Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
59, 333-354 (1982)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Théorème de traces stochastiques et fonctionnelles multiplicatives pour des champs gaussiens markoviens d'ordre p

Albert Benassi

Université Paris VI, Lab. de Probabilités, La224, Tour 56 - 3ème étage - Couloir 46.56,
4 Place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05, France

Introduction

0.1. Dans ce travail, nous donnons un cadre hilbertien adéquat pour poser et résoudre le problème de Dirichlet Stochastique (P.D.S.). Les théorèmes 2.1 et 2.2 éclairent la notion de P.D.S. étudiée dans Benassi [4] (voir aussi Rozanov [17]). La méthode conduisant au théorème de traces nous permet, avec la proposition 2.6, de montrer la continuité de ces traces «par rapport à la surface Γ» où elles sont définies. Dobrushin-Surgaïlis [6] obtiennent une version faible de ces résultats, tandis que les nôtres sont forts dans le cadre fonctionnel que nous définissons.

Dans un second temps, nous appliquons ces résultats à diverses questions de la mécanique statistique et de la théorie des champs. Nous établissons d'abord dans les théorèmes 3.1 et 3.2 une formule qui est l'analogue stochastique de la formule de Green usuelle. Ceci nous permet, avec le théorème 4.1 d'écrire de façon nouvelle et d'examiner quelques propriétés de mesurabilité des modules de quasi-invariance d'une probabilité gaussienne Markovienne d'ordre p (Prob. GpM). Ensuite, avec la proposition 4.1, nous décrivons l'ensemble des probabilités localement équivalentes et de mêmes spécifications locales qu'une Prob. GpM. Enfin, la proposition 4.4 montre que lorsque deux Prob. GpM sont localement équivalentes, elles le sont multiplicativement. Ceci est dû au caractère markovien et s'exprime sous forme de fonctionnelles multiplicatives. Pour un exposé complet sur ces notions, on pourra consulter Frölich [8]. La proposition 4.6, en généralisant les résultats de Etemadi-Kallianpur [7], donne explicitement la dérivée de Radon-Nikodym des facteurs réguliers de deux Prob. GpM localement équivalentes. Le paragraphe un de ce travail, et notamment le théorème 1.4, est à la base de tout cet article.

0.2. Hypothèses et notations. a) $\mathbf{T}$ désigne un ouvert régulier connexe (c-à-d de frontière $\mathbf{C}^\infty$) de R^d. Soit $\mathbf{A}$ un opérateur différentiel elliptique et de degré $2p$ défini par:

0044-3719/82/0059/0333/$04.40

(0.1) $$\mathbf{A}f(x)=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqq p}(-1)^{|\beta|}D^{\beta}a_{\alpha\beta}(x)\,D^{\alpha}f(x) \qquad \text{pour } x \text{ dans } T$$

où α et β désignent des multi-indices $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_d)$ de longueurs $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_d$, $|\beta|=\beta_1+\dots+\beta_d$ et si $\mathbf{D}_i$ désigne le symbole de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i}$, alors $\mathbf{D}^{\beta}$ désigne le symbole de dérivation $\mathbf{D}^{\beta}=\mathbf{D}_1^{\beta_1}\dots\mathbf{D}_d^{\beta_d}$. Pour tout ouvert Λ de $\mathbf{T}$ à l'opérateur $\mathbf{A}$ défini par (0.1) on associe la forme de Dirichlet $\mathfrak{A}_\Lambda$ par:

(0.2) $$\mathfrak{A}_\Lambda(f,g)=\int_\Lambda\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqq p}a_{\alpha\beta}(x)\,D^{\alpha}f(x)\cdot D^{\beta}g(x)\,dx\dots.$$

Si aucune confusion n'est à craindre, $\mathfrak{A}$ désignera la forme $\mathfrak{A}_{\mathbf{T}}$.

Si $\mathbf{H}_0^p(\mathbf{T})$ désigne l'espace de Sobolev d'ordre p usuel, nous faisons l'hypothèse (**HA**) suivante:

(**HA**) α) L'opérateur $\mathbf{A}$ est formellement auto-adjoint: c-à-d $a_{\alpha\beta}(x)=a_{\beta\alpha}(x)$ pour tout couple de multi-indices α et β.

β) Lest coefficients $a_{\alpha\beta}$ de l'opérateur A sont C^∞ et bornés sur $\mathbf{T}$.

γ) La forme de Dirichlet $\mathfrak{A}$ associée à l'opérateur $\mathbf{A}$ est $\mathbf{H}_0^p(\mathbf{T})$ elliptique (on dit aussi $\mathbf{H}_0^p(\mathbf{T})$ coercive).

δ) Le degré $2p$ de l'opérateur $\mathbf{A}$ et la dimension d de l'espace euclidien qui contient l'ouvert $\mathbf{T}$ vérifient: $2p>d$.

b) L'espace $\mathfrak{D}(T)$ est celui des fonctions $\mathbf{C}^\infty$ à support compact et l'espace $\mathfrak{D}'(T)$ est celui des distributions à support dans $\mathbf{T}$. L'expression:

(0.3) $$\mathfrak{A}(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}}=\|\varphi\|_{\mathbf{A}}$$

définit une norme sur $\mathfrak{D}(\mathbf{T})$. Désignons par $\mathbf{H}^{\mathbf{A}}(\mathbf{T})$ l'espace suivant:

(0.4) $$\mathbf{H}^{\mathbf{A}}(\mathbf{T})=\{\varphi\in\mathbf{L}^2(\mathbf{T})\,|\,\|\varphi\|_{\mathbf{A}}<\infty\}$$

et par $\mathbf{H}_0^{\mathbf{A}}(\mathbf{T})$ la fermeture de $\mathfrak{D}(\mathbf{T})$ dans $\mathbf{H}^{\mathbf{A}}(\mathbf{T})$ pour la norme $\|.\|_{\mathbf{A}}$ définie en (0.3).

Sous (**HA**), les espaces $\mathbf{H}_0^{\mathbf{A}}(\mathbf{T})$ et $\mathbf{H}_0^p(\mathbf{T})$ sont algébriquement at topologiquement isomorphes.

c) Nous dirons que deux ouverts réguliers Λ_- et Λ_+ de $\mathbf{T}$ sont complémentaires s'ils ont une frontière commune Γ et que de plus:

(0.5) $$\mathbf{T}=\Lambda_-\cup\Gamma\cup\Lambda_+.$$

La locution «soit $(\Lambda_-,\Gamma,\Lambda_+)$ deux ouverts complémentaires» signifiera que le triplet $(\Lambda_-,\Gamma,\Lambda_+)$ réalise (0.5).

Définissons alors les espaces suivants:

(0.6) $$\mathbf{H}^{\mathbf{A}}(\Lambda_\pm)=\{\varphi\in\mathbf{H}_0^{\mathbf{A}}(\mathbf{T})\,|\,\mathbf{A}\varphi=\mathbf{0}\text{ sur }\Lambda_\mp\},$$

(0.7) $$H^A(\Gamma)=\{\varphi\in H_0^{\mathbf{A}}(T)\,|\,A\varphi=0\text{ sur }\Lambda_-\cup\Lambda_+\},$$

(0.8) $$\mathbf{H}_0^{\mathbf{A}}(\Lambda_\pm)=\text{fermeture de }\mathfrak{D}(\Lambda_\pm)\text{ dans }\mathbf{H}^{\mathbf{A}}(\Lambda_\pm).$$

Dans ces conditions, nous avons (cf. Pitt [15]),

$$\mathbf{H}_0^{\mathbf{A}}(\mathbf{T}) = \mathbf{H}^{\mathbf{A}}(\Lambda_-) \oplus \mathbf{H}_0^{\mathbf{A}}(\Lambda_+) = \mathbf{H}_0^{\mathbf{A}}(\Lambda_-) \oplus \mathbf{H}^{\mathbf{A}}(\Gamma). \tag{0.9}$$

Soit g un élément de $\mathbf{H}_0^{\mathbf{A}}(\mathbf{T})$, nous traduirons (0.9) par:

$$g = g_- + g_+^0 = g_-^0 + g^\Gamma + g_+^0, \tag{0.10}$$

où $g_\pm$ désigne la projection de g sur $\mathbf{H}^{\mathbf{A}}(\Lambda_\mp)$. $g_\pm^0$ celle de g sur $\mathbf{H}_0^{\mathbf{A}}(\Lambda_\mp)$ et g^Γ celle de g sur $\mathbf{H}^{\mathbf{A}}(\Gamma)$. D'autre part, nous écrirons $\mathfrak{A}_\pm$ pour $\mathfrak{A}_{\Lambda_\pm}$ où $\mathfrak{A}_{\Lambda_\pm}$ est la forme de Dirichlet définie en (0.2).

1. Étude de la covariance d'un P.G.pM

Soient, T un ouvert borné régulier de R^d, $(\Lambda_-, \Gamma, \Lambda_+)$ deux ouverts complémentaires de T, où l'on suppose l'ouvert Λ_- borné. Soit A un opérateur elliptique de degré $2p$ satisfaisant l'hypothèse (HA) de l'introduction. Les formes de dirichlet $\mathfrak{A}_{\mathbf{T}}$, $\mathfrak{A}_\pm$ sont définies dans l'introduction. Enfin, soit $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}$ (resp. $\mathbf{G}^\pm$) la fonction de Green de l'opérateur $\mathbf{A}$ sur l'ouvert $\mathbf{T}$ (resp. l'ouvert $\Lambda_\pm$).

1.1. Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la covariance $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}$ se décompose de façon unique en somme de trois covariances:

$$\mathbf{G}^{\mathbf{T}} = \mathbf{G}^- + \mathbf{G}^\Gamma + \mathbf{G}^+ \tag{1.1}$$

où $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{G}^\pm$ sont les fonctions de Green ci-dessus, et $\mathbf{G}^\Gamma$ un noyau à déterminer. Pour ce faire, posons:

$$G^\Gamma(x, y) = G^T(x, y) - G^-(x, y) - G^+(x, y)\,(x, y) \in T \times T, \tag{1.2}$$

$G^\Gamma(x, y)$ est évidemment symétrique.

Pour toute fonction réelle f définie sur $T \times T$, notons f_x la fonction $y \mapsto f(y, x)$. Les espaces $\mathbf{H}_0(\mathbf{T})$, $\mathbf{H}(\Lambda_\pm)$, $\mathbf{H}_0(\Lambda_\pm)$ et $\mathbf{H}(\Gamma)$ sont ceux de l'introduction.

Lemme 1.1. (i) *Le noyau* $\mathbf{G}^\Gamma$ *défini par* (1.2) *est reproduisant pour* $\mathbf{H}(\Gamma)$.

(ii) *Les fonctions* $\{\mathbf{G}_x;\, x \in \mathbf{T}\}$ *sont solution unique du problème suivant:*

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A}\mathbf{G}_x = 0 \text{ sur } \Lambda_- \cup \Lambda_+ \\ &\gamma_j \mathbf{G}_x^\Gamma = \gamma_j \mathbf{G}_x\, j = 0, p-1 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbf{T} \tag{1.3}$$

où γ_j est la dérivée normale d'ordre j à Γ.

