Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
70, 67-89 (1985)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Distance de Hellinger-Kakutani des lois correspondant à deux processus à accroissements indépendants

J. Memin [1] et A.N. Shiryayev [2]

[1] Université de Rennes I, F-35042 Rennes, France
[2] Institut Steklov, 117966 GSP-1, Moscou, URSS

Summary. In this paper we calculate Hellinger integrals of order α for the distribution laws of processes with independent increments. We consider the problems of absolute continuity, mutual singularity and contiguity in further applications. By using Hellinger processes the above problems can be treated in a new systematic manner.

§ 1. Introduction

1.1. Pour des mesures λ et $\tilde{\lambda}$ σ-finies, données sur un espace mesurable $(A, \mathscr{A})$, la distance de Hellinger-Kakutani [8] est définie par la formule:

$$H^2(\lambda, \tilde{\lambda}) = \frac{1}{2} \int_E ((d\lambda)^{\frac{1}{2}} - (d\tilde{\lambda})^{\frac{1}{2}})^2 \tag{1}$$

où «l'intégrale» à droite désigne

$$\int_E ((d\lambda/d\mu)^{\frac{1}{2}} - (d\tilde{\lambda}/d\mu)^{\frac{1}{2}})^2 \, d\mu \tag{2}$$

μ étant une mesure σ-finie dominant la mesure $\lambda + \tilde{\lambda}$ ($\lambda + \tilde{\lambda} \ll \mu$). La définition (1) comme distance entre les mesures λ et $\tilde{\lambda}$ est cohérente, puisque la valeur de l'intégrale en (2) ne dépend pas du choix de la mesure σ-finie μ dominant $\lambda + \tilde{\lambda}$.

Pour tout α, $0 < \alpha < 1$, on définit l'intégrale de Hellinger d'ordre α ([1, 8, 13, 18]) de λ et $\tilde{\lambda}$ par:

$$\rho(\alpha, \lambda, \tilde{\lambda}) = \int_E (d\lambda/d\mu)^{\alpha} (d\tilde{\lambda}/d\mu)^{1-\alpha} \, d\mu.$$

relativement à une mesure σ-finie μ dominant $\lambda + \tilde{\lambda}$.

Si λ et $\tilde{\lambda}$ sont des probabilités, on a évidemment:

$$H^2(\lambda, \tilde{\lambda}) = 1 - \rho(\tfrac{1}{2}, \lambda, \tilde{\lambda}).$$

Le but de ce travail est de calculer $H^2(P, \tilde{P})$ et $\rho(\alpha, P, \tilde{P})$ pour des probabilités P et $\tilde{P}$, apparaissant comme lois de deux processus $X = (X_t)_{t \geqq 0}$ et $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \geqq 0}$ à accroissements indépendants, et d'écrire ensuite des critères d'absolue continuité, de singularité et de contiguité. Pour mener à bien ce programme, l'utilisation d'une famille de processus dits de Hellinger apparaît adéquate.

1.2. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité; $(\mathbb{D}, \mathscr{D})$ l'espace mesurable des fonctions $\mathfrak{X}=(\mathfrak{X}_t)_{t\geq 0}$ continues à droite et admettant des limites à gauche, à valeurs réelles, avec la tribu $\mathscr{D}$ des boréliens associée à la topologie de Skorokhod sur $\mathbb{D}$. Soit $X=(X_t)_{t\geqq 0}$ et $\tilde{X}=(\tilde{X}_t)_{t\geqq 0}$ deux processus stochastiques définis sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, admettant des trajectoires dans $\mathbb{D}$; dans la suite X et $\tilde{X}$ désignent des processus à accroissements indépendants tels que pour chaque $\lambda\in\mathbb{R}$, en posant $f_\lambda(t)=\mathbb{E}[\exp(i\lambda X_t)]$ et $\tilde{f}_\lambda(t)=\mathbb{E}[\exp(i\lambda \tilde{X}_t)]$, $t\to f_\lambda(t)$ $t\to\tilde{f}_\lambda(t)$ sont à variation finie. Sous cette hypothèse les processus X et $\tilde{X}$ sont des semimartingales, [4], et l'on a [4] pour f_λ et de façon analogue pour $\tilde{f}_\lambda$ la représentation:

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda(X_t-X_0)]=\exp(G_t)\prod_{0<s\leqq t}(1+\Delta G_s(\lambda))\exp(-\Delta G_s(\lambda)) \tag{3}$$

avec

$$G_t(\lambda)=i\lambda B_t-\frac{\lambda^2}{2}C_t+\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}(\exp(i\lambda x)-1-i\lambda x\mathbb{1}_{\{|x|\leqq 1\}})\,\nu(dt,dx) \tag{4}$$

où $\mathbb{R}_0=\mathbb{R}-\{0\}$, et le triplet $T=(B, C, \nu)$ possède les propriétés suivantes:

(i) $B=(B_t)_{t\geqq 0}$ est un élément de $\mathbb{D}$, (non aléatoire) à variation finie, $B_0=0$.

(ii) $C=(C_t)_{t\geqq 0}$ est une fonction continue à valeurs réelles, croissante avec $C_0=0$.

(iii) $\nu=\nu(dt,dx)$ est une mesure sur $(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}_0, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^+}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{R}_0})$ telle que $\nu(\{0\}\times\mathbb{R}_0)=0$, $\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}(x^2\wedge 1)\nu(ds,dx)<\infty$, $a_t=\nu(\{t\}\times\mathbb{R}_0)\leqq 1$ et $\Delta B_t=\int_{\mathbb{R}_0}x\mathbb{1}_{\{|x|\leqq 1\}}\nu(\{t\},dx)$ où $\Delta B_t=B_t-B_{t-}$, $B_{0-}=0$.

Si l'on note B^c, ν^c les composantes continues de B et ν, c'est-à-dire $B^c_t=B_t-\sum_{0<s\leqq t}\Delta B_s$, $\nu^c(dt,dx)=\mathbb{1}_{\{a_t=0\}}\nu(dt,dx)$, alors la formule (3) peut encore s'écrire:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(\lambda(X_t-X_0))]=\exp\Bigg(&i\lambda B^c_t-\frac{\lambda^2}{2}C_t\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}(\exp(i\lambda x)-1-i\lambda x\mathbb{1}_{\{|x|\leqq 1\}})\,\nu^c(dt,dx)\Bigg)\\&\cdot\prod_{0<s\leqq t}\Big[1+\int_{\mathbb{R}_0}(\exp(i\lambda x)-1)\,\nu(\{s\},dx)\Big].\end{aligned}$$

Lorsque X est continu en probabilité, on a: $\nu(\{s\}),dx)=0$ et on obtient la forme classique de la formule de Lévy-Hintčin: (voir par exemple [17])

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(i\lambda(X_t-X_0))]=\exp\Bigg(&i\lambda B_t-\frac{\lambda^2}{2}C_t\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}(\exp(i\lambda x)-1-i\lambda x\mathbb{1}_{\{|x|\leqq 1\}})\,\nu(ds,dx)\Bigg).\end{aligned}$$

De façon analogue on a la représentation de $\mathbb{E}[\exp(i\lambda(\tilde{X}_t - \tilde{X}_0))]$ relativement au triplet $\tilde{T} = (\tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{\nu})$.

Lorsque V est un processus, V^t désigne le processus arrêté en t.

Soit maintenant P et $\tilde{P}$ les lois des processus X et $\tilde{X}$, c'est-à-dire:

$$P(A) = \mathbb{P}[X \in A], \qquad \tilde{P}(A) = \mathbb{P}(\tilde{X} \in A), \qquad A \in \mathscr{D}.$$

Puisque P et $\tilde{P}$ sont définies de façon unique par les triplets $T = (B, C, \nu)$ et $\tilde{T} = (\tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{\nu})$ il est souhaitable d'obtenir une expression pour $H^2(P, \tilde{P})$ et pour $\rho(\alpha, P, \tilde{P})$ en termes de T et $\tilde{T}$. Remarquons que dans le cas des processus gaussiens à accroissements indépendants, un tel résultat figure dans [9].

Pour la formulation du résultat essentiel de cet article, on introduit les notations suivantes.

Soit $Q = \frac{1}{2}(P + \tilde{P})$; $\mathscr{D}_t^0$ est la tribu $\sigma\{\mathfrak{X} : \mathfrak{X}_s,\ s \leqq t\}$ augmentée des ensembles de Q-mesure nulle de $\mathscr{D}$; soit $\mathscr{D}_t = \bigwedge_{s>t} \mathscr{D}_s^0$ (la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \geqq 0}$ est alors continue à droite); $P_t = P|_{\mathscr{D}_t}$, $\tilde{P}_t = \tilde{P}|_{\mathscr{D}_t}$, $Q_t = Q|_{\mathscr{D}_t}$ sont les restrictions de $P, \tilde{P}$ et Q à $\mathscr{D}_t$. $z = (z_t, \mathscr{D}_t, Q)$ et $\tilde{z} = (\tilde{z}_t, \mathscr{D}_t, Q)$ sont des martingales à trajectoires dans $\mathbb{D}$ telles que

$$z_t = \frac{dP_t}{dQ_t}, \qquad \tilde{z}_t = \frac{d\tilde{P}_t}{dQ_t}, \qquad z_t + \tilde{z}_t = 2.$$

Posons aussi $z_\infty = \dfrac{dP}{dQ}$, $\tilde{z}_\infty = \dfrac{d\tilde{P}}{dQ}$.

En relation avec la définition donnée précédemment:

$$H^2(P, \tilde{P}) = \tfrac{1}{2}\mathbb{E}_Q[(z_\infty^{\frac{1}{2}} - \tilde{z}_\infty^{\frac{1}{2}})^2]$$
$$\rho(\alpha, P, \tilde{P}) = \mathbb{E}_Q[z_\infty^\alpha \tilde{z}_\infty^{1-\alpha}].$$

De façon analogue:

$$H^2(P_t, \tilde{P}_t) = \tfrac{1}{2}\mathbb{E}_Q[(z_t^{\frac{1}{2}} - \tilde{z}_t^{\frac{1}{2}})^2]$$
$$\rho(\alpha, P_t, \tilde{P}_t) = \mathbb{E}_Q[z_t^\alpha \tilde{z}_t^{1-\alpha}].$$

Remarque. Comme $\mathscr{D}_t^o$ peut-être différent de $\mathscr{D}_t$, P_t et $\tilde{P}_t$ ne sont pas nécessairement les lois P^t et $\tilde{P}^t$ des P.A.I. X^t et $\tilde{X}^t$ considérés sur l'intervalle $[0, t]$; ainsi, soit par exemple $X_t = (t-1)\mathbb{1}_{\{t \geqq 1\}}$ et $\tilde{X}_t = 0$; P_1 et $\tilde{P}_1$ sont étrangères, alors que $\tilde{P}^1(dx) = \varepsilon_0(dx) = P^1(dx)$.

On note aussi: $A_t = B_t^c = \tilde{B}_t^c - \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} x \mathbb{1}_{\{|x| \leqq 1\}} (\nu^c - \tilde{\nu}^c)(ds, dx)$ lorsque l'intégrale a un sens $\left(\text{i.e.: si } \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} |x| \mathbb{1}_{\{|x| \leqq 1\}} \|\nu^c - \tilde{\nu}^c\|(ds, dx) < \infty,\ \|\nu^c - \tilde{\nu}^c\| \text{ désignant la variation de } (\nu^c - \tilde{\nu}^c)\right)$.

$$A_t = \infty \qquad \text{sinon.} \tag{5}$$

Soit $Y = (Y_t)_{t \geqq 0}$ une semi martingale avec $Y_0 = 0$. Considérons l'équation stochastique:

$$U_t = 1 + \int_0^t U_{s-}\, dY_s.$$

Il est connu que cette équation admet une solution unique, semi martingale, notée $\mathscr{E}(Y)=(\mathscr{E}(Y)_t)_{t\geqq 0}$ ([3, 4]) donnée explicitement par la formule de Doléans:

$$\mathscr{E}(Y)_t=\exp\left[Y_t-\tfrac{1}{2}\langle Y^c\rangle_t\right]\prod_{0<s\leqq t}(1+\Delta y_s)\exp(-\Delta Y_s) \tag{6}$$

où $\langle Y^c\rangle$ est la variation quadratique de la partie martingale locale continue Y^c de Y, ([3, 4]). Indiquons également que l'équation

$$U_t=U_0+\int_0^t U_{s-}\,dY_s \quad \text{admet la solution unique } U_0\mathscr{E}(Y). \tag{7}$$

En relation avec ces notations, et tenant compte de ce que la fonction $G(\lambda)=(G_t(\lambda))_{t\geqq 0}$ définie en (4) est à variation finie (c'est par conséquent une semi martingale), on peut écrire la formule (3) sous la forme:

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda(X_t-X_0))]=\mathscr{E}(G(\lambda))_t.$$

En plus de la mesure ν, définie sur $(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}_0,\ \mathscr{B}_{\mathbb{R}^+}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{R}_0})$ introduisons la mesure χ sur $(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\ \mathscr{B}_{\mathbb{R}^+}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ par les relations:

$$\chi(\{0\}\times\Gamma)=0 \tag{8}$$

et pour $t>0$, $\chi([0,t]\times\Gamma)=\nu([0,t)\times\Gamma\cap\mathbb{R}_0)+\sum_{\substack{0<s\leqq t\\ a_s\neq 0}}\mathbb{1}_{[\Gamma\cap\{0\}]}(1-a_s)$ où $\Gamma\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, $a_s=\nu(\{s\}\times\mathbb{R}_0)$. On définit de façon analogue la mesure $\tilde{\chi}$.

