. Methods Analysis, Lectures Sympos. Loutraki, Greece 1966.

Dipl.-Ing. Dr. techn. R. Hafner
Institut für Statistik
Technische Hochschule Wien
Argentinierstraße 8/7
A-1040 Wien, Österreich

(Eingegangen am 17. April 1970)