Démonstration. (i) Soit g^Γ un élément de $\mathbf{H}(\Gamma)$, alors:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\mathbf{T}}(g^\Gamma, G_x^\Gamma) &= \mathfrak{A}_{\mathbf{T}}(g^\Gamma, \mathbf{G}_x^T) - \mathfrak{A}_{\mathbf{T}}(g^\Gamma, \mathbf{G}_x^-) - \mathfrak{A}_{\mathbf{T}}(g^\Gamma, \mathbf{G}_x^+) \\ &= \mathfrak{A}_T(g^\Gamma, \mathbf{G}_x^{\mathbf{T}}) - \mathfrak{A}_-(g^\Gamma, \mathbf{G}_x^-) - \mathfrak{A}_+(g^\Gamma, \mathbf{G}_x^+) \end{aligned}$$

par définition des formes $\mathfrak{A}_\pm$ et puisque pour tout x de $\mathbf{T}$, $\mathbf{G}_x^\pm$ est élément de $\mathbf{H}_0(\Lambda_\pm)$. Mais d'après (0.1), il vient:

$$\mathfrak{A}_{\mathbf{T}}(g^\Gamma, \mathbf{G}_x^\Gamma) = \mathfrak{A}_T(g^\Gamma, G_x^T) = g^\Gamma(x) \qquad \forall x \in \mathbf{T}. \tag{1.4}$$

(ii) Soit φ un élément de $\mathfrak{D}(\Lambda_-) \cup \mathfrak{D}(\Lambda_+)$, par définition de $\mathfrak{A}_\mathbf{T}$ et de $\mathbf{H}_0(\mathbf{T})$ il vient:

$$\mathfrak{A}_\mathbf{T}(\mathbf{G}_x^\Gamma, \varphi) = \langle \mathbf{A}\mathbf{G}_x^\Gamma, \varphi \rangle;$$

et

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_\mathbf{T}(\mathbf{G}_x^\Gamma, \varphi) &= \mathfrak{A}_T(\mathbf{G}_x^T, \varphi) - \mathfrak{A}_-(\mathbf{G}_x^-, \varphi) - \mathfrak{A}_+(\mathbf{G}_x^+, \varphi)\\ &= \varphi(x) - \varphi^-(x) - \varphi^+(x) \equiv 0.\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\mathbf{A}\mathbf{G}_x^\Gamma \equiv 0$ sur $\Lambda_- \cup \Lambda_+$.

Maintenant, pour φ élément de $\mathfrak{D}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{H}(\Gamma)$, de (1.4) et de la formule de Green on déduit:

$$\sum_{j=0}^{p-1} \langle \gamma_j \mathbf{G}_x^\Gamma, \mathbf{S}_j \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{p-1} \langle \gamma_j \mathbf{G}_x^\mathbf{T}, \mathbf{S}_j \varphi \rangle,$$

et par densité de $\mathfrak{D}(\mathbf{T}) \cap H(\Gamma)$ dans $\mathbf{H}(\Gamma)$, on a finalement: $\gamma_j \mathbf{G}_x^\Gamma = \gamma_j \mathbf{G}_x^T$ dans $\mathbf{H}^{p-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour $j = 0, p-1$. Ce qui démontre (ii).

Lemme 1.2. *L'opérateur $\mathbf{K}^\Gamma$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$ de noyau $\mathbf{G}^\Gamma$ est strictement positif.*

Démonstration. Puisque G^Γ est reproduisant pour $\mathbf{H}(\Gamma)$, on a les égalités suivantes:

$$\mathfrak{A}_\mathbf{T}(\mathbf{K}^\Gamma \varphi, \mathbf{K}^\Gamma \varphi) = (\mathbf{K}^\Gamma \varphi, \varphi)_0 \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbf{T}), \tag{1.5}$$

$$\mathfrak{A}_\mathbf{T}(\mathbf{K}^\Gamma \varphi, \varphi) = (\varphi, \varphi)_0 \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbf{T}). \tag{1.6}$$

De (1.5), on déduit l'inégalité $(K^\Gamma \varphi, \varphi)_0 \geqq 0$; et de (1.6) $K^\Gamma \varphi \equiv 0$ ssi $\varphi \equiv 0$ par densité.

Les lemmes 1.1 et 1.2 fournissent le théorème suivant:

Théorème 1.3. (i) *Le noyau $\mathbf{G}^\Gamma(x, y)$ défini par* (1.2) *est une covariance.*

(ii) *La covariance $\mathbf{G}^\mathbf{T}$ se décompose de manière unique en somme de trois covariances selon* (1.1).

1.2. *Étude de l'operateur* $\mathbf{K}^\Gamma$. Dans ce sous paragraphe, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 1.4. *L'hypothèse* (**HA**) *étant vérifiée, l'opérateur $\mathbf{K}^\Gamma$ est nucléaire; de plus, sa trace ne dépend que de la frontière Γ de Λ_-.*

Démonstration. Soit $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{T}_2$ deux ouverts réguliers tels que: $\bar{\Lambda}_- \subset \mathbf{T}_1$ et $\bar{\mathbf{T}}_1 \subset \mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_1$ étant supposé borné.

D'après le lemme 1.1, on a les décompositions:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^{\mathbf{T}_1} &= \mathbf{G}^{\Lambda_-} + \mathbf{G}_{\mathbf{T}_1}^\Gamma + \mathbf{G}^{\mathbf{T}_1 - \bar{\Lambda}_-},\\ \mathbf{G}^{\mathbf{T}_2} &= \mathbf{G}^{\Lambda_-} + \mathbf{G}_{\mathbf{T}_2}^\Gamma + \mathbf{G}^{\mathbf{T}_2 - \bar{\Lambda}_-}.\end{aligned}$$

Soit $\mathbf{K}_{\mathbf{T}_i}^\Gamma$ l'opérateur de noyau $\mathbf{G}_{\mathbf{T}_i}^\Gamma$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{T}_i)$; $i = 1, 2$. Et soit $\{a_{i,k}^\Gamma, e_{i,k}^\Gamma; k \in \mathbb{N}\}$ le système des valeurs propres et des vecteurs propres de l'opérateur $\mathbf{K}_{T_i}^\Gamma$; $i = 1, 2$. En supposant les $e_{i,k}^\Gamma$ orthonormés dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{T}_i)$; $i = 1, 2$, on a alors:

$$(a^{\Gamma}_{i,k})^{-1} = \mathfrak{A}_{\mathbf{T}_i}(e^{\Gamma}_{i,k}, e^{\Gamma}_{i,k}) \quad i=1,2 \quad k\in\mathbb{N} \tag{1.7}$$

par la propriété de reproduction.

Définissons l'application $\mathbf{L}$ de $\mathbf{H}_{\mathbf{T}_1}(\Gamma)$ sur $\mathbf{H}_{\mathbf{T}_2}(\Gamma)$ par: $\mathbf{L}\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$ si $\mathbf{U}_2$ est solution unique du problème

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\mathbf{U}_2 = 0 \quad \text{sur } \mathbf{T}_2 - \Gamma \\ &\gamma_j \mathbf{U}_2 = \gamma_j \mathbf{U}_1; \quad j=0, p-1 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Il est immédiat que L est une isométrie bijective. Pour démontrer le théorème, nous avons besoin du.

Lemme 1.4. *On a les relations*

$$\mathbf{K}^{\Gamma}_{\mathbf{T}_2} = \mathbf{L}\mathbf{K}^{\Gamma}_{\mathbf{T}_1}\mathbf{L}, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{L}\, e^{\Gamma}_{1,k} = e^{\Gamma}_{2,k} \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Démonstration du Lemme. L'opérateur $\mathbf{K}^{\Gamma}_{\mathbf{T}_1}$ a pour noyau $\mathbf{K}^{\Gamma}_1$

$$\mathbf{K}_1 = \sum_k a^{\Gamma}_{1,k}\, e^{\Gamma}_{1,k} \otimes e^{\Gamma}_{1,k}.$$

Définissons le noyau $\bar{\mathbf{K}}^{\Gamma}_2$ par:

$$\bar{\mathbf{K}}^{\Gamma}_2 = \sum_k a^{\Gamma}_{1,k}\, \mathbf{L}\, e^{\Gamma}_{1,k} \otimes \mathbf{L}\, e^{\Gamma}_{1,k}.$$

Alors, pour tout élément $\mathbf{U}$ de $\mathbf{H}_{\mathbf{T}_2}(\Gamma)$ de la forme $\mathbf{U} = \sum_k \mathbf{u}_k \mathbf{L}\, e^{\Gamma}_{1,k}$, on a:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\mathbf{T}_2}(\bar{\mathbf{K}}_2, \mathbf{U}) &= \sum_k \mathbf{u}_k\, a^{\Gamma}_{1,k}\, \mathbf{L}\, e^{\Gamma}_{1,k}\, \mathfrak{A}_{T_2}(\mathbf{L}\, e^{\Gamma}_{1,k}, \mathbf{L}\, e^{\Gamma}_{1,k}) \\ &= \sum_k \mathbf{u}_k \mathbf{L}\, e^{\Gamma}_{1,k} \equiv \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Puisque d'après (1.8), (1.7) et la formule de Green on a nécessairement

$$\mathfrak{A}_{\mathbf{T}_2}(\mathbf{L}\, e^{\Gamma}_{1,k}, \mathbf{L}\, e^{\Gamma}_{1,m}) = \delta_{k,m}(a^{\Gamma}_{1,k})^{-1}.$$

Puisque L est une isométrie, on a nécessairement $\bar{\mathbf{K}}^{\Gamma}_2 \equiv \mathbf{K}^{\Gamma}_2$ si $\mathbf{K}^{\Gamma}_2$ est le noyau de $\mathbf{K}^{\Gamma}_{\mathbf{T}_2}$, ceci démontre (1.9), (1.10) est une conséquence de (1.9).

Dans ces conditions, nous avons les égalités $a^{\Gamma}_{1,k} = a^{\Gamma}_{2,k}$, $k\in\mathbb{N}$. Donc la trace de l'opérateur $\mathbf{K}^{\Gamma}_{\mathbf{T}_i}$ si elle existe, ne dépend pas de l'indice i. Par ailleurs, lorsque l'ouvert T est borné, l'opérateur $\mathbf{K}^{\Gamma}_{\mathbf{T}}$ est nucléaire car l'opérateur $\mathbf{K}^{\mathbf{T}}$ de noyau $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}$ l'est. Dans le cas où $\mathbf{T}_1$ n'est pas inclus dans $\mathbf{T}_2$, on raisonne comme précédemment en prenant un ouvert borné régulier $\mathbf{U}$ vérifiant:

$$\bar{\mathbf{U}} \subset \mathbf{T}_1 \cap \mathbf{T}_2, \quad \bar{\Lambda}_- \subset \mathbf{U} \text{ et l'on compare } \mathbf{K}^{\Gamma}_{\mathbf{U}} \text{ et } \mathbf{K}^{\Gamma}_{\mathbf{T}_i}.$$

2. Théorème de traces stochastiques

Soit $\{\mathbf{X}(t);\, t\in T\}$ un P.GpM centré défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ et de covariance $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}(t,s)$. Soit Λ un ouvert borné régulier de frontière Γ inclus dans $\mathbf{T}$.

Dans ce paragraphe, nous voulons donner un cadre fonctionnel hilbertien pour poser et résoudre le P.D.S. Par là-même, nous définissons les dérivées normales $\gamma_j \mathbf{X}$ d'ordre j à Γ pour le champ $\mathbf{X}$. Notre démarche utilise le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur elliptique et le développement de Karhunen-Loève du champ $\mathbf{X}$.