Considérons la distance de Hellinger-Kakutani $H(\chi,\tilde{\chi})$ et $H_t(\chi,\tilde{\chi})$ définie par:

$$H_t^2(\chi,\tilde{\chi})=\tfrac{1}{2}\int_{[0,t]\times\mathbb{R}}((d\chi)^{\frac{1}{2}}-(d\tilde{\chi})^{\frac{1}{2}})^2$$

il n'est pas difficile de voir que l'on a:

$$H_t^2(\chi,\tilde{\chi})=H_t^2(\nu,\tilde{\nu})+\tfrac{1}{2}\sum_{0<s\leqq t}((1-a_s)^{\frac{1}{2}}-(1-\tilde{a}_s)^{\frac{1}{2}})^2\,\mathbb{1}_{\{a_s+\tilde{a}_s^{(s)}\neq 0\}}$$

où

$$H_t^2(\nu,\tilde{\nu})=\tfrac{1}{2}\int_{[0,t]\times\mathbb{R}_0}((d\nu)^{\frac{1}{2}}-(d\tilde{\nu})^{\frac{1}{2}})^2.$$

Posons enfin lorsque $C_s=\tilde{C}_s$, $s\leqq t$ et lorsque la mesure sur $([0,t],\mathscr{B}_{[0,t]})$ dA_s est absolument continue par rapport à dC_s $(dA^t\ll dC^t)$

$$h_t(\alpha,T,\tilde{T})=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\int_0^t\left(\frac{dA_s}{dC_s}\right)^2 dC_s+\Phi_t(\alpha,d\chi,d\tilde{\chi}) \tag{9}$$

où $\dfrac{dA_s}{dC_s}$ est la densité de Radon-Nikodym de A par rapport à C avec la convention $\dfrac{dA_s}{dC_s}=0$ si $A_s=0$ et $C_s=0$ pour $s\leqq t$ et où

$$\Phi_t(\alpha,d\chi,d\tilde{\chi})=\alpha\frac{d\chi_t}{d\mu}+(1-\alpha)\frac{d\tilde{\chi}_t}{d\mu}-\left(\frac{d\chi_t}{d\mu}\right)^{\alpha}\left(\frac{d\tilde{\chi}_t}{d\mu}\right)^{1-\alpha}$$

avec μ dominant χ et $\tilde{\chi}$; (lorsque $\alpha=\frac{1}{2}$ $\Phi_t(\frac{1}{2},d\chi,d\tilde{\chi})=H_t^2(\chi,\tilde{\chi})$).

1.3. Théorème 1. *Soit P et $\tilde{P}$ les lois de deux processus X et $\tilde{X}$ à accroissements indépendants de triplets caractéristiques $T=(B, C, \nu)$, $\tilde{T}=(\tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{\nu})$ respectivement.*

a) *Si $C=\tilde{C}$ et si $dA \ll dC$*

$$\rho(\alpha, P, \tilde{P})=\rho(\alpha, P_0, \tilde{P}_0)\,\mathscr{E}(-h(\alpha, T, \tilde{T}))_\infty \tag{10}$$

et $\rho(\alpha, P^t, \tilde{P}^t)=\rho(\alpha, P_t, \tilde{P}_t)=\rho(\alpha, P_0, \tilde{P}_0)\,\mathscr{E}(-h(\alpha, T, \tilde{T}))_t$.

b) *Soit $\theta=\inf\{t\colon C^t \neq \tilde{C}^t$ ou $dA^t \not\ll dC^t\}$*

$$\rho(\alpha, P^\theta, \tilde{P}^\theta)=\rho(\alpha, P_0, \tilde{P}_0)\,\mathscr{E}(-h(\alpha, T, \tilde{T}))_\theta$$

$$\rho(\alpha, P_t, \tilde{P}_t)=0 \quad \text{pour tout } t \geqq \theta$$

et

$$\rho(\alpha, P^t, \tilde{P}^t)=0 \quad \text{pour tout } t>\theta.$$

Corollaire. *Soit $\|P-\tilde{P}\|=2\sup_{A\in\mathscr{D}}|P(A)-\tilde{P}(A)|$ la distance en variation de P et de $\tilde{P}$, on a de façon classique $2(1-\rho(\frac{1}{2}, P, \tilde{P}))\leqq \|P-\tilde{P}\| \leqq \sqrt{8(1-\rho(\frac{1}{2}, P, \tilde{P})}$. C'est pourquoi si $C=\tilde{C}$ et si $dA\ll dC$*

$$2(1-\rho(\tfrac{1}{2}, P_0, \tilde{P}_0)\,\mathscr{E}(-h(\tfrac{1}{2}, T, \tilde{T})))$$
$$\leqq \|P-\tilde{P}\| \leqq \sqrt{8(1-\rho(\tfrac{1}{2}, P_0, \tilde{P}_0)\,\mathscr{E}(-h(\tfrac{1}{2}, T, \tilde{T})_\infty))};$$

si $C\neq\tilde{C}$ ou si $dA \not\ll dC$ $\|P-\tilde{P}\|=2$.

Remarques. 1) La relation $C\neq\tilde{C}$ (resp: $C^t\neq\tilde{C}^t$) signifie qu'on peut trouver un $s>0$ (resp: $0<s\leqq t$) tel que $C_s\neq\tilde{C}_s$.

2) La formule (10) peut encore s'écrire:

$$\rho(\alpha, P, \tilde{P})=\rho(\alpha, P_0, \tilde{P}_0)\exp(-h^c_\infty(\alpha, T, \tilde{T}))\prod_s (1-\Delta h_s(\alpha, T, \tilde{T}))$$
$$=\rho(\alpha, P^1, \tilde{P}^1)\,\rho(\alpha, P^2, \tilde{P}^2)$$

où $P^1, \tilde{P}^1, P^2, \tilde{P}^2$ sont des lois de processus à accroissements indépendants (continus en probabilité pour P^1 et $\tilde{P}^1$ de triplets $T_1=(B^c, C, \nu^c)$, $\tilde{T}_1=(\tilde{B}^c, \tilde{C}, \tilde{\nu}^c)$, $P^1_0=\tilde{P}^1_0$, et constants par morceaux avec des sauts à des temps fixes pour P^2 et $\tilde{P}^2$, de triplets $T_2=(B-B^c, 0, \nu-\nu^c)$, $\tilde{T}_2=(\tilde{B}-\tilde{B}^c, 0, \tilde{\nu}-\tilde{\nu}^c)$ avec $P^2_0=P_0$, $\tilde{P}^2_0=\tilde{P}_0$). En outre $P=P^1*P^2$, $\tilde{P}=\tilde{P}^1*\tilde{P}^2$ ($*$ désignant l'opération de convolution).

3) La relation $\rho(\alpha, P, \tilde{P})=0$ est équivalente à la singularité des mesures P et $\tilde{P}$.

Exemple 1. Soit $\nu=\tilde{\nu}=0$; c'est-à-dire que X et $\tilde{X}$ sont deux processus gaussiens avec $\mathbb{E}[X_t-X_0]=B_t$, $\sigma^2(X_t-X_0)=C_t$, $\mathbb{E}[\tilde{X}_t-\tilde{X}_0]=\tilde{B}_t$, $\sigma^2(\tilde{X}_t-\tilde{X}_0)=\tilde{C}_t$. Soit $C=\tilde{C}$ et $d(B-\tilde{B})\ll dC$. Alors:

$$\rho(\tfrac{1}{2}, P_t, \tilde{P}_t)=\rho(\tfrac{1}{2}, P_0, \tilde{P}_0)\exp\left(-\tfrac{1}{8}\int_0^t \left(\frac{d(B-\tilde{B})_s}{dC_s}\right)^2 dC_s\right) \tag{11}$$

(Voir aussi [9]).

Example 2. Soit X et $\tilde{X}$ deux processus à accroissements indépendants, homogènes; T, $\tilde{T}$ peuvent s'exprimer sous la forme:

$$B_t = b \cdot t, \quad C_t = c \cdot t, \quad \nu(dt, dx) = dt\, F(dx)$$
$$\tilde{B}_t = \tilde{b} \cdot t, \quad \tilde{C}_t = \tilde{c} \cdot t, \quad \tilde{\nu}(dt, dx) = dt\, \tilde{F}(dx)$$

si $C = \tilde{C} > 0$, et si $\int_{\mathbb{R}_0} |x| \mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}} |F - \tilde{F}|(dx) < \infty$

$$h_t(\tfrac{1}{2}, T, \tilde{T}) = t \left[\frac{1}{8c} [(b - \tilde{b}) - \int_{\mathbb{R}_0} x \mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}} (F - \tilde{F})(dx)]^2 + \tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_0} ((dF)^{\frac{1}{2}} - (d\tilde{F})^{\frac{1}{2}})^2 \right] \tag{12}$$

et

$$\rho(\tfrac{1}{2}, P_t, \tilde{P}_t) = \rho(\tfrac{1}{2}, P_0, \tilde{P}_0) \exp[-h_t(\tfrac{1}{2}, T, \tilde{T})].$$

En particulier pour des processus X et $\tilde{X}$ de poisson d'intensité (de paramètre) λ et $\tilde{\lambda}$ respectivement avec $X_0 = \tilde{X}_0 = 0$. On a le résultat classique:

$$\rho(\tfrac{1}{2}, P_t, \tilde{P}_t) = \exp[-t/2((\lambda^{\frac{1}{2}} - \tilde{\lambda}^{\frac{1}{2}})^2)]. \tag{13}$$

Exemple 3. Soit X et $\tilde{X}$ deux processus ponctuels (simples) à compensateurs déterministes respectifs D et $\tilde{D}$ (voir [7] ou [4]) alors $B = D$, $\tilde{B} = \tilde{D}$, $C = \tilde{C} = 0$, $A = 0$, $\nu(dt, dx) = dD_t \varepsilon_1(dx)$ et $\tilde{\nu}(dt, dx) = d\tilde{D}_t \varepsilon_1(dx)$

$$\rho(\tfrac{1}{2}, P_t, \tilde{P}_t) = \mathscr{E}\left[-\tfrac{1}{2} \int_0^t (dD_s^{\frac{1}{2}} - d\tilde{D}_s^{\frac{1}{2}})^2 - \tfrac{1}{2} \sum_{0 < s \leq t} ((1 - \Delta D_s)^{\frac{1}{2}} - (1 - \Delta \tilde{D}_s)^{\frac{1}{2}})^2 \right]. \tag{14}$$

Exemple 4. Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ et $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots)$ deux suites de variables aléatoires indépendantes; notons:

$$F_k(x) = \mathbb{P}[\xi_k \leq x], \quad \tilde{F}_k(x) = \mathbb{P}[\tilde{\xi}_k \leq x], \quad \text{et posons}$$
$$X_t = \sum_{k \leq t} \xi_k, \quad \tilde{X}_t = \sum_{k \leq t} \tilde{\xi}_k, \quad \text{avec } \xi_0 = \tilde{\xi}_0 = 0.$$

Dans ce cas on a:

$$\chi(\{k\} \times]-\infty, x]) = F_k(x)$$
$$\tilde{\chi}(\{k\} \times]-\infty, x]) = \tilde{F}_k(x)$$

et $H_t^2(\chi, \tilde{\chi}) = \frac{1}{2} \sum_{k \leq t} (dF_k^{\frac{1}{2}} - d\tilde{F}_k^{\frac{1}{2}})^2 = \sum_{k \leq t} H^2(F_k, \tilde{F}_k)$ par conséquent

$$\rho(\tfrac{1}{2}, P_t, \tilde{P}_t) = \mathscr{E}(-\sum_{k \leq t} H^2(F_k, \tilde{F}_k)) = \prod_{k \leq t} (1 - H^2(F_k, \tilde{F}_k)) = \prod_{k \leq t} \rho(\tfrac{1}{2}, F_k, \tilde{F}_k) \tag{15}$$

ce qui évidemment peut être obtenu directement en utilisant l'indépendance des variables.

