Die kombinatorische Lösung einer Operator-Gleichung

Von

WALTER VOGEL

Einleitung

In den letzten Jahren sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Reihe von kombinatorischen Ergebnissen erzielt worden, von welchen die bekannteste Formel den Namen Spitzersche Identität führt. Bei dem mathematischen Kern dieser Ergebnisse handelt es sich um Identitäten zwischen formalen Potenzreihen. Die Koeffizienten dieser Potenzreihen sind kombinatorische Ausdrücke, welche aus linearen Operatoren und den Elementen eines Ringes zusammengesetzt sind. Wir wollen in dieser Arbeit eine solche Identität behandeln. Die beweistechnischen Verfahren schließen sich zum Teil eng an die Arbeit [5] von KINGMAN an, obwohl unsere Identität keine Verallgemeinerung einer schon bekannten Identität darstellt.

In Abschnitt 1 leiten wir, von einem einfachen Problem ausgehend, eine Operator-Gleichung her. Es ist im wesentlichen die Fourier-Transformierte der Chapman-Kolmogoroff-Gleichung einer speziellen Markoffschen Kette. In Abschnitt 2 wird für diese Operator-Gleichung eine Lösungsformel angegeben. Der Abschnitt 3 behandelt die Beziehungen zwischen dieser Formel und der Literatur über die Spitzersche Identität. Abschnitt 4 zeigt, wie man die Formel bei einer konkreten Aufgabenstellung verwenden kann.

1.

Im folgenden seien X_n und Y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) unabhängige zufällige Größen. Alle X_n (bzw. alle Y_n) haben die gleiche Verteilungsfunktion und es sei

$$E(e^{itX_n}) = f(t) \quad \text{und} \quad E(e^{itY_n}) = g(t).$$

Z_0 sei eine gegebene zufällige Größe und $p(z)$ (mit $0 \leq p(z) \leq 1$) sei eine bekannte Funktion. Wir definieren den Prozeß $\{Z_n\}$:

Wenn $Z_n = z$ ist, so sei

mit Wahrscheinlichkeit $p(z)$: $Z_{n+1} = z + X_{n+1}$,

mit Wahrscheinlichkeit $1 - p(z)$: $Z_{n+1} = z + Y_{n+1}$.

Es wird also nach jedem Schritt mit der Wahrscheinlichkeit $p(z)$ ausgelost, ob zu $Z_n = z$ ein X oder ein Y hinzugefügt werden soll. Der Prozeß beginnt mit Z_0 .

Gilt insbesondere

$$p(z) = 1 \quad \text{für} \quad z \geq 0 \quad \text{und} \quad p(z) = 0 \quad \text{für} \quad z < 0, \quad \text{so ist}$$

$$Z_{n+1} = Z_n + \begin{cases} X_{n+1} & \text{für } Z_n \geq 0 \\ Y_{n+1} & \text{für } Z_n < 0. \end{cases}$$

A_n sei das Ereignis, daß beim Schritt Nr. n die zufällige Größe X gewählt wird. Wir bezeichnen den Indikator eines Ereignisses mit eckigen Klammern; es ist also $[A_n] = 1$, falls A_n eintritt und $[A_n] = 0$, falls A_n nicht eintritt (falls $\bar{A}_n$ eintritt). Dann ist

$$K_n = \sum_{k=0}^{n-1} [A_k]$$

die Anzahl der Indizes $k < n$, bei denen $Z_{k+1} = Z_k + X_{k+1}$ gesetzt wurde. K_n zählt also diejenigen unter den $n - 1$ ersten Schritten, bei denen die zufällige Größe X benutzt wurde. Dabei beginnt die Numerierung der Schritte mit Null. Auf Grund der Definition von Z_n ist

$$E([A_n] | Z_n = z) = p(z).$$

Wir zerlegen nun

$$(1.1) \quad \varphi_{n+1}(t, \varrho) = E(e^{itZ_{n+1}} \varrho^{K_{n+1}})$$

(für den eingeführten Parameter ϱ gelte $|\varrho| \leq 1$):

$$\varphi_{n+1}(t, \varrho) = E(e^{itZ_{n+1}} \varrho^{K_{n+1}} [A_n]) + E(e^{itZ_{n+1}} \varrho^{K_{n+1}} [\bar{A}_n]).$$

Gilt A_n , so ist

$$Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1} \quad \text{und} \quad K_{n+1} = K_n + 1,$$

gilt $\bar{A}_n$, so ist

$$Z_{n+1} = Z_n + Y_{n+1} \quad \text{und} \quad K_{n+1} = K_n.$$

Also wird

$$\varphi_{n+1}(t, \varrho) = \varrho f(t) E(e^{itZ_n} \varrho^{K_n} [A_n]) + g(t) E(e^{itZ_n} \varrho^{K_n} [\bar{A}_n]).$$

Die Erwartungswerte auf der rechten Seite formen wir wie folgt um:

$$\begin{aligned} E(e^{itZ_n} \varrho^{K_n} [A_n]) &= E(E(e^{itZ_n} \varrho^{K_n} [A_n] | Z_n, K_n)) \\ &= E(e^{itZ_n} \varrho^{K_n} E([A_n] | Z_n, K_n)) = E(e^{itZ_n} \varrho^{K_n} p(Z_n)). \end{aligned}$$

Hierbei ist berücksichtigt worden, daß mit Wahrscheinlichkeit 1 die Gleichung

$$E([A_n] | Z_n, K_n) = E([A_n] | Z_n) = p(Z_n)$$

gilt. Entsprechend zeigt man:

$$E(e^{itZ_n} \varrho^{K_n} [\bar{A}_n]) = E(e^{itZ_n} \varrho^{K_n} (1 - p(Z_n))).$$

Wir führen die linearen Operatoren P und Q ein. Es sei

$$\begin{aligned} P(\int e^{itz} \mu(dz)) &= \int e^{itz} p(z) \mu(dz) \\ Q(\int e^{itz} \mu(dz)) &= \int e^{itz} (1 - p(z)) \mu(dz). \end{aligned}$$

Definitionsbereich der Operatoren P und Q ist die Menge der Funktionen

$$h(t) = \int e^{itz} \mu(dz);$$

hier sei μ ein endliches, komplexwertiges Maß auf der reellen Zahlengeraden.

