Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 21, 300–328 (1972)
© by Springer-Verlag 1972

Sur la loi exponentielle tronquée

R. BERTHUET *

0. Introduction

Etant donnée une suite $(a)=\{a_n, n\geqq 1\}$ d'entiers supérieurs à un, soit $\{X_n, n\geqq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs, pour X_n, dans $\{0, 1, \ldots, a_n-1\}$. On forme la variable aléatoire

$$X=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_1 \ldots a_n}$$

on désigne par μ_X la mesure de probabilité sur $[0, 1]$ associée à X. On désigne par:

$M[(a)]$ l'ensemble de toutes les mesures μ_X ainsi formées lorsque l'on fait varier les lois des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n, \ldots$.

$C[(a)]$ l'ensemble des mesures de $M[(a)]$ à intervalle-support $[0, 1]$.

D l'ensemble des mesures de Dirac ε_x avec $x\in[0, 1]$.

On pose $M[(a)]=M_k$ (resp $C[(a)]=C_k$) si, pour tout $n\geqq 1$, $a_n=k$ où k est un entier supérieur à 1.

On désigne par C_1 l'ensemble des mesures de probabilité sur $[0, 1]$ admettant pour densité une fonction de la forme $x\mapsto K(\theta)\, e^{\theta x}$ où θ est un nombre réel donné, c'est-à-dire l'ensemble des lois exponentielles tronquées sur $[0, 1]$.

Chatterji, dans [1–3], donne une condition nécessaire et suffisante sur les lois des variables aléatoires $(X_n, n\geqq 1)$ pour que $\mu_X\in M_k$ soit absolument continue et si f est la densité montre que:

1. $\forall c\in[0, \infty[\quad f\in L^c([0, 1])$.

2. si f est localement bornée en un point alors f est bornée et donne une condition nécessaire et suffisante pour que f soit localement bornée.

3. la classe des mesures de C_k admettant une densité continue est la classe C_1.

C'est un exercice ([4], n° 30) de constater que, pour toute suite (a), $C_1\subset C[(a)]$. Cette remarque est la base de l'admirable travail de Lewis [5] sur la factorisation de la loi rectangulaire, résultat se rattachant aux décompositions en facteurs premiers de la mesure de Lebesgue sur un segment comme le montre Tortrat dans [6]. Cette même remarque conduit également Chatterji ([4], n° 30) à penser que $C_1=\bigcap_{k=2}^{\infty} C_k$ et même que $C_1=C_m\cap C_n$ où m et n sont deux entiers supérieurs à un, premiers entre eux. Cette conjecture est le noyau de ce travail.

---

* Ce papier est extrait de la thèse de 3ème cycle de l'auteur, préparée à l'Université de Clermont sous la direction de G. Letac.

L'étude dans le cas fini est, pour ce problème, l'outil essentiel et nous aurons besoin des notations suivantes: si $\{a_k, 1 \leqq k \leqq n\}$ sont des entiers supérieurs à un, si on pose $A = a_1 \dots a_n$, si $\{X_k, 1 \leqq k \leqq n\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs, pour X_k, dans $\{0, 1, \dots, a_k - 1\}$ et si on forme la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{a_1 \dots a_k}$, on désigne par:

$M(a_1, \dots, a_n)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\{0, 1, \dots, A-1\}$ associées à AX lorsque l'on fait varier les lois des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

$C(a_1, \dots, a_n)$ l'ensemble de ces mesures dont le support est exactement $\{0, 1, \dots, A-1\}$.

$M(a_1, \dots, \breve{a}_k, \dots, a_n)$ (resp. $C(a_1, \dots, \breve{a}_k, \dots, a_n)$) l'ensemble des mesures de $M(a_1, \dots, a_n)$ (resp. $C(a_1, \dots, a_n)$) telles que la loi de la variable aléatoire correspondante X_k soit géométrique.

$D(n)$ l'ensemble des mesures de Dirac ε_k où $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Dans une première partie, nous montrons que l'ensemble des mesures de $C[(a)]$ admettant une densité continue est l'ensemble C_1. Dans une seconde partie, nous construisons tous les outils nécessaires pour pouvoir aborder la démonstration du théorème principal de l'étude du cas fini, démonstration faisant l'objet du chapitre 3. Ce théorème peut s'énoncer en termes de polynômes à coefficients complexes et non nécessairement positifs ou nuls; la simplicité des énoncés et l'absence d'applications non probabilistes nous font choisir ce mode d'exposition. On aimerait également avoir des caractérisations des intersections de classes $M(a_1, \dots, a_n)$ aussi nettes que celles obtenues pour les $C(a_1, \dots, a_n)$ mais la complexité du problème nous l'a fait écarter dans le présent travail. Enfin, dans une dernière partie, nous caractérisons $\bigcap_{j=1}^{n} C_{a_j}$ où $\{a_j, 1 \leqq j \leqq n\}$ est un ensemble d'entiers supérieurs à un, ce qui nous conduit à définir une loi quasi-exponentielle et nous montrons l'exactitude de la conjecture de Chatterji.

1. Densités continues dans $C[(a)]$

Théorème 1.1. *Etant donnée une suite $(a) = \{a_n, n \geqq 1\}$ d'entiers supérieurs à un, l'ensemble des mesures de $C[(a)]$ admettant une densité continue est l'ensemble C_1 des lois exponentielles tronquées sur $[0, 1]$.*

Compte tenu de la remarque $C_1 \subset C[(a)]$ ([4], n° 30), il suffit de démontrer que si μ_X, élément de $C[(a)]$, admet une densité continue f alors il existe un nombre réel θ tel que, en tout point x de $[0, 1]$,

$$f(x) = \frac{\theta}{e^{\theta} - 1} e^{\theta x} \quad \text{si} \quad \theta \neq 0, \qquad f(x) = 1 \quad \text{si} \quad \theta = 0.$$

On pose, pour tout $n \geqq 1$, $\mu_n = \sum_{k=0}^{a_n - 1} p_n(k) \varepsilon_k$ où μ_n est la mesure de probabilité associée à X_n: $\forall k \; 0 \leqq p_n(k) \leqq 1$, $\sum_{k=0}^{a_n - 1} p_n(k) = 1$.

Dans une première étape[1], montrons que si μ_X possède une densité continue f sur $[0, 1]$, nécessairement f est donné en tout point $x = X(\omega)$ par la formule:

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} a_n p_n[X_n(\omega)].$$

En effet, f étant continue, en tout point x de $[0, 1]$, on a

$$f(x) = \lim_{\substack{0 \leqq h' \to 0 \\ 0 \leqq h'' \to 0 \\ h' + h'' > 0}} \frac{1}{h' + h''} \int_{x-h'}^{x+h''} f(u)\, du,$$

soit

$$f(x) = \lim \frac{1}{h' + h''} \mu_X(x - h', x + h'').$$

Si

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_1 \dots a_n}$$

et si on pose

$$t'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_1 \dots a_k}, \qquad t''_n = t'_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k - 1}{a_1 \dots a_k},$$

$$h'_n = x - t'_n, \qquad h''_n = t''_n - x$$

alors

$$\frac{1}{h'_n + h''_n} \mu_X(x - h'_n, x + h''_n) = \prod_{k=1}^{n} a_k p_k(x_k),$$

ce qui achève la preuve de l'assertion annoncée.

Traduisons la continuité de f, c'est-à-dire de

$$x \longmapsto \prod_{n=1}^{\infty} a_n p_n[X_n(\omega)]$$

si $x = X(\omega)$, aux points $k/a_1 \dots a_n$. Plus précisément, soit

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_1 \dots a_k}$$

avec $0 < x_n < a_n$, si

$$x_N = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{a_1 \dots a_k} + \frac{x_n - 1}{a_1 \dots a_n} + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{a_k - 1}{a_1 \dots a_n},$$

alors nous devons avoir $f(x) = \lim_{N \to \infty} f(x_N)$, soit:

$$\prod_{k=1}^{n-1} a_k p_k(x_k) \cdot a_n p_n(x_n) \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k p_k(0)$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1} a_k p_k(x_k) \cdot a_n p_n(x_n - 1) \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k p_k(a_k - 1).$$

[1] Cette courte démonstration nous a été aimablement communiquée par S. D. Chatterji.

Pour achever la preuve du théorème 1.1, nous pouvons donc suivre pas à pas la démonstration [3] de Chatterji lorsque, pour tout $n \geqq 1$, $a_n = k$, c'est-à-dire, montrer que

$$\forall n \geqq 1, \forall k; \quad 0 \leqq k < a_n \cdot p_n(k) = \frac{1-e^{\theta/c_n}}{1-e^{\theta/c_{n-1}}} e^{\theta k/c_n} \quad \text{si} \quad \theta \neq 0$$

$$\cdot\, p_n(k) = 1/a_n \qquad \text{si} \quad \theta = 0$$

où $c_0 = 1$, $c_n = a_1 \ldots a_n$, θ est défini par $e^\theta = q_1^{a_1}$ avec $q_1 = \dfrac{1-p_1(0)}{1-p_1(a_1-1)}$.

2. Trois lemmes fondamentaux

Ce chapitre est consacré à la preuve des lemmes 2.4, 2.7, 2.8 essentiels dans la preuve du théorème principal du cas fini: théorème 3.1.

Etant donnés deux entiers m et n supérieurs à un, premiers entre eux, soit X une variable aléatoire telle que la mesure de probabilité μ_{nmX} associée à nmX appartienne à $M(n,m) \cap M(m,n)$. Il existe alors deux variables aléatoires indépendantes X_1, X_2 (resp. Y_1, Y_2) prenant leurs valeurs:

X_1 (resp. Y_2) dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$

X_2 (resp. Y_1) dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, m-1\}$

telles que (1) $nmX = mX_1 + X_2 = nY_1 + Y_2$.

Lemme 2.1. *Si m et n sont deux entiers supérieurs à un, premiers entre eux, alors $C(m,n) \cap C(n,m) = C(\widetilde{mn})$.*

Si $\mu_{nmX} \notin C(m,n) \cap C(n,m)$, mais $\mu_{nmX} \in M(n,m) \cap M(m,n)$ et si $1 < n < m$, alors $\mu_{X_1} \in D(n)$.

Le lemme 2.1 apparait comme un corollaire du théorème suivant sur les polynômes:

Théorème 2.1. *Etant donnés deux entiers m et n supérieurs à un, premiers entre eux, soient P, Q, R, S des polynômes à coefficients complexes tels que:*

$$E(x) = P(x^m)\,Q(x) = R(x^n)\,S(x) \quad et \quad d^0 P < n, \quad d^0 Q < m, \quad d^0 R < m, \quad d^0 S < n. \tag{2}$$

On a l'alternative suivante: ($v(E)$ étant la valuation du polynôme E)

ou bien A) $d^0 E - v(E) = mn - 1$ *(dit cas non dégénéré) et alors, il existe deux nombres complexes a et p tels que* $E(x) = a\dfrac{1-(px)^{mn}}{1-px}$.

ou bien B) $d^0 E - v(E) < mn - 1$ *(dit cas dégénéré) et, si $1 < n < m$, alors il existe un entier k et un nombre complexe a tel que $P(x) = a x^k$.*

Le théorème 2.1 entraîne bien le lemme 2.1; en effet la relation (1) entraîne $E(x) = P(x^m)\,Q(x) = R(x^n)\,S(x)$ où P (resp. Q, R, S) est la fonction génératrice de la variable aléatoire X_1 (resp. X_2, Y_1, Y_2). Il est clair que les polynômes P, Q, R, S à coefficients réels, positifs sont tels que $d^0 P < n$, $d^0 Q < m$, $d^0 R < m$, $d^0 S < n$. De plus, il est clair que la condition $d^0 E - v(E) = mn - 1$ est équivalente à $\mu_{nmX}(0) > 0$ et $\mu_{nmX}(nm-1) > 0$ ce qui implique en particulier que $\mu_{nmX} \in C(n,m) \cap C(m,n)$ entraîne $d^0 E - v(E) = mn - 1$ et réciproquement d'après l'assertion A) du théorème 2.1.

Démonstration du théorème 2.1. Si A est un polynôme quelconque, on pose: $i(A) = d^0(A) - v(A)$. La relation (2) peut s'écrire sous la forme:

$$E(x) = x^{v(E)} P'(x^m)\, Q'(x) = x^{v(E)} R'(x^n)\, S'(x) \tag{3}$$

avec

$$d^0 P' = i(P), \qquad d^0 Q' = i(Q), \qquad d^0 R' = i(R), \qquad d^0(S') = i(S)$$

et

$$v(P') = v(Q') = v(R') = v(S') = 0.$$

Posons:

$$P'(x^m) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i x^{im}, \qquad Q'(x) = \sum_{j=0}^{m-1} q_j x^j,$$

$$R'(x^n) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} r_\alpha x^{\alpha n}, \qquad S'(x) = \sum_{\beta=0}^{n-1} s_\beta x^\beta.$$

On peut toujours supposer $p_0 = q_0 = r_0 = s_0 = 1$ et comme m et n sont deux entiers supérieurs à un, premiers entre eux, si $1 < n < m$, il existe un couple d'entiers (i_0, α_0) tel que $0 < i_0 < n$, $0 < \alpha_0 < m$ et[2] $m i_0 = n\alpha_0 + 1$.

Soient les applications:

$$M(i,j) = mi + j, \qquad 0 \leqq i < n, \quad 0 \leqq j < m$$
$$N(\alpha,\beta) = n\alpha + \beta, \qquad 0 \leqq \alpha < m, \quad 0 \leqq \beta < n.$$

L'identité de Bezout[2] devient

$$M(i_0, 0) = N(\alpha_0, 1). \tag{4}$$

On pose $m = np + r$ où $0 < r < n$.

Nous allons faire une étude systématique des coefficients de ces polynômes[2]; il est toutefois possible de faire une étude des zéros des fonctions génératrices [7] qui est l'idée première et la plus naturelle pour aborder le problème de la décomposition des lois de probabilité (étude des zéros de la transformée de Fourier dans des cas plus généraux) et c'est cette méthode qui donne la preuve la plus élégante que nous connaissons du cas dégénéré du théorème 2.1.