Dans ce qui suit, l'accent est mis sur le rôle joué par les processus de Hellinger $h(\alpha, T, \tilde{T})$ dans les questions d'absolue continuité, de singularité, de contiguité, de distance en variation. (Cette notion étudiée aussi dans [5] apparaît dans [11] explicitement pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et implicitement dans [2, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 16].)

La méthode suivie peut être utilisée pour l'étude des lois correspondant à des processus ponctuels simples ou multivariés ou à des processus de diffusion.

La démonstration du théorème 1 sera donnée dans le paragraphe 3; dans le paragraphe 2, on va introduire les processus de Hellinger d'ordre α, $0<\alpha<1$.

Ensuite, dans le paragraphe 4, on s'intéressera aux critères d'absolue continuité ($\tilde{P} \ll P$) et de singularité ($\tilde{P} \perp P$) pour les lois P et $\tilde{P}$ de deux processus à accroissements indépendants. Enfin, on donne dans le paragraphe 5 un critère de contiguité et un critère de séparabilité complète.

§ 2. Integrales et processus de Hellinger d'ordre α

Les propriétés des intégrales et processus de Hellinger d'ordre α, que nous donnons dans ce paragraphe ont un caractère général; aussi nous partons d'un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$, muni de deux probabilités P et $\tilde{P}$ (nous ne supposons pas ici que ce sont les lois de 2 processus à accroissements indépendants). On note $Q=\frac{1}{2}(P+\tilde{P})$, $(\mathscr{F}_t)$ une famille de sous tribus de $\mathscr{F}$, continue à droite, avec $\bigvee_t \mathscr{F}_t=\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}_t$ contenant pour chaque t les ensembles de Q-mesure nulle de $\mathscr{F}$.

De même que dans le paragraphe 1 on introduit les martingales

$$z=(z_t, \mathscr{F}_t, Q)_{t\geqq 0}, \qquad \tilde{z}=(\tilde{z}_t, \mathscr{F}_t, Q)_{t\geqq 0} \qquad \text{avec } z_t+\tilde{z}_t=2$$

$z_t=\dfrac{dP_t}{dQ_t}$, $\tilde{z}_t=\dfrac{d\tilde{P}_t}{dQ_t}$. z_∞ et $\tilde{z}_\infty$ désignant encore $\dfrac{dP}{dQ}$ et $\dfrac{d\tilde{Q}}{dQ}$ respectivement.

2.1. Intégrale de Hellinger d'ordre α. $0<\alpha<1$.

Le but de ce paragraphe est de donner en termes «prévisibles» une représentation de $\rho(\alpha, P, \tilde{P})$.

Pour cela, il est nécessaire d'étudier la structure du processus $(z_t^\alpha \tilde{z}^{1-\alpha})_{t\geqq 0}$, et utile d'introduire un processus dit «de Hellinger» d'ordre α.

2.2. Soit $\tau_n=\inf\left\{t\colon z_t\leqq\frac{1}{n}\right\}$, $\tilde{\tau}_n=\inf\left\{t\colon \tilde{z}_t\leqq\frac{1}{n}\right\}$, $\Gamma=\bigcup_n [\![0,\tau_n]\!]$, $\tilde{\Gamma}=\bigcup_n [\![0,\tilde{\tau}_n]\!]$ où pour tout temps d'arrêt T, $[\![0, T]\!]$ désigne l'ensemble

$$\{(\omega, t)\colon 0\leqq t\leqq T(\omega)\}; \qquad \text{il est facile de voir que}$$

$$\Gamma=\{(\omega,t)\colon z_{t-}(\omega)>0\}, \qquad \tilde{\Gamma}=\{(\omega,t)\colon \tilde{z}_{t-}(\omega)>0\}.$$

Posons aussi

$$\tau=\lim_n \tau_n=\inf\{t\colon z_t=0\}$$

$$\tilde{\tau}=\lim_n \tilde{\tau}=\inf\{t\colon \tilde{z}_t=0\} \quad \text{on a:}$$

$$[\![0,\tau[\![=\{(\omega,t);\ z_t(\omega)>0\},$$

$$[\![0,\tilde{\tau}[\![=\{(\omega,t);\ \tilde{z}_t(\omega)>0\}.$$

Pour chaque $n \geqq 1$, on peut définir l'intégrale stochastique $M_t^n = \int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{dz_s}{z_{s-}}$ $\left(\text{car } \frac{1}{z_{s-}} \leqq n, \text{ si } s \leqq \tau_n\right)$.

Le processus $M^n = (M_t^n, (\mathscr{F}_t), Q)$ est une martingale locale, (on écrira souvent: M^n est une Q-martingale locale) et

$$z_{t \wedge \tau_n} = z_0 + \int_0^{t \wedge \tau_n} z_{s-}\, dM_s^n = z_0 + \int_0^t z_{s-}\, dM_s^n$$

en vertu de (6) et (7)

$$z_{t \wedge \tau_n} = z_0 \mathscr{E}(M^n)_t. \tag{16}$$

De façon analogue on peut définir $\tilde{M}_t^n = \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_n} \frac{d\tilde{z}_s}{\tilde{z}_{s-}}$ et l'on a:

$$\tilde{z}_{t \wedge \tilde{\tau}_n} = \tilde{z}_0 \mathscr{E}(\tilde{M}^n)_t.$$

2.3. Utilisant la formule (7), on obtient:

$$z_{t \wedge \tau n}^\alpha = z_0^\alpha (\mathscr{E}(M^n)_t)^\alpha = z_0^\alpha \mathscr{E}(N^n(\alpha))_t$$

où

$$N_t^n(\alpha) = \alpha M_t^n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \langle M^{nc} \rangle_t + \sum_{0 < s \leqq t} [(1 + \Delta M_s^n)^\alpha - (1 + \alpha \Delta M_s^n)] \tag{17}$$

et de façon analogue

$$\tilde{z}_{t \wedge \tilde{\tau}_n}^{1-\alpha} = \tilde{z}_0^{1-\alpha} \mathscr{E}(\tilde{N}^n(1-\alpha))_t$$

avec:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_t^n(1-\alpha) = (1-\alpha) \tilde{M}_t^n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \langle \tilde{M}^{nc} \rangle_t \\ + \sum_{0 \leqq s \leqq t} [(1 + \Delta \tilde{M}_s^n)^{1-\alpha} - (1 + (1-\alpha) \Delta \tilde{M}_s^n)]. \end{aligned} \tag{18}$$

Remarquons que chacun des processus $N^n(\alpha)$ et $\tilde{N}^n(1-\alpha)$ est une Q-semimartingale; en effet, M^n est une Q-martingale locale, $\langle M^{nc} \rangle$ est un processus croissant continu et $\sum_{0 \leqq s \leqq \cdot} [(1 + \alpha \Delta M_s^n) - (1 + \Delta M_s^n)^\alpha]$ est croissant et localement Q-intégrable puisque

$$\Delta M_s^n \geqq -1$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\leqq (1 + \alpha \Delta M_s^n) - (1 + \Delta M_s^n)^\alpha \\ &\leqq (1-\alpha)(\Delta M_s^n)^2 \mathbb{1}_{\{|M_s^n| \leqq 1\}} + |\alpha \Delta M_s^n| \mathbb{1}_{\{|\Delta M_s^n| > 1\}}, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat puisque, M^n étant une Q-martingale locale, le processus

$$\sum_{0 < s \leqq \cdot} (\Delta M_s^n)^2 \mathbb{1}_{\{|\Delta M_s^n| \leqq 1\}} + |\Delta M_s^n| \mathbb{1}_{\{|\Delta M_s^n| > 1\}}$$

est localement Q-intégrable (voir par exemple [4] p. 49).

Remarquons maintenant que d'après la formule de Yor ([4] p. 191)

$$\mathscr{E}(N^n(\alpha))_t\,\mathscr{E}(\tilde{N}^n(1-\alpha)_t=\mathscr{E}(N^n(\alpha)+\tilde{N}^n(1-\alpha)+[N^n(\alpha),\tilde{N}^n(1-\alpha)])_t$$

où $[N^n(\alpha),\tilde{N}^n(1-\alpha)]$ est la covariation quadratique de $N^n(\alpha)$ et $\tilde{N}^n(1-\alpha)$; à partir de (17) et (18) on trouve que:

$$\begin{aligned}&N^n(\alpha)+\tilde{N}^n(1-\alpha)+[N^n(\alpha),\tilde{N}^n(1-\alpha)]\\&\quad=\alpha M_t^n+(1-\alpha)\tilde{M}_t^n-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\langle M^{nc}-\tilde{M}^{nc}\rangle_t-\sum_{0<s\leqq t}\Phi(\alpha,1+\Delta M^n,1+\Delta\tilde{M}^n)\end{aligned}$$

avec $\Phi(\alpha,x,y)=\alpha x+(1-\alpha)y-x^\alpha y^{1-\alpha}$ $x\geqq 0$, $y\geqq 0$.

Notons $W_t^n(\alpha)=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\langle M^{nc}-\tilde{M}^{nc}\rangle_t+\sum_{0<s\leqq t}\Phi(\alpha,1+\Delta M_s^n,1+\Delta\tilde{M}_s^n)$. On a alors:

$$\mathscr{E}(N^n(\alpha))_t\,\mathscr{E}(\tilde{N}^n(1-\alpha))_t=\mathscr{E}(\alpha M^n+(1-\alpha)\tilde{M}^n-W^n(\alpha))_t,$$

et

$$z_{t\wedge\tau_n}^\alpha\,\tilde{z}_{t\wedge\tilde{\tau}_n}^{1-\alpha}=z_0^\alpha\,\tilde{z}_0^{1-\alpha}\,\mathscr{E}(\alpha M^n+(1-\alpha)\tilde{M}^n-W^n(\alpha))_t. \tag{19}$$

Le processus $W^n(\alpha)$ est croissant car pour tout α, $0<\alpha<1$, tout $x\geqq 0$, tout $y\geqq 0$ $\Phi(\alpha,x,y)\geqq 0$; ensuite il est aussi Q-localement intégrable: on a en effet:

$$\alpha x+(1-\alpha)y-x^\alpha y^{1-\alpha}\leqq\max(\alpha,1-\alpha)|x-y|$$

et

$$\leqq\min\left[\frac{\alpha(x-y)^2}{x},(1-\alpha)\frac{(x-y)^2}{y}\right]$$

ainsi

$$\begin{aligned}&\sum_{s\leqq t}[\alpha(1+\Delta M_s^n)+(1-\alpha)(1+\Delta\tilde{M}_s^n)-(1+\Delta M_s^n)^\alpha(1+\Delta\tilde{M}_s^n)^{1-\alpha}]\\&\quad\leqq\sum_{s\leqq t}\mathbb{1}_{[\{|\Delta M_s^n|>\frac12\}\cap\{|\Delta\tilde{M}_s^n|>\frac12\}\cup\{|\Delta M_s^n-\Delta\tilde{M}_s^n|>\frac12\}]}|\Delta M_s^n-\Delta\tilde{M}_s^n|\\&\qquad+\sum_{s\leqq t}\mathbb{1}_{[\{|\Delta M_s^n|\leqq\frac12\}\cap\{|\Delta M_s^n-\Delta\tilde{M}_s^n|\leqq\frac12\}]}2(\Delta M_s^n-\Delta\tilde{M}_s^n)^2\\&\qquad+\sum_{s\leqq t}\mathbb{1}_{[\{|\Delta\tilde{M}_s^n|\leqq\frac12\}\cap\{|\Delta M_s^n-\Delta\tilde{M}_s^n|\leqq\frac12\}]}2(\Delta M_s^n-\Delta\tilde{M}_s^n)^2.\end{aligned}$$

Les trois sommes du côté droit de l'inégalité sont Q-localement intégrables puisque $M^n-\tilde{M}^n$ est une Q-martingale locale.