Mit Hilfe der Operatoren P und Q wird

$$E(e^{itZ_n} \varrho^{K_n} p(Z_n)) = P(\varphi_n) \quad \text{und} \quad E(e^{itZ_n} \varrho^{K_n} (1 - p(Z_n))) = Q(\varphi_n).$$

Damit nimmt die Gleichung hinter (1.1) die Form

$$\varphi_{n+1} = \varrho f P(\varphi_n) + g Q(\varphi_n)$$

an. Multipliziert man diese Gleichung mit s^{n+1} und summiert über alle Potenzen von s , so erhält man, mit der Abkürzung

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n s^n,$$

$$(1.2) \quad \Phi = \varphi_0 + \varrho s f P(\Phi) + s g Q(\Phi), \quad \varphi_0 = E(e^{iZ_0}).$$

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt mit der Formel (1.2) weiter beschäftigen, sei hier die Beziehung von (1.2) zur Arbeit [4] von KEMPERMAN hergestellt. Setzt man $\varrho = 0$, so wird

$$\varrho^{K_n} = \begin{cases} 1, & \text{falls } K_n = 0 \text{ ist} \\ 0, & \text{falls } K_n > 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Sei L diejenige zufällige Größe, welche angibt, bei welchem Schritt zum erstenmal ein X benutzt wird; dann ist

$$\varrho^{K_n} = [L \geq n] \quad \text{für } \varrho = 0.$$

Die Gleichung (1.1) geht für $\varrho = 0$ in

$$(1.3) \quad \Phi_1 = \varphi_0 + s g Q(\Phi_1)$$

über. Hierbei ist auf Grund von (1.1)

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{iZ_n} [L \geq n]), \quad P(\Phi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{iZ_n} [L = n])$$

und $Q(\Phi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{iZ_n} [L > n])$. Die Folge $\{Z_n\}$ ist jetzt durch $Z_{n+1} = Z_n + Y_{n+1}$ definiert. Bei jedem Schritt besteht die Möglichkeit, daß ein Ereignis, genannt Absorption, eintritt. Diese Absorption findet beim n -ten Schritt mit der Wahrscheinlichkeit $p(z)$ statt, falls $Z_n = z$ ist. L gibt an, bei welchem Schritt $\{Z_n\}$ absorbiert wird. Ist im besonderen $p(z) = 0$ für $z \in M$ und $p(z) = 1$ für $z \notin M$, so gibt L an, wann $\{Z_n\}$ die Menge M zum erstenmal verläßt.

Die Gleichung (1.3) und ihre Deutung sind von KEMPERMAN in [4] angegeben worden. Bei KEMPERMAN ist der Prozeß (Z_n) durch eine stationäre Markoff-Kette ersetzt. In vielen Anwendungen kommt er auf den hier betrachteten Fall der Summen unabhängiger zufälliger Größen zurück.

2.

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Gleichung

$$(2.1) \quad \Phi = \varphi_0 + s f P(\Phi) + s g Q(\Phi)$$

beschäftigen, ohne auf ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung Bezug zu nehmen.

f , g und φ_n seien Elemente eines kommutativen Ringes $\Re$ mit Einselement; für das Einselement von $\Re$ schreiben wir $\underline{1}$. Wir betrachten den Ring $\Re[s]$ der

Potenzreihen in s ; es ist z. B.

$$\underline{1} - sf \in \mathfrak{R}[s] \quad \text{und} \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \varphi_n \in \mathfrak{R}[s].$$

P und Q seien lineare Operatoren, welche $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ abbilden (und damit auch $\mathfrak{R}[s]$ in $\mathfrak{R}[s]$). I sei der Einheitsoperator und es sei $P + Q = I$. Die Beziehung (2.1) oder

$$(2.2) \quad (\underline{1} - sf)P(\Phi) + (\underline{1} - sg)Q(\Phi) = \varphi_0$$

ist eine Gleichung in $\mathfrak{R}[s]$. Ihre formale Lösung folgt aus

$$\Phi = (I - sfP - sgQ)^{-1} \varphi_0 \quad \text{zu}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n (fP + gQ)^n \varphi_0 = \varphi_0 + s(fP(\varphi_0) + gQ(\varphi_0)) + \\ &+ s^2(fP(fP(\varphi_0)) + fP(gQ(\varphi_0)) + gQ(fP(\varphi_0)) + gQ(gQ(\varphi_0))) + \dots \end{aligned}$$

Die Lösung von (2.2) ist dadurch eindeutig als Element von $\mathfrak{R}[s]$ gegeben. Wir suchen nun eine andere Darstellung der Lösung Φ .

Wir zeigen zunächst: Wenn P der Bedingung

$$(2.3) \quad 2P(hP(h)) = P(h^2) + [P(h)]^2 \quad \text{für alle } h \in \mathfrak{R}$$

genügt, so sind die Ausdrücke $\exp(-P(\log(\underline{1} - sh)))$ und $\exp(P(\log(\underline{1} - sh)))$ definiert und Elemente von $\mathfrak{R}[s]$.

