Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2, 310—313 (1964)

Eine Bemerkung zum Konvergenzsatz für Verteilungstypen

Von

G. LETTA*

Von allgemeiner Bedeutung für asymptotische Probleme der Wahrscheinlichkeitstheorie ist der folgende

Konvergenzsatz für Verteilungstypen. *Es sei* (f_n) *eine Folge von zufälligen Größen, und es seien* (a_n), (b_n) *zwei Folgen von reellen Zahlen mit* $b_n \neq 0$ *für jedes* n. *Ist* (f_n) *gegen die nichttriviale zufällige Größe* f *und* $a_n + b_n f_n$ *gegen die nichttriviale zufällige Größe* g *verteilungskonvergent, so gibt es zwei reelle Zahlen* a, b *mit* $b \neq 0$, *so daß* g *dieselbe Verteilung wie* $a + bf$ *hat.*

Dieser Satz, der erstmalig von A. KHINTCHINE für $b_n > 0$ bewiesen wurde, wurde von M. LOÈVE** auf den allgemeinen Fall erweitert. M. LOÈVE fügt in seinem Buch (wo er den Beweis des Satzes weitgehend auf die Verwendung der charakteristischen Funktionen stützt) hinzu, daß die Zahlen a, b mit den Folgen (a_n), (b_n) durch die Limesbeziehungen $|b_n| \to |b|$ sowie $a_n \to a$, $b_n \to b$ im Falle $b_n > 0$ verbunden sind.

Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Nachweis dieser Eigenschaften mit elementaren Methoden (unter Benutzung der Verteilungsfunktionen statt der charakteristischen Funktionen) und der Beweis von zwei Sätzen ((2.4), 2.8)), aus denen hervorgeht, in welchen Fällen die stärkeren Beziehungen $a_n \to a$, $b_n \to b$ erfüllt sind.

1.

Eine Verteilung ist ein normiertes Maß λ auf dem σ-Körper $\mathfrak{B}$ der Borelschen Teilmengen von R***; λ ist durch die Verteilungsfunktion $F(x) = \lambda(-\infty, x)$ eindeutig bestimmt. Mit $A(\lambda) := \{x \in R : \lambda(\{x\}) \neq 0\}$ sei die Menge der Sprungstellen von F bezeichnet.

Die Folge (λ_n) mit den Verteilungsfunktionen F_n heißt gegen λ mit der Verteilungsfunktion F *verteilungskonvergent,* wenn $\lim\limits_n F_n(x) = F(x)$ für jedes $x \in R - A(\lambda)$ gilt. Es gilt dann

$$(1.1) \quad F(a-0) \leqq \liminf_{x\to a,\, n\to\infty} F_n(x) \leqq \limsup_{x\to a,\, n\to\infty} F_n(x) \leqq F(a) \text{ für } -\infty \leqq a \leqq +\infty,$$

wobei $F(a-0) = F(\pm\infty)$ im Falle $a = \pm\infty$ zu setzen ist.

Mit J bezeichnen wir die identische Abbildung von R in sich und mit $a + bJ$ die lineare Abbildung $x \to a + bx$ $(b \neq 0)$. Der Bequemlichkeit halber werden

---

* Herrn Prof. H. RICHTER möchte ich an dieser Stelle für seine wertvollen Anregungen meinen aufrichtigen Dank sagen.

** M. LOÈVE: Probability Theory. New York: 2. Auflage, 1960.

*** Hier sowie im folgenden bedeutet R die Menge der reellen Zahlen.

wir dabei sowohl eine lineare Transformation T als auch die durch sie induzierte Abbildung $B \to \{T(x) : x \in B\}$ von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}$ mit demselben Symbol bezeichnen. Unter einer *Spiegelung* verstehen wir eine lineare Transformation S mit $S^2 = J$ und $S \neq J$; d. h. eine lineare Transformation vom Typ $S = a - J$ mit $a \in R$.

Die Verteilungen λ, μ nennen wir *äquivalent*, wenn es eine lineare Transformation T gibt, die „λ in μ transformiert" in dem Sinne, daß $\mu = \lambda T$ gilt; d. h. $\mu(B) = \lambda(T(B))$ für $B \in \mathfrak{B}$.

Jede in bezug auf diesen Äquivalenzbegriff in der Menge aller Verteilungen gebildete Äquivalenzklasse heißt ein *Verteilungstyp*. Eine Verteilung λ heißt *trivial*, wenn es ein $a \in R$ gibt, so daß $\lambda(\{a\}) = 1$. Das System aller trivialen Verteilungen bildet einen Verteilungstyp, der als *trivialer Typ* bezeichnet wird.