2.4. On note $h^n(\alpha)=(h_t^n(\alpha))_{t\geqq 0}$ le compensateur prévisible de $W^n(\alpha)$ (pour la mesure (Q)); $h^n(\alpha)$ est bien défini d'après ce qui précède. De (19) on déduit que $(z_{t\wedge\tau_n}^\alpha\,\tilde{z}_{t\wedge\tau_n}^{1-\alpha})_{t\geqq 0}$ est une Q-surmartingale bornée; utilisant (6), sa décomposition de Doob-Meyer s'écrit sous la forme:

$$z_{t\wedge\tau_n}^\alpha\,\tilde{z}_{t\wedge\tilde{\tau}_n}^{1-\alpha}=z_0^\alpha\,\tilde{z}_0^{1-\alpha}+L_t^n(\alpha)-\int_0^t z_{(s\wedge\tau_n)-}^\alpha\,\tilde{z}_{(s\wedge\tilde{\tau}_n)-}^{1-\alpha}\,dh_s^n(\alpha)$$

où $L^n(\alpha)$ est la Q-martingale locale:

$$L_t^n(\alpha)=\int_0^t z^\alpha_{(s\wedge\tau_n)-}\,\tilde{z}^{1-\alpha}_{(s\wedge\tilde{\tau}_n)-}\,d(\alpha M_s^n+(1-\alpha)\tilde{M}_s^n+(h_s^n(\alpha)-W_s^n(\alpha)).$$

On en déduit, en posant $\sigma_n=\tau_n\wedge\tilde{\tau}_n$:

$$\mathbb{E}_Q[z^\alpha_{\sigma_n}\tilde{z}^{1-\alpha}_{\sigma_n}]=\mathbb{E}_Q[z^\alpha_0\tilde{z}^{1-\alpha}_0]-\mathbb{E}_Q\left[\int_0^\infty z^\alpha_{s-}\,\tilde{z}^{1-\alpha}_{s-}\,dh_s^n(\alpha)\right]. \tag{20}$$

Remarquons maintenant que pour $t\leqq\sigma_n$ on a:

$$M_t^n=M_t^{n+1},\qquad \tilde{M}_t^n=\tilde{M}_t^{n+1},\qquad W_t^n(\alpha)=W_t^{n+1}(\alpha),\qquad h_t^n(\alpha)=h_t^{n+1}(\alpha);$$

puisque $t\to h_t^n$ est croissant, la limite $\lim\limits_n h_t^n(\alpha)$ existe; on note $h_t(\alpha)=\lim\limits_n h_t^n(\alpha)$.

De (20) on déduit alors:

$$\mathbb{E}_Q[z^\alpha_{\sigma_n}\tilde{z}^{1-\alpha}_{\sigma_n}]=\mathbb{E}_Q[z^\alpha_0\tilde{z}^{1-\alpha}_0]-\mathbb{E}_Q\left[\int_0^{\sigma_n} z^\alpha_{s-}\,\tilde{z}^{1-\alpha}_{s-}\,dh_s(\alpha)\right]. \tag{21}$$

Notant $\sigma=\lim\limits_n\sigma_n$, et remarquant que $z^\alpha_{\sigma_n}\tilde{z}^{1-\alpha}_{\sigma_n}\xrightarrow{\text{Q.p.s.}}z^\alpha_\sigma\tilde{z}^{1-\alpha}_\sigma$ (en effet: soit il existe n avec $\sigma_n=\sigma$, soit on a pour tout n $\sigma_n<\sigma$ et alors $z^\alpha_{\sigma_n}\tilde{z}^{1-\alpha}_{\sigma_n}\xrightarrow{\text{Q.p.s.}}z^\alpha_{\sigma-}\,\tilde{z}^{1-\alpha}_{\sigma-}=z^\alpha_\sigma\tilde{z}^{1-\alpha}_\sigma=0$.)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q[z^\alpha_\infty\tilde{z}^{1-\alpha}_\infty]&=\mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_{\{z^\alpha_\infty\tilde{z}^{1-\alpha}_\infty>0\}}z^\alpha_\infty\tilde{z}^{1-\alpha}_\infty]\\&=\mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_{\{\sigma=\infty\}}z^\alpha_\sigma\tilde{z}^{1-\alpha}_\sigma]\\&=\mathbb{E}_Q[z^\alpha_\sigma\tilde{z}^{1-\alpha}_\sigma]\quad\text{car sur}\quad\{\sigma<\infty\}\,z^\alpha_\sigma\tilde{z}^{1-\alpha}_\sigma=0\\&=\mathbb{E}_Q[\lim_n z^\alpha_{\sigma_n}\tilde{z}^{1-\alpha}_{\sigma_n}]=\lim_n\mathbb{E}_Q[z^\alpha_{\sigma_n}\tilde{z}^{1-\alpha}_{\sigma_n}].\end{aligned}$$

Ainsi, d'après les remarques précédentes et utilisant (21), on obtient

$$\mathbb{E}_Q[z^\alpha_\infty\tilde{z}^{1-\alpha}_\infty]=\mathbb{E}_Q[z^\alpha_0\tilde{z}^{1-\alpha}_0]-\mathbb{E}_Q\left[\int_0^\infty z^\alpha_{s-}\,\tilde{z}^{1-\alpha}_{s-}\,dh_s(\alpha)\right]$$

ou encore

$$\rho(\alpha,P,\tilde{P})=\rho(\alpha,P_0,\tilde{P}_0)-\mathbb{E}_Q\left[\int_0^\infty z^\alpha_{s-}\,\tilde{z}^{1-\alpha}_{s-}\,dh_s(\alpha)\right]. \tag{22}$$

On appelle $h(\alpha)$: *processus de Hellinger* d'ordre α. On appellera également ainsi tout processus $h'(\alpha)$ croissant prévisible coïncidant avec $h(\alpha)$ sur l'ensemble $\Gamma\cap\tilde{\Gamma}$ Q.p.s. Le processus de Hellinger $h(\alpha)$ ne dépend pas de Q au sens suivant: soit $\bar{Q}$ une autre probabilité dominant P et $\tilde{P}$, notons $\bar{Z}=dP/d\bar{Q}$, $\tilde{\bar{Z}}=d\tilde{P}/d\bar{Q}$; soit $\bar{h}(\alpha)$ un processus prévisible croissant tel que l'on ait la formule (22) avec, $Z,\tilde{Z},\bar{h},\bar{Q}$ au lieu de $Z,\tilde{Z},h,Q$, alors $\bar{h}(\alpha)=h(\alpha)$ à un ensemble Q-évanescent près sur $\Gamma\cap\tilde{\Gamma}$ (voir aussi [5] théorèmes 2.8 et 2.13).

§ 3. Démonstration du théorème 1

Lorque P et $\tilde{P}$ sont des lois de semi-martingales à accroissements indépendants, nous allons montrer que l'on peut obtenir un processus de Hellinger $h(\alpha)$ déterministe, donné par la formule (9).

Le processus canonique $(\mathfrak{X}, (\mathscr{D}_t), \mathscr{D})$ est une semi-martingale pour la loi $Q = \frac{P+\tilde{P}}{2}$ ([3] p. 235). On notera $T^Q = (B^Q, C^Q, \nu^Q)$ le triplet de ses caractéristiques locales ([4], 3-46 ou [6]). On a $P \ll Q$ c'est pourquoi ([6] théorème 3-3) on peut trouver $Y = Y(\mathfrak{X}, s, x)$ tel que pour tout $t < \infty$

$$d\nu = Y d\nu^Q \quad \text{en restriction à } [0, t] \times \mathbb{R}_0 \quad \text{P.p.s.} \tag{23}$$

avec $a_s^Q = \nu^Q(\{s\} \times \mathbb{R}_0) = 1 \Rightarrow a_s = \nu(\{s\} \times \mathbb{R}_0) = 1$

$$C = C^Q \quad \text{sur} \quad [0, t] \quad \text{P.p.s.} \tag{24}$$

Ensuite, on peut trouver un processus prévisible $\beta = (\beta_t)$ tel que $\int_0^{\cdot} \beta_s^2 \, dC_s^Q$ soit P-localement intégrable et pour tout $t < \infty$

$$B_t = B_t^Q + \int_0^t \beta_s d\, C_s^Q + \int_0^t x \mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}} (Y-1) d\nu^Q \quad \text{P.p.s.} \tag{25}$$

En considérant comme précédemment $\Gamma = \{(\omega, s), z_{s-}(\omega) > 0\}$, les formules (23), (24), (25) sont vraies aussi Q.p.s. sur l'ensemble $\{\omega; (\omega, t) \in \Gamma\}$.

On a aussi $\tilde{P} \ll Q$ et les formules correspondantes tiennent pour $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{\nu}$.

Introduisons les processus croissants prévisibles $K(P, Q)$, $K(\tilde{P}, Q)$ avec

$$K_t(P, Q) = \int_0^t \beta_s^2 \, d\, C_s^Q + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} (1 - Y^{\frac{1}{2}})^2 \, d\nu^Q + \sum_{0 \leq s \leq t} ((1 - a_s^Q)^{\frac{1}{2}} - (1 - a_s)^{\frac{1}{2}})^2$$

(resp: la formule analogue pour $K(\tilde{P}, Q)$).

Comme $P \ll Q$ et $\tilde{P} \ll Q$, on a $K_\infty(P, Q) < \infty$ P.p.s. et $K_\infty(\tilde{P}, Q) < \infty$ $\tilde{\text{P}}$.p.s. (voir [4] (th 12.39 p. 382) et [7] th 15).

On commence par montrer le lemme de singularité suivant:

3.1. Lemme. *Si $C \neq \tilde{C}$, ou si dA non absolument continue par rapport à dC, ou encore si $h_\infty(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}) = +\infty$ P et $\tilde{P}$ sont singulières. Plus généralement, soit $\theta = \inf\{t \colon C^t \neq \tilde{C}^t$ ou $dA^t \not\ll dC^t\}$; alors si $\theta < \infty$, P_θ et $\tilde{P}_\theta$ sont singulières de même que P^t et $\tilde{P}^t$ pour tout $t > \theta$. P^t et $\tilde{P}^t$ sont singulières pour $t \leq \theta$ lorsque $h_t(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}) = +\infty$.*

Démonstration. Notons Γ_t (resp: $\tilde{\Gamma}_t$) l'ensemble $\{\omega \colon z_{t-}(\omega) > 0\}$ (resp: $\{\omega \colon \tilde{z}_{t-}(\omega) > 0\}$; sur $\Gamma_t \cap \tilde{\Gamma}_t$ on a d'après (24) $C^t = \tilde{C}^t$ et $dA^t \ll dC^t$ Q.p.s.; si donc $t > \theta$ $C^t \neq \tilde{C}^t$ ou $dA^t \not\ll dC^t$ ce qui implique $Q(\Gamma_t \cap \tilde{\Gamma}_t) = 0$ d'où la singularité de P_t et de $\tilde{P}_t$, pour $t > \theta$ donc aussi de P_θ et $\tilde{P}_\theta$ d'après la continuité à droite de $s \to z_s \tilde{z}_s$; enfin si $\theta < t < t'$ $\mathscr{D}_{t'}^o \supset \mathscr{D}_t$ de sorte que les lois $P^{t'}$ et $\tilde{P}^{t'}$ sont aussi singulières; le cas $t = +\infty$ donnent la singularité de P et $\tilde{P}$.

Plaçons nous maintenant en $t \leqq \theta$; sur $\Gamma_t \cap \tilde{\Gamma}_t$, on a Q.p.s. $K_{t-}(P,Q)<\infty$ et $K_{t-}(\tilde{P},Q)<\infty$. Utilisant l'inégalité élémentaire:

$$K_{t-}(P,Q)+K_{t-}(\tilde{P},Q)\geqq h_{t-}(\tfrac{1}{2},T,\tilde{T})\geqq h_t(\tfrac{1}{2},T,\tilde{T})-1$$

on en déduit $h_t(\frac{1}{2},T,\tilde{T})<\infty$ sur $\Gamma_t \cap \tilde{\Gamma}_t$ Q.p.s.; d'où le résultat.