2.1. Quelques preliminaires. *2.1.1. Developpement de Karhunen-Loeve.* Soit $\mathbf{T}$ un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et soit $\mathbf{A}$ un opérateur elliptique de degré $2p$ vérifiant l'hypothèse (**HA**) de l'introduction. $\mathbf{G}$ désigne la fonction de Green de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{T}$. Soit $\{\lambda_k, e_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ le système des valeurs propres et des vecteurs propres de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$. Nous pouvons supposer les e_k orthonormés dans $\mathbf{H}_0(\mathbf{T})$. Posons

$$a_k = \lambda_k^{-1}; \qquad \varphi_k = a_k^{\frac{1}{2}} e_k; \qquad \text{pour } k \text{ dans } N \tag{2.1}$$

les φ_k sont alors orthonormés dans $L^2(T)$.

Soit η la mesure brownienne sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$ et posons:

$$\xi_k = \eta(\varphi_k) \tag{2.2}$$

et définissons un processus gaussien centré $\mathbf{X}^n$ par:

$$\mathbf{X}^n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{\frac{1}{2}} \varphi_k(t)\, \xi_k \qquad \text{pour chaque entier } n. \tag{2.3}$$

Lemme 2.1. *Dans le cas où* $\mathbf{T}$ *est borné, nous avons les propriétés suivantes:*

(2.4) (i) $\mathbf{G}(t,s) = \sum_k a_k \varphi_k(t) \varphi_k(s)$

(2.5) (ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{X}^n(t) = \mathbf{X}(t)$ *uniformément sur tout compacte de* $\mathbf{T}$ *presque sûrement et dans* $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

Démonstration. (i) est évidente et résulte de la théorie des opérateurs compacts.

(ii) D'après le théorème 4.4 de Rajput [16] et en prenant pour mesure $\lambda(dt)$ la mesure de Lebesgue, il existe une suite $\{\xi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ de variables aléatoires independantes équidistribuées $\mathfrak{N}(0,1)$ telle que (2.3) et (2.5) soient vérifiées. Mais d'après ce même théorème $\xi_k \triangleq a_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}(\varphi_k)$; alors d'après [4]

$$a_k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}(\varphi_k) = \mathbf{X}(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi_k) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{X}(\varphi_k) = \eta(\varphi_k).$$

2.1.2. Quelques espaces fonctionnels. Voici un lemme dû à Agmon, cité par Zarubin [19] dont nous faisons un large usage.

Lemme 2.2. *Soit A un opérateur elliptique sur $L^2(T)$ de degré $2p$ et vérifiant* (**HA**). *Si $\{\lambda_k;\ k \in N\}$ désigne l'ensemble des valeurs propres de* $\mathbf{A}$, *alors il existe deux constantes γ_1 et γ_2 $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ telles que:*

$$\gamma_1 \cdot k^{2p/d} \leqq \lambda_k \leqq \gamma_2 \cdot k^{2p/d} \qquad \textit{pour tout entier } k. \tag{2.6}$$

Indications. Zarubin ne cite pas de références où (2.6) est démontrée explicitement. Cependant la méthode employée par Mikhlin [13] dans le cas $p=1$

formule (14) chapitre 15 se généralise facilement au cas général. On peut aussi se reporter au théorème 7 Bis chap. 13 de Agmon [1] qui donne la première inégalité de (2.6) et où γ_1, est calculée explicitement.

Dans le cas où T est borné, nous allons définir une échelle hilbertienne $H_0^s(A)$ isomorphe à l'échelle hilbertienne $H_0^s(T)$ usuelle. Soit:

$$H_0^s(A)=\{f=\sum_m f_m \varphi_m | \sum_k \lambda_k^{+s/p} f_k^2<+\infty\}, \tag{2.7}$$

où les $\{\varphi_m\}$ sont donnés par (2.1). On muni $H_0^s(A)$ du produit scalaire

$$(f,g)_{s,A}=\sum_k \lambda_k^{+s/p} f_k g_k. \tag{2.8}$$

Lemme 2.3. *L'échelle $\{H_0^s(A),\ s\geqq 0\}$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'échelle hilbertienne $\{H_0^s(T),\ s\geqq 0\}$ usuelle des espaces de Sobolev.*

Démonstration. Reprenons l'exemple b) page 10 de Daletskii [5]. Soit: pour une constante c positive convenable, l'opérateur B de degré $2p$, $2p>d$ défini par:

$$B\varphi=(-1)^p \Delta^p \varphi+c^2\varphi \qquad \text{pour } \varphi \text{ dans } \mathfrak{D}(T), \tag{2.9}$$

vérifie l'hypothèse **(HA)** si Δ désigne le laplacien sur R^d. L'échelle hilbertienne engendrée par l'opérateur B est celle des espaces de Sobolev usuels $H_0^s(T)$. D'autre part, l'échelle hilbertienne engendrée par B se définie aussi par (2.7) (2.8) à laide des vecteurs propres et des valeurs propres de B. Alors, le lemme 2.2 permet de conclure.

Soit $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ un multiindice, on pose $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_d$. A l'aide des lemmes précédents, nous pouvons estimer les dérivées d'ordre $|\alpha|$ $\{D^\alpha\varphi_k;\ k\in N\}$ des vecteurs propres de A.

Lemme 2.4. *Il existe une constante positive c indépendante de l'entier k telle que:*

$$\|\mathbf{D}^\alpha \varphi_k\|_0 \leqq c\,\lambda_k^{|\alpha|/2p} \qquad k\in N. \tag{2.10}$$

Démonstration.

$$\|\mathbf{D}^\alpha \varphi_k\|_0^2 \leqq \gamma\,\|\varphi_k\|^2_{\mathbf{H}_0^{|\alpha|}(\mathbf{T})} \leqq \gamma\,\mathbf{C}_1\,\|\varphi_k\|^2_{\mathbf{H}_0^{|\alpha|}(\mathbf{A})}$$

la constante γ est universelle, la constante C_1 provient du lemme 2.3, en posant $c=\gamma\,C_1$ on obtient (2.10) car

$$\|\varphi_k\|^2_{\mathbf{H}_0^{|\alpha|}(\mathbf{A})}=\lambda_k^{|\alpha|/p}$$

d'après (2.8).

Remarque 2.1. Pour tout couple (s,ε) de réels positif on a:

$$A^{-\frac{\varepsilon}{2p}} H_0^s(T)=H_0^{s+\varepsilon}(T) \tag{2.11}$$

d'après le lemme 2.3. Si $C^\alpha(T)$ désigne l'espace höldérien d'ordre α, le lemme d'injection de Sobolev dit que

$$H_0^p(T)\subset C^\alpha(T) \quad \text{si} \quad \alpha\leqq p-\frac{d}{2}.$$

En prenant $s=p$ dans (2.11), par continuité et densité, l'opérateur $A^{-\varepsilon/2p}$ se prolonge en un opérateur continu de $C^{\alpha}(T)$ dans $C^{\alpha+\varepsilon}(T)$.

2.2. Théorème de traces stochastiques. Dans ce paragraphe, outre le théorème de traces annoncé, nous donnerons un théorème de continuité de ces traces «par rapport à la surface» où elles sont définies.

2.2.1. Dans un premier temps, nous supposerons l'ouvert de référence $\mathbf{T}$ borné. Soit A un opérateur elliptique de degré $2p$ et G sa fonction de Green sur $\mathbf{T}$. Soit $\{\mathbf{X}(t);\ t\in\mathbf{T}\}$ un P. GpM centré de covarience G.

Théorème 2.1. *Supposons que l'opérateur A vérifie l'hypothèse* (HA). *Alors*

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}(\cdot)\in\mathbf{H}_0^{\beta}(\mathbf{T}))=1 \quad \textit{pour tout réel } \beta \textit{ vérifiant} \tag{2.12}$$

$$0\leqq\beta<p-\frac{d}{2}. \tag{2.13}$$

Démonstration. Soit $\mathbf{X}^n(t)$ l'approximation d'ordre n de $\mathbf{X}(t)$ donnée par (2.3). Alors, par définition de $\mathbf{H}_0^s(\mathbf{A})$ nous avons:

$$\mathbb{E}\,\|\mathbf{X}^n\|^2_{\mathbf{H}_0^{\beta}(\mathbf{A})}=\sum_{k=0}^{n} a_k\,\|\varphi_k\|^2_{\mathbf{H}_0^{\beta}(\mathbf{A})}=\sum_{k=0}^{n} a_k\,\lambda_k^{+\beta/p} \tag{2.14}$$

si l'on pose $\beta=\alpha-\varepsilon$ avec $\alpha=p-\frac{d}{2}$, en tenant compte de (2.6) le dernier terme de la chaîne (2.14) est majoré par

$$\gamma_2^2\sum_{k=0}^{n} k^{-\frac{2p}{d}}\,k^{2\frac{\alpha-\varepsilon}{d}}=\gamma_2^2\sum_{k=0}^{n} k^{-(1+\varepsilon)}.$$

On en déduit que $X^n\mapsto X$ P.p.s. dans $H_0^{\beta}(A)$ et donc dans $H_0^{\beta}(T)$ par le lemme 2.3.

Maintenant préparons le théorème de traces proprement dit par le catalogue de faits suivant. β étant un réel vérifiant (2.13):

a) $H_0^p\subset H_0^{\beta}$ continuement et densément.

b) L'application trace γ: $\mathbf{H}^p(\Lambda)\to\prod_{j=0}^{p-1}\mathbf{H}^{p-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est continue pour tout ouvert régulier Λ, de frontière Γ inclu dans $\mathbf{T}$.

c) Pour tout entier n, $\mathbf{X}^n$ donné par (2.3) est P.p.s. élément de $\mathbf{H}_0^p(\mathbf{T})$.

d) Soit $\{\mathbf{B}_j;\ j=0,p-1\}$ p opérateurs différentiels d'ordre j à coefficients $\mathbf{C}^{\infty}$ de traces $\{\gamma_j;\ j=0,p-1\}$ sur Γ, alors d'après (2.10)

$$\|\mathbf{B}_j\,\varphi_k\|^2_{\mathbf{H}_0^{\beta-j}(\mathbf{T})}\leqq c\,\lambda_k^{\beta/p} \qquad k\in\mathbb{N} \tag{2.15}$$

et par continuité de l'application trace (point b) ci-dessus),

$$\|\gamma_j\,\varphi_k\|^2_{\mathbf{H}^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\leqq c'\,\lambda_k^{\beta/p} \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Alors de (2.14) et (2.16) on déduit:

e) $$\mathbb{E}\,\|\gamma_j X^n\|^2_{\mathbf{H}^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqq c'' \sum_{k=0}^{n} k^{-(1+\varepsilon)}$$

ce qui permet de poser la

Définition 2.1. Nous appellerons (et noterons $\gamma_j X(w)$) dérivée normale d'ordre j à Γ, la limite presque sûre dans $\mathbf{H}^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ de la suite $\{\gamma_j X^n : n\in\mathbb{N}\}$.