Verabredung. Wenn im folgenden nichts Gegenteiliges bemerkt ist, werden Verteilungen (oder Verteilungstypen) stets als *nicht trivial* vorausgesetzt.

Damit können wir nun den folgenden Satz beweisen.

(1.2) **Satz.** *Ist λ eine Verteilung und S eine lineare nicht identische Transformation mit $\lambda S = \lambda$, so ist S eine Spiegelung.*

Beweis. Setzen wir $S^2 = T = a + bJ$, so ist $\lambda T = \lambda S = \lambda$ und $b > 0$: also $F(x) = F(T(x))$ für $x \in R$, wobei F die Verteilungsfunktion von λ ist.

Angenommen $b \neq 1$, so folgt mit $c := a/(1-b)$

$$F(x) = \lim_n F(T^n(x)) = \begin{cases} F(\pm\infty) & \text{für} \quad x \gtrless c, \quad \text{falls} \quad b > 1 \\ F(c \pm 0) & \text{für} \quad x \gtrless c, \quad \text{falls} \quad b < 1, \end{cases}$$

so daß λ trivial wäre.

Also ist $b = 1$. Dann ist auch $a = 0$: sonst wäre nämlich

$$F(x) = \lim_n F(na + x) = F(\pm\infty) \quad \text{für} \quad x \in R,$$

was wieder die Trivialität von λ zur Folge hätte; q.e.d.

Wenn es eine Spiegelung S gibt mit $\lambda S = \lambda$, dann heißt λ *symmetrisch*. Ist λ symmetrisch, so ist jede mit λ äquivalente Verteilung μ ebenfalls symmetrisch. Aus $\mu = \lambda T$ und $\lambda = \lambda S$ folgt nämlich $\mu = \mu T^{-1} S T$.

Aus (1.2) unmittelbar folgt der

(1.3) **Satz.** *Es seien λ und μ zwei Verteilungen vom gleichen Typ. Dafür daß es zwei verschiedene lineare Transformationen gibt, die λ in μ transformieren, ist notwendig und hinreichend, daß λ und μ symmetrisch sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es genau zwei lineare Transformationen $T = a + bJ$, $T' = a' + b'J$, die λ in μ transformieren: und es gilt $b' = -b$.*

2.

Die Folge $(\mathfrak{T}_n)$ von Verteilungstypen heißt *konvergent*, wenn es eine passende Folge (λ_n) von Verteilungen gibt mit $\lambda_n \in \mathfrak{T}_n$ für jedes n, die gegen eine Verteilung λ konvergiert; dann heißt der Typ von λ *der Limes* von $(\mathfrak{T}_n)$.

Diese Definition wird durch den eingangs ausgesprochenen Konvergenzsatz für Verteilungstypen gerechtfertigt. Mit den oben eingeführten Begriffen und Bezeichnungen kann man diesen Satz folgendermaßen formulieren.

(2.1) **Konvergenzsatz für Verteilungstypen.** *Konvergiert die Verteilungsfolge (λ_n) gegen λ und die Verteilungsfolge (μ_n) gegen μ und sind für jedes n λ_n und μ_n vom gleichen Typ, so sind auch λ und μ vom gleichen Typ.*

Mit anderen Worten: konvergiert (λ_n) gegen λ und (μ_n) gegen μ, und gibt es zwei Folgen (a_n), (b_n) von reellen Zahlen mit

$$(2.2) \qquad b_n \neq 0, \quad \mu_n = \lambda_n(a_n + b_n J) \quad \text{für jedes } n,$$

so gibt es zwei reelle Zahlen a, b mit

$$(2.3) \qquad b \neq 0, \quad \mu = \lambda(a + bJ).$$

Es taucht zusätzlich die Frage auf, in welchen Fällen es möglich ist, unter den Voraussetzungen von (2.1) die Folgen (a_n), (b_n) mit den Eigenschaften (2.2) und die Zahlen a, b mit den Eigenschaften (2.3) derart zu wählen, daß die Limesbeziehungen $a_n \to a$, $b_n \to b$ erfült sind.

Die Antwort ist in den folgenden Sätzen (2.4), (2.8) enthalten, die gleichzeitig den Konvergenzsatz (2.1) einschließen. Aus diesen Sätzen geht insbesondere hervor, daß in jedem Fall die Limesbeziehung $|b_n| \to |b|$ erfüllt ist.

(2.4) **Satz.** *Unter den Voraussetzungen von* (2.1) *seien* (a_n), (b_n) *zwei Zahlenfolgen mit den Eigenschaften* (2.2). *Ist* $b_n > 0$ (*bzw.* $b_n < 0$) *für schließlich alle* n, *so konvergieren beide Folgen* (a_n), (b_n), *und für*

$$(2.5) \qquad a := \lim_n a_n, \quad b := \lim_n b_n$$

gelten die Beziehungen (2.3).