Bei der formalen Ausrechnung erhält man zunächst Reihen, in denen ganzzahlige Nenner auftreten; so ist z. B.

$$\exp(-P(\log(\underline{1} - sh))) = \underline{1} + sP(h) + s^2(P(h^2) + (P(h))^2)/2 + \dots$$

Wegen (2.3) kürzen sich alle diese Nenner heraus und man erhält (mit passendem $h_1 \in \mathfrak{R}[s]$)

$$(2.4) \quad \exp(-P(\log(\underline{1} - sh))) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n (PH)^n \underline{1} = 1 + sh_1.$$

Hierbei bedeutet H den Operator „multipliziere mit h “. (2.4) ist die Spitzersche Formel; sie wurde 1960 von BAXTER in [2] unter der Voraussetzung (2.3) hergeleitet. Es treten daher sowohl in der Potenzreihe (2.4) als auch in

$$\exp(P(\log(\underline{1} - sh))) = (\underline{1} + sh_1)^{-1}$$

keine Nenner auf; die Ausdrücke liegen daher in $\mathfrak{R}[s]$.

Im folgenden benötigen wir die Ausdrücke

$$A = e^{P[\log(\underline{1}-sg)-\log(\underline{1}-sf)]} P(\varphi_0 e^{-P(\log(\underline{1}-sg))-Q(\log(\underline{1}-sf))})$$

und

$$B = e^{Q[\log(\underline{1}-sf)-\log(\underline{1}-sg)]} Q(\varphi_0 e^{-P(\log(\underline{1}-sg))-Q(\log(\underline{1}-sf))}).$$

Auf Grund der vorhergehenden Betrachtung sieht man leicht, daß A und B Elemente von $\mathfrak{R}[s]$ sind. Da

$$(1 - sf) = e^{P(\log(\underline{1}-sf)) + Q(\log(\underline{1}-sf))}$$

ist, so wird

$$(\underline{1} - sf)A = e^h P(\varphi_0 e^{-h}) \quad \text{und} \quad (\underline{1} - sg)B = e^h Q(\varphi_0 e^{-h}).$$

Hierbei ist $h = P(\log(\underline{1} - sg)) + Q(\log(\underline{1} - sf))$ gesetzt worden. Addiert man beide Beziehungen, so folgt

$$(2.5) \quad (1 - sf)A + (\underline{1} - sg)B = \varphi_0.$$

Wir wollen nun Bedingungen für die Operatoren P und Q aufsuchen, unter denen $A + B$ die Lösung der Gleichung (2.2) ist.

Es gilt der Satz: Die Beziehung

$$(2.3) \quad 2P(hP(h)) = P(h^2) + (P(h))^2 \quad \text{für alle } h \in \mathfrak{R}$$

ist notwendig und hinreichend dafür, daß $\Phi = A + B$ die Lösung der Gleichung (2.2) ist.

Beweis. KINGMAN zeigte in [5]:

1. Aus (2.3) folgt

$$P(h_1 P(h_2)) + P(h_2 P(h_1)) = P(h_1)P(h_2) + P(h_1 h_2).$$

Zum Beweis setze man $h = h_1 + h_2$ in (2.3) ein. Es folgt, daß diese Beziehung auch dann gilt, wenn h_1 und h_2 Elemente aus $\mathfrak{R}[s]$ sind. Ferner folgen aus (2.3) die entsprechenden Beziehungen für den Operator $Q = I - P$.

2. Es gilt

$$P(h)^n = P((P(h))^n - (-Q(h))^n) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dies ist richtig für $n = 1$; die Gültigkeit für jedes natürliche n folgt dann durch vollständige Induktion. Insbesondere wird damit (für $h = \log(\underline{1} - sf) - \log(\underline{1} - sg)$)

$$(2.6) \quad e^{P(h)} = \underline{1} + P(e^{P(h)} - e^{-Q(h)}).$$

Diese Beziehung wollen wir im folgenden ausnutzen.

Als erstes zeigen wir, daß der Ausdruck $\Phi = A + B$ der Gleichung (2.2) genügt. Mit den Abkürzungen

$$h = \log(\underline{1} - sf) - \log(\underline{1} - sg), \quad h_1 = e^{-P(h)} - e^{Q(h)} \quad \text{und} \\ h_2 = \varphi_0 \exp[-P(\log(\underline{1} - sg)) - Q(\log(\underline{1} - sf))]$$

wird, wenn man (2.6) und die entsprechende Beziehung für $e^{Q(h)}$ benutzt

$$A = e^{-P(h)} P(h_2) = (\underline{1} + P(h_1)) P(h_2) \quad \text{und} \\ B = (\underline{1} - Q(h_1)) Q(h_2).$$

Also ist

$$\Phi = A + B = h_2 - h_1 h_2 + h_1 P(h_2) + h_2 P(h_1).$$

Hierbei haben wir Q durch $I - P$ ersetzt. Wir berechnen nun $P(\Phi)$:

$$P(\Phi) = P(h_2) - P(h_1 h_2) + P(h_1 P(h_2)) + P(h_2 P(h_1)) \\ = P(h_2) + P(h_1) P(h_2) = (1 + P(h_1)) P(h_2) = A.$$

Genau so errechnet man, daß $Q(\Phi) = B$ ist. Aus $P(\Phi) = A$ und $Q(\Phi) = B$ folgt aber wegen Gleichung (2.5), daß Φ der Gleichung (2.2) genügt.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß (2.3) aus $\Phi = A + B$ folgt. Zu diesem Zwecke vergleichen wir die Koeffizienten in der Potenzreihe

$$\Phi = (I - sfP - sgQ)^{-1} \varphi_0$$

mit den Koeffizienten in der Potenzreihe für $A + B$. Da wir jetzt (2.3) nicht voraussetzen dürfen, erhält die formale Potenzreihe für $A + B$ die Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n / n!$.