Lemme 2.2. i) *Si* $0 \leqq j \leqq n-1$, $M(0,j) = N(0,j)$.

ii) *Si* $0 \leqq j \leqq n-2$, $M(i_0, j) = N(\alpha_0, j+1)$.

iii) *Si* $1 \leqq t \leqq p$, $M(0, nt-1) = N(t-1, n-1)$.

iv) *Si* $0 \leqq t \leqq p$, $M(0, nt) = N(t, 0)$.

v) *Si* $1 \leqq t \leqq p-1$ *et* $nt - 1 \leqq j \leqq n(t+1) - 2$, $M(i_0, j) = N(\alpha_0 + t, j + 1 - nt)$.

vi) *Si* $np - 1 \leqq j \leqq m-1$, $M(i_0, j) = N(\alpha_0 + p, j + 1 - np)$.

La vérification est immédiate, compte-tenu de (4) et de $\alpha_0 < m - p$.

---

[2] Cette démonstration nous a été suggérée par P.L. Hennequin.

On peut remarquer que $M(i,j)=N(\alpha,\beta)$ entraîne sur les coefficients des polynômes:

$$p_i\,q_j=r_\alpha\,s_\beta. \tag{5}$$

Corollaire 2.2. *Si p_{i_0} et r_{α_0} sont non nuls et si on pose $A=p_{i_0}/r_{\alpha_0}$, alors pour tout β tel que $0\leqq\beta\leqq n-1$ (resp. tout j tel que $0\leqq j\leqq m-1$)*

$$s_\beta=A^\beta \qquad (\textit{resp. } q_j=A^j).$$

Compte-tenu de $p_0=q_0=r_0=s_0=1$, i) entraîne: $0\leqq j\leqq n-1$, $q_j=s_j$ et ii) entraîne: $0\leqq j\leqq n-2$, $p_{i_0}q_j=r_{\alpha_0}s_{j+1}$ soit, si $0\leqq j\leqq n-2$, $q_{j+1}=s_{j+1}=A\,q_j$ ce qui implique

vii) si $0\leqq j\leqq n-1$, $q_j=s_j=A^j$.

Montrons que pour tout t fixé tel que $1\leqq t\leqq p-1$, si j est tel que $n\,t-1\leqq j\leqq n(t+1)-2$ alors $q_j=A^{j-n(t-1)}\,q_{n(t-1)}$.

En effet, compte-tenu de vii), v) entraîne:

$$p_{i_0}\,q_j=r_{\alpha_0+t}\,A^{j+1-nt}$$

or, pour $j=n\,t-1$, v) entraîne $p_{i_0}\,q_{nt-1}=r_{\alpha_0+t}$ soit, p_{i_0} étant non nul, $q_j=A^{j+1-nt}\,q_{nt-1}$ et d'après iii) $q_j=A^{j+1-nt}A^{n-1}r_{t-1}$, ce qui entraîne, compte-tenu de iv),

$$q_j=A^{j-(t-1)n}\,q_{n(t-1)}.$$

Si $t=1$, on a donc pour $n-1\leqq j\leqq 2n-2$, $q_j=A^j$ et par récurrence sur t, il s'ensuit que, compte-tenu de vii):

$$0\leqq j\leqq n\,p-2, \qquad q_j=A^j.$$

Le cas $n\,p-1\leqq j\leqq m-1$ ne diffère que par la longueur de la suite j et un raisonnement tout à fait analogue, il suffit de remplacer v) par vi), nous permet d'achever la preuve du corollaire 2.2.

Lemme 2.3. *Pour tout i tel que $1\leqq i\leqq n-1$, si on pose $r\,i=n\,q_i+r_i'$ avec $0\leqq r_i'<n$, alors*

a) $M(i,0)=N(i\,p+q_i,r_i')$,

b) $M(i-1,m-r_i')=N(i\,p+q_i,0)$.

On rappelle que $m=n\,p+r$ et il est facile de voir que $r_i'>0$ et $p\,i+q_i<m$, d'où la vérification immédiate du lemme.

Corollaire 2.3. *Si p_{i_0} et r_{α_0} sont non nuls et si on pose $A=p_{i_0}/r_{\alpha_0}$, alors pour tout i tel que $0\leqq i\leqq n-1$, $p_i=A^{im}$.*

La relation (5) $p_i\,q_j=r_\alpha\,s_\beta$ si $M(i,j)=N(\alpha,\beta)$ et le lemme 2.3 entraînent

$$\text{si}\quad 1\leqq i\leqq n-1, \qquad p_i=r_{ip+q_i}\,s_{r_i'}, \qquad p_{i-1}\,q_{m-r_i'}=r_{ip+q_i}$$

soit, compte-tenu du corollaire 2.2:

$$\text{si}\quad 1\leqq i\leqq n-1, \qquad p_i=p_{i-1}\,A^m,$$

ce qui achève la preuve du corollaire 2.3.

Remarques. 1. Le lemme 2.3 entraîne: pour tout i, $0<i<n$, $p_{i-1}=0$ implique $p_i=0$.

2. Si p_{i_0} et r_{α_0} sont non nuls, alors: $i(E)=mn-1$.

3. La relation (4) entraîne: $r_{\alpha_0}=0$ implique $p_{i_0}=0$.

Compte-tenu des remarques faites, il est clair que $i(E)=mn-1$ est équivalent à p_{i_0} et r_{α_0} sont non nuls et par conséquent les corollaires 2.2 et 2.3 achèvent la preuve du théorème 2.1 dans le cas non dégénéré.

Si $i(E)<mn-1$, nécessairement $p_{i_0}=0$ et pour achever la preuve du théorème 2.1, il suffit de montrer, compte-tenu de la remarque 1 que $p_1=0$.

Soit $i_1=\min\{i;\ p_i=0\}$ et supposons $i_1>1$. Si on pose $m i_1=n p i_1+n q_1+r_1$ avec $0<r_1<n$, il est clair que $r\neq r_1$ et que l'on a: (on rappelle que $m=np+r$)

i) $M(1,0)=N(p,r)$.
ii) $M(0,m-r)=N(p,0)$.
ii') Si $r>r_1$, $M(0,m-r_1)=N(p,r-r_1)$.
iii) $M(i_1,0)=N(p i_1+q_1,r_1)$.
iv) $M(i_1-1,r)=N(p(i_1-1)+q_1,r_1)$.
iv') Si $r>r_1$, $M(i_1-1,r-r_1)=N(p(i_1-1)+q_1,0)$.
v) $M(i_1-1,m-r_1)=N(p i_1+q_1,0)$.
v') Si $r<r_1$, $M(i_1-1,m-r)=N(p i_1+q_1,r_1-r)$.

La relation iii) entraîne soit $r_{p i_1+q_1}=0$ soit $s_{r_1}=0$.

Si $s_{r_1}=0$, iv) entraîne $q_r=0$ soit $s_r=0$, d'où, compte-tenu de i) $p_1=0$.

Si $s_{r_1}\neq 0$ alors $r_{p i_1+q_1}=0$. Si $r<r_1$, v') entraîne $q_{m-r}=0$ soit d'après ii) puis i) $p_1=0$. Si $r>r_1$, v) entraîne $q_{m-r_1}=0$ soit d'après ii') soit $r_p=0$ et alors d'après i) $p_1=0$, soit $s_{r-r_1}=0$. $s_{r-r_1}=0$ implique $q_{r-r_1}=0$ soit, d'après iv'), $r_{p(i_1-1)+q_1}=0$ et iv) implique $q_r=0$ soit $s_r=0$ et d'après i) $p_1=0$.

Ceci achève la preuve du théorème 2.1.

Ce premier résultat nous conduit à l'étude de $C(a_1,b_1)\cap C(a_2,b_2)$ où $a_1 b_1=a_2 b_2$, étude faisant l'objet des lemmes 2.4 et 2.6.

Lemme 2.4 «lemme d'arrachage». *Etant donnés deux entiers m et n supérieurs à un, premiers entre eux et deux entiers a et b supérieurs ou égaux à un, on a:*

$$C(am,bn)\cap C(an,bm)=C(a,\widetilde{mn},b).$$

Ce lemme apparaît comme un corollaire d'une partie du théorème suivant, légère généralisation du théorème 2.1.

Théorème 2.2. *Les entiers a, b, m, n étant tels que: a et b sont supérieurs ou égaux à un, m et n sont supérieurs à un et premiers entre eux, soient les polynômes P, Q, R, S à coefficients complexes tels que:*

$$E(x)=P(x^{bm})\,Q(x)=R(x^{bn})\,S(x) \tag{1}$$

et $d^0P<an$, $d^0Q<bm$, $d^0R<am$, $d^0S<bn$. La valuation d'un polynôme A étant notée $v(A)$, on pose $i(A)=d^0A-v(A)$ et on définit les entiers a_1,n_1,m_1,n_2,m_2,b_1 par

$$i(E)=bm(a_1n+n_1)+bm_1+b_1=bn(a_1m+m_2)+bn_2+b_1$$

avec $0\leqq n_1<n$, $0\leqq m_2<m$, $0\leqq b_1<b$.

On a l'alternative suivante:

ou bien A) $m n_1 + m_1 = m n - 1$ *et alors, il existe un nombre complexe A et deux polynômes E_1 et E_2 tels que*

$$E(x) = E_1(x^{bmn}) \frac{1-(A x^b)^{mn}}{1 - A x^b} E_2(x)$$

avec $d^0 E_1 < a$ et $d^0 E_2 < b$.

ou bien B) $m n_1 + m_1 < m n - 1$ *et si $n < m$, alors il existe un polynôme E_1 et un entier k tels que: $P(x^{bm}) = E_1(x^{bmn}) x^{kbm}$ avec $d^0 E_1 < a$ et $0 \leqq k < n$.*

Le théorème 2.2 entraîne bien le lemme 2.4; en effet si on pose $N = a n m b$, de façon analogue au lemme 2.1, $\mu_{NX} \in C(a n, b m) \cap C(a m, b n)$ entraîne $m n_1 + m_1 = m n - 1$ et par conséquent l'assertion A) du théorème 2.2 entraîne le lemme 2.4.

Démonstration du théorème 2.2. Supposons $n < m$ et posons:

$$P(x^{bm}) = \sum_{j=0}^{a-1} P_j(x^{bm}) x^{bmnj}, \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{b-1} Q_k(x^b) x^k,$$

$$R(x^{bn}) = \sum_{\alpha=0}^{a-1} R_\alpha(x^{bn}) x^{bmn\alpha}, \qquad S(x) = \sum_{\beta=0}^{b-1} S_\beta(x^b) x^\beta,$$

avec, pour tout j, $d^0 P_j < n$, pour tout k, $d^0 Q_k < m$, pour tout α, $d^0 R_\alpha < m$, pour tout β, $d^0 S_\beta < n$.

La relation (1) entraîne $i(E) = b m i(P) + i(Q) = b n i(R) + i(S)$, soit $i(E) = b m(a_1 n + n_1) + b m_1 + b_1 = b n(a_1 m + m_2) + b n_2 + b_1$.

Il est clair que la relation (1) entraîne: pour tout j, $0 \leqq j < a$ et pour tout k, $0 \leqq k < b$

$$E_{j,k}(x^b) = P_j(x^{bm}) Q_k(x^b) = R_j(x^{bn}) S_k(x^b). \tag{2}$$

Le lemme qui suit, est essentiel pour la preuve du théorème 2.2.

Lemme 2.5. *Si $n < m$ et s'il existe j_0, $0 \leqq j_0 < a$, et k_0, $0 \leqq k_0 < b$, tels que $i(E_{j,k}) < m n - 1$, alors il existe un entier r, $0 \leqq r < n$ et une suite $\{c_j, 0 \leqq j < a\}$ tels que pour tout j, $0 \leqq j < a$, $P_j(x) = c_j x^r$.*

$m n_1 + m_1 < m n - 1$ est équivalent à l'existence d'un couple (j, k) tel que $i(E_{j,k}) < m n - 1$.

Compte-tenu du théorème 2.1, $i(E_{j_0,k_0}) < m n - 1$ implique $i(P_{j_0}) = 0$ et par conséquent, m et n étant premiers entre eux, nécessairement soit $i(Q_{k_0}) < m - 1$, soit $i(S_{k_0}) < n - 1$. Ceci implique que, pour tout j, $i(E_{j,k_0}) < m n - 1$, soit compte-tenu du théorème 2.1, $i(P_j) = 0$. Pour achever la preuve de la première assertion, il suffit de remarquer que s'il existe j_1, j_2 et deux entiers r_1, r_2 de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ avec $r_1 < r_2$ tels que

$$P_{j_1}(x) = c_{j_1} x^{r_1} \quad \text{et} \quad P_{j_2}(x) = c_{j_2} x^{r_2}$$

alors

$$c_{j_1} R_{j_2}(x^n) = c_{j_2} x^{(r_2 - r_1)m} R_{j_1}(x^n)$$

d'où, m et n étant premiers entre eux, la contradiction.

La première assertion entraîne en particulier que l'existence d'un couple (i, j) tel que $i(E_{j,k}) < mn-1$ implique $mn_1 + m_1 < mn-1$. De plus, il est clair que $mn_1 + m_1 < mn-1$ implique l'existence d'un couple (j, k) tel que $i(E_{j,k}) < mn-1$; ce qui achève la preuve du lemme 2.5.

Si $mn_1 + m_1 < nm-1$ et si $n < m$, le lemme 2.5 achève la preuve de l'assertion B) du théorème 2.2.

Si $mn_1 + m_1 = mn-1$, compte-tenu du lemme 2.5 et du théorème 2.1, pour tout j, $0 \leqq j < a$ et pour tout k, $0 \leqq k < b$, $E_{j,k}(x^b)$ est de la forme $a \dfrac{1-(p x^b)^{mn}}{1-p x^b}$ où a et p dépendent de j et de k; on note $a(j, k)$, $p(j, k)$.