En reprenant les points a) à e) ci-dessus, nous avons démontré le

Théorème 2.2. *Sous* (HA), *l'application trace*

$$\gamma X = (\gamma_0 X, \ldots, \gamma_{p-1} X)$$

est P.p.s. *continue de $\mathbf{H}^\beta(\Lambda)$ dans $\bigwedge_{j=0}^{p-1} H^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour tout ouvert borné régulier Λ de frontière Γ.*

Les théorèmes 2.1 et 2.2 donnent un cadre fonctionnel adéquat pour poser et résoudre le problème de Dirichlet stochastique.

Soit Λ l'ouvert ci-dessus, mais ne supposons plus que l'ouvert $\mathbf{T}$ soit borné. Soit $\mathbf{X}_\Lambda$ la restriction du champ $\mathbf{X}$ à Λ et désignons par $\mathbf{X}^*_\Lambda$ le processus dual de $\mathbf{X}_\Lambda$ (cf [4]). Si $\mathbf{Y}$ est l'unique solution du P.D.S. suivant:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}\mathbf{Y}_\Lambda = \mathbf{X}^*_\Lambda & \\ \gamma_j Y_\Lambda = \gamma_j X_\Lambda & j=0, p-1 \end{array}\right\} \text{ P.p.s.} \tag{2.17}$$

alors $\mathbf{Y}_\Lambda = \mathbf{X}_\Lambda$ P.p.s. sur Λ. Ceci nous amène au corollaire suivant des théorèmes 2.1 et 2.2.

Corollaire 2.3. *L'ouvert* $\mathbf{T}$ *n'est pas supposé borné, β désignant un réel; $0\leqq\beta<p-\dfrac{d}{2}$ alors sous* (**HA**) *nous avons:*

(i) $\mathbb{P}(\mathbf{X}(\cdot)\in\mathbf{H}^\beta_{\mathrm{loc}}(T))=1$,

(ii) $\mathbb{P}(\gamma_j X(\cdot)\in H^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma);\ j=0, p-1)=1$.

Démonstration. (i) découle de (2.17) et du théorème 2.1.

(ii) D'après la décomposition (1.1) et d'après le théorème 1.4, la norme de $\gamma_j\mathbf{X}$ dans $\mathbf{H}^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ne dépend pas de l'ouvert de référence $\mathbf{T}$.

Soit $\mathbf{B}_j$ $j=0, p-1$ les opérateurs différentiels du point d) ci-dessus. D'après la remarque 2.1, pour tout réel ε positif, l'opérateur $\mathbf{B}_j\mathbf{A}^{-\frac{j+\varepsilon}{2p}}$ est, pour $\alpha=p-\dfrac{d}{2}$, continu sur $\mathbf{C}^\alpha(\mathbf{T})$. Il semble donc possible de généraliser le théorème de Traces de Benfatto, Galavotti, Nicolô [3] dans le cadre fonctionnel höldérien qu'ils utilisent, ainsi que la propriété de continuité des traces par rapport à la frontière Γ. Ce que nous allons maintenant étudier dans le cadre fonctionnel qui est le nôtre.

2.2.2. Continuité des traces. Nous allons donner comme conséquence du théorème 2.2 une propriété de continuité presque sûre des traces $\{\gamma_j\mathbf{X};\ j=0, p-1\}$ lorsque la surface Γ varie continuement et parallèlement à elle-même.

Reprenons le formalisme de Lions-Magenes [12] chap. 2-(8.1). Soit $\{\Gamma_\rho;\ 0 \leqq \rho \leqq \rho_0 < 1\}$ une famille de surfaces «parallèles» à Γ et «tendant» vers Γ lorsque ρ tend vers zéro. D'après la définition 8.1 de [12], p. 205, on peut se ramener localement au cas du demi-espace.

$$\Gamma_\rho \equiv \{(x_1, \ldots, x_d);\ x_d = \rho\} \tag{2.18}$$

ce qui permet de définir un homéomorphisme

$$x \mapsto \Psi(x, \rho) \quad \text{de } \Gamma_\rho \text{ su } \Gamma. \tag{2.19}$$

Puisque $\bigcup_{0 \leqq \rho \leqq \rho_0} \Gamma_\rho \subset \mathbf{T}$, alors pour un élément $\mathbf{u}$ de $H_0^p(T)$, l'homéomorphisme (2.19) Ψ nous donne une application

$$\tilde{\Psi}:\ H^{p-j-\frac{1}{2}}(\Gamma_\rho) \mapsto H^{p-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \text{notée}$$

$$\tilde{\Psi}(\gamma_j^\rho \mathbf{u}) = \bar{\gamma}_j^\rho \mathbf{u} \quad j = 0, p-1, \tag{2.20}$$

où $\gamma_j^\rho \mathbf{u}$ désigne la dérivée normale d'ordre j à Γ_ρ de $\mathbf{u}$.

Lemme 2.5 [12]. *Sous les hypothèses précédentes, lorsque ρ tend vers zéro, alors $\bar{\gamma}_j^\rho \mathbf{u}$ tend vers $\gamma_j \mathbf{u}$ dans $H^{p-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour $j = 0, p-1$.*

Maintenant soit $\mathbf{X}^n$ l'approximation de rang n de $\mathbf{X}$ donnée par (2.3). Notons $\gamma_j^\rho \mathbf{X}^n$ la dérivée normale d'ordre j à Γ_ρ, $\bar{\gamma}_j^\rho \mathbf{X}^n$ son image par $\tilde{\Psi}$ (définie en (2.20)).

Dans ces conditions, l'applications $\rho \mapsto \bar{\gamma}_j^\rho X^n$ est pour $\mathbb{P}$ presque tout ω continue de $[0, \rho_0]$ dans $\mathbf{H}^{p-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (cf. point c) ci-dessus) et vérifie $\gamma_j^\rho \mathbf{X}^n = \gamma_j \mathbf{X}^n$ $j = 0, p-1$. Alors:

Proposition 2.6. *Soit $\{\Gamma_\rho;\ 0 \leqq \rho \leqq \rho_0 < 1\}$ la famille de surfaces parallèle à Γ précédente. Sous l'hypothèse* **(HA)** *et pour tout réel β, $0 < \beta < p - \frac{d}{2}$ l'application*

$$\rho \mapsto \{\gamma_j^\rho X;\ j = 0, p-1\} \tag{2.21}$$

est P.p.s. *continue de $[0, \rho_0]$ dans $\prod_{j=0}^{p-1} \mathbf{H}^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Démonstration. Nous avons P.p.s. l'inégalité suivante; pour $j = 0, p-1$

$$\begin{aligned}\|\bar{\gamma}_j^\rho X - \gamma_j X\|_{\mathbf{H}^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leqq \|\bar{\gamma}_j^\rho \mathbf{X} - \bar{\gamma}_j^\rho \mathbf{X}^n\|_{\mathbf{H}^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\quad + \|\bar{\gamma}_j^\rho \mathbf{X}^n - \gamma_j \mathbf{X}^n\|_{\mathbf{H}^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\gamma_j X^n - \gamma_j X\|_{\mathbf{H}^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.\end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.3. Faisons tendre ρ vers zéro. D'après le lemme 2.5 $\|\gamma_j^\rho X^n - \gamma_j X^n\|_{\mathbf{H}^{p-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ tend vers zéro pour tout n. Mais comme $\mathbf{H}^{p-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset \mathbf{H}^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on en déduit que $\|\bar{\gamma}_j^\rho \mathbf{X}^n - \gamma_j \mathbf{X}^n\|_{\mathbf{H}^{\beta-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ tend, pour tout n, vers zéro avec ρ. Puis, lorsque n tend vers l'infini, les premier et troisième termes du second membre de (2.22) tendent P.p.s. vers zéro d'après le théorème 2.3.

Dobrushin et Surgaïlis dans la référence [6] donnent un résultat (Proposition 2.2 de [6]) de nature différente, mais d'esprit identique à notre proposition 2.6. En effet, ces auteurs définissent les traces $\gamma_j X$ comme élément aléatoire de $\mathfrak{D}'(\Gamma)$, et leur résultat est une continuité faible, et non forte comme le notre.

Remarque 2.2. Soit $\{\Gamma_\rho;\ \rho_0 \geqq \rho \geqq 0\}$ la famille de surfaces parallèles précédente. Soit Λ_ρ l'ouvert borné de frontière Γ_ρ. Soit $\mathbf{Y}_{\Lambda_\rho} \equiv \mathbf{X}_\rho$ la solution de (2.17), il est immédiat que l'application $\rho \mapsto \mathbf{X}_\rho$ est continue de $[0, \rho_0]$ dans $\mathbf{H}^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbf{T})$. Ceci permet de résoudre le «problème d'innovation» pour les P.GpM. Se reporter à [6] pour plus de détails.

3. Formule de Green stochastique

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'établir pour un P.GpM l'analogue stochastique de la formule de Green usuelle. Outre la formule de Green usuelle et le théorème de trace ci-dessus, pour établir la formule annoncée nous aurons besoin d'une décomposition d'un P.GpM **X**, correspondant à la décomposition (1.1) de sa covariance.

3.1. Decomposition d'un P.GpM. Soient **X** le P.GpM précédent et **T** l'ouvert de référence. Soit $(\Lambda_-, \Gamma, \Lambda_+)$ deux ouverts complémentaires réguliers de **T**; où Λ_- est supposé borné.

Désignons par $\mathbf{X}_\pm$ le champ régulier sur $\Lambda_\pm$ de covariance $\mathbf{G}^\pm$ ($\mathbf{G}^\pm$ est définie au paragraphe 1), de processus dual $\mathbf{X}^*_\pm$ (cf. Benassi [4]) et par $\mathbf{X}^\Gamma$ la solution unique de:

$$(3.1)\qquad \left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}\mathbf{X}^\Gamma = 0 & \text{sur } \Lambda_- \cup \Lambda_+ \\ \gamma_j \mathbf{X}^\Gamma = \gamma_j \mathbf{X} & j = 0, p-1 \end{array}\right\} \text{P.p.s.}$$

Rappelons que ([4]), si $\bar{\mathbf{X}}_\pm \triangleq \mathbf{X}|_{\Lambda_\pm}$, on a:

$$(3.2)\qquad \begin{array}{ll} \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}}_\pm = \mathbf{X}^*_\pm & \text{sur } \Lambda_\pm \\ \gamma_j \bar{\mathbf{X}}_\pm = \gamma_j \mathbf{X} & j = 0, p-1. \end{array}$$

Soit **G** la covariance définie par le lemme 1.1, alors:

Lemme 3.1. (i) **X** *a pour covariance* **G**. *Les champs* $\mathbf{X}_-$, $\mathbf{X}^\Gamma$, $\mathbf{X}_+$ *sont indépendants deux à deux et l'on a la décomposition unique suivante de* **X**:

$$(3.3)\qquad \mathbf{X} = \mathbf{X}_- + \mathbf{X}^\Gamma + \mathbf{X}_+.$$

(ii) *Soit* $\mathbb{P}$ *la probabilité engendrée par* **X**, *si* $\mathbb{P}_0^\pm$ (*resp.* $\mathbb{P}^\Gamma$) *désigne celle egendrée par* $\mathbf{X}_\pm$ (*resp.* $\mathbf{X}^\Gamma$), *on a la factorisation:*

$$(3.4)\qquad \mathbb{P} = \mathbb{P}_0^- \times \mathbb{P}^\Gamma \times \mathbb{P}_0^+.$$