Die Voraussetzung $\Phi = A + B$ bedeutet dann, daß für alle n die Beziehung $c_n = (n!) (fP + gQ)^n \varphi_0$ gelten soll. Die Koeffizienten von s^0 und s^1 lassen sich ineinander umformen. Vergleicht man die Koeffizienten von s^2 , so erhält man die Beziehung (2.3). Man muß dazu $f = \varphi_0 = h$ und $g = 0$ setzen. Außerdem muß der Operator Q überall durch $I - P$ ersetzt werden. Die Rechnung ist elementar, aber sehr umfangreich, wir verzichten daher darauf, sie hier wiederzugeben.

3.

Wir betrachten neben der Gleichung

$$(3.1) \quad \Phi = \varphi_0 + s f P(\Phi) + g Q(\Phi)$$

die Gleichung

$$(3.2) \quad \Psi = \underline{1} + s P(f\Psi) + s Q(g\Psi).$$

Unter der Voraussetzung (2.3) lautet ihre Lösung

$$\Psi = \exp(-P(\log(\underline{1} - s f)) - Q(\log(\underline{1} - s g))).$$

Dies zeigte WENDEL (unter etwas stärkeren Voraussetzungen) 1960 in [9]. Setzt man hier $g = 0$, so geht (3.2) in die Gleichung

$$(I - s P F) \Psi = \underline{1}$$

mit der formalen Lösung

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} s^n (P F)^n \underline{1}$$

über. Hierbei bedeutet F den Operator „multipliziere mit f “. Man erhält damit die Identität

$$(3.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} s^n (P F)^n \underline{1} = \exp(-P(\log(\underline{1} - s f))).$$

(3.3) heißt die Spitzersche Formel. Sie wurde, ohne Operatoren Schreibweise, 1956 von SPITZER in [6] bewiesen. SPITZER beweist zuerst einen kombinatorischen Satz und wendet diesen dann auf Summen unabhängiger zufälliger Größen an. WENDEL gab 1958 in [8] einen vereinfachten Beweis für (3.3) und erweiterte seinen Beweis in [9] auf die Behandlung von (3.2). BAXTER beschäftigte sich in [1], [2] und [3] mit der Spitzerschen Formel und zeigte, daß die Voraussetzung (2.3) hinreichend ist. 1962 zeigte KINGMAN in [5], daß (2.3) für die angegebene Lösung von (3.2) notwendig und hinreichend ist.

Wir möchten etwas über den Zusammenhang zwischen (3.1) und (3.2) sagen. Es soll die Voraussetzung (2.3) gelten. Die Gleichung

$$\Psi_1 = \underline{1} + s P(f\Psi_1)$$

entsteht aus (3.2), indem man $g = 0$ setzt; wir betrachten die allgemeinere Gleichung

$$\Psi_2 = \Psi_0 + s P(f\Psi_2).$$

Multipliziert man hier mit f und setzt $f\Psi_2 = \Phi_2$, so kommt

$$(3.4) \quad \Phi_2 = f\psi_0 + sfP(\Phi_2).$$

(3.4) ist ein Sonderfall von (3.1).

Für das Folgende sei h ein Element mit $P(h) = h$. Wir betrachten die Gleichungen

$$\Phi_3 = h + sfP(\Phi_3) \quad \text{und} \quad \Psi_3 = h + sP(f\Psi_3).$$

Wendet man den Operator P auf die erste Gleichung an, so kommt $P(\Phi_3) = h + sP(fP(\Phi_3))$. Es ist also $P(\Phi_3) = \Psi_3$. Setzt man die Lösungen für Φ_2 und Φ_3 in der Form $\Phi = A + B$ an, so erhält man (nach kurzer Zwischenrechnung im Falle Φ_2):

$$\Psi_3 = P(\Phi_3) = e^{-P(\log(1-sf))} P(h e^{-Q(\log(1-sf))})$$

und

$$f\Psi_2 = \Phi_2 = f\psi_0 + sf e^{-P(\log(1-sf))} P(f\psi_0 e^{-Q(\log(1-sf))})$$

oder

$$\Psi_2 = \psi_0 + s e^{-P(\log(1-sf))} P(f\psi_0 e^{-Q(\log(1-sf))}).$$

Diese Formeln finden sich schon bei BAXTER in [2].

Wir möchten jetzt den Anschluß an den Abschnitt 1 herstellen und die Bedingung (2.3) erörtern, wenn der Operator P durch

$$P(\int e^{itx} \mu(dx)) = \int e^{itx} p(x) \mu(dx)$$

gegeben ist. Der Ring $\mathfrak{R}$ ist jetzt die Algebra der Fourier-Transformierten der beschränkten, komplexwertigen Maße auf der reellen Zahlengeraden. Das Einselement ist die Zahl 1, ihr entspricht das Maß μ_0 mit $\mu_0(M) = 1$, falls $1 \in M$ und $\mu_0(M) = 0$, falls $1 \notin M$ liegt.