Pour achever la preuve du théorème 2.2, il suffit de remarquer que si (j_0, k_0) est un couple d'entiers tels que $0 \leqq j_0 < a$, $0 \leqq k_0 < b$, alors:

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } k \text{ tel que } 0 \leqq k < b, \quad p(j_0, k) = p(j_0, k_0)\\ &\text{pour tout } j \text{ tel que } 0 \leqq j < a, \quad p(j, k_0) = p(j_0, k_0) \end{aligned}$$

et par conséquent que p est indépendent de j et de k.

Lemme 2.6. *Soient deux suites d'entiers supérieurs à un, $\{a_j,\ 1 \leqq j \leqq n\}$ et $\{b_j,\ 1 \leqq j \leqq m\}$ telles que $m \leqq n$ et $a_1 \dots a_n = b_1 \dots b_m$.*

S'il existe une suite d'entiers $\{i_j,\ 1 \leqq j \leqq m\}$ telle que:

$$\begin{aligned} &1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_m = n\\ &\forall j, \quad 1 \leqq j \leqq m, \quad a_1 \dots a_{i_j} = b_1 \dots b_j \end{aligned}$$

alors $M(a_1, \dots, a_n) \subset M(b_1, \dots, b_m)$.

La vérification est immédiate.

Lemme 2.7 «petit lemme d'arrachage». *Si a, b, m sont trois entiers supérieurs à un alors $C(am, b) \cap C(a, bm) = C(a, m, b)$.*

Soient $N = abm$ et X une variable aléatoire telle que μ_{NX} appartienne à $C(am, b) \cap C(a, bm)$, alors il existe deux variables aléatoires indépendantes X_1, X_2 (resp. Y_1, Y_2) prenant leurs valeurs:

$$\begin{aligned} &X_1 \text{ dans } \{0, 1, \dots, am-1\} \quad (\text{resp. } Y_1 \text{ dans } \{0, 1, \dots, a-1\})\\ &X_2 \text{ dans } \{0, 1, \dots, b-1\} \quad (\text{resp. } Y_2 \text{ dans } \{0, 1, \dots, bm-1\}) \end{aligned}$$

telles que $NX = bX_1 + X_2 = bmY_1 + Y_2$.

Ceci entraîne que

$$E(x) = P(x^b)\, Q(x) = R(x^{bm})\, S(x) \tag{1}$$

où P (resp. Q, R, S) est la fonction génératrice de la variable aléatoire X_1 (resp. X_2, Y_1, Y_2). Si on pose:

$$P(x^b) = \sum_{i=0}^{a-1} P_i(x^b)\, x^{bmi}, \qquad Q(x) = \sum_{j=0}^{b-1} q_j\, x^j$$

$$R(x^{bm}) = \sum_{\alpha=0}^{a-1} r_\alpha\, x^{bm\alpha}, \qquad S(x) = \sum_{\beta=0}^{b-1} S_\beta(x^b)\, x^\beta$$

il est clair que la relation (1) entraîne:

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } \beta, \quad 0 \leqq \beta < b, \quad r_0\, S_\beta(x^b) = P_0(x^b) \cdot q_\beta\\ &\text{pour tout } i, \quad 0 \leqq i < a, \quad q_{b-1}\, P_i(x^b) = r_i\, S_{b-1}(x^b). \end{aligned}$$

Les nombres réels r_0 et q_{b-1} étant non nuls, on a:

$$\begin{aligned} &\textit{pour tout } \beta, \quad 0 \leqq \beta < b, \quad S_\beta(x^b) = \frac{q_\beta}{r_0} P_0(x^b) \\ &\textit{pour tout } i, \quad 0 \leqq i < a, \quad P_i(x^b) = \frac{r_i}{q_{b-1}} S_{b-1}(x^b). \end{aligned} \tag{I}$$

Réciproquement (I) vérifie (1) et $r_0 E(x) = R(x^{bm}) P_0(x^b) Q(x)$.

Ceci, compte-tenu de $C(a, m, b) \subset C(am, b) \cap C(a, bm)$, achève la preuve du lemme 2.7.

Lemme 2.8 «lemme de recollement». *Si a et d sont des entiers supérieurs ou égaux à un et b et c deux entiers supérieurs à un, alors:*

$$C(ab, \overset{\smile}{cd}) \cap C(a, \overset{\smile}{bc}, d) = C(a, \overset{\smile}{\overset{\smile}{bc}d})$$
$$C(\overset{\smile}{ab}, cd) \cap C(a, \overset{\smile}{bc}, d) = C(\overset{\smile}{a\overset{\smile}{bc}}, d).$$

Soient $N = abcd$, X une variable aléatoire telle que la mesure associée à NX soit un élément de $C(ab, \overset{\smile}{cd}) \cap C(a, \overset{\smile}{bc}, d)$ alors, par définition, on peut écrire $NX = cdX_1 + X_2 = bcdY_1 + dY_2 + Y_3$ ce qui se traduit à l'aide des fonctions génératrices de ces variables aléatoires par:

$$E(x) = P(x^{cd}) \cdot A \frac{1-(px)^{cd}}{1-px} = Q(x^{bcd}) \cdot B \frac{1-(qx^d)^{bc}}{1-qx^d} \cdot R(x) \tag{1}$$

avec $d^0 P = ab-1$, $d^0 Q = a-1$, $d^0 R = d-1$, et les nombres $P(0)$, A, p, $Q(0)$, B, q, $R(0)$ strictement positifs. Pour simplifier les notations, nous pouvons toujours supposer, que $P(0) = A = B = Q(0) = R(0) = 1$. Il est clair que $R(x) = \sum_{k=0}^{d-1} p^k x^k$ et en explicitant le coefficient de x^d de $E(x)$ que $p^d = q$ ce qui implique, à un facteur multiplicatif $\lambda > 0$ près, que $E(x)$ est égal à

$$Q(x^{bcd}) \frac{1-(px)^{bcd}}{1-(px)^d} \frac{1-(px)^d}{1-px} \quad \text{soit } \mu_{NX} \in C(a, \overset{\smile}{\overset{\smile}{bc}d})$$

ce qui achève la preuve de la première assertion, compte-tenu de

$$C(a, \overset{\smile}{\overset{\smile}{bc}d}) \subset C(ab, \overset{\smile}{cd}) \cap C(a, \overset{\smile}{bc}, d)$$

et du lemme 2.8, la relation symétrique se démontrant de façon analogue.

3. Théorème principal de l'étude du cas fini (théorème 3.1)

Etant données n suites $\{a_k^{(j)}, 1 \leqq k \leqq t_j\}$ d'entiers supérieurs à un, telles que, pour tout j, $1 \leqq j \leqq n$, $a_1^{(j)} \dots a_{t_j}^{(j)} = A$, on pose:

$$\begin{aligned} &\forall j, \qquad 1 \leqq j \leqq n, \quad c_0^{(j)} = 1 \\ &\forall j, \forall k, \quad 1 \leqq k \leqq t_j, \quad c_k^{(j)} = a_1^{(j)} \dots a_k^{(j)}. \end{aligned}$$

Si I est un n-uplet $(i_1, \dots, i_n)$ avec $1 \leqq i_k \leqq t_k$, on pose

$$A_I = \{(c_{i_j-1}^{(j)} \alpha_j, 1 \leqq j \leqq n); \alpha_j | a_{i_j}^{(j)}\} \quad \text{et} \quad B_I = \{x; (x, \dots, x) \in A_I\}.$$

Pour tout n-uplet I tel que B_I soit non vide, on pose:

$$M_I = \max\{x;\ x \in B_I\}$$
$$m_I = \min\{x;\ x \in B_I\}.$$

Lemme 3.1. *Si B_I est non vide alors m_I divise M_I.*

Soit $I=(i_1,\ldots,i_n)$ avec $1 \leqq i_j \leqq t_j$. Pour tout j, il existe deux entiers p_j et q_j diviseurs de $a_{i_j}^{(j)}$ tels que: $m_I = c_{i_j-1}^{(j)} p_j$, $M_I = c_{i_j-1}^{(j)} q_j$. D'après la définition de m_I, il est clair que les entiers $p_1,\ldots,p_n$ sont premiers dans leur ensemble. De plus, on a la relation, pour tout j, $1 \leqq j \leqq n$, (1) $p_1 q_j = q_1 p_j$. Si p_1 ne divise pas q_1, alors il existe deux entiers r et s, supérieurs à un, premiers entre eux tels que $p_1 = r[p_1, q_1]$ et $q_1 = s[p_1, q_1]$ où $[p_1, q_1]$ désigne le p.g.c.d. des entiers p_1 et q_1.

La relation (1) devient $r q_j = s p_j$ ce qui implique r divise le p.g.c.d. $[p_1,\ldots,p_n]$ des entiers $p_1,\ldots,p_n$, d'où la contradiction. Ceci entraîne que p_1 divise q_1, soit m_I divise M_I.

Etant donnés deux n-uplets $I=(i_1,\ldots,i_n)$ et $J=(j_1,\ldots,j_n)$ tels que, pour tout k, $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq i_k \leqq t_k$, $1 \leqq j_k \leqq t_k$, on notera $I \leqq J$ si, pour tout k, $i_k \leqq j_k$.

Lemme 3.2. *Si B_I et B_J sont non vides et si $I \neq J$, alors*

ou bien $m_I = M_I = m_J = M_J$

ou bien $I \leqq J$ et M_I divise m_J

ou bien $J \leqq I$ et M_J divise m_I.

De plus si $M_I = M_J$ alors, pour tout k, $1 \leqq k \leqq n$, $|i_k - j_k| \leqq 1$ et s'il existe k tel que $|i_k - j_k| = 1$ alors $M_I = c_{\min(i_k, j_k)}^{(k)}$.

Si $I \leqq J$, comme $I \neq J$, il existe k tel que $i_k < j_k$ ce qui entraîne $M_I | c_{i_k}^{(k)} | c_{j_k-1}^{(k)} | m_J$. De même si $J \leqq I$, M_J divise m_I.

Si I et J ne sont pas comparables, nécessairement il existe k_1 et k_2 tels que $i_{k_1} < j_{k_1}$ et $j_{k_2} < i_{k_2}$, soit, compte-tenu du lemme 3.1,

$$m_I | M_I | c_{i_{k_1}}^{(k_1)} | c_{j_{k_1}-1}^{(k_1)} | m_J | M_J \quad \text{et} \quad m_J | M_J | c_{j_{k_2}}^{(k_2)} | c_{i_{k_2}-1}^{(k_2)} | m_I | M_I$$

ce qui implique $m_I = M_I = m_J = M_J$.

Si $M_I = M_J$, il ne peut exister k tel que $i_k < j_k - 1$, sinon $M_I \leqq c_{i_k}^{(k)} < c_{j_k-1}^{(k)} \leqq M_J$ d'où $M_I < M_J$; de même, il ne peut exister k tel que $j_k < i_k - 1$.

Si $M_I = M_J$ et de plus, si $|i_k - j_k| = 1$, il est facile de voir que $M_I = c_{\min(i_k, j_k)}^{(k)}$.

Corollaire. *Si $M_I = M_J$ et $I \neq J$ alors ou bien $m_I = M_I$, ou bien $m_J = M_J$.*

C'est une conséquence immédiate de la dernière assertion du lemme 3.2.

Désignons par S^+ l'image de l'ensemble des n-uplets I, tels que B_I soit non vide, par l'application $I \mapsto M_I$ et par $M_1,\ldots,M_p$ les éléments de S^+ rangés par ordre croissant. Il est clair que $M_p = A$.

Soit, pour tout k, $1 \leqq k \leqq p$, E_k l'ensemble des n-uplets I tels que $M_I = M_k$ et S_k^- l'image de E_k par l'application $I \mapsto m_I$.

D'après le corollaire du lemme 3.2, S_k^- a un ou deux éléments; on pose $m_k = \min\{x;\ x \in S_k^-\}$.

Les éléments de S^+ sont distincts, par contre, les éléments $m_1,\ldots,m_p$ ne sont nécessairement ni distincts entre eux, ni distincts des éléments de S^+.

On note par S la suite $m_1, M_1, m_2, \ldots, m_p, M_p$. Plus précisément, on a le lemme suivant: (on note a divise b par $a|b$).

Lemme 3.3. *Les suites d'entiers $m_1, \ldots, m_p$ et $M_1, \ldots, M_p$ satisfont aux propriétés suivantes:*

i) $1 = m_1 | M_1 | m_2 | \ldots | m_p | M_p = A$,

ii) *pour tout k, $1 \leqq k \leqq p$, il existe un n-uplet I tel que $m_I = m_k$ et $M_I = M_k$,*

iii) *$M_I = M_k$ entraîne: «ou bien $m_I = m_k$ ou bien $m_I = M_I$».*

Les assertions ii) et iii) découlent immédiatement de la définition des M_k, m_k et du corollaire du lemme 3.2.

Il est clair que $m_1 = m_{I_0} = 1$ où $I_0 = (1, \ldots, 1)$ et donc que $1 = m_1 | M_1$.

Pour achever la preuve du lemme, il suffit donc de montrer que pour tout k, $1 < k \leqq p$, on a $M_{k-1} | m_k | M_k$. Par construction il existe un n-uplet J tel que $M_J = M_{k-1}$ et l'assertion ii) du lemme implique l'existence d'un n-uplet I tel que $M_I = M_k$ et $m_I = m_k$. Le lemme 3.2 entraîne, M_I étant différent de M_J, ou bien M_I divise m_J ou bien M_J divise m_I. Si M_I divise m_J alors M_I divise M_J et comme M_J divise M_I, nous avons une contradiction avec $M_I \neq M_J$.

Ceci, compte-tenu du lemme 3.1, achève la preuve du lemme 3.3.

Le théorème qui suit, est le théorème principal de l'étude du cas fini et le reste de ce chapitre est consacré à sa preuve.

Théorème 3.1. *Etant données n suites $\{a_k^{(j)}, 1 \leqq k \leqq t_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, d'entiers supérieurs à un, telles que, pour tout j, $a_1^{(j)} \ldots a_{t_j}^{(j)} = A$ où A est un entier donné, on a:*

$$\bigcap_{j=1}^{n} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) = C\left(\frac{M_1}{m_1}, \frac{\check{m}_2}{M_1}, \frac{M_2}{m_2}, \ldots, \frac{\check{m}_p}{M_{p-1}}, \frac{M_p}{m_p}\right)$$

où les suites $m_1, \ldots, m_p$ et $M_1, \ldots, M_p$ sont définies comme ci-dessus et où on convient de supprimer les termes égaux à un dans le second membre de l'égalité précédente.