Le lemme précédent donne donc une partie du point b) du théorème; on va maintenant exhiber un critère de domination pour les probabilités P et $\tilde{P}$.

3.2. Proposition. *Soit P et $\tilde{P}$ deux lois de semi-martingales à accroissements indépendants de triplets caractéristiques $T=(B,C,\nu)$ et $\tilde{T}=(\tilde{B},\tilde{C},\tilde{\nu})$, il existe une loi P^* de processus à accroissements indépendants dominant P et $\tilde{P}$ si et seulement si on a les trois relations suivantes:*

$$C=\tilde{C}$$

$$dA \ll dC$$

$$h_\infty(\tfrac{1}{2},T,\tilde{T})<\infty.$$

Quand ces propriétés sont satisfaites, on peut prendre pour P^* la loi correspondant au triplet $T^*=(B^*,C^*,\nu^*)$ où $B^*=\dfrac{B+\tilde{B}}{2}$, $C^*=C$, $\nu^*=\dfrac{\nu+\tilde{\nu}}{2}$, avec la distribution initiale $P_0^*=\dfrac{P_0+\tilde{P}_0}{2}$.

Démonstration. a) L'hypothèse est suffisante: on remarque d'abord que le triplet (B^*,C^*,ν^*) défini par $B^*=\dfrac{B+\tilde{B}}{2}$, $C^*=C$, $\nu^*=\dfrac{\nu+\tilde{\nu}}{2}$ est bien un triplet caractéristique d'une loi de processus à accroissements indépendants (c'est à dire satisfait les propriétés (i), (ii), (iii) de 1-2), on a évidemment $\nu \ll \nu^*$, $\tilde{\nu} \ll \nu^*$ par construction;

On vérifie immédiatement en notant $f=\dfrac{d\nu}{d\nu^*}$, $\tilde{f}=\dfrac{d\tilde{\nu}}{d\nu^*}$ que

$$B=B^*+\tfrac{1}{2}\int \frac{dA_s}{dC_s}\,dC_s+\int x\,\mathbb{1}_{\{|x|\leqq 1\}}(f-1)\,d\nu^*$$

$$\tilde{B}=B^*-\tfrac{1}{2}\int \frac{dA_s}{dC_s}\,dC_s+\int x\,\mathbb{1}_{\{|x|\leqq 1\}}(1-f)\,d\nu^*$$

de sorte que ayant:

$$h(\tfrac{1}{2},T,\tilde{T})=\tfrac{1}{8}\int\left(\frac{dA_s}{dC_s}\right)^2+\tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_0}(f^{\frac{1}{2}}-\tilde{f}^{\frac{1}{2}})^2\,d\nu^*+\tfrac{1}{2}\sum_s((1-a_s)^{\frac{1}{2}}-(1-\tilde{a}_s)^{\frac{1}{2}})^2$$

et écrivant:

$$K_\infty(P,P^*)=\tfrac{1}{4}\int_0^\infty\left(\frac{dA_s}{dC_s}\right)^2 dC_s+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}_0}(1-f^{\frac{1}{2}})^2\,d\nu^*+\sum_s((1-a_s^*)^{\frac{1}{2}}-(1-a_s)^{\frac{1}{2}})^2$$

$$K_\infty(\tilde{P},P^*)=\tfrac{1}{4}\int_0^\infty\left(\frac{dA_s}{dC_s}\right)^2 dC_s+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}_0}(1-\tilde{f}^{\frac{1}{2}})^2\,d\nu^*+\sum_s((1-a_s^*)^{\frac{1}{2}}-(1-\tilde{a}_s)^{\frac{1}{2}})^2$$

on a $4h(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}) \geqq K_\infty(P, P^*) + K_\infty(\tilde{P}, P^*)$ ce qui découle, compte tenu de la relation $f + \tilde{f} = 2$ de

$$(f^{\frac{1}{2}} - \tilde{f}^{\frac{1}{2}})^2 \geqq (f^{\frac{1}{2}} - 1)^2 + (\tilde{f}^{\frac{1}{2}} - 1)^2$$

et de

$$((1-a_s)^{\frac{1}{2}} - (1-\tilde{a}_s)^{\frac{1}{2}})^2 \geqq ((1-a_s^*)^{\frac{1}{2}} - (1-a_s)^{\frac{1}{2}})^2 + ((1-a_s^*)^{\frac{1}{2}} - (1-\tilde{a}_s)^{\frac{1}{2}})^2.$$

L'hypothèse faite implique donc $K_\infty(P, P^*) < \infty$ et $K_\infty(\tilde{P}, P^*) < \infty$, et donc $P \ll P^*$ et $\tilde{P} \ll P^*$ d'après ([7] th. 15 ou [4] th. 12.49 p. 387). Indiquons que la méthode de démonstration de cette domination consiste à considérer les P^* martingales $\bar{M}, \bar{\tilde{M}}$ définies par

$$\bar{M}_t = \tfrac{1}{2} \int_0^t \frac{dA_s}{dC_s}\, d\mathfrak{X}_s^c + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \left(f - 1 + \frac{a - \tilde{a}}{2 - a - \tilde{a}} \mathbb{1}_{\{a + \tilde{a} \neq 2\}} \right) d(\mu - \nu^*) \tag{26}$$

$\bar{\tilde{M}}_t = -\bar{M}_t$; μ est la mesure des sauts du processus canonique $\mathfrak{x}$ et à montrer que $\mathscr{E}(\bar{M}), \mathscr{E}(\bar{\tilde{M}})$ sont des P^*-martingales uniformément intégrables, définissant donc des densités de probabilités, les probabilités $\bar{z}_0 \mathscr{E}(\bar{M})\, dP^*$ et $\bar{\tilde{z}}_0 \mathscr{E}(\bar{\tilde{M}})\, dP^*$ coïncidant avec P et $\tilde{P}$.

b) L'hypothèse est nécessaire. Soit P^* une probabilité dominant P et $\tilde{P}$; appliquant les relations (23), (24), (25) entre P et P^* et entre $\tilde{P}$ et P^*, il est clair que l'on doit avoir $C = \tilde{C}$ et $dA \ll dC$; ensuite un calcul simple donne la relation:

$$h_\infty(\tfrac{1}{2}, T, \tilde{T}) \leqq K_\infty(P, P^*) + K_\infty(\tilde{P}, P^*)$$

d'où le caractère fini de $h_\infty(\frac{1}{2}, T, \tilde{T})$.

3.3. Démonstration du théorème 1. On a vu que si $C \neq \tilde{C}$ ou si $dA \not\ll dC$ ou encore si $h_\infty(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}) = \infty$ le résultat voulu est démontré. On suppose maintenant que l'on n'est pas dans un de ces cas; on considère alors P^* loi de P.a.i. dominant P et $\tilde{P}$, définie comme dans l'énoncé de la proposition 3.2. Notons z_t, $\tilde{z}_t$ les densités $\left.\frac{dP}{dP^*}\right|_{\mathscr{D}_t}$ $\left.\frac{d\tilde{P}}{dP^*}\right|_{\mathscr{D}_t}$. On a donc utilisant les P^*-martingales $\bar{M}$ et $\bar{\tilde{M}}$ définies par (26), $z = z_0 \mathscr{E}(\bar{M})$, $\tilde{z} = \tilde{z}_0 \mathscr{E}(\bar{\tilde{M}})$ de sorte que:

$$z^\alpha \tilde{z}^{1-\alpha} = z_0^\alpha \tilde{z}_0^{1-\alpha} \mathscr{E}(\bar{M})^\alpha \mathscr{E}(\bar{\tilde{M}})^{1-\alpha}.$$

On peut définir par analogie aux processus $W^n(\alpha), h^n(\alpha)$ du paragraphe 2 les processus $\bar{W}(\alpha), \bar{h}(\alpha)$ et on obtient:

$$\mathbb{E}_{P^*}[z_\infty^\alpha \tilde{z}_\infty^{1-\alpha}] = \mathbb{E}_{P^*}[z_0^\alpha \tilde{z}_0^{1-\alpha}] - \mathbb{E}_{P^*}\left[\int_0^\infty z_{s-}^\alpha\, \tilde{z}_{s-}^{1-\alpha}\, d\bar{h}_s(\alpha)\right] \tag{27}$$

$\bar{h}(\alpha)$ est le P^*-compensateur prévisible de $\bar{W}(\alpha)$ où:

$$\begin{aligned}\bar{W}_t(\alpha) &= \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \langle \bar{M}^c - \bar{\tilde{M}}^c \rangle_t + \sum_{s \leqq t} \Phi(\alpha, 1 + \Delta \bar{M}_s, 1 + \Delta \bar{\tilde{M}}_s) \\ &= \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \int_0^t \left(\frac{dA_s}{dC_s}\right)^2 dC_s + \sum_{s \leqq t} \Phi(\alpha, 1 + \Delta \bar{M}_s, 1 - \Delta \bar{M}_s).\end{aligned}$$

Il reste à calculer la partie de $\bar{h}(\alpha)$ compensant la somme $\sum_{s\leq t} \Phi(\alpha, 1+\Delta\bar{M}_s, 1-\Delta\bar{M}_s)$:

posons $D=\{t: \Delta\mathfrak{X}_t \neq 0\}=\{t: \mu(\{t\}\times\mathbb{R}_0)=1\}$

et $J=\{t: a_t^* \neq 0\}$.

$$\begin{aligned}\Delta\bar{W}_t(\alpha) &= \alpha(1+\Delta\bar{M}_t)+(1-\alpha)(1-\Delta\bar{M}_t)-(1+\Delta\bar{M}_t)^{\alpha}(1-\Delta\bar{M}_t)^{1-\alpha}\\ &= \alpha(\mathbb{1}_{D\cup J}(t)+\Delta\bar{M}_t)+(1-\alpha)(\mathbb{1}_{D\cup J}(t)-\Delta\bar{M}_t)\\ &\quad -(\mathbb{1}_{D\cup J}(t)+\Delta\bar{M}_t)^{\alpha}(\mathbb{1}_{D\cup J}(t)-\Delta\bar{M}_t)^{1-\alpha}=\Phi(\alpha, U_t, \tilde{U}_t)\end{aligned}$$

où $U_t=\mathbb{1}_{D\cup J}(t)+\Delta\bar{M}_t$, $\tilde{U}_t=\mathbb{1}_{D\cup J}(t)-\Delta\bar{M}_t$.