Dann ist $P(1) = P(\int e^{itx} \mu_0(dx)) = p(0)$ und aus

$$(2.3)' \quad P(h_1 P(h_2)) + P(h_2 P(h_1)) = P(h_1) P(h_2) + P(h_1 h_2)$$

wird mit $h_1 = 1$ und $h_2 = h$ die Beziehung

$$P^2(h) + p(0) P(h) = p(0) P(h) + P(h).$$

Also ist $P^2(h) = P(h)$ für alle h ; P (und damit auch Q) ist ein Projektionsoperator. Aus $P^2 = P$ folgt sofort $(p(x))^2 = p(x)$, d.h. es ist $p(x) = 0$ oder 1.

Sei $M = \{x | p(x) = 1\}$. Es gilt der Satz

$$\begin{aligned} &\text{Aus } x_1 \in M \text{ und } x_2 \in M \text{ folgt } x_1 + x_2 \in M \text{ und} \\ &\text{aus } x_1 \notin M \text{ und } x_2 \notin M \text{ folgt } x_1 + x_2 \notin M. \end{aligned}$$

Beweis. Für beliebige h_1 und h_2 gilt wegen (2.3)

$$(3.5) \quad P(h_1) P(h_2) = P(h_1 P(h_2) + h_2 P(h_1) - h_1 h_2).$$

Sei nun $h_1 = e^{itx_1}$ und $h_2 = e^{itx_2}$. Aus $x_1, x_2 \in M$ folgt $P(h_1) = h_1$ und $P(h_2) = h_2$; damit wird aus (3.5)

$$e^{it(x_1+x_2)} = P(e^{it(x_1+x_2)}).$$

Dies zeigt, daß $x_1 + x_2 \in M$ gelten muß.

Gilt dagegen $x_1 \notin M$ und $x_2 \notin M$, so ist $P(h_1) = P(h_2) = 0$. Aus (2.3)' folgt nun

$$P(e^{t(x_1+x_2)}) = P(h_1 h_2) = P(h_1 P(h_2)) + P(h_2 P(h_1)) - P(h_1) P(h_2) = 0.$$

Also ist $x_1 + x_2 \notin M$.

Aus diesem Satz folgt, wie KINGMAN in [5] gezeigt hat, daß für M nur die nachstehenden Fälle möglich sind:

$$\begin{aligned} M &=]-\infty, +\infty[, \quad M = \emptyset, \quad M = [0, +\infty[, \quad M =]-\infty, 0[, \\ M &=]-\infty, 0] \quad \text{und} \quad M =]0, +\infty[. \end{aligned}$$

Außerdem besteht noch die Möglichkeit, daß sowohl M als auch das Komplement von M keine inneren Punkte haben.

4.

In diesem Abschnitt soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, wie die Lösungsformal $\Phi = A + B$ für die Gleichung (2.1) ausgenutzt werden kann. Die Problemstellung ist wie in Abschnitt 1 gewählt; wir behandeln den Prozeß $\{Z_n\}$ mit $Z_0 = 0$ und

$$Z_{n+1} = Z_n + \begin{cases} X_{n+1} & \text{für } Z_n \geq 0 \\ Y_{n+1} & \text{für } Z_n < 0. \end{cases}$$

Die zufälligen Größen X_n und Y_n sollen nur ganze Zahlen als Werte annehmen. Wir setzen

$$f(\omega) = E(\omega^X) \quad \text{und} \quad g(\omega) = E(\omega^Y).$$

f und g existieren für $|\omega| = 1$. Die Operatoren P und Q sind nun durch

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \omega^k\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \omega^k \quad \text{und} \\ Q\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \omega^k\right) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k \omega^k \end{aligned}$$

definiert. Sei $\varphi_n = E(\omega^{Z_n})$ und $\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n s^n$. Die Ergebnisse von Abschnitt 2 liefern dann:

$$P(\Phi) = P(D) e^{P[\log(1-sg) - \log(1-sf)]}$$

und

$$Q(\Phi) = Q(D) e^{Q[\log(1-sf) - \log(1-sg)]}$$

mit

$$D = e^{-P[\log(1-sg)] - Q[\log(1-sf)]}.$$

Wir wollen diese Formeln für den Fall auswerten, daß

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sum_{k=-1}^{+\infty} p_k \omega^k \quad (\text{mit } p_{-1} > 0) \quad \text{und} \\ g(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+1} q_k \omega^k \quad (\text{mit } q_{+1} > 0) \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

In diesem Falle hat die Gleichung $1 - sf(\omega) = 0$ für $|s| < 1$ genau eine Nullstelle $a(s)$ mit $|a| < 1$; es ist also $1 = sf(a(s))$. (Siehe [4, Lemma 6.1, S. 42]) Mit dieser Bedeutung für a wird

$$(4.1) \quad \begin{aligned} e^{P[\log(1-sf)]} &= (1 - sf)(1 - a\omega^{-1}) \\ e^{Q[\log(1-sf)]} &= (1 - a\omega^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck existiert für $|\omega| \leq 1$ und der zweite Ausdruck für $|\omega| \geq 1$ (siehe [4, Lemma 13.4, S. 75]). Die entsprechenden Aussagen für g lauten: Es gibt (für $|s| < 1$) eine Funktion $b(s)$ mit $|b| < 1$ und $1 = sg(1/b(s))$. b ist die einzige Nullstelle der Gleichung $1 = sg(1/b)$, welche dem Betrage nach kleiner als 1 ist. Es gibt eine Konstante c , so daß

$$(4.2) \quad \begin{aligned} e^{P[\log(1-sg)]} &= c(1 - b\omega) \\ e^{Q[\log(1-sg)]} &= (1 - sg)c^{-1}(1 - b\omega)^{-1} \end{aligned}$$

gilt (siehe [4, Lemma 13.5, S. 75]).