Démonstration. (i) D'après la proposition 1.4 de [4] le processus $\mathbf{X}_\pm$ vérifie:

$$(3.5)\qquad \begin{array}{ll} \mathbf{A}\mathbf{X}_\pm = \mathbf{X}^*_\pm & \\ \gamma_j \mathbf{X}_\pm = 0 & j = 0, p-1, \end{array}$$

et d'après (3.1) (3.2) on obtient: $\bar{\mathbf{X}}_\pm = \mathbf{X}_\pm + \mathbf{X}^\Gamma$ P.p.s. Comme $\bar{\mathbf{X}}_\pm$ et $\mathbf{X}_\pm$ ont le même processus dual, on en déduit:

$$\mathbb{E}\mathbf{X}_\pm(\mathbf{A}\varphi)\mathbf{X}_\pm(\psi) = \mathbb{E}\bar{\mathbf{X}}_\pm(\mathbf{A}\varphi)\mathbf{X}_\pm(\psi); \quad \varphi \text{ et } \psi \text{ dans } \mathfrak{D}(\Lambda_\pm).$$

Mais d'après (**HA**) $\mathbf{A}\varphi$ est élément de $\mathfrak{D}(\Lambda_\pm)$ si φ l'est. L'égalité ci-dessus conduit à:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bar{\mathbf{X}}_\pm(\mathbf{A}\varphi)\mathbf{X}_\pm(\psi) - \mathbb{E}\mathbf{X}_\pm(\mathbf{A}\varphi)\mathbf{X}_\pm(\psi) &= \mathbb{E}\mathbf{X}^\Gamma(\mathbf{A}\varphi)\mathbf{X}_\pm(\psi)\\ &= \mathbb{E}\mathbf{X}^\Gamma(\varphi)\mathbf{X}_\pm(\mathbf{A}\psi)\end{aligned}$$

pour φ et $\mathbf{A}\psi$ dans $\mathfrak{D}(\Lambda_\pm)$ ce qui conduit à l'indépendance de $\mathbf{X}^\Gamma$ et $\mathbf{X}_\pm$. Que $\mathbf{X}_+$ et $\mathbf{X}_-$ soient indépendants est trivial. Il est alors immédiat d'après le théorème 1.3 que $\mathbf{X}^\Gamma$ a pour covariance $\mathbf{G}^\Gamma$. La décomposition (3.3) de $\mathbf{X}$ résulte par linéarité de (3.1) et (3.5), et l'unicité découle de l'unicité des solutions des P.D.S. (3.1) et (3.5). L'assertion (ii) est alors une reformulation de l'assertion (i).

Ce lemme illustre le caractère markovien d'ordre p des P.GpM, de plus la proposition 2.6 montre que (3.3) et (3.4) dépendent «continuement de Γ».

Maintenant soit $\mathbf{K}^-$ (resp. $\mathbf{K}^\Gamma$) l'opérateur nucléaire sur $\mathbf{L}^2(\Lambda_-)$ (resp. $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$) défini par le noyau $\mathbf{G}^-$ (resp. $\mathbf{G}^\Gamma$). Soit $\{a_k^-, \varphi_k^-;\ k\in\mathbb{N}\}$ (resp. $\{a_k^\Gamma, \varphi_k^\Gamma;\ k\in\mathbb{N}\}$) le système des valeurs propres et des vecteurs propres de $\mathbf{K}^-$ (resp. $\mathbf{K}^\Gamma$). On suppose que la famille $\{\varphi_k^+\}$ (resp. φ_k^Γ) est orthonormée dans $\mathbf{L}^2(\Lambda_-)$ (resp. dans $\mathbf{L}^2(T)$). Alors, d'après le théorème 4.4 de Rajput [16] il existe une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes equidistribuées $\mathfrak{N}(0,1)$ $\{\xi_k^-;\ k\in\mathbb{N}\}$ et une suite $\{\xi_k^\Gamma;\ k\in\mathbb{N}\}$ ayant la même propriété et indépendante de la précédente telle que:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_- &= \sum_k (a_k^-)^{\frac{1}{2}}\varphi_k^-\,\xi_k^-\\ \mathbf{X}^\Gamma &= \sum_k (a_k^\Gamma)^{\frac{1}{2}}\varphi_k^\Gamma\,\xi_k^\Gamma\end{aligned}\qquad \text{P.p.s.} \tag{3.6}$$

La suite $\{\xi_k^-;\ k\in\mathbb{N}\}$ vérifie (2.2) en remplaçant φ_k par φ_k^-.

Avant d'établir la formule de Green stochastique, nous avons besoin des deux lemmes suivants:

Lemme 3.2. *Pour tout entier k, φ_k^Γ est élément de* $\mathbf{H}(\Gamma)$.

Lemme 3.3. *Pour tout élément φ de* $\mathbf{H}(\Lambda_-)$, $\mathbf{X}_+^*(\varphi) = 0$ P.p.s.

Démonstration des lemmes. Pour le premier: par définition, $\mathbf{K}^\Gamma$ envoie $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$ dans $\mathbf{H}(\Gamma)$, et puisque φ_k^Γ est vecteur propre de $\mathbf{K}^\Gamma$ le lemme 3.2 s'en suit.

Pour le second. Par définition de $\mathbf{X}^*$ et par (3.3),

$$\mathbf{X}^*(\varphi) = \mathbf{X}(\mathbf{A}\varphi) = \mathbf{X}_-(\mathbf{A}\varphi) + \mathbf{X}^\Gamma(\mathbf{A}\varphi) + \mathbf{X}_+(\mathbf{A}\varphi).$$

Comme $\mathbf{A}\varphi \equiv 0$ sur Λ_+ par hypothèse, on en déduit le lemme 3.3.

3.2. Formule de Green stochastique. Nous pouvons maintenant établir la formule annoncée. Si φ_- est un élément de $\mathbf{H}(\Lambda_-)$, φ_-^0 désignera la projection de

φ_- sur $\mathbf{H}_0(\Lambda_-)$. $\mathbf{G}$ désigne toujours la fonction de Green de l'opérateur elliptique $\mathbf{A}$.

Théorème 3.1. *Sous l'hypothèse* (**HA**), *le* P.GpM $\mathbf{X}$ *centré de covariance* $\mathbf{G}$ *vérifie*

$$\mathbf{X}^*(\varphi_-) = \mathbf{X}^*_-(\varphi^0_-) + \sum_{j=0}^{p-1} \langle \gamma_j \mathbf{X}, \mathbf{S}_j \varphi_- \rangle_\Gamma \text{ P.p.s.} \tag{3.7}$$

pour tout élément φ_- *de* $\mathfrak{D}(T) \cap \mathbf{H}(\Lambda_-)$.

Démonstration. Décomposons $\mathbf{X}$ selon (3.3); alors par définition:

$$\mathbf{X}^*(\varphi_-) = \mathbf{X}(\mathbf{A}\varphi) = \mathbf{X}_-(\mathbf{A}\varphi_-) + \mathbf{X}^\Gamma(\mathbf{A}\varphi_-)$$

en tenant compte du lemme 3.3.

Mais en utilisant les développements en série de (3.6), il vient:

$$\mathbf{X}_-(\mathbf{A}\varphi) = \sum_k (a_k^-)^{\frac{1}{2}} \xi_k^- \langle \varphi_k^-, \mathbf{A}\varphi_- \rangle, \tag{3.8}$$

$$X^\Gamma(A\varphi) = \sum_k (a_k^\Gamma)^{\frac{1}{2}} \xi_k^\Gamma \langle \varphi_k^\Gamma, A\varphi_- \rangle. \tag{3.9}$$

Comme $|\langle \varphi_k^-, A\varphi_- \rangle|$ et $|\langle \varphi_k^\Gamma, A\varphi_- \rangle|$ sont uniformément bornés en k, les séries (3.8) et (3.9) convergent dans $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ et presque sûrement. Nous pouvons transformer les expressions (3.8) et (3.9) de la façon suivante:
Per définition de la forme de Dirichlet $\mathfrak{A}$ associée à l'opérateur $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{T}$, et comme $\varphi_- = \varphi^0_- + \varphi^\Gamma_-$, [avec φ^0_- dans $\mathbf{H}_0(\Lambda_-)$, φ^Γ dans $\mathbf{H}(\Gamma)$ si φ_- est dans $\mathbf{H}(\Lambda_-)$], si $\mathfrak{A}_-$ désigne la forme de Dirichlet associée à $\mathbf{A}$ sur Λ_-, il vient:

$$\langle \varphi_k^-, \mathbf{A}\varphi_- \rangle = \mathfrak{A}(\varphi_k^-, \varphi_-) = \mathfrak{A}_-(\varphi_k^-, \varphi^0_-) \tag{3.10}$$

puisque φ_k^- est pour tout entier k élément de $H_0(\Lambda_-)$. De même,

$$\begin{aligned}\langle \varphi_k^\Gamma, \mathbf{A}\varphi_- \rangle &= \mathfrak{A}(\varphi_k^\Gamma, \varphi_-) = \mathfrak{A}_-(\varphi_k^\Gamma, \varphi^\Gamma) \\ &= \int_{\Lambda_-} \mathbf{A}\varphi^\Gamma \cdot \varphi_k^\Gamma \, dx + \sum_{j=0}^{p-1} \langle \gamma_j \varphi_k^\Gamma, \mathbf{S}_j \varphi^\Gamma_- \rangle_\Gamma.\end{aligned}$$

Soit:

$$\langle \varphi_k^\Gamma, \mathbf{A}\varphi_- \rangle = \sum_{j=0}^{p=1} \langle \gamma_j \varphi_k^\Gamma \mathbf{S}_j \varphi^\Gamma_- \rangle_\Gamma. \tag{3.11}$$

En portant (3.10) dans (3.8), il vient:

$$\mathbf{X}_-(\mathbf{A}\varphi_-) = \sum_k (a_k^-)^{\frac{1}{2}} \xi_k^- \mathfrak{A}(\varphi_k^-, \varphi^0_-) = \mathbf{X}^*_-(\varphi^0_-), \tag{3.12}$$

et en portant (3.11) dans (3.9), il vient:

$$\mathbf{X}^\Gamma(\mathbf{A}\varphi_-) = \sum_{j=0}^{p-1} (a_k^\Gamma)^{\frac{1}{2}} \xi_k^\Gamma \langle \gamma_j \varphi_k^\Gamma, \mathbf{S}_j \varphi_- \rangle_\Gamma,$$

ce qui s'écrit, en utilisant la définition 2.1:

(3.13) $$\mathbf{X}^{\Gamma}(\mathbf{A}\varphi_{-}) = \sum_{j=0}^{p-1} \langle \gamma_j X, \mathbf{S}_j \varphi_{-} \rangle_{\Gamma},$$

(3.12) et (3.13) démontrent le théorème.

Remarque 3.1. L'application $\varphi \mapsto \mathbf{X}^{\Gamma}(\mathbf{A}\varphi)$ est continue de $\mathbf{H}(\Gamma) \cap \mathfrak{D}(T)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ pour la topologie de $\mathbf{H}(\Gamma)$. Elle se prolonge par densité en une application continue de $\mathbf{H}(\Gamma)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Soit $\{\varphi_g\}$ une suite d'éléments de $\mathbf{H}(\Gamma) \cap \mathfrak{D}(\mathbf{T})$ qui converge dans $\mathbf{H}(\Gamma)$ vers φ. La suite $\langle \gamma_j \mathbf{X}, \mathbf{S}_j \varphi_g \rangle_{\Gamma}$ est donc convergente dans $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ vers un élément que nous noterons:

(3.14) $$\lim_{g \to \infty} \text{dans } \mathbf{L}^2 \langle \gamma_j \mathbf{X}, \mathbf{S}_j \varphi_g \rangle_{\Gamma} = \langle \Gamma_j \mathbf{X}, \mathbf{S}_j \varphi \rangle_{\Gamma}.$$

C'est la définition de la dérivée normale en moyenne quadratique d'ordre j à Γ de X.