En convenant encore que $\frac{0}{0}=0$, on a:

$$\begin{aligned}U_t &= \mathbb{1}_{D\cup J}(t)+\int_{\mathbb{R}_0}\left(f-1+\frac{a_t-\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\right)\mu(\{t\}, dx)\\ &\quad -\int_{\mathbb{R}_0}\left(f-1+\frac{a_t-\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\right)\frac{\nu+\tilde{\nu}}{2}(\{t\}, dx)\\ &= \mathbb{1}_{D\cup J}(t)+\int\left(f-1+\frac{a_t-\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\right)\mu(\{t\}, dx)\\ &\quad -\left[\frac{a_t-\tilde{a}_t}{2}+\frac{a_t-\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\cdot\left(\frac{a_t-\tilde{a}_t}{2}\right)\right]\\ &= \mathbb{1}_{D\cup J}(t)+\int\left(f-1+\frac{a_t-\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\right)\mu(\{t\}, dx)-\frac{a_t-\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\\ &= \mathbb{1}_{D\cup J}(t)+\int_{\mathbb{R}_0} f\mu(\{t\}, dx)+\mathbb{1}_D(t)\left(-1+\frac{a_t-\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\right)-\frac{a_t-\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\\ &= \mathbb{1}_{D\cup J}(t)-\mathbb{1}_D(t)+\int_{\mathbb{R}_0} f(t,x)\mu(\{t\}, dx)-\frac{a_t-\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\mathbb{1}_{D^c}(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}_0} f\mu(\{t\}, dx)+\mathbb{1}_{J\cap D^c}(t)\frac{2-2\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}.\end{aligned}$$

On fait un calcul analogue pour $\tilde{U}_t$ et on obtient:

$$\tilde{U}_t=\int_{\mathbb{R}_0}(2-f)\mu(\{t\}, dx)+\mathbb{1}_{J\cap D^c}\frac{2-2\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t};$$

enfin

$$\begin{aligned}\Delta\bar{W}_t(\alpha) &= \int_{\mathbb{R}_0}\Phi(\alpha, f, 2-f)\mu(\{t\}, dx)\\ &\quad +\mathbb{1}_{J\cap D^c}(t)\,\Phi\left(\alpha, \frac{2-2a_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}, \frac{2-2\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}_0}\Phi(\alpha, f, 2-f)\mu(\{t\}, dx)+\Phi\left(\alpha, \frac{2-2a_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}, \frac{2-2\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\right)\\ &\quad -\int\Phi\left(\alpha, \frac{2-2a_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}, \frac{2-2\tilde{a}_t}{2-a_t-\tilde{a}_t}\right)\mu(\{t\}, dx).\end{aligned}$$

Le P^*-compensateur de $\sum_s \Phi(\alpha, 1+\Delta \bar{M}_s, 1-\Delta \bar{M}_s)$ est alors:

$$\int_0^{\cdot} \int_{\mathbb{R}_0} \Phi(\alpha, f, 2-f)\, d\nu^* + \sum_{0<s} \Phi\left(\alpha, \frac{2-2a_s}{2-a_s-\tilde{a}_s}, \frac{2-2\tilde{a}_s}{2-a_s-\tilde{a}_s}\right)\left(1-\frac{a_s+\tilde{a}_s}{2}\right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \bar{h}_t(\alpha) = & \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \int_0^t \left(\frac{dA_s}{dC_s}\right)^2 dC_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \Phi(\alpha, f, 2-f)\, d\nu^* \\ & + \sum_{0 \leqq s \leqq t} \Phi(\alpha, 1-a_s, 1-\tilde{a}_s) \equiv h_t(\alpha, T, \tilde{T}). \end{aligned} \tag{28}$$

Utilisant maintenant l'égalité (27), comme $\bar{h}(\alpha)$ est déterministe, d'après l'égalité (28), on obtient:

$$\rho_t(\alpha, P, \tilde{P}) = \rho_0(\alpha, P, \tilde{P}) + \int_0^t \rho_{s-}(\alpha, P, \tilde{P})\, dh_s(\alpha, T, \tilde{T})$$

en notant $\rho_t(\alpha, P, \tilde{P}) = \rho(\alpha, P_t, \tilde{P}_t) = \mathbb{E}_{P^*}[z_t^\alpha \tilde{z}_t^{1-\alpha}]$ de sorte que utilisant (6) et (7), on déduit:

$$\rho_t(\alpha) = \rho_0(\alpha)\, \mathscr{E}(-h(\alpha))_t \tag{29}$$

d'où le résultat attendu, pour $\rho(\alpha, P_t, \tilde{P}_t)$.

Ensuite comme $\mathscr{D}_t^0 = (\bigvee_{s<t} \mathscr{D}_s) \vee \mathscr{D}_{\{t\}}^0$ et comme $P^t = P^{t-} \otimes P^{\{t\}}$, $\tilde{P}^t = \tilde{P}^{t-} \otimes \tilde{P}^{\{t\}}$ où $P^{\{t\}}$, $\tilde{P}^{\{t\}}$ sont les lois des variables X_t, $\tilde{X}_t$ et P^{t-}, $\tilde{P}^{t-}$ sont les lois de X et $\tilde{X}$ sur $[0, t[$, on a:

$$\begin{aligned} \rho(\alpha, P^t, \tilde{P}^t) &= \lim_{s \uparrow t, s<t} \rho(\alpha, P_s, \tilde{P}_s)\, \rho(\alpha, P^{\{t\}}, \tilde{P}^{\{t\}}) \\ &= \rho_0(\alpha)\, \mathscr{E}(-h(\alpha))_{t-}\, \rho(\alpha, \nu\{t\}, \tilde{\nu}\{t\}) \\ &= \rho_0(\alpha)\, \mathscr{E}(-h(\alpha))_t = \rho(\alpha, P_t, \tilde{P}_t). \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration, il reste à considérer le cas où $\theta < \infty$; on peut appliquer ce qui précède aux processus arrêtés $X^\theta \tilde{X}^\theta$; on obtient pour $t < \theta$

$$\rho(\alpha, P_t, \tilde{P}_t) = \rho(\alpha, P_0, \tilde{P}_0)\, \mathscr{E}(-h(\alpha))_t$$

et comme

$$P^\theta = P^{\theta-} \otimes P^{\{\theta\}}$$
$$\tilde{P}^\theta = \tilde{P}^{\theta-} \otimes \tilde{P}^{\{\theta\}}$$

on a encore

$$\rho(\alpha, P^\theta, \tilde{P}^\theta) = \rho(\alpha, P_0, \tilde{P}_0)\, \mathscr{E}(-h(\alpha))_\theta.$$

§ 4. Criteres d'absolue continuite ou de singularite pour les lois P et $\tilde{P}$ de deux processus a accroissements independants

Pour la simplicité de l'exposition on donne maintenant le critère d'absolue continuité (figurant déjà dans [4] et [7]).

4.1. Théorème 2. *Pour que $\tilde{P} \ll P$ il est nécessaire et suffisant que soient satisfaites les quatre propriétés suivantes:*

(AC_1): $\tilde{P}_0 \ll P_0$

(AC_2): $C = \tilde{C}$ *et* $dA \ll dC$

(AC_3): $\tilde{\chi} \ll \chi$ (*i.e.* $\tilde{\nu} \ll \nu$ *et pour tout* $t < \infty$ $a_t = 1 \Rightarrow \tilde{a}_t = 1$)

(AC_4): $h_\infty(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}) < \infty$.

Voici maintenant un critère de singularité nouveau (semble t'il) dans ce cadre général sans hypothèse d'absolue continuité locale; ce critère complète le lemme 3-1.

4.2. Théorème 3. *Pour que P et $\tilde{P}$ soient singulières, il faut et il suffit qu'au moins une des conditions suivantes soit satisfaite:*

(S_1): $\tilde{P}_0 \perp P_0$

(S_2): $C \neq \tilde{C}$ *ou* $dA \not\ll dC$

(S_3): *Il existe* $s < \infty$ *tel que:* $H^2(\chi(\{s\}, dx), \tilde{\chi}(\{s\}, dx)) = 1$

(S_4): $h_\infty(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}) = \infty$.

Démonstration. La suffisance de la condition $P_0 \perp \tilde{P}_0$ est évidente; si $C \neq \tilde{C}$, d'après le théorème 1, on a $H(P, \tilde{P}) = 0$ et donc $P \perp \tilde{P}$. Si (S_3) est satisfaite, alors $\Delta h_s(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}) = 1$, et en vertu de la formule (7) on a $\mathscr{E}(-\mathrm{h}(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}))_s = 0$ et donc à nouveau d'après le théorème 1 $P \perp \tilde{P}$. Enfin si (S_4) est satisfaite, $h_\infty(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}) = \infty$ et $\mathscr{E}(-h(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}))_\infty = 0$ d'où encore une fois la singularité de P et de $\tilde{P}$.

La nécessité: Soit $P \perp \tilde{P}$ et supposons qu'aucune des conditions (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) ne soit remplie. D'après le théorème 1,

$$\rho(\tfrac{1}{2}, P, \tilde{P}) = \rho(\tfrac{1}{2}, P_0, \tilde{P}_0)\,\mathscr{E}(-h(\tfrac{1}{2}. T, \tilde{T}))_\infty$$

avec $\rho(\frac{1}{2}, P_0, \tilde{P}_0)_\infty > 0$ et $\mathscr{E}(-h(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}))_\infty > 0$, on en déduit $\rho(\frac{1}{2}, P, \tilde{P}) > 0$ ce qui contredit la singularité de P et de $\tilde{P}$.

4.3. Considérons le problème de l'alternative $\tilde{P} \ll P$ ou $\tilde{P} \perp P$. D'abord remarquons qu'en général, même en partant de $P_0 = \tilde{P}_0$, on n'a pas cette alternative, la condition (S_3) du théorème 3 n'étant pas la négation de la condition (AC_3) du théorème 2.

Donnons deux cas classiques où l'on a dichotomie:

1) Soit $\tilde{P}$ localement absolument continue par rapport à P (voir [7]).

Alors (AC_1), (AC_2), (AC_3) sont satisfaites et (S_3) ne peut donc pas se présenter et l'on a:

$$\tilde{P} \ll P \Leftrightarrow h_\infty(\tfrac{1}{2}, T, \tilde{T}) < \infty$$
$$\tilde{P} \perp P \Leftrightarrow h_\infty(\tfrac{1}{2}, T, \tilde{T}) = \infty.$$

2) Supposons que P et $\tilde{P}$ soient des mesures gaussiennes, alors $P_0 \sim \tilde{P}_0$ et on a la dichotomie:

$\tilde{P} \sim P \Leftrightarrow C = \tilde{C}$, $|a_s - \tilde{a}_s| = 0$ pour tout $s, h_\infty(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}) < \infty$

$\tilde{P} \perp P \Leftrightarrow (C \neq \tilde{C})$ ou (il existe s avec $|a_s - \tilde{a}_s| \neq 0$) ou $h_\infty(\frac{1}{2}, T, \tilde{T}) = \infty$.

(Le seul point à vérifier est que la négation de S_3 est AC_3: dans le cas gaussien $\nu^c=0$ de sorte que si $a_s \neq 0$ nécessairement $a_s=1$ et la relation Non(S_3) implique $\tilde{a}_s=1$.

Ensuite, soit s avec $a_s \neq 0$ et $\tilde{a}_s \neq 0$; notons

$$F_s(x)=\mathbb{P}[\Delta X_s \leqq x] \qquad \tilde{F}_s(x)=\mathbb{P}[\Delta \tilde{X}_s \leqq x]$$

on a:

$$\nu(\{s\}\times]-\infty, x]\cap \mathbb{R}_0)=F_s(x), \qquad \tilde{\nu}(\{s\}\times]-\infty, x]\cap \mathbb{R}_0)=\tilde{F}_s(x);$$

ΔX_s et $\Delta \tilde{X}_s$ sont des variables gaussiennes, elles sont donc mutuellement absolument continues, $F_s(dx)\sim \tilde{F}_s(dx)$ et donc $\nu \sim \tilde{\nu}$ d'où (AC_3).

§ 5. Critere de contiguite

On considère dans ce paragraphe une suite $(P^n, \tilde{P}^n)$ de couples de probabilités sur $(\mathbb{D}, \mathscr{D})$, telle que pour chaque n P^n et $\tilde{P}^n$ munissent le processus canonique d'une structure de processus à accroissements indépendants; on notera les triplets caractéristiques correspondants $T^n=(B^n, C^n, \nu^n)$ et $\tilde{T}^n=(\tilde{B}^n, \tilde{C}^n, \tilde{\nu}^n)$.

On se propose de donner un critère de contiguité de $(\tilde{P}^n)$ relativement à (P^n), critère portant sur le comportement asymptotique relatif de T^n et $\tilde{T}^n$. Ce critère généralise celui de Oosterhoff et Van Zwet [16] qui concernait des sommes de variables aléatoires indépendantes (voir aussi Liptser, Pukelsheim, Shiryayev [12]) et celui de Eagleson-Mémin [2] où figurait une hypothèse d'absolue continuité locale. Rappelons d'abord que $(\tilde{P}^n)$ est contigue à (P^n) (et on note $(\tilde{P}^n)\lhd(P^n)$) si pour toute suite (F^n) d'éléments de $\mathscr{D}$ on a l'implication: $P^n[F^n]\to 0 \Rightarrow \tilde{P}^n[F^n]\to 0$.

Nous utiliserons le critère suivant de contiguité tiré de Jacod [5], et portant sur le comportement des intégrales de Hellinger d'ordre α, $\rho(\alpha, P^n, \tilde{P}^n)$.

5.1. Lemme. *$(\tilde{P}^n)$ est contigue à (P^n) si et seulement si:* $\lim_{\alpha\downarrow 0} \liminf_n \rho(\alpha, P^n, \tilde{P}^n)=1$

5.2. Lemme. *Si $(\tilde{P}^n)\lhd(P^n)$ alors $\liminf_n \rho(\frac{1}{2}, P^n, \tilde{P}^n)>0$ et on a:*

(a) $(\tilde{P}_0^n)\lhd(P_0^n)$.