Auf Grund der Formeln (4.1) und (4.2) erhält man

$$\begin{aligned} D &= \frac{c^{-1}}{(1 - b\omega)(1 - a\omega^{-1})} = c^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} b^k \omega^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \omega^{-k} \right) \\ &= c^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k \geq \max(0, n)} b^k a^{k-n} \right) \omega^n. \end{aligned}$$

Die Entwicklung nach geometrischen Reihen ist wegen $|a| < 1$, $|b| < 1$ und $|\omega| = 1$ erlaubt. Es folgt nun

$$\begin{aligned} Q(D) &= c^{-1} \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k b^k \right) a^{-n} \omega^n \\ &= c^{-1} (1 - ab)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} a^n \omega^{-n} = c^{-1} (1 - ab)^{-1} a \omega^{-1} (1 - a\omega^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Ferner wird $P(D) = D - Q(D) = c^{-1} (1 - ab)^{-1} (1 - b\omega)^{-1}$. Setzt man dies in die Formeln für $P(\Phi)$ und $Q(\Phi)$ ein, so erhält man

$$(4.3) \quad P(\Phi) = \frac{1 - a\omega^{-1}}{(1 - ab)(1 - sf)} \quad (|\omega| \leq 1)$$

$$(4.4) \quad Q(\Phi) = \frac{a\omega^{-1}(1 - b\omega)}{(1 - ab)(1 - sg)} \quad (|\omega| \geq 1).$$

Im folgenden möchten wir den Grenzübergang $s \rightarrow 1 - 0$ durchführen. Dazu muß das Verhalten der Funktionen $a(s)$ und $b(s)$ näher untersucht werden. Setzt man $f(\omega) = \omega^{-1}F(\omega)$, so folgt aus $1 = sf(a(s))$ die Beziehung $s = a/F(a)$. Für die Umkehrung $a(s)$ dieser Funktion gilt die Bürmann-Lagrangesche Reihe

$$a(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k$$

mit

$$c_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (F(z))^k \right]_{z=0}.$$

Hier ist $c_1 = p_{-1} > 0$. Da mit $f(\omega)$ auch $F(\omega)$ die erzeugende Funktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, so liegen die Koeffizienten von $[F(z)]^k$ im Inter-

vall $[0, 1]$; daraus folgt $0 \leq c_k \leq 1/k$. $a(s)$ ist im Intervall $[0, 1]$ monoton steigend und es ist $|a(s)| < 1$. Also existiert $\lim_{s \rightarrow 1-0} a(s) = \alpha$; es gilt $0 < \alpha \leq 1$ und es ist

$f(\alpha) = 1$. Wir beweisen nun

Satz. Ist $E(X) < 0$, so ist $\alpha = 1$ und

$$(4.5) \quad \lim_{s \rightarrow 1-0} \frac{1 - a(s)}{(1 - s)} = \alpha' = -1/E(X).$$

Ist $E(X) > 0$, so ist α die eindeutig bestimmte reelle Wurzel der Gleichung $1 = f(\alpha)$ mit $0 < \alpha < 1$. Ist $E(X) = 0$, so ist $\alpha = 1$ und $\alpha' = \infty$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $f(a)$ für $0 < a \leq 1$. Es ist $f(1) = 1$. Für $a \rightarrow 0$ gilt $f(a) \rightarrow \infty$ und für $a \rightarrow 1$ gilt $f'(a) \rightarrow E(X)$. Ferner ist

$$f''(a) = 2p_{-1} + \dots > 0 \quad (\text{für } 0 < a < 1).$$

Ist nun $E(X) = f'(1) < 0$, so gilt für $0 < a < 1$ die Ungleichung $f(a) > 1$; wegen $f(\alpha) = 1$ muß dann $\alpha = 1$ sein.

Ist $E(X) = \lim_{a \rightarrow 1} f'(a) > 0$ (der Wert ∞ wird zugelassen), so gibt es im Intervall $]0, 1[$ genau eine Stelle $\hat{\alpha}$ mit $f(\hat{\alpha}) = 1$. Wäre hier $\hat{\alpha} \leq \alpha = 1$, so gäbe es (wegen der Monotonie von $a(s)$) ein $\hat{s}$ mit $\hat{\alpha} = a(\hat{s})$ und man hätte $1 = f(\hat{\alpha}) = f(a(\hat{s})) = 1/\hat{s} > 1$. Also ist $\hat{\alpha} = \alpha$. Um (4.5) zu beweisen differenzieren wir die Gleichung $1 = sf(a(s))$. Es folgt

$$(4.6) \quad a'(s) = -f(a(s))/sf'(a(s)).$$

Für $s \rightarrow 1 - 0$ (und damit $a \rightarrow 1$) erhält man

$$a'(1) = \alpha' = -\lim_{a \rightarrow 1-0} (1/f'(a)) = -1/E(X).$$

Sei jetzt $E(X) = 0$. Die Beziehung $\alpha = 1$ erschließt man genau so, wie beim vorhergehenden Beweis. Wegen $f''(a) \geq 0$ ist $f'(a)$ monoton steigend. Daher ist $f'(a) < 0$ für $0 \leq a \leq 1$ und der Quotient in Formel (4.6) ist positiv. Also ist $\alpha' = +\infty$.

Wir wollen noch zeigen: Ist $\alpha = 1$, so gilt $\alpha' \geq 1/p_{-1} \geq 1$.