Beweis. 1. Es sei zunächst $b_n > 0$ für schließlich alle n. Es sei b ein (eigentlicher oder uneigentlicher) Häufungswert von (b_n): $b = \lim_{m\in M} b_m$, wobei M eine passende unendliche Teilmenge der Menge N aller natürlichen Zahlen ist. Es sei ferner a ein Häufungswert von $(a_m)_{m\in M}$: $a = \lim_{l\in L} a_l$, wobei L eine unendliche Teilmenge von M ist. Bezeichnen wir mit F_n, G_n, F, G die Verteilungsfunktionen von λ_n, μ_n, λ, μ, so gilt

$$(2.6) \qquad G(x) = \lim_{l\in L} G_l(x) = \lim_{l\in L} F_l(a_l + b_l x) \quad \text{für} \quad x \in R - A(\mu).$$

Ist b endlich, so ist a ebenfalls endlich; denn angenommen, es wäre $0 \leqq b < \infty$ und $a = \pm\infty$, so folgt aus (2.6) unter Beachtung von (1.1) $G(x) = F(\pm\infty)$ für alle $x \in R - A(\mu)$, was nicht möglich ist.

Ist $b = 0$, so folgt aus (2.6) $F(a-0) \leqq G(x) \leqq F(a)$ für alle $x \in R - A(\mu)$, und daher $F(a-0) = 0$, $F(a) = 1$; d. h. die Trivialität von λ, so daß $b > 0$ sein muß. Vertauschen wir die Rollen von λ_n und μ_n, so finden wir ganz analog $b < \infty$. Also ist $0 < b < \infty$. Dann ist a ebenfalls endlich, und aus (2.6) folgt $G(x) = F(a + bx)$ für jedes $x \in R$ mit $x \notin A(\mu)$, $a + bx \notin A(\mu)$, und daher $G(x) = F(a + bx)$ für alle $x \in R$: d. h.

$$(2.7) \qquad \mu = \lambda(a + bJ).$$

Das hat gemäß (1.3) zur Folge, daß b eindeutig, d. h. (b_n) konvergent ist.

Ist dann $\bar{a}$ ein Häufungswert von (a_n), so liefern uns die obigen Überlegungen (wobei wir lediglich N an Stelle von M und $\bar{a}$ an Stelle von a setzen) $\mu = \lambda(\bar{a} + bJ)$, woraus wir durch Vergleich mit (2.6) auf $\bar{a} = a$, d. h. auf die Konvergenz der Folge (a_n) schließen können.

2. Nun nehmen wir an, es sei $b_n < 0$ für schließlich alle n. Aus der für alle n gültigen Beziehung $\mu_n(-J) = \lambda_n(a_n - b_n J)$ folgt dann vermöge des bereits bewiesenen Teils des Satzes die Existenz der Limiten (2.5) samt dem Bestehen der Beziehungen $b \neq 0$, $\mu(-J) = \lambda(a - bJ)$, die mit (2.3) gleichbedeutend sind.

(2.8) **Satz.** *Unter den Voraussetzungen von* (2.1) *seien* (a_n), (b_n) *zwei Folgen mit den Eigenschaften* (2.2). *Sind die beiden Mengen* $P := \{n : b_n > 0\}$ *und* $Q := N - P$ *unendlich, so existieren die Limiten*

$$a := \lim_{p \in P} a_p, \quad a' := \lim_{q \in Q} a_q, \quad b := \lim_n b_n$$

und es gilt

$$b \neq 0, \quad \mu = \lambda(a + bJ) = \lambda(a' - bJ)$$

(insbesondere sind die Verteilungen λ *und* μ *symmetrisch).*

Beweis. Vermöge (2.4) existieren die Limiten $a := \lim_{p \in P} a_p$, $b := \lim_{p \in P} b_p$, $a' := \lim_{q \in Q} a_q$, $b' := \lim_{q \in Q} b_q$ und es gilt $bb' \neq 0$, $\mu = \lambda(a + bJ) = \lambda(a' + b'J)$. Hieraus folgt gemäß (1.3), daß λ und μ symmetrisch sind und daß $b' = -b$ ist.

Bemerkung. Die Sätze (2.4) und (2.8) bleiben gültig, wenn man die Folgen durch *gefilterte Familien* und dementsprechend *unendliche* durch *konfinale* Mengen ersetzt.

Istituto matematico
dell'Università di Pisa
Pisa (Italia)

(Eingegangen am 15. Dezember 1962)