(b) $\limsup_n h_\infty(\frac{1}{2}, T^n, \tilde{T}^n)<\infty$.

Démonstration. L'implication $(\tilde{P}^n)\lhd(P^n)\Rightarrow(\tilde{P}_0^n)\lhd(P_0^n)$ est triviale.

Ensuite on a $(\tilde{P}^n)\lhd(P^n)\Rightarrow \limsup_n \|P^n-\tilde{P}^n\|<2$; sinon, on pourrait trouver une suite (F^n) d'éléments de $\mathscr{D}$ avec $P^n[F^n]\to 0$ et $\limsup_n \tilde{P}^n(F^n)=1$, ce qui contredirait l'hypothèse de contiguité $((\tilde{P}^n)\lhd(P^n))$.

On en déduit donc $\liminf_n \rho(\frac{1}{2}, P^n, \tilde{P}^n)>0$ et de même $\liminf_n \rho(\frac{1}{2}, P_0^n, \tilde{P}_0^n)>0$ d'où compte-tenu du théorème 1, $\limsup_n h_\infty(\frac{1}{2}, T^n, \tilde{T}^n)<\infty$.

On va maintenant faire intervenir directement les composantes de T^n et $\tilde{T}^n$. Notons χ^n et $\tilde{\chi}^n$ les mesures σ-finies définies à partir de ν^n et $\tilde{\nu}^n$ respectivement par (8), et A^n définie à partir de $B^n, \tilde{B}^n, \nu^n, \tilde{\nu}^n$ par (5).

5.3. Proposition. *Soit* $(\tilde{P}^n) \lhd (P^n)$. *Alors il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, *il existe* $K > 0$, *tels que pour tout* $n \geqq n_0$ *on ait les propriétés:*

(a) $C^n = \tilde{C}^n$.

(b) A^n *définit un processus à variation finie; la mesure* dA^n *est absolument continue par rapport à* dC^n *et*

$$\int_0^\infty \left(\frac{dA_s^n}{dC_s^n}\right)^2 dC_s^n \leqq K.$$

(c) $(\tilde{\chi}^n) \lhd (\chi^n)$ *et* $H^2(\chi^n, \tilde{\chi}^n) \leqq K$.

Démonstration. De la formule (9) définissant $h(\frac{1}{2}, T^n, \tilde{T}^n)$, et du lemme (5.2) précédent, on déduit immédiatement les points (a), (b) et la bornitude $h(\frac{1}{2}, T^n, \tilde{T}^n) \leqq K$ à partir d'un certain rang n_0.

Il reste seulement à montrer la contiguité $(\tilde{\chi}^n) \lhd (\chi^n)$; c'est-à-dire les contiguités $(\tilde{\nu}^n) \lhd (\nu^n)$ et $(\tilde{\chi}^n - \tilde{\nu}^n) \lhd (\chi^n - \nu^n)$.

1) $(\tilde{\nu}^n) \lhd (\nu^n)$.

Notons f^n la densité de Lebesgue de $\tilde{\nu}^n$ par rapport à ν^n (pour tout

$$A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}_0} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^+}, \qquad \tilde{\nu}^n(A) = \int_A f^n(s, x)\, \nu^n(ds, dx) + \tilde{\nu}^n[A \cap \{f_n = \infty\}]).$$

On commence par montrer que, sous l'hypothèse $H^2(\nu^n, \tilde{\nu}^n) \leqq K$ pour $n \geqq n_0$, on a:

$$(\tilde{\nu}^n) \lhd (\nu^n) \Leftrightarrow \lim_k \limsup_n \tilde{\nu}^n[f^n(s, x) > k] = 0. \tag{30}$$

Cette équivalence est classique lorsque $\tilde{\nu}^n$ et ν^n sont des mesures finies (voir par exemple [2, 12]); ici on aura la même propriété grâce à l'hypothèse $H^2(\nu^n, \tilde{\nu}^n) \leqq K$ si $n \geqq n_0$.

En effet on a alors $\int ((f^n(s, x))^{\frac{1}{2}} - 1)^2\, \nu^n(ds, dx) \leqq K$ pour $n \geqq n_0$ d'où

$$\lim_k \int \mathbb{1}_{\{f^n(s,x) > k\}}\, \nu^n(ds, dx) = 0 \qquad \text{si } n \geqq n_0.$$

$$(\tilde{\nu}^n) \lhd (\nu^n) \Rightarrow \lim_k \int \mathbb{1}_{\{f^n(s,x) > k\}}\, \tilde{\nu}^n(ds, dx) = 0 \qquad \text{si } n \geqq n_0.$$

Dans l'autre sens, soit $A^n \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}_0} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^+}$ avec $\nu^n[A^n] \to 0$;

$$\tilde{\nu}^n[A^n] = \int_{A^n} f^n(s, x)\, \mathbb{1}_{\{f^n(s,x) \leqq k\}}\, \nu^n(ds, dx) + \tilde{\nu}^n[A^n \cap \{f^n > k\}].$$

Le premier terme du membre de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$ car $\nu^n[A^n] \to 0$ et le second d'après l'hypothèse lorsque $k \to \infty$, d'où l'équivalence.

Montrons donc $(\tilde{P}^n) \lhd (P^n) \Rightarrow \lim_k \limsup_n \tilde{\nu}^n[f^n > k] = 0$.

Or $(\tilde{P}^n) \lhd (P^n) \Rightarrow \int ((f^n)^{\frac{1}{2}} - 1)^2\, d\nu \leqq K$ si $n \geqq n_0$, et donc d'après de qui précède:

$$(\tilde{P}^n) \lhd (P^n) \Rightarrow \lim_k \limsup_n \nu^n[f^n > k] = 0.$$

Mais

$$\nu^n[f^n > k] = \mathbb{E}_{P^n}[\mathbb{1}_{\{f^n(s,x) > k\}}\, \mu(ds, dx)]$$

et

$$\lim_k \limsup_n \mathbb{E}_{P^n}[\mathbb{1}_{\{f^n(s,x) > k\}}\, \mu(ds, dx)] = 0$$

entraîne que pour tout $\varepsilon>0$

$$\lim_k \limsup_n P^n[\mathbb{1}_{\{f^n(s,x)>K\}} \mu(ds,dx)>\varepsilon]=0$$

par la contiguité $(\tilde{P}^n)\lhd(P^n)$, on déduit:

$$\lim_k \limsup_n \tilde{P}^n[\mathbb{1}_{\{f^n(s,x)>k\}} \mu(ds,dx)>\varepsilon]=0.$$

Prenons $\varepsilon=1$, et n et k étant fixés, soit τ_k^n le temps d'arrêt

$$\tau_k^n=\inf\left\{t: \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{1}_{\{f^n>k\}} \mu(ds,dx)\geqq 1\right\}.$$

$$\tilde{P}^n[\tilde{\nu}^n_{\tau_k^n}[f^n>k]>\varepsilon]\leqq\frac{1}{\varepsilon}\,\mathbb{E}_{\tilde{P}^n}\left[\int_0^{\tau_k^n}\int_{\mathbb{R}_0}\mathbb{1}_{\{f^n>k\}}\mu(ds,dx)\right].$$

Mais

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}^n}\left[\int_0^{\tau_k^n}\int_{\mathbb{R}_0}\mathbb{1}_{\{f^n>k\}}\mu(ds,dx)\right]\leqq\tilde{P}^n[\tau_k^n<\infty]\leqq\tilde{P}^n\left[\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}_0}\mathbb{1}_{\{f^n>k\}}d\mu\geqq 1\right].$$

Ensuite on a: $\tilde{\nu}^n[f^n>k]\leqq\varepsilon$ si

$$\tilde{P}^n\left[(\tilde{\nu}^n-\tilde{\nu}^n_{\tau_k^n})[f^n>k]>\frac{\varepsilon}{2}\right]+\tilde{P}^n\left[\tilde{\nu}^n_{\tau_k^n}[f^n>k]>\frac{\varepsilon}{2}\right]<1.$$

Mais

$$\tilde{P}^n\left[(\tilde{\nu}^n-\tilde{\nu}^n_{\tau_k^n})[f^n>k]>\frac{\varepsilon}{2}\right]\leqq\tilde{P}^n[\tau_k^n<\infty].$$

On en déduit

$$\tilde{P}^n\left[(\tilde{\nu}^n-\tilde{\nu}^n_{\tau_k^n})[f^n>k\right]>\frac{\varepsilon}{2}\right]+\tilde{P}^n\left[\tilde{\nu}^n_{\tau_k^n}[f^n>k]>\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$\leqq\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)\tilde{P}^n[\tau_k^n<\infty]\leqq\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)\tilde{P}^n[\int_0\int_{\mathbb{R}_0}\mathbb{1}_{\{f^n>k\}}d\mu\geqq 1].$$

Ainsi, soit $\varepsilon>0$ il existe n_0 et il existe k_0 tels que l'on ait:

$$\tilde{P}^n[\int_0\int_{\mathbb{R}_0}\mathbb{1}_{\{f^n>k\}}d\mu\geqq 1]<\frac{\varepsilon^2}{2+\varepsilon}$$

on a alors $\tilde{\nu}^n[f^n>k]<\varepsilon$ d'où $\lim_k \limsup_n \tilde{\nu}[f^n>k]=0$, et la propriété de contiguité de $(\tilde{\nu}^n)$ relativement à (ν^n).

2) $(\tilde{\chi}^n-\tilde{\nu}^n)\lhd(\chi^n-\nu^n)$.

Soit maintenant ϕ^n la densité de Lebesgue de $\tilde{\chi}^n-\tilde{\nu}^n$ par rapport à $\chi^n-\nu^n$; de la propriété de contiguité $(\tilde{P}^n)\lhd(P^n)$ on déduit d'après le lemme 5.2 que pour $n\geqq n_0$ $H^2(\chi^n-\nu^n,\tilde{\chi}^n-\tilde{\nu}^n)\leqq K$; et avec cette dernière propriété on a l'équivalence:

$$(\tilde{\chi}^n-\tilde{\nu}^n)\lhd(\chi^n-\nu^n)\Leftrightarrow\lim_k \limsup_n(\tilde{\chi}^n-\tilde{\nu}^n)[\phi^n>k]=0 \tag{31}$$

et on doit seulement montrer:

$$(\tilde{P}^n) \lhd (P^n) \Rightarrow \lim_k \limsup_n (\tilde{\chi}^n - \tilde{\nu}^n)[\phi^n > k] = 0.$$

On procède exactement comme précédemment pour $(\tilde{\nu}^n)$ et (ν^n). On a

$$(\tilde{P}^n) \lhd (P^n) \Rightarrow \lim_k \limsup_n (\chi^n - \nu^n)[\phi^n > k] = 0$$

cette dernière égalité s'écrit:

$$\lim_k \limsup_n \Big(\sum_s \mathbb{1}_{\{\phi_s^n > k\}} (1 - a_s^n) \mathbb{1}_{\{a_s^n \neq 0\}}\Big) = 0.$$

Soit $I_n = \{s: a_s^n \neq 0\}$ $\tilde{I}^n = \{s: \tilde{a}_s^n \neq 0\}$.