Beweis. Aus (4.6) folgt

$$\frac{-1}{a'(s)} = \frac{s}{f(a(s))} (-p_{-1}a^{-2} + p_1 + \dots) \geq \frac{-sp_{-1}a^{-2}}{f(a(s))}.$$

Für $s \rightarrow 1 - 0$ erhält man daraus $\alpha' \geq 1/p_{-1}$.

Die entsprechenden Aussagen für die Funktion $b(s)$ lauten: Für $s \rightarrow 1 - 0$ gilt $b(s) \rightarrow \beta \leq 1$.

Wenn $E(Y) \leq 0$ ist, so ist $0 < \beta < 1$ und $1 = g(1/\beta)$; β ist dann die einzige reelle Lösung dieser Gleichung mit $0 < \beta < 1$.

Wenn $E(Y) > 0$ ist, so gilt $\beta = 1$ und

$$1/E(Y) = \beta' = \lim_{s \rightarrow 1-0} \frac{1 - b(s)}{1 - s} \geq 1/q_{+1}.$$

Ist $E(Y) = 0$, so gilt $\beta = 1$ und $\beta' = +\infty$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir das Verhalten von Z_n für $n \rightarrow \infty$ untersuchen. Wir müssen Fallunterscheidungen machen, je nachdem, ob α bzw. $\beta \leq 1$ oder $= 1$ gilt.

Sei zunächst $\alpha\beta < 1$ und sei ein ω mit $0 < \omega < 1$ fest vorgegeben. Aus (4.3) folgt nach dem Abelschen Grenzwertsatz

$$\lim_{s \rightarrow 1-0} P(\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} E(\omega^{Z_n} [Z_n \geq 0]) = \frac{1 - \alpha\omega^{-1}}{(1 - \alpha\beta)(1 - f(\omega))} < \infty.$$

(ω kann bestimmt so gewählt werden, daß $1 - f(\omega) \neq 0$ ist). Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\omega^{Z_n} [Z_n \geq 0]) = 0.$$

Da für jedes $\gamma > 0$ und $0 < \omega < 1$ die Beziehung

$$W(0 \leq Z \leq \gamma) \leq \omega^{-\gamma} E(\omega^Z [Z \geq 0])$$

gilt, so ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} W(0 \leq Z_n \leq \gamma) = 0$.

Auf die gleiche Weise zeigt man die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(0 \geq Z_n \geq -\gamma) = 0.$$

Im Falle $\alpha\beta < 1$ divergiert die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse nach $+\infty$ bzw. nach $-\infty$. Wir wollen für die weitere Diskussion $\alpha\beta = 1$ annehmen. Aus $\alpha = 1$ folgt

$$\lim_{s \rightarrow 1-0} \frac{1 - a(s)\omega^{-1}}{1 - sf(\omega)} = \frac{1 - \omega^{-1}}{1 - f(\omega)}.$$

Es gilt nun:

Satz. Ist $\alpha = 1$ und $E(X) \neq 0$, so läßt sich die Funktion $(1 - \omega^{-1})/(1 - f(\omega))$ in eine Potenzreihe nach ω entwickeln, welche für $|\omega| \leq 1$ konvergiert. Alle Glieder dieser Reihe sind nichtnegative reelle Zahlen.

Beweis. Sei $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ (X_k unabhängig und alle mit $E(\omega^{X_k}) = f(\omega)$). Dann ist

$$\begin{aligned} & \frac{1 - a(s)\omega^{-1}}{1 - sf(\omega)} = e^{-P[\log(1 - sf)]} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n E(\omega^{S_n} [S_i \geq 0, i \leq n]) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \sum_{n=0}^{\infty} s^n W(S_n = k, S_i \geq 0, i < n). \end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen ist die Gleichung (4.1), das zweite Gleichheitszeichen ist die Gleichung (3.3).

Wir schätzen nun die innere Summe weiter ab. Wegen $\alpha = 1$ und $E(X) \neq 0$ muß $E(X) < 0$ sein. Es gibt dann ein $t > 0$, so daß $E(e^{tX}) = \delta < 1$ ist (siehe [7, T 179, Zusatz 1.2]). Mit der Abschätzung

$$W(S_n = k) \leq e^{-tk} E(e^{tS_n}) = e^{-tk} \delta^n$$

erhält man dann: (für $s > 0$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s^n W(S_n = k, S_i \geq 0, i < n) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} s^n W(S_n = k) \leq \\ &\leq e^{-tk} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \delta^n = e^{-tk} (1 - s\delta)^{-1}. \end{aligned}$$

Also wird (für $s > 0$)

$$\left| \frac{1 - a(s) \omega^{-1}}{1 - s f(\omega)} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\omega|^k \frac{e^{-tk}}{(1 - s \delta)} \\ = (1 - s \delta)^{-1} (1 - |\omega| e^{-t})^{-1}.$$

Der Satz ist damit bewiesen. Wir zeigen noch an einem Beispiel, daß die Voraussetzung $E(X) \neq 0$ wirklich notwendig ist. Sei $f(\omega) = (\omega + \omega^{-1})/2$. Dann ist $E(X) = 0$ und

$$\frac{1 - \omega^{-1}}{1 - f(\omega)} = \frac{2(\omega - 1)}{2\omega - \omega^2 - 1} = \frac{2}{1 - \omega}.$$

Die Funktion ist für $\omega = 1$ nicht mehr definiert.