Pour démontrer ce théorème, nous allons procéder par récurrence sur n. Dans une première étape, nous allons établir le théorème pour $n = 2$ et tout d'abord, établir la proposition suivante qui nous a été proposée par Letac.

Proposition 3.1. *Si les suites d'entiers $\{a_k^{(j)}, 1 \leqq k \leqq t_j\}$, $j = 1, 2$ sont telles que la suite S correspondante se réduit à 1, 1, A, A (on dira que les suites vérifient l'hypothèse (H)) on a:*

$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) = C(\check{A}).$$

Le lemme 2.6 entraîne

$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) \subset \bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, a_2^{(j)} \ldots a_{t_j}^{(j)}).$$

L'hypothèse (H) entraîne en particulier que, si $I_0 = (1, 1)$, $B_{I_0} = \{1\}$ soit les entiers $a_1^{(1)}$ et $a_1^{(2)}$ sont premiers entre eux. Le lemme d'arrachage entraîne donc:

$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) \subset C(\widecheck{a_1^{(1)} a_1^{(2)}}, T) \quad \text{où} \quad T = A / a_1^{(1)} a_1^{(2)}.$$

Pour démontrer cette proposition, procédons par récurrence: le lemme qui suit est essentiel:

Lemme 3.4. *S'il existe un entier p supérieur à un, diviseur de A tel que*

$$A/p>1 \quad et \quad \bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) \subset C(\check{p}, A/p),$$

alors il existe un entier q supérieur à un tel que:

$$p\,q \text{ divise } A,$$
$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) \subset C(\widecheck{pq}, A/p\,q).$$

Posons, pour $j=1,2$, $\alpha_j-1=\max\{k;\ c_k^{(j)}|p\}$, $\beta_j=p/c_{\alpha_j-1}^{(j)}$.

Comme $A/p>1$, nécessairement, pour $j=1,2$, $\alpha_j \leqq t_j$ et par construction, $a_{\alpha_j}^{(j)}$ n'est pas un diviseur de β. De plus, d'après l'hypothèse (H), il existe $j\in\{1,2\}$ tel que β_j ne divise pas $a_{\alpha_j}^{(j)}$, sinon $\alpha_1=\alpha_2=0$ et $\beta_1=\beta_2=0$ soit $p=1$.

On peut donc supposer, sans perte de généralité, que β_1 ne divise pas $a_{\alpha_1}^{(1)}$.

Si nous définissons alors les entiers r et s par $\beta_1=r[\beta_1, a_{\alpha_1}^{(1)}]$ et $a_{\alpha_1}^{(1)}=s[\beta_1, a_{\alpha_1}^{(1)}]$ où $[\beta_1, a_{\alpha_1}^{(1)}]$ est le p.g.c.d. des nombres β_1 et $a_{\alpha_1}^{(1)}$, on a, d'après le lemme 2.6:

$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) \subset C(c_{\alpha_1-1}^{(1)}\, a_{\alpha_1}^{(1)}, A/c_{\alpha_1}^{(1)}) \cap C(c_{\alpha_1-1}^{(1)}\, \beta_1, A/p)$$

et, r et s étant premiers entre eux, d'après le lemme d'arrachage:

$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) \subset C(c_{\alpha_1-1}^{(1)}[\beta_1, a_{\alpha_1}^{(1)}], \widecheck{rs}, N) \quad \text{où} \quad N=A/p\,s$$

soit

$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) \subset C(p/r, \widecheck{rs}, N) \cap C(\check{p}, A/p).$$

Le lemme de recollement entraîne $\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) \subset C(\widecheck{ps}, N)$ ce qui achève la preuve du lemme 3.4.

Il est clair que

$$C(\check{A}) \subset \bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)});$$

compte-tenu de la remarque

$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) \subset C(\widecheck{a_1^{(1)} a_1^{(2)}}, T),$$

le lemme 3.4 avec $C(\widecheck{pq}, A/p\,q)=C(\check{A})$ si $p\,q=A$, achève donc la preuve de la proposition 3.1.

Remarque. Avec la convention faite dans l'énoncé du théorème 3.1, la proposition 3.1 peut se mettre sous la forme:

$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}) = C\left(\frac{M_1}{m_1}, \frac{\check{m}_2}{M_1}, \frac{M_2}{m_2}\right).$$

Montrons maintenant le théorème 3.1 pour $n=2$.

Posons pour tout k tel que $1 \leqq k \leqq p$, $\alpha_j(k) = \inf\{i;\ M_k | c_i^{(j)}\}$, $j=1,2$, et $\alpha(k) = (\alpha_1(k), \alpha_2(k))$. Etudions les propriétés des suites $\{\alpha_j(k),\ 1 \leqq k \leqq p\}$, $j=1,2$.

Lemme 3.5. *Pour tout k, $1 \leqq k \leqq p$, on a $M_k = M_{\alpha(k)}$, $m_k = m_{\alpha(k)}$.*
Les suites $\{\alpha_j(k),\ 1 \leqq k \leqq p\}$, $j=1,2$, sont croissantes.

Il est facile de voir que M_k étant un élément de S^+, $M_k = M_{\alpha(k)}$. Si $m_k \neq m_{\alpha(k)}$ alors nécessairement d'après la définition de m_k et le corollaire du lemme 3.2, il existe un couple $\beta = \{\beta_1, \beta_2)$ tel que $m_k = m_\beta < m_{\alpha(k)}$. Ceci implique l'existence de j tel que $\beta_j < \alpha_j(k)$ et $M_k | c_{\beta_j}^{(j)}$, d'où la contradiction.

Pour tout k tel que $0 < k < p$, M_k divise m_{k+1} entraîne $\alpha_j(k) \leqq \alpha_j(k+1)+1$ pour $j=1,2$. Or il est clair que s'il existe j tel que $\alpha_j(k) = \alpha_j(k+1)+1$ alors $m_k = M_k = m_{k+1} = M_{k+1}$ d'où la contradiction avec $M_k < M_{k+1}$.

Ceci achève la preuve du lemme 3.5.

Lemme 3.6. *Soit k un entier fixé, $1 \leqq k < p$, les trois proposition suivantes sont équivalentes:*

1. $M_k = m_{k+1}$;

2. *il existe $j \in \{1,2\}$ tel que: ou bien* i) $\alpha_j(k+1) = \alpha_j(k)$, *ou bien* ii) $\alpha_j(k+1) = \alpha_j(k)+1$ *et* $M_k = c_{\alpha_j(k)}^{(j)}$, *ou bien* iii) $\alpha_j(k+1) = \alpha_j(k)+1$ *et* $m_{k+1} = c_{\alpha_j(k+1)-1}^{(j)}$;

3. *pour tout $j \in \{1,2\}$ l'une des trois assertions* i), ii), iii) *est vraie.*

1.→3. Compte-tenu du lemme 3.5, il suffit de remarquer que $c_{\alpha_j(k)-1}^{(j)} p_j = c_{\alpha_j(k+1)-1}^{(j)} q_j$ où p_j (resp. q_j) est un diviseur de $a_{\alpha_j(k)}^{(j)}$ (resp. $a_{\alpha_j(k+1)}^{(j)}$) entraîne bien que l'une des trois assertions i), ii), iii) est vérifiée.

2.→1. D'après le lemme 3.5, on peut écrire $M_k = c_{\alpha_j(k)-1}^{(j)} p_j$ et $m_{k+1} = c_{\alpha_j(k+1)-1}^{(j)} q_j$, pour $j=1,2$, avec p_j (resp. q_j) divise $a_{\alpha_j(k)}^{(j)}$ (resp. $a_{\alpha_j(k+1)}^{(j)}$).

Si i) est vérifiée, supposons, sans perte de généralité, que $\alpha_1(k+1) = \alpha_1(k)$, alors $c_{\alpha_2(k+1)-1}^{(2)} q_2 = c_{\alpha_2(k)-1}^{(2)} \cdot p_2 \cdot (q_1/p_1)$. Nécessairement, $\alpha_2(k+1) > \alpha_2(k)$ sinon $M_k = M_{k+1}$ et $\alpha_2(k+1) \leqq \alpha_2(k)+1$ sinon $c_{\alpha_2(k)+1}^{(2)} = c_{\alpha_1(k)-1}^{(1)} p_1 (a_{\alpha_2(k)}^{(2)}/p_2)\, a_{\alpha_2(k)+1}^{(2)}$ avec $[a_{\alpha_2(k)}^{(2)}/p_2]\, a_{\alpha_2(k)+1}^{(2)}$ diviseur de q_1/p_1 et par conséquent il existe un élément x de S^+ tel que $M_k \leqq c_{\alpha_2(k)}^{(2)} < x = c_{\alpha_2(k)+1}^{(2)} \leqq c_{\alpha_2(k+1)-1}^{(2)} < M_{k+1}$ compte-tenu de la définition de $\alpha_2(k+1)$, d'où la contradiction.

Ceci implique donc $q_2(a_{\alpha_2(k)}^{(2)}/p_2) = q_1/p_1$ soit, les nombres $a_{\alpha_2(k)}^{(2)}/p_2$ et q_1/p_1 étant premiers entre eux d'après la définition de M_k et, de même, q_2 et q_1/p_1 étant premiers entre eux d'après la définition de m_{k+1}, on a $p_1 = q_1$, soit $M_k = m_{k+1}$.

Si ii) est vérifiée, supposons, sans perte de généralité, que $\alpha_1(k+1) = \alpha_1(k)+1$ et $M_k = c_{\alpha_1(k)}^{(1)}$, alors $c_{\alpha_2(k+1)-1}^{(2)} q_2 = c_{\alpha_2(k)-1}^{(2)} p_2\, q_1$.

De façon analogue à la démonstration précédente, on montre que si $\alpha_2(k+1) \neq \alpha_2(k)$, nécessairement $\alpha_2(k+1) = \alpha_2(k)+1$ et alors $q_2(a_{\alpha_2(k)}^{(2)}/p_2) = q_1$.

Les entiers q_1 et q_2 étant premiers entre eux, ou bien $q_1 = 1$ ce qui implique $M_k = m_{k+1}$ ou bien $q_2 = 1, q_1 > 1$ ce qui conduit à une contradiction, $c_{\alpha_2(k+1)-1}^{(2)} = c_{\alpha_2(k)}^{(2)}$ ne pouvant être un élément de S^+.

Si iii) est vérifiée, supposons $\alpha_1(k+1) = \alpha_1(k)+1$ et $m_{k+1} = c_{\alpha_1(k+1)-1}^{(1)}$ alors m_{k+1} est un élément de S^+ et, comme d'après la définition de $\alpha_j(k+1)$, $m_{k+1} < M_{k+1}$, nécessairement $m_{k+1} = M_k$.

Ceci achève la preuve du lemme 3.6, compte-tenu de 3. entraîne 2.

Lemme 3.7. *Etant données deux suites* $\{a_k^{(j)},\ 1 \leqq k \leqq t_j\}$ *d'entiers supérieurs à un, telles que*

$$a_1^{(j)} \dots a_{t_j}^{(j)} = A, \qquad j=1,2, \qquad \bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \dots, a_{t_j}^{(j)})$$

est contenue dans

$$\bigcap_{j=1}^{2} C\left(\frac{M_1}{m_1}, c_{\alpha_j(1)}^{(j)}/M_1, a_{\alpha_j(1)+1}^{(j)}, \dots, a_{\alpha_j(2)-1}^{(j)}, m_2/c_{\alpha_j(2)-1}^{(j)}, M_2/m_2, \dots, M_p/m_p\right)$$

en convenant de supprimer le «segment» $(c_{\alpha_j(k)}^{(j)}/M_k, a_{\alpha_j(k)+1}^{(j)}, \dots, m_{k+1}/c_{\alpha_j(k+1)-1}^{(j)})$ *si* $M_k = m_{k+1}$.

Si on pose pour tout k, $1 \leqq k \leqq p$, $r_k^{(j)} = a_{\alpha_j(k)+1}^{(j)} \dots a_{t_j}^{(j)}$ avec $r_k^{(j)} = 1$ si $\alpha_j(k) = t_j$ le lemme 2.6 entraîne pour tout k:

$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \dots, a_{t_j}^{(j)}) \subset \bigcap_{j=1}^{2} C\big(M_k(c_{\alpha_j(k)}^{(j)}/M_k), r_k^{(j)}\big).$$

Montrons que cette intersection L_k est contenue dans $C(M_k, c_{\alpha_j(k)}^{(j)}/M_k, r_k^{(j)})$. En effet si $M_k = c_{\alpha_j(k)}^{(j)}$ pour $j=1,2$ l'assertion est triviale

s'il existe j tel que $M_k = c_{\alpha_j(k)}^{(j)}$, $c_{\alpha_1(k)}^{(1)} \neq c_{\alpha_2(k)}^{(2)}$, le petit lemme d'arrachage achève la preuve de l'assertion.

si, pour tout j, $M_k \neq c_{\alpha_j(k)}^{(j)}$, les nombres $A_k^{(j)} = c_{\alpha_j(k)}^{(j)}/M_k$, $j=1,2$, étant premiers entre eux, le lemme d'arrachage entraîne: $L_k = C(M_k, A_k^{(1)} A_k^{(2)}, T)$ où $T = r_k^{(1)}/A_k^{(2)}$ ce qui, compte-tenu de la propriété de la loi géométrique, achève la preuve de l'assertion.