On a sur l'ensemble $\tilde{I}^n \setminus I^n$ $\phi_s^n < 1$ et par conséquent pour $k > 1$

$$\Big(\sum_{s \in \tilde{I} \setminus I^n} \mathbb{1}_{\{\phi_s^n > k\}} (1 - \tilde{a}_s^n)\Big) = 0.$$

Nous voulons donc montrer seulement que:

$$\lim_k \limsup_n \Big(\sum_{s \in I^n} \mathbb{1}_{\{\phi_s^n > k\}} (1 - \tilde{a}_s^n)\Big) = 0.$$

Or

$$\sum_{s \in I^n} \mathbb{1}_{\{\phi_s^n > k\}} (1 - a_s^n) = \mathbb{E}_{P^n}\Big[\sum_{s \in I^n} \mathbb{1}_{\{\phi_s^n > k\}} (1 - \mathbb{1}_{\{\mu(\{s\}, \mathbb{R}_0) = 1\}})\Big]$$

$$\lim_k \limsup_n \mathbb{E}_{P^n}\Big[\sum_{s \in I_n} \mathbb{1}_{\{\phi_s^n > k\}} (1 - \mathbb{1}_{\{\mu(\{s\}, \mathbb{R}_0) = 1\}})\Big] = 0$$

entraîne pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_k \limsup_n P^n\Big[\sum_{s \in I^n} \mathbb{1}_{\{\phi_s^n > k\}} (1 - \mathbb{1}_{\{\mu(\{s\}, \mathbb{R}_0) = 1\}}) > \varepsilon\Big] = 0$$

et par contiguité de $(\tilde{P}^n)$ par rapport à (P^n)

$$\lim_k \limsup_n \tilde{P}^n\Big[\sum_{s \in I^n} \mathbb{1}_{\{\phi_s^n > k\}} (1 - \mathbb{1}_{\{\mu(\{s\}, \mathbb{R}_0) = 1\}}) > \varepsilon\Big] = 0.$$

On peut alors procéder de la même façon que dans la partie 1) de la démonstration, en définissant (n et k étant fixés) le temps d'arrêt

$$\sigma_k^n \quad \text{avec} \quad \sigma_k^n = \inf\Big\{t: \sum_{\substack{s \in I^n \\ s \leqq t}} \mathbb{1}_{\{\phi_s^n > k\}} (1 - \mathbb{1}_{\{\mu(\{s\}, \mathbb{R}_0) = 1\}}) \geqq 1\Big\}$$

on trouve:

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}^n}\Big[\sum_{s \in I^n} \mathbb{1}_{\{\phi_s^n > k\}} (1 - \mathbb{1}_{\{\mu(\{s\}, \mathbb{R}_0) = 1\}})\Big]$$

$$\leqq \Big(1 + \frac{2}{\varepsilon}\Big) \tilde{P}^n[\sigma_k^n < \infty] \leqq \Big(1 + \frac{2}{\varepsilon}\Big) \tilde{P}^n\Big[\sum_{s \in I^n} \mathbb{1}_{\{\phi_s^n > k\}} (1 - \mathbb{1}_{\{\mu(\{s\}, \mathbb{R}_0) = 1\}}) \geqq 1\Big]$$

et on termine de la même façon que pour le 1).

On peut alors énoncer le critère de contiguité suivant qui manifestement généralise le critère d'absolue continuité énoncé au théorème 2 (prendre $P^n \equiv P$ et $\tilde{P}^n \equiv \tilde{P}$).

5.4. Théorème 4. *$(\tilde{P}^n)$ est contigue à (P^n) si et seulement si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $K>0$ tels que pour tout $n \geqq n_0$ on ait les propriétés:*

(CT1): $(\tilde{P}_0^n) \lhd (P_0^n)$

(CT2): *$C^n = \tilde{C}^n$ et A^n est un processus à variation finie avec $dA^n \ll dC^n$.*

(CT3): $(\tilde{\chi}^n) \lhd (\chi^n)$

(CT4): $h(\frac{1}{2}, T^n, \tilde{T}^n) \leqq K$.

Compte tenu du lemme 5-2 et de la proposition 5-3, on a seulement à montrer que les conditions données sont suffisantes pour assurer la contiguité $(\tilde{P}^n) \lhd (P^n)$.

Utilisant (CT2) on a d'après (29)

$$\rho(\alpha, P^n, \tilde{P}^n) = \rho(\alpha, P_0^n, \tilde{P}_0^n)\,\mathscr{E}(-h(\alpha, T^n, \tilde{T}^n)_\infty$$

la condition (CT1) implique (lemme 5-1) $\lim \lim_\alpha \inf_n \rho(\alpha, P_0^n, \tilde{P}_0^n) = 1$; il suffit donc de montrer:

$$\lim_\alpha \liminf_n \mathscr{E}(-h(\alpha, T^n, \tilde{T}^n)_\infty = 1, \qquad \text{c'est-à-dire}$$
$$\lim_\alpha \limsup_n h(\alpha, T^n, \tilde{T}^n)_\infty = 0.$$

Notant la représentation (27) de $h(\alpha, T^n, \tilde{T}^n)$ et utilisant la propriété (CT3) de l'énoncé, on se ramène à montrer:

$$\lim_\alpha \limsup_n \left[\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_0} \Phi(\alpha, dv^n, d\tilde{v}^n) + \sum_{s \in I^n \cup \tilde{I}^n} \Phi(\alpha, 1-a_s^n, 1-\tilde{a}_s^n)\right] = 0.$$

En considérant f^n et ϕ^n les densités de Lebesgue de $\tilde{v}^n$ par rapport à v^n et $\tilde{\chi}^n - \tilde{v}^n$ par rapport à $\chi^n - v^n$ respectivement on obtient:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_0} \Phi(\alpha, dv^n, d\tilde{v}^n) + \sum_{s \in I^n \cup \tilde{I}^n} \Phi(\alpha, 1-a_s^n, 1-\tilde{a}_s^n) \\
&\quad = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_0} \psi(\alpha, f^n) \cdot dv^n + (1-\alpha)\,\tilde{v}^n[f^n = \infty] \\
&\quad\quad + \sum_{s \in I^n \cup \tilde{I}^n} \psi(\alpha, \phi^n)(1-a_s^n) + \sum_{s \in I^n} (1-\alpha)\,\mathbb{1}_{\{\phi_s^n = \infty\}}(1-\tilde{a}_s^n)
\end{aligned}$$

où $\psi(\alpha, x) = \alpha + (1-\alpha)x - x^{1-\alpha}$.

Utilisant (CT3) et les équivalences (30) et (31) on a:

$$\limsup_n \tilde{v}^n[f^n = \infty] = \limsup_n \sum_{s \in I^n} \mathbb{1}_{\{\phi^n = \infty\}}(1-a_s^n) = 0$$

puis

$$\lim_k \limsup_n (\sum_{s \in I^n} ((f^n)^{\frac{1}{2}} - 1)^2\, \mathbb{1}_{\{f^n > k\}}\, dv^n = 0$$

$$\lim_k \limsup_n (\sum_{s \in I^n} ((\phi^n)^{\frac{1}{2}} - 1)^2\, \mathbb{1}_{\{\phi^n > k\}}(1-a_s^n) = 0.$$

Donnons une majoration de $\psi(\alpha, x)$ pour $0<\alpha\leqq\frac{1}{2}$ et $x\geqq 0$: on a:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}(\alpha, x)=x^{1-\alpha}\operatorname{Log}x+1-x$$

$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2}=-(\operatorname{Log}x)^2 x^{1-\alpha}$ d'où l'inégalité:

$$\Psi(\alpha, x)\leqq\alpha[x\operatorname{Log}x+1-x];$$

pour $0\leqq x\leqq 4$ on peut montrer la majoration:

$$x\operatorname{Log}x+1-x\leqq 4(x^{\frac{1}{2}}-1)^2$$

et pour $4\leqq x\leqq\exp(k)$ $(k\geqq 2)$

$$x\operatorname{Log}x+1-x\leqq(k-1)x+1\leqq 2(k-1)(x^{\frac{1}{2}}-1)^2$$

enfin on a directement pour $k\geqq 2$ et $x\geqq\exp(k)$, $\alpha<\frac{1}{4}$

$$\Psi(\alpha, x)\leqq 2(x^{\frac{1}{2}}-1)^2$$

ainsi en résumé pour $\alpha\leqq\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}&\text{si}\quad x\leqq\exp(k),\ \Psi(\alpha,x)\leqq(2\alpha\,2(k-1)\vee 4)\,\Psi(\tfrac{1}{2},x)\\&\text{si}\quad x\geqq\exp(k)\ \Psi(\alpha,x)\leqq 4\,\Psi(\tfrac{1}{2},x).\end{aligned}\tag{32}$$

On déduit alors de la majoration (32) pour $\alpha\leqq\frac{1}{4}$

$$\lim_k\limsup_n\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}_0}\psi(\alpha,f^n)\mathbb{1}_{\{f^n>k\}}\,d\nu^n\right)=0$$
$$\lim_k\limsup_n\Big(\sum_{s\in I^n}\psi(\alpha,\phi^n)\mathbb{1}_{\{\phi^n>k\}}(1-a^n_s)\Big)=0.$$

Compte tenu maintenant de (32) appliqué à $f^n\leqq k$ et $\phi^n\leqq k$, on obtient le résultat limite désiré.

On peut aussi donner un critère de complète séparation pour les suites (P^n) et $(\tilde{P}^n)$; on a cette propriété s'il existe une sous-suite $(F_{n'})$ d'ensembles où $F_{n'}\in\mathscr{D}$ tels que:

$$P_{n'}(F_{n'})\to 1\quad\text{et}\quad\tilde{P}_{n'}(F_{n'})\to 0$$

ce qui revient à écrire: $\liminf_n\rho(\frac{1}{2}, P^n, \tilde{P}^n)=0$.

Le théorème 3 s'étend alors aisément à cette situation:

5.5. Théorème 5. *(P^n) et $(\tilde{P}^n)$ sont complètement séparables si et seulement si une au moins des conditions suivantes est vérifiée:*

(CS_1): *(P^n_0) et $(\tilde{P}^n_0)$ sont complètement séparables,*

(CS_2): *pour n appartenant à un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ $C^n\neq\tilde{C}^n$ ou $dA\not\ll dC^n$,* (CS$_3$): *pour n appartenant à un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$, il existe t_n tel que*

$$H^2(\chi(\{t_n\}, dx), \tilde{\chi}\{t_n\}, dx)) = 1,$$

(CS$_4$): $\limsup_n h_\infty(\frac{1}{2}, P^n, \tilde{P}^n) = +\infty$.

Les auteurs tiennent à remercier J. Jacod et les referees: leurs remarques ont permis d'améliorer la première version de ce texte.

References

1. Brody, E.J.: An elementary proof of the gaussian dichotomy theorem. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **20**, 217–226 (1971)
2. Eagleson, G.K., Memin, J.: Sur la contiguité de deux suites de mesures: généralisation d'un théorème de Kabanov-Liptser-Shiryayev. Séminaire Probabilités XVI. Lect. Notes **920**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1982
3. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et potentiels, Vol. 2. Paris: Herman 1980
4. Jacod, J.: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lecture Notes in Maths. n° **714**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979
5. Jacod, J.: Hellinger Process and absolute continuity. Séminaires de Probabilités, Université de Rennes I (1983)
6. Jacod, J., Memin, J.: Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **35**, 1–37 (1976)
7. Kabanov, Y.M., Liptser, R.Ch., Shiryayev, A.N.: Absolue continuité et singularité de lois de probabilité localement absolument continues (I). Mat-Sb. **107**, n°3, 364–415 (1978); (II). Mat-Sb. **108**, n° 1, 32–61 (1979) (en Russe)
8. Kakutani, S.: On equivalence on infinite product measures. Ann. Math., **49**, 214–224 (1948)
9. Liese, F.: Hellinger integrals of Gaussian processes with independent increments. Stochastics **6**, 81–96 (1982)
10. Liptser, R.Ch., Shiryayev, A.N.: Statistics of random processes. Vol. I, II. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978
11. Liptser, R., Shiryayev, A.: On the problem of "predictable" criteria of contiguity. Probability theory and mathematical statistics (USSR-Japan symposium). Lect. Notes in Math. n° **1021**, 386–418. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer 1983
12. Liptser, R.Ch., Pukelsheim, F., Shiryayev, A.N.: On necessary and sufficient conditions for contiguity and entire separation of probability measures. Usp. Mat. Nauk **37**, 97–124 (1982) (Traduction dans: Russian Math. Surveys **37**, 107–136 (1982))
13. Nemetz, T.: Equivalence - orthogonality dichotomies of probability measures. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 11: Limit theorems of probability theory. Keszthely 1974
14. Newman, C.M.: The inner product of path space measures corresponding to random processes with independent increments. Bull. Am. Math. Soc. **78**, 268–272 (1972)
15. Newman, C.M.: On the orthogonality of independent increments processes. Courant Institute of Mathematical Sciences and Dep. of Math. Univ. Heights New-York Univ. New-York N.Y. Technical report.
16. Oosterhoff, J., Van Zwet, W.R.: A note on contiguity and Hellinger distance. Contributions to statistics (ed. J. Jurečkova) Dordrecht, Pays-Bas: Reidel 1979
17. Skorokhod, A.V.: Processes with independent increments. Moscou: Nauka 1964
18. Xia Dao Xing: Measure and integration theory on infinite dimensional spaces. New York-London: Academic Press 1972

Reçu le 1 Janvier 1984; en forme révisée le 10 Janvier 1985