Im folgenden sei $\alpha = \beta = 1$, $E(X) \neq 0$ und $E(Y) \neq 0$ (dann ist $1 \leq \alpha' < \infty$ und $1 \leq \beta' < \infty$). Wir bilden den Abel-Limes von $P(\Phi)$.

$$\lim_{s \rightarrow 1-0} (1 - s) P(\Phi) = \frac{1}{\alpha' + \beta'} \frac{1 - \omega^{-1}}{(1 - f(\omega))} = \varphi^+(\omega).$$

$\varphi^+(\omega)$ existiert für $|\omega| \leq 1$, die Koeffizienten in der Reihenentwicklung von φ^+ sind nicht negativ und es ist

$$\varphi^+(1) = \frac{-1}{(\alpha' + \beta')f'(1)} = \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'}.$$

Entsprechend erhält man aus der Formel für $Q(\Phi)$ den Ausdruck

$$\varphi^-(\omega) = \frac{1}{\alpha' + \beta'} \frac{\omega^{-1}(1 - \omega)}{(1 - g(\omega))}.$$

$\varphi^-(\omega)$ existiert für $|\omega| \geq 1$ und es ist $\varphi^-(1) = \frac{\beta'}{\alpha' + \beta'}$. Die Koeffizienten der Laurent-Reihe für $\varphi^-(\omega)$ sind nicht negativ.

Sei nun $|\omega| = 1$ und $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$. Es gilt $\varphi(1) = 1$; φ definiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Ferner ist $P(\varphi) = \varphi^+$, $Q(\varphi) = \varphi^-$ und (wie man leicht nachrechnet)

$$\varphi = f P(\varphi) + g Q(\varphi).$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß damit die stationäre Verteilung für den Prozeß $\{Z_n\}$ gefunden ist.

Es kann nur eine stationäre Verteilung geben, denn die Markoff-Kette $\{Z_n\}$ ist irreduzibel (jeder Zustand kann von jedem Zustand in endlich vielen Schritten mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht werden). Um dies einzusehen, beachte man:

Wenn $p_{-1} + p_0 < 1$ und $q_{+1} + q_0 < 1$ ist, so ist $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ die Menge aller Zustände.

Wenn $p_{-1} + p_0 = 1$ und $q_{+1} + q_0 < 1$ ist, so ist $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ die Menge aller Zustände.

Wenn $p_{-1} + p_0 < 1$ und $q_{+1} + q_0 = 1$ ist, so ist $\{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge aller Zustände.

Wenn $p_{-1} + p_0 = 1$ und $q_{+1} + q_0 = 1$ ist, so ist $\{-1, 0, +1\}$ die Menge aller Zustände.

Zum Schluß sei noch ein Beispiel angegeben. Sei $0 < p < 1$ und $0 < q < 1$ und sei

$$f(\omega) = \frac{(1-p)\omega^{-1}}{1-p\omega} \quad \text{und} \quad g(\omega) = \frac{(1-q)\omega}{1-q\omega^{-1}}.$$

Man findet:

$$a(s) = (1 - [1 - 4p(1-p)s]^{1/2})/2p$$

und

$$b(s) = (1 - [1 - 4q(1-q)s]^{1/2})/2q.$$

Ist $p > 1/2$, so wird $\alpha = a(1) = (1-p)/p < 1$,

ist $q > 1/2$, so wird $\beta = b(1) = (1-q)/q < 1$,

ist $p \leq 1/2$, so wird $\alpha = 1$ und $\alpha' = (1-p)/(1-2p)$,

ist $q \leq 1/2$, so wird $\beta = 1$ und $\beta' = (1-q)/(1-2q)$.

Um die stationäre Verteilung zu erhalten, setze man $p < 1/2$ und $q < 1/2$ und benutze die Formeln

$$\frac{1-\omega^{-1}}{1-f(\omega)} = (1-p)^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{k+1} \omega^k$$

und

$$\frac{\omega^{-1}(1-\omega)}{1-g(\omega)} = (1-q)^{-1} \omega^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{q}{1-q} \right)^k \omega^k.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$d = \frac{(1-2p)(1-2q)}{(1-p)(1-2q) + (1-q)(1-2p)}$$

und bezeichnen eine zufällige Größe, welche die stationäre Verteilung hat, mit Z .

Dann wird:

$$W(Z=k) = d \left(\frac{p}{1-p} \right)^{k+1} \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

$$W(Z=0) = d(1-p)^{-1}, \quad W(Z=-1) = d(1-q)^{-1}$$

und

$$W(Z=-k) = d \left(\frac{q}{1-q} \right)^k \quad (k=2, 3, 4, \dots).$$

Literatur

- [1] BAXTER, G.: An operator identity. Pacific J. Math. 8, 649—663 (1958).
- [2] — An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity. Pacific J. Math. 10, 731—742 (1960).
- [3] — A two-dimensional operator identity with applications to the change of signs in sums of random variables. Trans. Amer. math. Soc. 96, 210—221 (1960).
- [4] KEMPERMAN, J. H. B.: The Passage Problem for a Stationary Markov-Chain. Statistical Research Monographs, Vol. 1, Chicago 1961.
- [5] KINGMAN, J. F. C.: Spitzer's identity and its use in probability theory. J. London math. Soc. 37, 309—316 (1962).
- [6] SPITZER, F.: A combinatorial lemma and its applications to probability theory. Trans. Amer. math. Soc. 82, 323—339 (1956).
- [7] VOGEL, W.: Bemerkungen zu einem sequentiellen Versuchsplan. Z. angew. Math. Mech. 41, T 179—T 181 (1961).
- [8] WENDEL, J. G.: Spitzer's formula: a short proof. Proc. Amer. math. Soc. 9, 905—908 (1958).
- [9] — Order statistics of partial sums. Ann. math. Statistics 31, 1034—1044 (1960).

Mathematisches Institut der Universität
74 Tübingen

(Eingegangen am 21. Januar 1963)