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Théorème 3.2. *Sous l'hypothèse* (HA), *le* PGpM $\mathbf{X}$ *centré de covariance* $\mathbf{G}$ *vérifie:*

(3.15) $$\mathbf{X}^*(\varphi_{-}) = \mathbf{X}^*_{-}(\varphi^0_{-}) + \sum_{j=0}^{p-1} \langle \Gamma_j \mathbf{X}, \mathbf{S}_j \varphi \rangle_{\Gamma}$$

pour tout élément φ_{-} *de* $\mathbf{H}(\Lambda_{-})$.

4. Quelques applications

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques applications des résultats obtenus jusqu'ici pour résoudre ou illustrer des problèmes de théorie des champs et de mécanique statistique.

4.1. Notations. Définissons l'espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{A})$ par:

(4.1) $$(\Omega, \mathfrak{A}) = (\mathbf{C}(\mathbf{T}); \quad \mathfrak{B}(\mathbf{C}(\mathbf{T})))$$

où $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ est l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbf{T}$ muni de la norme de la convergence uniforme sur les compacts. Soit $\mathbf{A}$ l'opérateur différentiel elliptique de degré $2p$ ci-dessus. Si $\mathbf{G}_{\mathbf{A}}$ désigne la fonction de Green de $\mathbf{A}$ sur $\mathbb{R}^d$, $\tilde{\mathbf{G}}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{A}}$ désignera la restriction de $\mathbf{G}$ à $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$, de même $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{A}}$ désignera la fonction de Green de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{T}$. Alors soit $\{\mathbf{X}(t);\ t \in \mathbf{T}\}$ le processus canonique sur $(\Omega, \mathfrak{A})$, $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$ (resp. $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}$) désignera la probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ qui fait du processus canonique un gaussien centré de covariance $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{A}}$ (resp. $\tilde{\mathbf{G}}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{A}}$). Les tribus $\Sigma(\Lambda)$; $\Sigma(\partial \Lambda)$ sont pour tout ouvert Λ définies comme usuellement (cf. [4]).

Notons Σ_{∞} la tribu des évènement lointains,

$$\Sigma_{\infty} = \bigcap_{\Lambda \text{ ouvert borné régulier}} \Sigma(\Lambda^c).$$

D'autre part, $\mathbb{E}_\Lambda$ désignera l'espérance conditionnelle par rapport à $\Sigma(\Lambda)$ pour Λ dans $\mathfrak{A}$.

4.2. Modules de quast-invariance. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P_A})$ l'espace de probabilité précédent. Le processus gaussian centré $\{\mathbf{X}(t),\ t \in T\}$ de covariance $\mathbf{G_A^T}$ a pour espace reproduisant l'espace $\mathbf{H}_0(\mathbf{T})$ défini dans l'introduction. Il est connu que la translatée de $\mathbf{P_A}$ par un élément g de $\mathbf{H}_0(\mathbf{T})$ soit $\mathbf{P_A^g}$ est équivalente à $\mathbf{P_A}$ (cf. Neveu [14]).

Théorème 4.1. *Sous l'hypothèse* (HA), *pour tout ouvert porné régulier Λ de frontière Γ et pour tout élément g de* $\mathbf{H}_0(\mathbf{T})$ *on a:*

$$\frac{d\mathbf{P_A^g}}{d\mathbf{P_A}} = \exp - \left[\mathbf{X}^*(g) + \frac{1}{2}\|g\|^2_{\mathbf{H}_0(\mathbf{T})}\right] \quad \mathbf{P_A}\text{-p.s.} \tag{4.2}$$

$$\mathbb{E}_\Lambda \frac{d\mathbf{P_A^g}}{d\mathbf{P_A}} = \exp - \left[\mathbf{X}^*(g_\Lambda^0) + \sum_{j=0}^{p-1} \langle \Gamma_j \mathbf{X}, \mathbf{S}_j g\rangle_\Gamma + \frac{1}{2}\|g_\Lambda\|^2_{\mathbf{H}(\Lambda)}\right] \quad \mathrm{P_A}\text{-p.s.}. \tag{4.3}$$

$$\frac{dP_A^{g_\Lambda}}{dP_A} \textit{ est } \Sigma(\Lambda) \textit{ mesurable si } g_\Lambda \in H(\Lambda), \tag{4.3}$$

où g_Λ désigne la projection de g sur le sous-espace $H(\Lambda)$ et g_Λ^0 désigne celle de g sur le sous-espace $H_0(\Lambda)$.

Démonstration. (4.2) est connu, voir par exemple la Proposition 3.1 de Frölich [8]. En écrivant $g = g_\Lambda^0 + g^\Gamma + g_{\bar\Lambda^c}^0$ avec $g_\Lambda^0 \in \mathbf{H}_0(\Lambda)$; $g^\Gamma \in \mathbf{H}(\Gamma)$ $g_{\bar\Lambda^c}^0 \in H(\bar\Lambda^c)$, d'après le théorème 3.2 (4.3) s'écrit, si $\mathbf{B}^c$ désigne le complémentaire dans T de l'ensemble mesurable $\mathbf{B}$;

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\Lambda \frac{d\mathbf{P_A^g}}{d\mathbf{P_A}} = \mathbb{E}_\Lambda \exp &- \left[\mathbf{X}_\Lambda^*(g_\Lambda^0) + \sum_{j=0}^{p-1} \langle \Gamma_j \mathbf{X}, \mathbf{S}_j g\rangle_\Gamma + \frac{1}{2}\|g_\Lambda\|^2_{\mathbf{H}(\Lambda)}\right] \\ &\times \exp - [\mathbf{X}_{\bar\Lambda^c}(g_{\bar\Lambda^c}^0) + \tfrac{1}{2}\|g_{\bar\Lambda^c}^0\|\,\mathbf{H}_0(\bar\Lambda^c)].\end{aligned} \tag{4.4}$$

Où $g_\Lambda = g_\Lambda^0 + g^\Gamma$ est la projection de g sur $H(\Lambda)$, par définition de X_Λ^* et par le théorème de Pythagore dans $H_0(T)$; en effet,

$$\begin{aligned}\|g\|^2_{\mathbf{H}_0(\mathbf{T})} &= \|g_\Lambda\|^2_{\mathbf{H}_0(\mathbf{T})} + \|g_{\bar\Lambda^c}^0\|^2_{\mathbf{H}_0(\mathbf{T})} \\ &= \|g_\Lambda\|^2_{\mathbf{H}(\Lambda)} + \|g_{\bar\Lambda^c}^0\|^2_{\mathbf{H}(\bar\Lambda^c)}.\end{aligned}$$

Posons:

$$\rho_\Lambda = \frac{d\mathbf{P_A^{g_\Lambda}}}{d\mathbf{P}} \quad \text{pour tout ouvert } \Lambda. \tag{4.5}$$

Alors

$$\mathbb{E}_\Lambda \{\exp - [\mathbf{X}_{\bar\Lambda^c}^*(g_{\bar\Lambda^c}^0) + \tfrac{1}{2}\|g_{\bar\Lambda^c}^0\|^2_{\mathbf{H}_0(\bar\Lambda^c)}]\} = \mathbb{E}(\rho_{\bar\Lambda^c}) = 1 \tag{4.6}$$

et comme $\mathbf{X}_\Lambda^*(g_\Lambda^0) + \sum_{j=0}^{p-1} \langle \Gamma_j \mathbf{X}, \mathbf{S}_j g\rangle_\Gamma$ est $\Sigma(\Lambda)$ mesurable, on en déduit (4.6) et donc (4.3); (4.3) bis est démontré en même temps.

Rémarque 4.1. Le théoréme 4.1 reste vrai si P_A est remplacée par $\bar{P}_A$ car (4.2) reste vraie.

4.3. Specifications locales.

Soit $\bar{P}_A$ la probabilité gaussienne sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ définie au sous-paragraphe 4.1. Définissons un ensemble $\mathfrak{M}_A$ de probabilités sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ par: ν est élément de $\mathfrak{M}_A$ si

a) $\nu|\Sigma(\Lambda) \ll \bar{P}_A|\Sigma(\Lambda)$ pour tout ouvert borné régulier Λ

b) ν et $\bar{P}_A$ ont les mêmes spécifications locales c-à-d

$$\mathbb{E}^{\nu}[\Phi|\Sigma(\bar{\Lambda}^c)] = \mathbb{E}^{\bar{P}_A}[\Phi|\Sigma(\partial\Lambda)] \quad \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}\text{.p.s.} \tag{4.7}$$

pour tout Φ dans $\mathbf{L}(\Omega, \mathfrak{A}, \bar{\mathbf{P}}_A)$.

Soit $H(T)$ l'espace de noyaux reproduisants associé à $\bar{P}_A$ et définissons le sous-espace $H(\partial T)$ de $H(T)$ par:

$$H(\partial T) = \{H \in H(T) | AH = 0 \text{ sur } T\}. \tag{4.8}$$

$\mathfrak{m}$ désigne l'ensemble des probabilités m sur $H(\partial T)$, alors:

Proposition 4.1. *Sous l'hypothèse* (HA) *nous avons:*

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{A}} = \left\{ \nu_m | \nu_m = \int_{\mathbf{H}(\partial\mathbf{T})} \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{H}} m(d\mathbf{H}); m \in \mathfrak{m} \right\}. \tag{4.9}$$

Démonstration. Pour démontrer la proposition, nous avons besoin du.

Lemme 4.2. *Sous l'hypothèse* (HA), *l'application*

$$g \mapsto \frac{d\bar{P}_A^g}{d\bar{P}_A} \tag{4.10}$$

est continue de $H_0(T)$ *dans* $\mathbf{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}})$.

La démonstration résulte de l'égalité (4.2) du théorème 4.1 et de la remarque 4.1.

Ainsi l'hypothèse fondamentale (2.1) de Frölich [8] est vérifiée. Alors le théorème 2.14 assertion (1.b) de [8] indique que $\bar{P}_A^H \simeq \bar{P}_A$ et que $d\bar{P}_A^H/d\bar{P}_A$ est Σ_∞ mesurable pour H élément de $H(\partial T)$; On a donc l'inclusion:

$$\{\nu_m | m \in \mathfrak{m}\} \subset \mathfrak{m}_A.$$

Pour montrer l'inclusion en sens inverse il suffit de remarquer que les cocycles $d\bar{P}_A^H/d\bar{P}_A$ engendrent $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, d\bar{P}_A)$ et résulte du théorème 2.14 assertion 3 de [8].

Corollaire 4.3. *Sous l'hypothèse* (HA)

$$\mathfrak{M}_A = \{P_A\} \quad \text{ssi} H(\partial T) = 0. \tag{4.11}$$

Démonstration. Si $H(\partial T) = 0$ $\bar{P}_A = P_A$ (par abus de notation), et l'on a trivialement $\mathfrak{M}_A = \{P_A\}$. Réciproquement, si $\mathfrak{M}_A = \{P_A\}$ alors la tribu Σ_∞ est triviale et donc $\bar{P}_A = P_A$ ce qui implique $H(\partial T) = 0$.