De même, pour tout k, en posant $c_{-1}^{(j)} = 1$, on a:

$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \dots, a_{t_j}^{(j)}) \subset \bigcap_{j=1}^{2} C\big(c_{\alpha_j(k)-1}^{(j)}, m_k/c_{\alpha_j(k)-1}^{(j)}, (M_k/m_k)\,(c_{\alpha_j(k)}^{(j)}/M_k)\, r_k^{(j)}\big).$$

Le petit lemme d'arrachage et le lemme 2.6 entraînent, pour tout k, tel que

$$1 \leqq k \leqq p, \qquad \bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \dots, a_{t_j}^{(j)}) \subset F_k$$

avec

$$F_k = \bigcap_{j=1}^{2} C(c_{\alpha_j(k)-1}^{(j)}, m_k/c_{\alpha_j(k)-1}^{(j)}, M_k/m_k, c_{\alpha_j(k)}^{(j)}/M_k, r_k^{(j)})$$

soit

$$\bigcap_{j=1}^{2} C(a_1^{(j)}, \dots, a_{t_j}^{(j)}) \subset \bigcap_{k=1}^{p} F_k.$$

Etudions pour $j=1,2$, et tout k tel que $0 < k < p$, l'intersection:

$$\begin{aligned} I_k^{(j)} = {} & C(c_{\alpha_j(k)-1}^{(j)}, m_k/c_{\alpha_j(k)-1}^{(j)}, M_k/m_k, c_{\alpha_j(k)}^{(j)}/M_k, r_k^{(j)}) \\ & \cap C(c_{\alpha_j(k+1)-1}^{(j)}, m_{k+1}/c_{\alpha_j(k+1)-1}^{(j)}, M_{k+1}/m_{k+1}, c_{\alpha_j(k+1)}^{(j)}/M_{k+1}, r_{k+1}^{(j)}). \end{aligned}$$

Si $\alpha_j(k+1)>\alpha_j(k)$, comme $(m_k/c^{(j)}_{\alpha_j(k)-1})(M_k/m_k)(c^{(j)}_{\alpha_j(k)}/M_k)=a^{(j)}_{\alpha_j(k)}$, le lemme 2.6 et le petit lemme d'arrachage entraînent:

$$\begin{aligned}I_k^{(j)}\subset C(&c^{(j)}_{\alpha_j(k)-1}, m_k/c^{(j)}_{\alpha_j(k)-1}, M_k/m_k, c^{(j)}_{\alpha_j(k)}/M_k, c^{(j)}_{\alpha_j(k+1)-1}/c^{(j)}_{\alpha_j(k)},\\ &m_{k+1}/c^{(j)}_{\alpha_j(k+1)-1}, M_{k+1}/m_{k+1}, c^{(j)}_{\alpha_j(k+1)}/M_{k+1}, r^{(j)}_{k+1}).\end{aligned}$$

Si $\alpha_j(k+1)=\alpha_j(k)$ alors, compte-tenu du lemme 3.6, $M_k=m_{k+1}$, soit:

$$\begin{aligned}m_{k+1}/c^{(j)}_{\alpha_j(k+1)-1}&=(M_k/m_k)(m_k/c^{(j)}_{\alpha_j(k)-1})\\ c^{(j)}_{\alpha_j(k)}/M_k&=(c^{(j)}_{\alpha_j(k+1)}/M_{k+1})(M_{k+1}/m_{k+1});\end{aligned}$$

$I_k^{(j)}$ est donc de la forme $I_k^{(j)}=C(A,a,b,cd,B)\cap C(A,ab,c,d,B)$ et par conséquent le lemme 2.6 entraîne:

$$I_k^{(j)}\subset C(c^{(j)}_{\alpha_j(k)-1}, m_k/c^{(j)}_{\alpha_j(k)-1}, M_k/m_k, M_{k+1}/m_{k+1}, c^{(j)}_{\alpha_j(k+1)}/M_{k+1}, r^{(j)}_{k+1}).$$

$$\bigcap_{k=1}^{p} F_k=\bigcap_{j=1}^{2}\left[\bigcap_{k=1}^{p-1} I_k^{(j)}\right].$$

Le lemme 2.6 permet donc d'achever la preuve du lemme 3.7.

Pour achever la preuve du théorème 3.1, dans le cas $n=2$, comme il est clair que le membre de droite de l'égalité annoncée est contenue dans $\bigcap_{j=1}^{n} C(a_1^{(j)},\dots,a_{t_j}^{(j)})$, il suffit, compte-tenu de la définition de la suite S et du lemme 3.7, d'étudier les intersections du type:

$$T_k=\bigcap_{j=1}^{2} C(c^{(j)}_{\alpha_j(k)}/M_k, a^{(j)}_{\alpha_j(k)+1},\dots,a^{(j)}_{\alpha_j(k+1)-1}, m_{k+1}/c^{(j)}_{\alpha_j(k+1)-1}).$$

Si $M_k=m_{k+1}$ alors, d'après le lemme 3.6 et compte-tenu des conventions adoptées dans l'énoncé du théorème 3.1, on pourra noter $T_k=C(\widetilde{m_{k+1}/M_k})$.

Si $M_k\neq m_{k+1}$ alors, d'après le lemme 3.6, ou bien $\alpha_j(k+1)>\alpha_j(k)+1$, ou bien

$$\alpha_j(k+1)=\alpha_j(k)+1 \quad \text{et} \quad M_k\neq c^{(j)}_{\alpha_j(k)}, \qquad m_{k+1}\neq c^{(j)}_{\alpha_j(k+1)-1}.$$

Par construction, il est clair que les suites

$$(c^{(j)}_{\alpha_j(k)}/M_k, a^{(j)}_{\alpha_j(k)+1},\dots,a^{(j)}_{\alpha_j(k+1)-1}, m_{k+1}/c^{(j)}_{\alpha_j(k+1)-1}) \qquad j=1,2$$

vérifient l'hypothèse (H) et par conséquent la proposition 3.1 entraîne

$$T_k=C\left(\frac{\widetilde{m_{k+1}}}{M_k}\right).$$

Le théorème 3.2 est donc démontré pour $n=2$, supposons le vrai pour $n-1$ et montrons le pour n.

$$\bigcap_{j=1}^{n} C(a_1^{(j)},\dots,a_{t_j}^{(j)})=\left[\bigcap_{j=1}^{n-1} C(a_1^{(j)},\dots,a_{t_j}^{(j)})\right]\cap C(a_1^{(n)},\dots,a_{t_n}^{n}).$$

On pose, si I est le n-uplet $(i_1, \ldots, i_n)$, I^* le $(n-1)$-uplet $(i_1, \ldots, i_{n-1})$ et on note $I=(I^*, i_n)$. On désigne par:

$$A_{I^*}=\{(c^{(j)}_{i_j-1}\,\alpha_j,\ 1\leqq j<n);\ \alpha_j|a^{(j)}_{i_j}\}$$
$$B_{I^*}=\{x;\ (x, \ldots, x)\in A_{I^*}\}$$
$$M_{I^*}=\max\{x;\ x\in B_{I^*}\}$$
$$m_{I^*}=\min\{x;\ x\in B_{I^*}\}.$$

Soit $S^*=\{m_1^*, M_1^*, \ldots, m_q^*, M_q^*\}$ la suite S associée aux $(n-1)$ suites $\{a_k^{(j)}, 1\leqq k\leqq t_j\}$, $j=1,2,\ldots,n-1$, possédant les propriétés du lemme 3.3, avec $m_k=m_k^*$, $M_k=M_k^*$, $M_I=M_{I^*}$, $p=q$.

Lemme 3.8. *Si B_I est non vide, alors:*

$$M_I=\max\{x;\ m_{I^*}|x|M_{I^*}\ \text{ et }\ x=c^{(n)}_{i_n-1}\,\alpha_n\ \text{ où }\ \alpha_n|a^{(n)}_{i_n}\}$$
$$m_I=\min\{x;\ m_{I^*}|x|M_{I^*}\ \text{ et }\ x=c^{(n)}_{i_n-1}\,\alpha_n\ \text{ où }\ \alpha_n|a^{(n)}_{i_n}\}$$

(on rappelle que si $I=(i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n)$ alors $I^*=(i_1, \ldots, i_{n-1})$).

Pour démontrer ce lemme, il suffit de remarquer que

$$B_{I^*}=\{x;\ m_{I^*}|x|M_{I^*}\}\quad \text{et que}\quad B_I=B_{I^*}\cap\{c^{(n)}_{i_n-1}\,\alpha_n;\ \alpha_n|a^{(n)}_{i_n}\}.$$

Corollaire. *B_{I^*} vide entraîne B_I vide.*

Si B_{I^*} est non vide et si $m_{I^*}=M_{I^*}$ alors ou bien B_I est vide ou bien $m_I=M_I=m_{I^*}=M_{I^*}$.

C'est une conséquence immédiate du lemme 3.8.

On pose, pour tout k tel que $1\leqq k\leqq q$ et pour tout j tel que $1\leqq j\leqq t_n$,

$$B_{k,j}=\{x;\ m_k^*|x|M_k^*\}\cap\{c^{(n)}_{j-1}\,\alpha;\ \alpha|a^{(n)}_j\}$$

et si $B_{k,j}$ est non vide

$$\operatorname{Max}(k,j)=\max\{x;\ x\in B_{k,j}\}$$
$$\min(k,j)=\min\{x;\ x\in B_{k,j}\}.$$

On désigne par s^+ l'image de l'ensemble des couples (k,j) tels que $B_{k,j}$ soit non vide par l'application $(k,j)\mapsto\operatorname{Max}(k,j)$.

Lemme 3.9. $s^+=S^+$.

Soit $x\in s^+$, alors il existe un couple (k,j) tel que $x=\operatorname{Max}(k,j)$. Le lemme 3.3 entraîne: il existe un $(n-1)$-uplet I^* tel que $m_k^*=m_{I^*}$; $M_k^*=M_{I^*}$. Ceci implique, si $I=(I^*, j)$, compte-tenu du lemme 3.8, que $x=M_I$ et par conséquent $x\in S^+$.

Réciproquement soit $x\in S^+$. Il existe un n-uplet I tel que $x=M_I$ et il existe k, $1\leqq k\leqq q$, tel que $M_{I^*}=M_k^*$. Le lemme 3.3 entraîne ou bien $m_{I^*}=m_k^*$, ou bien $m_{I^*}\neq m_k^*$ et alors $m_{I^*}=M_{I^*}$.

Si $m_{I^*}=m_k^*$ alors, compte-tenu du lemme 3.8, $x=\operatorname{Max}(k, i_n)$, soit $x\in s^+$.

Si $m_{I^*}\neq m_k^*$ alors, B_I étant non vide, le corollaire du lemme 3.8 entraîne $x=M_I=M_{I^*}=M_k^*$ et par conséquent $x=\operatorname{Max}(k, i_n)$ soit $x\in s^+$.

Ceci achève la preuve du lemme 3.9.

On pose

$$a_{2k-1}^{(n+1)}=M_k^*/m_k^*, \qquad 1\leqq k\leqq q$$
$$a_{2k}^{(n+1)}=m_{k+1}^*/M_k^*, \qquad 1\leqq k<q$$
$$t_{n+1}=2q-1.$$

Certains entiers $a_k^{(n+1)}$ peuvent être égaux à un. Soient $d_1,\dots,d_r$, $D_1,\dots,D_r$ les suites d'entiers $m_1,\dots,m_p$, $M_1,\dots,M_p$ associées aux suites $\{a_k^{(j)},\ 1\leqq k\leqq t_j\}$, $j=n,n+1$. Il est facile de voir que ces suites sont identiques à celles obtenues en négligeant dans la suite $\{a_k^{(n+1)},\ 1\leqq k<2q\}$ les entiers égaux à un, sauf, peut-être, si $a_1^{(n+1)}=1$ où alors, nécessairement, $d_1=D_1=d_2=1$.

On note par $\bar{s}^+$ la suite $\{D_k,\ 1\leqq k\leqq r\}$; il est clair que $s^+\subset\bar{s}^+$.

On désigne par $e_k=\{(i,j);\ \mathrm{Max}(i,j)=M_k\}$ (cet ensemble est non vide d'après le lemme 3.9) et par s_k^- l'image de e_k par l'application $(i,j)\mapsto\min(i,j)$.

Lemme 3.10. *Pour tout k, $1\leqq k\leqq p$, $m_k=\min\{x;\ x\in s_k^-\}$ et on a:*

$$\text{si } m_k\neq M_k \text{ et } M_k=D_{j_k} \quad \text{alors } m_k=d_{j_k},$$
$$\text{si } m_k=M_k \text{ et } M_k=D_{j_k} \quad \text{alors } s_k^-=\{M_k\}.$$

Le lemme 3.9 et la remarque $s^+\subset\bar{s}^+$ impliquent, pour tout k, $1\leqq k\leqq p$, l'existence d'un entier j_k tel que $M_k=D_{j_k}$.

Compte-tenu du lemme 3.3, il existe I tel que $m_k=m_I$ et $M_k=M_I$. Si $m_k\neq M_k$ alors, d'après le corollaire du lemme 3.8, $m_{I^*}\neq M_{I^*}$ ce qui entraîne, d'après le lemme 3.3, l'existence d'un entier i tel que $m_{I^*}=m_i^*$ et $M_{I^*}=M_i^*$ soit, compte-tenu du lemme 3.8, $M_k=\mathrm{Max}(i,i_n)$, $m_k=\min(i,i_n)$ et par conséquent $m_k\in s_k^-$. De plus, comme $M_k=D_{j_k}$, il est clair, compte-tenu du lemme 3.3 que $s_k^-\subset\{d_{j_k},D_{j_k}\}$ et par conséquent que $m_k=d_{j_k}$ et $m_k=\min\{x;\ x\in s_k^-\}$. Si $m_k=M_k=D_{j_k}$ alors $s_k^-=\{D_{j_k}\}$. En effet, si $d_{j_k}\neq D_{j_k}$ et $d_{j_k}\in s_k^-$ alors il existe un couple (i,i_n) tel que $d_{j_k}=\min(i,i_n)$ et $D_{j_k}=\mathrm{Max}(i,i_n)$ et $m_i^*\neq M_i^*$. Le lemme 3.3 implique l'existence d'un $(n-1)$-uplet I^* tel que $m_i^*=m_{I^*}$ et $M_i^*=M_{I^*}$. Si on pose $I=(I^*,i_n)$, compte-tenu du lemme 3.8, on a alors $m_I=d_{j_k}$, $M_I=D_{j_k}$ et $m_I\neq M_I$. Le lemme 3.3 entraîne donc $m_I=m_k$ avec $m_k\neq M_k$ d'où la contradiction.