4.4. Équivalence locale et fonctionnelles multiplicatives. Dans ce sous-paragraphe, nous établissons un rapport entre les équations de Dobrushin-Landford-Ruelle (D.L.R.) de la mécanique statistique et les probabilités gaussiennes markoviennes d'ordre p. Donnons la définition suivante due à Frölich [8].

Définition 4.1. *Soient P et Q deux probabilités sur $(\Omega, \mathfrak{A})$. Pour tout ouvert borné régulier désignons par $\mathbf{P}_\Lambda$ (resp. $\mathbf{Q}_\Lambda$) la restriction de $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{Q}$) à $\Sigma(\Lambda)$. Nous dirons que $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ sont multiplicativement localement équivalentes si*

a) *il existe des éléments positifs $\mathbf{F}_\Lambda$ et $\psi_{\partial\Lambda}$ respectivement $\Sigma(\Lambda)$ et $\Sigma(\partial\Lambda)$ mesurables tels que*

$$d\mathbf{Q}_\Lambda = \mathbf{F}_\Lambda \psi_{\partial\Lambda} d\mathbf{P}_\Lambda. \tag{4.12}$$

b) *Pour tout couple (Λ_1, Λ_2) d'ouverts bornés réguliers tels que $\bar{\Lambda}_1 \cup \bar{\Lambda}_2$ ait son intérieur régulier et vérifiant de surcroit $\bar{\Lambda}_1 \cap \bar{\Lambda}_2 \subset \partial\Lambda_1 \cup \partial\Lambda_2$, il existe un élément positif $\psi_{\partial\Lambda_1 \cup \partial\Lambda_2}$, $\Sigma(\partial\Lambda_1 \cup \partial\Lambda_2)$ mesurable tel que:*

$$d\mathbf{Q}\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \mathbf{F}\Lambda_1 \cdot \mathbf{F}\Lambda_2 \cdot \psi_{(\partial\Lambda_1 \cup \partial\Lambda_2)} d\mathbf{P}\Lambda_1 \cup \Lambda_2. \tag{4.13}$$

Soient A et B deux opérateurs elliptiques de degré commun $2p$ et vérifiant (HA). Soient P_A et P_B les probabilités gaussiennes régulières qui leurs sont associées. Alors:

Proposition 4.4. *Sous la condition*

$$\text{degré}(A-B) < 2p - \frac{d}{2} - 1 \tag{4.14}$$

les probabilités P_A et P_B ci-dessus sont multiplicativement, localement équivalentes.

Démonstration. Soit Λ_- un ouvert borné de $\mathbf{T}$ de frontière Γ et Λ_+ son ouvert complémentaire. Alors, la factorisation (3.4) du lemme 3.1 donne pour P_A et P_B successivement:

$$\bar{P}_{A,\Lambda_-} = P_{A,\Lambda_-} \times P_A^\Gamma; \qquad \bar{P}_{B,\Lambda_-} = P_{B,\Lambda_-} \times P_B^\Gamma. \tag{4.15}$$

Lorsque l'ouvert T est borné, la condition (4.14) assure (cf. Inoue [10]) que $P_A \simeq P_B$. Supposons donc que provisoirement T soit borné, alors en plus de l'équivalence ci-dessus, nous avons celles suivantes:

$$P_{A,\Lambda_-} \simeq P_{B,\Lambda_-} \quad \text{et} \quad P_{A,\Lambda_+} \simeq P_{B,\Lambda_+}$$

ce qui entraîne $P_A^\Gamma \simeq P_B^\Gamma$; et qui permet d'écrire:

$$\frac{dP_B^\Gamma}{dP_A^\Gamma} = \prod_k \left(\frac{a_k^\Gamma}{b_k^\Gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_k \left(\frac{a_k^\Gamma}{b_k^\Gamma} - 1\right)(\xi_k^{A,\Gamma})^2\right\} \quad \mathrm{P_A\text{.p.s.}} \tag{4.16}$$

en reprenant les notations du lemme 3.1. Mais (4.16) est équivalente à:

$$\sum_k \left(\frac{a_k^\Gamma}{b_k^\Gamma} - 1\right) < \infty. \tag{4.17}$$

Or d'après la démonstration du théorème 1.4, les valeurs propres $\{a_k^\Gamma;\ k\in N\}$ ($\{b_k^\Gamma;\ k\in N\}$) ne dépendent que de la surface Γ et non de l'ouvert de référence T, alors la convergence de (4.17) est aussi indépendante de T ce qui assure finalement l'équivalence de P_A^Γ et de P_B^Γ indépendemment de l'ouvert T. En posant:

$$\mathbf{F}_{\Lambda_-}=\frac{dP_{B,\Lambda_-}}{dP_{A,\Lambda_-}};\qquad \psi_{\partial\Lambda_-}=\frac{dP_B^\Gamma}{dP_A^\Gamma} \tag{4.18}$$

la condition (a) de la définition 4.1 est remplie. Il reste à vérifier la condition (b) de la définition. Pour cela, donnons-nous un ouvert borné régulier $\mathbf{V}$ contenant $\bar{\Lambda}_1$ et posons $\Lambda_2=\mathbf{V}-\bar{\Lambda}_1$. Dans ces conditions, $\Psi_{\partial\Lambda_1\cup\partial\Lambda_2}=\Psi_{\partial\mathbf{V}}\cdot\Psi_{\partial\Lambda_1}$ ce qui démontre la proposition.

Remarques 4.2. 1) La condition (b) de la définition 4.1 exigeant que l'intérieur de $\bar{\Lambda}_1\cup\bar{\Lambda}_2$ soit régulier est très forte.

2) De même que pour la remarque 4.1, la proposition 4.4 reste vraie si l'on remplace les probabilités P_A et P_B par $\bar{P}_A$ et $\bar{P}_B$ respectivement ceci grâce au caractère local de (4.15).

Remarque 4.3. Soit $\mathfrak{G}$ le groupe des translations de $C(T)$ par les éléments g de $H_0(T)$. On vérifie (théorème 2.14 assertion (3) de [8]) que $\bar{P}_A$ $\mathfrak{G}$ ergodique équivaut à $\bar{P}_A\equiv P_A$, et donc que:

Proposition 4.5 [8]. *Soient A et B deux opérateurs elliptiques de même degré et vérifiant* (HA); *alors, lorsque l'ouvert T n'est pas borné, les probabilités gaussiennes p markoviennes* P_A *et* P_B *sont ou mutuellement singulières ou identiques.*

Lorsque l'ouvert de référence T est borné, la condition (4.14) assure que $P_A\simeq P_B$. Nous allons donc calculer la dérivée de Radon-Nikodym dP_B/dP_A de P_B par rapport à P_A.

4.5. Dérivée de Radon-Nikodym. 4.5.1. Soient **A** et **B** les opérateurs elliptiques précédents. Dans tout ce paragraphe, nous faisons l'hypothèse que **T** est borné. $\mathbf{G}^\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{G}^\mathbf{B}$) désigne la fonction de Green de **A** (resp. **B**) sur **T**; $\mathbf{H}_0(\mathbf{A})$ (resp. $\mathbf{H}_0(\mathbf{B})$) est alors l'espace des noyaux $\mathbf{G}^\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{G}^\mathbf{B}$). De même si $\mathbf{K}^\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{K}^\mathbf{B}$) désigne l'opérateur nucléaire symétrique de noyau $\mathbf{G}^\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{G}^\mathbf{B}$) sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$, alors $\{a_k,\ \varphi_k^\mathbf{A};\ k\in\mathbb{N}\}$ (resp. $\{b_k,\ \varphi_k^\mathbf{B};\ k\in\mathbb{N}\}$) désignera le système des valeurs propres et des vecteurs propres de $\mathbf{K}^\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{K}^\mathbf{B}$). Nous supposerons que la suite $\{\varphi_k^\mathbf{A}\}$ (resp. $\{\varphi_k^\mathbf{B}\}$) est orthonormée dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$.

Définissons un opérateur continu τ de $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$ par:

$$\tau\varphi=\sum_k\left(\frac{b_k}{a_k}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi_k^\mathbf{B}(\varphi_k^\mathbf{A},\varphi)_0\qquad\text{pour }\varphi\text{ dans }L^2(T). \tag{4.19}$$

D'après (2.6) la suite $\dfrac{b_k}{a_k}$ est bornée et (4.19) défini bien un opérateur continu.

Maintenant, soit $\mathfrak{H}_\mathbf{A}$ (resp. $\mathfrak{H}_\mathbf{B}$) le sous-espace gaussien de $\mathbf{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},\mathbf{P}_\mathbf{A})$ (resp. $\mathbf{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},\mathbf{P}_\mathbf{B})$). Si η (resp. $\eta_\mathbf{B}$) est la mesure brownienne de $\mathbf{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},\mathbf{P}_\mathbf{A})$ (resp. $\mathbf{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},\mathbf{P}_\mathbf{B})$) définissons la suite $\{\xi_k^\mathbf{A};\ k\in\mathbb{N}\}$ (resp. $\{\xi_k^\mathbf{B};\ k\in\mathbb{N}\}$) par:

$$\{\xi_k^\mathbf{A}=\eta(\varphi_k^\mathbf{A});\ k\in\mathbb{N}\}\ (\text{resp. }\{\xi_k^\mathbf{B}=\eta_\mathbf{B}(\varphi_k^\mathbf{B});\ k\in\mathbb{N}\}). \tag{4.20}$$

Alors, nous pouvons définir un opérateur continu $\tilde{\tau}$ de $\mathfrak{H}_{\mathbf{A}}$ dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{B}}$ par:

$$\tilde{\tau}\mathbf{Z} = \sum_k \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^{\frac{1}{2}} \xi_k^{\mathbf{B}}(\xi_k^{\mathbf{A}}, \mathbf{Z})_{\mathfrak{H}_{\mathbf{A}}} \quad \text{pour } \mathbf{Z} \text{ dans } \mathfrak{H}_{\mathbf{A}}. \tag{4.21}$$

Dans ces conditions, nous avons la relation:

$$\tilde{\tau} P_A = P_B \tag{4.22}$$

puisque (4.22) est équivalente à l'égalité $K^B = \tau K^A \tau^*$ que l'on vérifie facilement.

On sait que les probabilités gaussiennes P_A et P_B sont équivalentes si et seulement si: l'opérateur $(\tilde{\tau}^* \tilde{\tau} - I)$ est nucléaire, et que l'opérateur $\tilde{\tau}$ n'admet pas zéro pour valeur propre. Alors, l'équivalence de P_A et P_B est soumise à la condition:

$$\sum_k \left(\frac{b_k}{a_k} - 1\right) < \infty. \tag{4.23}$$

Mais d'après un résultat d'Inoue [10] (4.23) est équivalente à la condition (4.14).