Pour tout k, $1\leqq k<p$, on pose:

$$\mathscr{D}_k=\{D_j;\ M_k<D_j\leqq M_{k+1}\}$$

(on rappelle que pour tout k, $1\leqq k\leqq p$, il existe un entier j_k tel que $M_k=D_{j_k}$).

$$i_k=\min\{i;\ M_k\leqq M_i^*\} \quad \text{soit} \quad M_{i_k}^*=\min\{M_i^*;\ M_k\leqq M_i^*\}.$$

Il est clair que $M_p=D_r=A$, $i_p=q$ et que $M_1=D_1$, $i_1=1$. Les $\mathscr{D}_k$ sont non vides, disjoints et $\bigcup_{k=1}^{p-1}\mathscr{D}_k=\bar{s}^+-\{D_1\}$.

Lemme 3.11. i) *Pour tout k, $1\leqq k<p$, $m_{i_k}^*\leqq m_k\leqq M_k\leqq M_{i_k}^*$.*

ii) *Si $i_{k+1}=i_k$ alors $\mathscr{D}_k=\{M_{k+1}\}$ et $m_{k+1}=M_k=d_{j_{k+1}}$.*

iii) *Si $\mathscr{D}_k=\{M_{k+1}\}$ alors ou bien $m_{k+1}=d_{j_{k+1}}$ et alors $m_{i_{k+1}}^*\leqq m_{k+1}$ ou bien $m_{k+1}\neq d_{j_{k+1}}$ et alors*

$$M_{i_{k+1}-1}^*<d_{j_{k+1}}<m_{k+1}=M_{k+1}=m_{i_{k+1}}^*.$$

i) est une conséquence des lemmes 3.9 et 3.10 et de la construction des suites s^+ et s_k^-.

ii) Si $i_{k+1}=i_k$ alors, compte-tenu de i), $M^*_{i_k-1} \leqq m^*_{i_k} < M_k < M_{k+1} < M^*_{i_k}$. Ceci implique, d'après la définition de s^+, que pour tout $D_j \in \mathscr{D}_k$, on a $D_j \in s^+$, soit, compte-tenu du lemme 3.9, $D_j = M_{k+1}$. De plus il est facile de voir que ceci implique $M_k = m_{k+1}$, donc nécessairement, compte tenu du lemme 3.10, $m_{k+1} = d_{j_{k+1}}$.

iii) Si $\mathscr{D}_k = \{M_{k+1}\}$ alors $j_{k+1} = j_k + 1$. Le lemme 3.10 entraîne

ou bien $m_{k+1} = d_{j_{k+1}}$,

ou bien $m_{k+1} \neq d_{j_{k+1}}$ et alors nécessairement $d_{j_{k+1}} < m^*_{i_{k+1}}$, sinon $d_{j_{k+1}} \in s^-_{k+1}$; de plus $m_{k+1} = M_{k+1} = M^*_{i_{k+1}}$. Ceci achève la preuve du lemme 3.11.

Si $i_k = i_{k+1}$, on pose par convention $I_k = C(A)$; si $i_k < i_{k+1}$, on pose

$$I_k = C\left(M^*_{i_k}, \widecheck{\frac{m^*_{i_k+1}}{M^*_{i_k}}}, \dots, \frac{M^*_{i_{k+1}-1}}{m^*_{i_{k+1}-1}}; \widecheck{\frac{m^*_{i_{k+1}}}{M^*_{i_{k+1}-1}}}, \frac{A}{m^*_{i_{k+1}}}\right).$$

Il est facile de voir, compte-tenu du lemme 2.6 et du petit lemme d'arrachage, que

$$\bigcap_{k=1}^{p-1} I_k = C\left(M_1^*, \widecheck{\frac{m_2^*}{M_1^*}}, \dots, \widecheck{\frac{m_q^*}{M_{q-1}^*}}, \frac{M_q^*}{m_q^*}\right) \qquad \text{(on rappelle que } i_1 = 1,\ i_p = q).$$

De même, il est facile de voir que:

$$\bigcap_{k=1}^{p-1} C\left(M_k, \widecheck{\frac{d_{j_k+1}}{M_k}}, \frac{D_{j_k+1}}{d_{j_k+1}}, \dots, \frac{M_{k+1}}{d_{j_{k+1}}}, \frac{A}{M_{k+1}}\right) = C\left(\frac{D_1}{d_1}, \frac{\widecheck{d_2}}{D_1}, \dots, \frac{\widecheck{d_r}}{D_{r-1}}, \frac{D_r}{d_r}\right).$$

Si nous posons, pour tout k, $1 \leqq k < p$,

$$J_k = C\left(M_k, \widecheck{\frac{d_{j_k+1}}{M_k}}, \dots, \widecheck{\frac{d_{j_{k+1}}}{D_{j_{k+1}-1}}}, \frac{M_{k+1}}{d_{j_{k+1}}}, \frac{A}{M_{k+1}}\right) \cap I_k$$

alors $\bigcap_{k=1}^{p-1} J_k = \bigcap_{j=1}^{n} C(a_1^{(j)}, \dots, a_{t_j}^{(j)})$. Il nous suffit donc d'étudier les classes J_k, $1 \leqq k < p$.

Si $i_{k+1} = i_k$, le lemme 3.11 implique:

$$J_k = C\left(M_k, \widecheck{\frac{m_{k+1}}{M_k}}, \frac{M_{k+1}}{m_{k+1}}, \frac{A}{M_{k+1}}\right).$$

Si $i_{k+1} \neq i_k$, mais $j_{k+1} = j_k + 1$, soit $\mathscr{D}_k = \{M_{k+1}\}$, alors:

$$J_k = I_k \cap C\left(M_k, \widecheck{\frac{d_{j_{k+1}}}{M_k}}, \frac{M_{k+1}}{d_{j_{k+1}}}, \frac{A}{M_{k+1}}\right).$$

Le lemme 3.11 implique:

soit $m_{k+1} = d_{j_{k+1}}$ et alors $m^*_{i_{k+1}} \leqq d_{j_{k+1}}$ et alors il est clair que

$$J_k = C\left(M_k, \widecheck{\frac{m_{k+1}}{M_k}}, \frac{M_{k+1}}{m_{k+1}}, \frac{A}{M_{k+1}}\right) \quad \text{avec} \quad m_{k+1} = M_k,$$

soit $m_{k+1} \neq d_{j_{k+1}}$ et alors $M^*_{i_{k+1}-1} < d_{j_{k+1}} < m_{k+1} = M_{k+1} = m^*_{i_{k+1}}$ et il est facile de voir que

$$J_k = C\left(M_k, \frac{\overbrace{m_{k+1}}}{M_k}, \frac{M_{k+1}}{m_{k+1}}, \frac{A}{M_{k+1}}\right) \quad \text{avec} \quad m_{k+1} = M_{k+1}.$$

Etudions J_k dans le cas général, c'est-à-dire en supposont $i_{k+1} > i_k$ et $j_{k+1} > j_k + 1$, soit après un changement d'indice pour simplifier l'écriture, étudions:

$$C\left(D_1, \frac{\overbrace{d_2}}{D_1}, \ldots, \frac{\overbrace{d_p}}{D_{p-1}}, \frac{D_p}{d_p}, \frac{A}{D_p}\right)$$
$$\cap\, C\left(M_1^*, \frac{\overbrace{m_2^*}}{M_1^*}, \ldots, \frac{M^*_{q-1}}{m^*_{q-1}}, \frac{\overbrace{m_q^*}}{M^*_{q-1}}, \frac{A}{m_q^*}\right)$$

avec $p > 2$, $q > 1$.

Posons pour cela, pour tout k, $1 \leqq k < q$, $\mathscr{V}_k = \{D_j;\ M_k^* < D_j < m^*_{k+1}\}$.

Lemme 3.12. $(M_k =) D_1 \leqq M_1^*\ (= M^*_{i_k})$.

$$\bigcup_{k=1}^{q-1} \mathscr{V}_k = \{D_2, \ldots, D_{p-1}\}$$

donc non vide.

$$\forall k \in \{2, \ldots, q-1\}, \qquad \{D_j;\ m_k^* \leqq D_j \leqq M_k^*\} = \emptyset.$$

La première assertion est triviale (définition de $M^*_{i_k}$).

$M_1^* < D_2$ en effet sinon, compte-tenu de la première assertion du lemme 3.11, $D_2 \in S^+$, d'où la contradiction.

De même $D_{p-1} < m_q^*$ et, pour tout k tel que $1 < k < q$, $\{D_j;\ m_k^* \leqq D_j \leqq M_k^*\} = \emptyset$.

Ceci achève la preuve du lemme 3.12.

Lemme 3.13. *Si* $D_j \in \mathscr{V}_1$ *alors* $M_1^* \leqq d_j \leqq D_j \leqq m_2^*$ *et si* $d_j = M_1^*$ *alors* $j = 2$, $M_1 = M_1^* = d_2$.

Pour tout k tel que $1 < k < q$, $D_j \in \mathscr{V}_k \Rightarrow M_k^* < d_j \leqq D_j < m^*_{k+1}$.

Si $\mathscr{V}_1 = \emptyset$ *alors* $D_1 \leqq M_1^* \leqq m_2^* \leqq d_2$.

Si $\mathscr{V}_{q-1} = \emptyset$ *alors* $D_{p-1} < M^*_{q-1} \leqq m_q^* \leqq d_p$.

Si $\mathscr{V}_k = \emptyset$, $1 < k < q-1$, *alors il existe* j_k *tel que*

$$D_{j_k} < M_k^* \leqq m^*_{k+1} < d_{j_k+1}.$$

D'après construction des suites $d_1, \ldots, d_r$ et $D_1, \ldots, D_r$, il est clair que $D_j \in \mathscr{V}_k$ entraîne $M_k^* \leqq d_j \leqq D_j < m^*_{k+1}$. Si $d_j = M_k^*$ alors $d_j \in s^+$ d'où la contradiction, sauf si $k = 1$ et alors $j = 2$ et $M_1 = M_1^* = d_2$.

De la même façon, il est facile de vérifier les trois dernières assertions.

Posons

$$L_1 = C\left(D_1, \frac{\overbrace{d_2}}{D_1}, \ldots, \frac{A}{D_p}\right) \cap C\left(M_1^*, \frac{\overbrace{m_2^*}}{M_1^*}, \frac{A}{m_2^*}\right)$$

et pour tout k tel que

$$1 < k \leqq q-1, \qquad L_k = L_{k-1} \cap C\left(M_k^*, \frac{\overbrace{m^*_{k+1}}}{M_k^*}, \frac{A}{m^*_{k+1}}\right).$$

Il est facile de voir que

$$L_{q-1}=\bigcap_{k=1}^{q-1} L_k=J_k.$$

Il suffit donc d'étudier L_k; pour cela on pose:

$$\alpha_k=\min\{j;\ D_j\in\mathscr{V}_k\}$$

$$\beta_k=\max\{j;\ D_j\in\mathscr{V}_k\}$$

avec par convention $\alpha_k=\beta_k=\beta_{k-1}$ si $\mathscr{V}_k=\emptyset$ et $\alpha_0=\beta_0=1$, alors

$$D_{\alpha_k}=\min\{x;\ x\in\mathscr{V}_k\} \qquad \text{si } \mathscr{V}_k\neq\emptyset.$$

$$D_{\beta_k}=\max\{x;\ x\in\mathscr{V}_k\}.$$

Remarques. Avec la convention faite, si $\mathscr{V}_k=\emptyset$, la dernière assertion du lemme 3.13 devient $D_{\alpha_k}<M_k^*\leqq m_{k+1}^*<d_{\beta_k+1}$.

Si $\mathscr{V}_k\neq\emptyset$ alors $\alpha_{k+1}=\beta_k+1$.

Pour tout k $\beta_k<p$.

Lemme 3.14. *Pour tout* k,

$$1\leqq k<q, \qquad L_k=C\left(D_1,\widecheck{\frac{d_{\beta_k+1}}{D_1}},\frac{D_{\beta_k+1}}{d_{\beta_k+1}},\widecheck{\frac{d_{\beta_k+2}}{D_{\beta_k+1}}},\dots,\frac{A}{D_p}\right).$$

Nous allons faire une démonstration par récurrence.

Etude de L_1. Si $\mathscr{V}_1=\emptyset$, compte-tenu du lemme 3.13, définissons λ et μ tels que:

$$M_1^*=\lambda D_1, \qquad d_2=\mu m_2$$

alors on a:

$$L_1=C\left(D_1,\widecheck{\lambda\mu\frac{m_2^*}{M_1^*}},\frac{D_2}{d_2},\dots,\frac{A}{D_p}\right)\cap C\left(D_1\lambda,\widecheck{\frac{m_2^*}{M_1^*}},\mu\frac{A}{d_2}\right)$$

et il est donc clair que L_1 est de la forme annoncée.

Si $\mathscr{V}_1\neq\emptyset$ posons $d_2=\lambda M_1^*$, $\lambda\geqq 1$, $M_1^*=\lambda' D_1$, $\lambda'\geqq 1$, $m_2^*=\mu D_{\beta_2}$, $\mu>1$, $d_{\beta_2+1}=\mu' m_2^*$, $\mu'\geqq 1$.

$$L_1=C\left(D_1,\widecheck{\lambda\lambda'},\frac{D_2}{d_2},\dots,\frac{D_{\beta_2}}{d_{\beta_2}},\widecheck{\mu\mu'},\frac{D_{\beta_2+1}}{d_{\beta_2+1}},\dots,\frac{A}{D_p}\right)$$

$$\cap\, C\left(D_1\lambda',\widecheck{\lambda\mu\frac{D_{\beta_2}}{d_2}},\mu'\frac{A}{d_{\beta_2+1}}\right).$$

d'où, comme $\mu>1$, si $\lambda>1$, le lemme 2.6 et le lemme de recollement entraîne

$$L_1=C\left(D_1,\widecheck{\frac{d_{\beta_2+1}}{D_1}},\frac{D_{\beta_2+1}}{d_{\beta_2+1}}\dots,\frac{A}{D_p}\right).$$

Si $\lambda=1$ alors $d_2=M_1^*$, d'où $d_2\in s^+$ et par conséquent $D_1=d_2$ soit $\lambda'=1$. Le lemme 2.6 et le lemme de recollement implique alors que L_1 est de la forme désirée.