4.5.2. Calcul de dP_B/dP_A. Dans toute la suite, nous faisons l'hypothèse que (4.14) est satisfaite. Alors, d'après Rozanov [18], ou en adoptant de façon naturelle les calculs de Etemadi-Kallianpur [7], il vient:

$$\frac{dP_B}{dP_A} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a_k}{b_k} - 1\right) (\xi_k^A)^2 \quad \mathrm{P_A}\text{.p.s.}.$$

La convergence (4.23) entraîne celle du produit infini $\prod_k \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{2}}$. On a donc:

$$\frac{dP_B}{dP_A} = \prod_k \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{2}} \exp - \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{a_k}{b_k} - 1\right) (\xi_k^A)^2 \quad \mathrm{P_A}\text{.p.s.},$$

ce qui peut aussi s'écrire:

$$\frac{dP_B}{dP_A} = \prod_k \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{2}} \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{a_k}{b_k} - 1\right) \tag{4.24}$$
$$\times \exp - \frac{1}{2} \sum_k \left[\left(\frac{a_k}{b_k} - 1\right) ((\xi_k^A)^2 - 1)\right] \quad \mathrm{P_A}\text{.p.s.},$$

ceci afin de faire apparaître l'expression:

$$\delta_{-\mathbf{U}}(1) = \prod_k \frac{a_k}{b_k} \exp - \left(\frac{a_k}{b_k} - 1\right). \tag{4.25}$$

Soit $\mathbf{U}$ l'opérateur de $L^2(T)$ dans $L^2(T)$ défini par le noyau $\mathfrak{U}(x, y)$

$$(4.26) \qquad \mathfrak{U}(x, y) = \sum_k \left(\frac{a_k}{b_k} - 1\right) \varphi_k^A(x)\, \varphi_k^A(y).$$

Alors U est nucléaire et $\delta_{-\mathbf{U}}(1)$ défini en (4.25) est le déterminant de Carleman-Fredholm de l'opérateur $-\mathbf{U}$.

Maintenant, pour un élément φ de $L^2(T \times T)$, notons par

$$(4.27) \qquad \mathbf{I}_2(\varphi) = \iint_{T \times T} \varphi(x, y)\, d\eta(x)\, d\eta(y)$$

l'intégrale double de Ito. Rappelons la propriété (Ito [11]):

$$(4.28) \qquad \mathbf{I}_2(\varphi \otimes \psi) = \eta(\varphi)\, \eta(\psi) - (\varphi, \psi)_0 \quad \text{pour } \varphi \text{ et } \psi \text{ dans } L^2(T)$$

lorsque $\otimes$ désigne le produit tensoriel de φ par ψ. A l'aide de (4.28) nous pouvons écrire:

$$(4.29) \qquad \sum_k \left(\frac{a_k}{b_k} - 1\right) [(\xi_k^A)^2 - 1] = \sum_k \left(\frac{a_k}{b_k} - 1\right) \mathbf{I}_2(\varphi_k^A \times \varphi_k^A) = \mathbf{I}_2(\mathfrak{U}),$$

où $\mathfrak{U}$ est défini en (4.26).

Arrivés à ce stade, nous voulons déterminer un opérateur $\mathbf{M}$ sur $L^2(T)$ satisfaisant à: si $\mathbf{U}$ est l'opérateur de noyau (4.26) alors:

$$(4.30) \qquad \mathbf{I} + \mathbf{U} = (\mathbf{I} + \mathbf{M})(\mathbf{I} + \mathbf{M}^*).$$

Pour cela définissons un opérateur continu δ de $L^2(T)$ dans $L^2(T)$ par:

$$(4.31) \qquad \delta\varphi = \sum_k \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_k^A (\varphi_k^B, \varphi)_0 \qquad \text{pour } \varphi \text{ dans } L^2(T),$$

δ est le transposé de l'opérateur τ défini en (4.19). Il est facile de vérifier que:

$$(4.32) \qquad \mathbf{I} + \mathbf{U} = \delta\delta^*$$

et qu'ainsi l'opérateur $\mathbf{M} + \delta - \mathbf{I}$ vérifie alors (4.30), et donc l'opérateur $\mathbf{U}$ s'écrit:

$$(4.33) \qquad \mathbf{U} = \mathbf{M} + \mathbf{M}^* + \mathbf{M}\mathbf{M}^*.$$

Caractérisons l'opérateur M.

Théorème 4.6. *L'opérateur* $\mathbf{M}$ *est à noyau, et son noyau* $m(x, y)$ *s'écrit:*

$$(4.34) \qquad m(x, y) = \sum_k \left[\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_k^A(x) - \varphi_k^B(x)\right] \varphi_k^B(y).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que $m \in L^2(T \times T)$, car formellement (4.34) convient. En utilisant le développement en série (2.4) pour G^A et G^B successivement, et en experimant que $G^A - G^B$ est élément de la deuxième puissance tensorielle $H_0^{\otimes 2}(A)$ de l'espace $H_0(A)$, on vérifie en posant $\mathfrak{G} = G^A - G^B$ que

$$\|\mathfrak{G}\|^2_{H_0^{\otimes 2}(A)} = \sum_{k,1} \left[\delta_{k1} - \frac{b_1}{a_k} (\varphi_k^A, \varphi_1^B)_0^2\right] \qquad (4.35)$$

$$+ \sum_{k,1} \left[\delta_{k1} - \frac{b_k}{a_1} (\varphi_k^A \varphi_1^B)_0^2\right]$$

$$+ \sum_{k,1} \left[\delta_{k1} - b_k b_1 (\varphi_k^B A \varphi_1^B)^2\right]$$

(4.35) est fini par hypothèse. D'autre part:

$$\|m\|^2_{L^2(T \times T)} = \sum_k \left[\frac{a_k}{b_k} + 1 - 2\sqrt{\frac{a_k}{b_k}} (\varphi_k^A, \varphi_k^B)_0\right]$$

et comme d'après (4.35) il découle facilement que la série $\sum_k \left[1 - \sqrt{\frac{a_k}{b_k}} (\varphi_k^B, \varphi_k^A)_0\right]$ converge et puisque, par hypothèse, la série $\sum_k \left(\frac{a_k}{b_k} - 1\right)$ est convergente, il s'en suit rapidement que la norme de m, $\|m\|_{L^2(T \times T)}$ est finie.

Si mm^* désigne le noyau de l'opérateur MM^*, le théorème 4.6 permet de définir les intégrales doubles de Ito, $I_2(m)$, $I_2(m^*)$ et $I_2(mm^*)$. D'autre part, il est immédiat que

$$I_2(m) = I_2(m^*). \qquad (4.36)$$

Lemme 4.7.

$$I_2(mm^*) = \int_T \eta^2[m(.,x)]\, dx - \mathrm{tr}(MM^*) \quad \mathbb{P}_A\text{-p.s.} \qquad (4.37)$$

Démonstration. Par définition

$$mm^*(x,y) = \int_T m(x,z)\, m(z,y)\, dz = \int_T m(x,z)\, m(y,z)\, dz.$$

Mais

$$I_2[m(.,z) \otimes m(.,z)] = \eta^2(m(.,z)) - \int_T m(x,z)\, m(y,z)\, dz. \qquad (4.38)$$

Et en intégrant (4.38) par rapport à z, nous obtenons pour le premier membre

$$\int_T I_2[m(.,z) \otimes m(.,z)]\, dz = I_2(mm^*).$$

Ce qui se justifie aisément (cf. [7]) et pour le second membre de (4.38), nous obtenons (4.37).

Finalement, donnons le résultat suivant:

Lemme 4.8 (p. 36 de ref. [7]). *Soit* $\mathbf{U}$ *l'opérateur défini par son noyau* $\mathfrak{U}(x,y)$ *en* (4.26), *si* $\delta_{-U}(1)$ *est le déterminant de Carleman-Fredholm qui lui est associé par* (4.25), *alors:*

$$\delta_{-U}(1) = \exp - \mathrm{trace}(MM^*).$$

Nous sommes maintenant en mesure d'annoncer la

Proposition 4.9. *Si les opérateurs elliptiques* **A** *et* **B**, *outre l'hypothèse* (HA) *vérifient la condition* (4.14), *alors:*

$$\frac{dP_B}{dP_A} = \exp - [I_2(m) + \tfrac{1}{2} \int_T \eta^2(m(.,x))\, dx] \quad \mathrm{P_A}.\mathrm{p.s.}. \tag{4.39}$$

Démonstration. L'expression (4.24) de dP_B/dP_A s'écrit aussi:

$$\frac{dP_B}{dP_A} = \delta^{\frac{1}{2}}_{-U}(1) \exp - \frac{1}{2} I_2(\mathfrak{U})$$

ce qui, compte tenu du théorème 4.6 et des lemmes 4.7 et 4.8, conduit à (4.39).

Bibliographie

1. Agmon, S.: Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Mathematical Studies. New York: Van Nostrand 1965
2. Baxendale, P.: Gaussian Measures on Function Spaces. Amer. J. of Math. **98**, 891, 952 (1974)
3. Benfatto, G., Gallavotti, G., Nicolô, F.: Elliptics Equations and Gaussian processes. Publication de l'Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math **79**, 25 (1979)
4. Benassi, A.: Processus Gaussiens, Markoviens d'ordre p, Fortement Markoviens d'Ordre p et Problème de Dirichlet Stochastique. Ann. Inst. Henri Poincaré **XV**, 107–126 (1979)
5. Daletskii, Yu., L.: Infinite Dimensional Elliptic Operators and Parabolic Equations Connected with them. Russian Math. Survey **22**, 1–52 (1967)
6. Dobrushin, R.L., Surgaïlis, D.: On the Innovation Problem for Gaussian Markov Random Fields. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **49**, 275–291 (1979)
7. Etemadi, Kallianpur: Nonanticipative Transformations of the Two-Parameter Wiener Processes and a Girsanov Theorem. J. Multi-Variate Anal. **7**, 28–79 (1977)
8. Frühlich, J.: Schwinger Function and their Generating Functionals. II. Markovian and Generalized Path Measures on S'. Advances in Math. **23**, 119–180 (1977)
9. Holley, R., Stroock, D.: The D.L.R. Conditions for Translation Invariant Gaussian Measures on $S'(R^d)$. Preprint
10. Inoue, K.: Equivalence of Measures for some Class of Gaussian Randoms Fields. J. Multi-Variate Anal. **6**, 295–308 (1976)
11. Ito, K.: Multiple Wiener Integral. J. Math. Soc. Japan **3**, 157–169 (1961)
12. Lions, Magenes: Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications. Vol. 1. Paris: Dunod 1968
13. Mikhlin, S.G.: Mathematical Physics, and Advanced Course. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics Vol. 11. Amsterdam: North-Holland
14. Neveu, J.: Processus Aléatoires Gaussiens. Séminaire d'Eté 1968. Presses de l'Université de Montréal (1968)
15. Pitt. L.D.: A Markov Property for Gaussian Processes with a Multidimensional Parameter. Arch. Rational Mech. Anal. **43**, 367–391 (1971)
16. Rajput, B.S.: On Gaussian measures in certain Locally Convex Spaces. J. Multi-Variate Anal. **2**, 282–306 (1972)
17. Rozanov, Yu,: Stochastics Markov Fields. Advances Appl. Probab. **10**, 272 (1978)
18. Rozanov, Yu,: Infinite Dimensional Gaussian Distribution. Proc. of the Steklov Inst. N°. 108 (1968). Amer. Math. Soc. (1971)
19. Zarubin, A.G.: The Method of Moments for a Class of Nonlinear Equations. Siberian Math. J. **19**, 405–411 (1978)

Reçu le 1 Juni 1980; le forme révisée le 29 Septembre 1981