Supposons la propriété vraie pour L_{k-1}, $1<k<q$, et montrons qu'elle est vraie pour L_k.

Si $\mathscr{V}_k=\emptyset$, $\alpha_k=\beta_k=\beta_{k-1}$ d'où:

$$L_k=C\left(D_1,\widecheck{\frac{d_{\beta_k+1}}{D_1}},\frac{D_{\beta_k+1}}{d_{\beta_k+1}},\ldots,\frac{A}{D_p}\right)\cap C\left(M_k^*,\widecheck{\frac{m_{k+1}^*}{M_k^*}},\frac{A}{m_{k+1}^*}\right).$$

Le lemme 3.13 entraîne, compte-tenu de la remarque,

$$D_{\beta_k}=D_{\alpha_k}<M_k^*\leqq m_{k+1}^*<d_{\beta_k+1}$$

et par conséquent il est clair que

$$L_k=C\left(D_1,\widecheck{\frac{d_{\beta_k+1}}{D_1}},\frac{D_{\beta_k+1}}{d_{\beta_k+1}},\ldots,\frac{A}{D_p}\right).$$

Si $\mathscr{V}_k\neq\emptyset$, compte-tenu de la remarque: $\alpha_k=\beta_{k-1}+1$,

$$L_k=C\left(D_1,\widecheck{\frac{d_{\alpha_k}}{D_1}},\frac{D_{\alpha_k}}{d_{\alpha_k}},\ldots,\frac{D_{\beta_k}}{d_{\beta_k}},\widecheck{\frac{d_{\beta_k+1}}{D_{\beta_k}}},\ldots,\frac{A}{D_p}\right)$$

$$\cap\, C\left(M_k^*,\widecheck{\frac{m_{k+1}^*}{M_k^*}},\frac{A}{m_{k+1}^*}\right).$$

Le lemme 3.13 entraîne $M_k^*<d_{\alpha_k}\leqq D_{\alpha_k}\leqq d_{\beta_k}\leqq D_{\beta_k}<m_{k+1}^*\leqq d_{\beta_k+1}$.

Soient λ_k, λ'_k, μ_k, μ'_k définis par:

$$d_{\alpha_k}=\lambda_k M_k^*,\qquad \lambda_k>1,\qquad M_k^*=\lambda'_k D_1,\qquad \lambda'_k>1\quad\text{car}\quad k>1,$$

$$d_{\beta_k+1}=\mu_k m_{k+1}^*,\qquad \mu_k\geqq 1,\qquad m_{k+1}^*=\mu'_k D_{\beta_k},\qquad \mu'_k>1;$$

d'où,

$$L_k=C\left(D_1,\widecheck{\lambda_k\lambda'_k},\frac{D_{\alpha_k}}{d_{\alpha_k}},\ldots,\frac{D_{\beta_k}}{d_{\beta_k}},\widecheck{\mu_k\mu'_k},\frac{D_{\beta_k+1}}{d_{\beta_k+1}},\ldots,\frac{A}{D_p}\right)$$

$$\cap\, C\left(D_1\lambda'_k,\lambda_k\widecheck{\frac{D_{\beta_k}}{d_{\alpha_k}}\mu'_k},\mu_k\frac{A}{d_{\beta_k+1}}\right),$$

soit, compte-tenu du lemme 2.6 et du lemme de recollement,

$$L_k=C\left(D_1,\widecheck{\frac{d_{\beta_k+1}}{D_1}},\frac{D_{\beta_k+1}}{d_{\beta_k+1}},\ldots,\frac{A}{D_p}\right).$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.14.

Compte-tenu du lemme 3.12, il est clair que $\beta_{q-1}=p-1$, d'où

$$J_k=L_{q-1}=C\left(D_1,\widecheck{\frac{d_p}{D_1}},\frac{D_p}{d_p},\frac{A}{D_p}\right),$$

soit, en reprenant les notations,

$$J_k=C\left(M_k,\widecheck{\frac{m_{k+1}}{M_k}},\frac{M_{k+1}}{m_{k+1}},\frac{A}{M_{k+1}}\right).$$

Il est clair que:

$$\bigcap_{k=1}^{p-1} J_k = C\left(M_1, \frac{\widetilde{m_2}}{M_1}, \frac{M_2}{m_2}, \ldots, \frac{M_p}{m_p}\right)$$

ce qui achève la preuve du théorème 3.1, puisque, comme nous l'avons signalé,

$$\bigcap_{k=1}^{p-1} J_k = \bigcap_{j=1}^{n} C(a_1^{(j)}, \ldots, a_{t_j}^{(j)}).$$

4. Etude du cas infini: $\bigcap_{j=1}^{n} C_{a_j}$

Définitions. 1. Soient K un entier positif, μ une mesure de probabilité sur $\{0, 1, \ldots, K-1\}$. On désigne par $E_K(\mu)$ l'ensemble des lois des variables X de la forme $X = \frac{Y+E}{K}$ où μ_Y est égale à μ, μ_E est un élément de C_1 et les variables aléatoires Y et E sont indépendantes.

2. Si A est une classe de mesures de probabilité sur $\{0, 1, \ldots, K-1\}$, on note $E_K(A)$ la classe $\bigcup_{\mu \in A} E_K(\mu)$.

3. Si $\mu_X \in E_K(A)$ avec $A = M(K)$, on dit que la loi de X est quasi-exponentielle de type K.

4. G_k étant le sous-groupe du groupe multiplicatif des rationnels positifs, engendré par l'entier k supérieur à un, soient X une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$ et $\{a_j, 1 \leqq j \leqq n\}$ une suite d'entiers, distincts, supérieurs à un, telle que $\bigcap_{j=1}^{n} G_{a_j} \neq \{1\}$. Il existe alors une suite $\{\alpha_j, 1 \leqq j \leqq n\}$ d'entiers telle que, pour tout j, $a_j^{\alpha_j} = k$ avec $k = \inf\left\{x;\, x > 1 \text{ et } x \in \bigcap_{j=1}^{n} G_{a_j}\right\}$.

Nous dirons que μ_X est un élément de $C_{a_1, \ldots, a_n}$ si X est de la forme $X = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_j}{k^j}$ où $\{E_j, j \geqq 1\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ telle que, pour tout $j \geqq 1$, $\mu_{E_j} \in \bigcap_{i=1}^{n} C(a_i, \ldots, a_i)$, la suite de terme général a_i étant de longueur α_i.

Remarques. 1. $C_{a_1, \ldots, a_n} \subset C_k$.

2. Si on note $A = \bigcap_{j=1}^{n} C(a_j, \ldots, a_j)$ alors $E_k(A) \subset C_{a_1, \ldots, a_n}$, l'inclusion étant stricte.

Nous débuterons par un long énoncé technique:

Théorème 4.1. *Soient une suite d'entiers $\{a_n, n \geqq 1\}$ supérieurs à un, pour tout $n \geqq 1$ $c_n = a_1 \ldots a_n$, n_0 un entier supérieur à un, K un entier diviseur de c_{n_0-1}, une suite $\{A_n, n \geqq n_0\}$ d'entiers telle que, pour tout $n \geqq n_0$, c_n divise KA_n et une suite $\{B_n, n \geqq n_0\}$ d'entiers positifs. On pose, pour tout $n \geqq n_0$, $N_n = KA_nB_n$.*

On considère une variable aléatoire X telle que μ_X, la mesure associée, soit un élément de $C[(a)]$ et une variable aléatoire Y discrète, à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, K-1\}$. On suppose enfin qu'il existe, pour tout $n \geqq n_0$, deux variables aléatoires Z_n et T_n à valeurs respectivement dans $\{0, 1, \ldots, A_n - 1\}$ et $\{0, 1, \ldots, B_n - 1\}$ telles que:

Y, Z_n, T_n sont indépendantes,

la loi de Z_n est géométrique

$$\frac{[N_n X]}{N_n} = \frac{Y}{K} + \frac{Z_n}{K A_n} + \frac{T_n}{N_n}$$

où $[X]$ désigne la partie entière de la variable aléatoire X.

Alors μ_X est un élément de $E_K(\mu_y)$.

Remarquons que la suite $\{A_n,\ n \geqq 1\}$ n'est pas majorée et que, pour tout $n \geqq n_0$ et tout k tel que $n_0 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq \frac{K A_n}{c_n} < \frac{K A_n}{c_k}(a_k - 1) < A_n$.

Pour simplifier les notations, on écrira parfois $P(X=k)$ au lieu de $\mu_X(\{k\})$. Soient, pour tout $n \geqq n_0$, μ_n (resp. v_n) la mesure de probabilité associée à la variable aléatoire $[N_n X]/N_n$ (resp. Z_n/A_n) et f_n (resp. g_n) la fonction caractéristique associée à cette variable aléatoire.

Avec les notations de l'introduction, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$, dont la mesure associée soit un élément de $C[(a)]$, X est de la forme:

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{c_n}$$

et d'après les hypothèses on a, pour tout $n \geqq n_0$,

$$[N_n X] = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_n}{c_k} X_k + \left[\frac{N_n}{c_n} X_n^{(2)}\right] \quad \text{avec} \quad X_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_n X_{n+k}}{c_{n+k}}.$$

Il est clair que la suite

$$\left\{\frac{[N_n X]}{N_n},\ n \geqq n_0\right\}$$

converge en loi vers X, que

$$\left\{\frac{T_n}{N_n},\ n \geqq n_0\right\}$$

converge en loi vers 0 et que si la suite

$$\left\{\frac{Z_n}{A_n},\ n \geqq n_0\right\}$$

converge en loi vers E, $X = \frac{Y+E}{K}$ où les variables aléatoires Y et E sont indépendantes.

Pour achever la preuve du théorème 4.1, il suffit donc de montrer l'existence de E et que μ_E est un élément de C_1.

On pose:

$$P(Y=0) = y, \qquad P(T_n = 0) = t_n$$

$$v_n = \sum_{k=0}^{A_n - 1} C_n\, p_n^k\, \varepsilon_{k/A_n}, \qquad \text{avec } C_n = \frac{1-p_n}{1-p_n^{A_n}}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g_n(t) = C_n \frac{1 - p_n^{A_n} e^{it}}{1 - p_n e^{it/A_n}}.$$

D'après les hypothèses et compte-tenu des remarques, on a:

$$\forall n \geqq n_0, \quad P([N_n X]=0)=P\left(\left[\frac{N_n}{c_n} X_n^{(2)}\right]=0\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} P(X_k=0)$$
$$= y \cdot t_n \cdot C_n.$$

$$\forall n \geqq n_0, \quad \forall k,\ n_0 \leqq k \leqq n, \quad P\left([N_n X]=\frac{N_n}{c_k}(a_k-1)\right)$$
$$=P\left(\left[\frac{N_n}{c_n} X_n^{(2)}\right]=0\right) \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} P(X_j=0) \cdot P(X_k=a_k-1)=y \cdot t_n \cdot C_n\, p_n^{KA_n(a_k-1)/c_k}.$$

μ_X étant un élément de $C[(a)]$, nous avons des nombres strictement positifs, d'où:

$$\forall n \geqq n_0, \quad \forall k,\ n_0 \leqq k \leqq n, \quad p_n^{(a_k-1)\frac{KA_n}{c_k}}=\frac{P(X_k=a_k-1)}{P(X_k=0)}.$$

En particulier, on a: $\forall n \geqq n_0,\ p_{n+1}^{A_{n+1}}=p_n^{A_n}$, soit en posant $p_{n_0}^{A_{n_0}}=e^{\theta}$ où θ est réel, $\forall n \geqq n_0,\ p_n=e^{\theta/A_n}$.

Il est clair que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-p_n}{1-p_n\, e^{it/A_n}}=\frac{\theta}{\theta+i t}$$

d'où,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} g_n(t)=\frac{\theta}{\theta+i t}\, \frac{1-e^{\theta+it}}{1-e^{\theta}}$$

qui est la fonction caractéristique de la mesure de probabilité sur $[0,1]$ admettant comme densité la fonction $x \mapsto K(\theta)\, e^{\theta x}$ où $K(\theta)=\dfrac{\theta}{e^{\theta}-1}$.

Ceci, compte-tenu d'un théorème classique sur la convergence d'une suite de fonctions caractéristiques (voir Loeve, p. 191, [8]), achève la preuve du théorème.

Théorème 4.2 «Conjecture de S.D. Chatterji». *Si m et n sont deux entiers >1, premiers entre eux, alors on a:*

$$C_m \cap C_n = C_1 \quad \textit{et} \quad M_m \cap M_n = C_1 \cup D.$$

Avec les notations de l'introduction, si X est une variable aléatoire telle que la mesure associée appartienne à $M_m \cap M_n$, X est de la forme:

$$X=\sum_{k=1}^{\infty} X_k/n^k=\sum_{k=1}^{\infty} Y_k/m^k$$

les variables aléatoires X_k (resp. Y_k) étant indépendantes, à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ (resp. $\{0, 1, \ldots, m-1\}$).

Pour tout $k \geqq 1$, on a:

$$[m^k n^k X]=\sum_{j=1}^{k} n^{k-j} m^k X_j+[m^k X_k^{(2)}]$$
$$=\sum_{j=1}^{k} m^{k-j} n^k Y_j+[n^k Y_k^{(2)}]$$

avec

$$X_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_{k+j}}{n^j}, \qquad Y_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Y_{k+j}}{m^j}.$$

Soit, pour tout $k \geqq 1$, la mesure associée à $[m^k n^k X]$ est un élément de

$$M(n, \ldots, n, m^k) \cap M(m, \ldots, m, n^k)$$

et, si $\mu_X \in C_m \cap C_n$, il est clair que cette mesure est alors un élément de

$$C(n, \ldots, n, m^k) \cap C(m, \ldots, m, n^k).$$

Les suites $(n, \ldots, n, m^k)$ et $(m, \ldots, m, n^k)$ vérifiant l'hypothèse (H), la proposition 3.1, donc le théorème 3.1, entraîne

$$C(n, \ldots, n, m^k) \cap C(m, \ldots, m, n^k) = C(n^k m^k).$$

On peut remarquer que les lemmes 2.6 et 2.1, compte-tenu de la propriété de la loi géométrique, impliquent aussi cette propriété.

La première assertion du théorème 4.2 est donc une conséquence immédiate du théorème 4.1 avec $K=1$, $A_k = m^k n^k$, $B_k = 1$, compte-tenu de $C_1 \subset C_m \cap C_n$.

Si $\mu_X \in M_m \cap M_n$, mais $\mu_X \notin C_m \cap C_n$, alors il existe un entier $k_1 \geqq 1$ tel que la mesure associée à $[m^{k_1} n^{k_1} X]$ n'appartienne pas à

$$C(n, \ldots, n, m^{k_1}) \cap C(m, \ldots, m, n^{k_1}).$$

Sans perte de généralité, on peut toujours supposer $n < m$; si v_k est la mesure associée à $\sum_{j=1}^{k} n^{k-j} X_j$, le lemme 2.1 entraîne $v_{k_1} \in D(n^{k_1})$ soit par conséquent, pour tout j, $1 \leqq j \leqq k_1$, $\mu_{X_j} \in D(n)$. Ceci entraîne, pour tout k, la mesure associée à $[m^k n^k X]$ n'est pas un élément de $C(n, \ldots, n, m^k) \cap C(m, \ldots, m, n^k)$ d'où, pour tout $k \geqq 1$, $\mu_{X_k} \in D(n)$ ce qui implique $\mu_X \in D$ et achève la preuve du théorème 4.2.

Lemme 4.1. *Si $\{a_j, 1 \leqq j \leqq n\}$ est une suite d'entiers >1, distincts, tels que*

$$\bigcap_{j=1}^{n} G_{a_j} = \{1\}$$

alors

$$K = \max\left\{x; x \in \bigcap_{j=1}^{n} \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(a_j)^k d_j; d_j | a_j\}\right\}$$

est fini et donc de la forme $K = (a_j)^{t_j} d_j$, $1 \leqq j \leqq n$, où t_j est un entier $\geqq 0$ et d_j un diviseur de a_j.

Si on note par d le p.g.c.d. des entiers $a_1, \ldots, a_n$, si on pose $N = a_1 \ldots a_n / d^{n-1}$, pour tout $k \geqq 1$, $\alpha_k^{(j)} = \max\{i; (a_j)^i | N^k\}$ et $B_k^{(j)} = N^k/(a_j)^{\alpha_k^{(j)}}$, $1 \leqq j \leqq n$, si $m_1(k), \ldots, m_{p_k}(k)$ et $M_1(k), \ldots, M_{p_k}(k)$ sont les suites associées aux n suites $(a_j, \ldots, a_j, B_k^{(j)})$, $1 \leqq j \leqq n$, la suite de terme général a_j étant de longueur $\alpha_k^{(j)}$, définies au cours du chapitre 3, *possédant les propriétés du lemme* 3.3, *alors il existe un $k_0 > 1$ tel que:*

i) *pour tout $k \geqq k_0$, il existe un entier i_k, $1 \leqq i_k \leqq p_k$, tel que $K = M_{i_k}(k)$,*

ii) *pour tout $k \geqq k_0$, il existe un entier j_k, $1 \leqq j_k \leqq n$, tel que $(a_{j_k})^{\alpha_k^{(j_k)}}$ divise $m_{i_k+1}(k)$.*

Preuve du lemme 4.1. On note par S_n le support de l'entier n, c'est-à-dire l'ensemble des facteurs premiers de n. On a l'alternative suivante: ou bien les supports de tous les entiers a_j, $1 \leqq j \leqq n$, sont égaux, ou bien il existe au moins deux entiers de $\{a_j, 1 \leqq j \leqq n\}$ dont les supports sont distincts.

Supposons qu'il existe j_1 et j_2 tels que $S_{a_{j_1}}$ et $S_{a_{j_2}}$ soient distincts, alors la relation (1) $(a_{j_1})^{k_1} d_1 = (a_{j_2})^{k_2} d_2$ avec d_1 (resp. d_2) diviseur de a_{j_1} (resp. de a_{j_2}) entraîne que l'un des deux entiers k_1 et k_2 au moins est nul et par conséquent, il est clair que K est fini. Si tous les supports S_{a_j} sont égaux à $S = \{p_1, \ldots, p_m\}$ alors on peut écrire $a_j = \prod_{r=1}^{m} p_r^{\beta_r^{(j)}}$ où les $\beta_r^{(j)}$ sont >0. L'hypothèse $\bigcap_{j=1}^{n} G_{a_j} = \{1\}$ entraîne $m>1$ et l'existence de deux entiers j_1, j_2 de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et de deux entiers r_1 et r_2 de $\{1, \ldots, m\}$ tels que $\beta_{r_1}^{(j_1)}/\beta_{r_1}^{(j_2)} < \beta_{r_2}^{(j_1)}/\beta_{r_2}^{(j_2)}$. La relation (1) entraîne en particulier

$$[\beta_{r_2}^{(j_1)}/\beta_{r_2}^{(j_2)} - \beta_{r_1}^{(j_1)}/\beta_{r_1}^{(j_2)}]\, k_1 \leqq \beta_{r_1}^{(j_1)}/\beta_{r_1}^{(j_2)} + 1$$

et par conséquent K est fini. De plus, il est clair que K est de la forme $K = (a_j)^{t_j} d_j$ ce qui achève la preuve de l'assertion i).

Les suites $\{\alpha_k^{(j)}, k \geqq 1\}$, $1 \leqq j \leqq n$, sont strictement croissantes et par conséquent, il existe un entier $k_0 > 0$ tel que: $\forall k \geqq k_0$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $t_j < \alpha_k^{(j)}$; l'assertion ii) est alors triviale.

Si $k > k_0$, il existe un entier j_k, $1 \leqq j_k \leqq n$, tel que $(a_{j_k})^{\alpha_k^{(j_k)}}$ divise $m_{i_k+1}(k)$. En effet, sinon $m_{i_k+1}(k)$ est de la forme $(a_j)^{r_j} d_j$ pour tout j, avec $0 \leqq r_j < \alpha_k^{(j)}$ et d_j diviseur de a_j. Ceci implique, $m_{i_k+1}(k)$ étant différent de $(a_j)^{\alpha_k^{(j)}}$ pour tout j, $M_{i_k+1}(k)$ est également de cette forme d'où la contradiction avec la définition de K, compte-tenu de $M_{i_k}(k) < M_{i_k+1}(k)$. Ceci achève la preuve du lemme 4.1.

Théorème 4.3. *Si* $\{a_j, 1 \leqq j \leqq n\}$ *est une suite d'entiers* >1, *distincts,*

$$\textit{ou bien } \text{i)} \ \bigcap_{j=1}^{n} G_{a_j} \neq \{1\} \quad \textit{et alors} \quad \bigcap_{j=1}^{n} C_{a_j} = C_{a_1, \ldots, a_n},$$

$$\textit{ou bien } \text{ii)} \ \bigcap_{j=1}^{n} G_{a_j} = \{1\} \quad \textit{et alors} \quad \bigcap_{j=1}^{n} C_{a_j} = E_K(A)$$

où K est défini comme dans le lemme 4.1 *et* $A = \bigcap_{j=1}^{n} C(a_j, \ldots, a_j, d_j)$ *la suite de terme général a_j étant de longueur* $t_j (K = (a_j)^{t_j} d_j)$.

Si les entiers a_j, $1 \leqq j \leqq n$, sont premiers dans leur ensemble, alors $\bigcap_{j=1}^{n} C_{a_j} = C_1$.

Si $\bigcap_{j=1}^{n} G_{a_j} \neq \{1\}$ alors il existe une suite d'entiers $\{\alpha_j, 1 \leqq j \leqq n\}$ telle que, pour tout j, $(a_j)^{\alpha_j} = k$ où

$$k = \inf \left\{ x \text{ tel que } x > 1 \text{ et } x \in \bigcap_{j=1}^{n} G_{a_j} \right\}.$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$ telle que

$$\mu_X \in \bigcap_{j=1}^{n} C_{a_j}$$

alors, par définition, pour tout j, $1 \leqq j \leqq n$,

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(j)}/(a_j)^k$$

où $\{X_k^{(j)}, k \geqq 1\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, a_j - 1\}$. Posons, pour tout j, $1 \leqq j \leqq n$, et pour tout $i \geqq 1$

$$Y_i^{(j)} = \sum_{r=1}^{\alpha_j} (a_j)^{\alpha_j - r} X_{(i-1)\alpha_j + r}^{(j)};$$

les variables aléatoires $X_k^{(j)}$ étant positives ou nulles, il est clair que, pour tout j, on a:

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i^{(j)}/k^i.$$

De plus, pour tout $i \geqq 1$, $Y_i^{(1)}, \ldots, Y_i^{(n)}$ ont même loi d'où,

$$\mu_{Y_i^{(1)}} \in \bigcap_{j=1}^{n} C(a_j, \ldots, a_j),$$

la suite de terme général a_j étant de longueur α_j. Réciproquement, il est clair que

$$C_{a_1, \ldots, a_n} \subset \bigcap_{j=1}^{n} C_{a_j}$$

ce qui achève la preuve de l'assertion i) du théorème.

Démontrons l'assertion ii). Pour tout j, $1 \leqq j \leqq n$, on a

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(j)}/(a_j)^k \quad \text{si} \quad \mu_X \in \bigcap_{j=1}^{n} C_{a_j}.$$

Avec les notations du lemme 4.1, si $[X]$ désigne la partie entière de la variable aléatoire X, alors, pour tout $k \geqq 1$,

$$[N^k X] = \sum_{i=1}^{\alpha_k^{(j)}} N^k X_i^{(j)}/(a_j)^i + \left[B_k^{(j)} \sum_{i=1}^{\infty} X_{\alpha_k^{(j)}+i}^{(j)}/(a_j)^i \right]$$

avec $1 \leqq j \leqq n$. Ceci implique que, pour tout $k \geqq 1$, la mesure de probabilité sur $\{0, 1, \ldots, N^k - 1\}$ associée à $[N^k X]$ est un élément de

$$\bigcap_{j=1}^{n} C(a_j, \ldots, a_j, B_k^{(j)})$$

où la suite de terme général a_j est de longueur $\alpha_k^{(j)}$.

La deuxième partie du lemme 4.1 entraîne l'existence d'un entier j_0, $1 \leqq j_0 \leqq n$ et d'une suite $\{k_n, n \geqq 1\}$ telle que si $n_0 = t_{j_0} + 2$, $k_n = n$ si $0 < n < n_0 - 1$, et $\{k_n, n \geqq n_0 - 1\}$ est une sous-suite extraite de la suite $\{k > k_0\}$ telle que, pour tout $n \geqq n_0 - 1$, $(a_{j_0})^{\alpha_{k_n}^{(j_0)}}$ divise $m_{i_{k_n}+1}(k_n)$. Compte-tenu du lemme 4.1, le théorème 3.1 entraîne l'existence d'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, K-1\}$ telle que

$$\mu_Y \in \bigcap_{j=1}^{n} C(a_j, \ldots, a_j, d_j),$$

la suite de terme général a_j étant de longueur t_j, pour tout $q \geqq n_0$, d'une variable aléatoire Z_q à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, A_q - 1\}$, de loi géométrique, avec $A_q = m_{i_{k_q}+1}(k_q)/K$, d'une variable aléatoire T_q à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, B_q - 1\}$ avec $B_q = N^{k_q}/m_{i_{k_q}+1}(k_q)$ telles que $[N^{k_q} X] = A_q B_q Y + B_q Z_q + T_q$ les hypothèses du théorème 4.1 étant vérifiées en supposant μ_X élément de $C_{a_{j_0}}$ et même plus précisément de $C[(a)]$ avec $a_k = a_{j_0}$ si $0 < k < n_0 - 1$,

$$a_{n_0-1} = (a_{j_0})^{\alpha^{(j_0)}_{k_{n_0-1}} - t_{j_0}}, \qquad a_n = (a_{j_0})^{\alpha^{(j_0)}_{k_n} - \alpha^{(j_0)}_{k_n - 1}}$$

si $n \geqq n_0$.

Le théorème 4.1 achève la preuve de la deuxième assertion du théorème 4.3, compte-tenu de $E_K(A) \subset \bigcap_{j=1}^{n} C_{a_j}$.

Si les entiers $\{a_j, 1 \leqq j \leqq n\}$ sont premiers dans leur ensemble alors $\bigcap_{j=1}^{n} G_{a_j} = \{1\}$ et nécessairement $K = 1$, ce qui achève la preuve du théorème 4.3.

Références

1. Chatterji, S.D.: Certain induced measures on the unit interval. J. London math. Soc. **38**, 325–331 (1963).
2. – Certain induced measures and the fractional dimensions of their "supports". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **3**, 184–192 (1964).
3. – Densities of certain measures. Nederl. Akad. Wet. Proc., Ser A 68, no 5 and Indagationes math. **27**, 754–759 (1965).
4. Letac, G.: Problèmes de probabilité. P.U.F. 1970.
5. Lewis, T.: The factorisation of the rectangular distribution. J. appl. Probab. **4**, 529–542 (1967).
6. Tortrat, A.: Sur un théorème de Lewis et la décomposition en facteurs premiers de la loi rectangulaire. J. appl. Probab. **6**, 177–185 (1969).
7. Berthuet, R.: Sur la loi exponentielle tronquée. Thèse de 3ème cycle, Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand, 1970.
8. Loeve, M.: Probability theory. Third edition, p. 191. New York-London: D. Van Nostrand Company Inc. 1963.

Dr. R. Berthuet
Université de Clermont
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques Appliquées
B.P. 45
F-63 Aubière
France

(Reçu le 7 décembre 1970)